

Murtolausekkeiden yhteenlaskussa ja vähyslaskussa lausekkeet lavennetaan ensin samannimiseksi. Osoittajaksi tulee laskuosituksesta riippuen osoittajien summa tai erotus ja nimittäjäksi yhteinen nimittäjä.

Laske.

a) $\frac{1}{2a} + \frac{a-1}{a}$ b) $\frac{2c+1}{c^2-c} - \frac{2}{c-1}$

Ratkaisu:

Lavennetaan lausekkeet aluksi samannimiseksi.

a) $\frac{1}{2a} + \frac{2(a-1)}{2a} = \frac{1+2(a-1)}{2a} = \frac{2a-1}{2a}$
 b) $\frac{2c+1}{c^2-c} - \frac{2}{c-1} = \frac{2c+1}{c(c-1)} - \frac{2}{c-1} = \frac{2c+1}{c(c-1)} - \frac{2c}{c(c-1)}$
 $= \frac{2c+1-2c}{c(c-1)} = \frac{1}{c^2-c}$

Murtolausekkeiden kertolaskussa osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät keskenään. Sekä osoittajassa että nimittäjässä kannattaa säilyttää tulomuoto supistamista varten ja kertoa vasta supistamisen jälkeen.

Murtolausekkeiden jakolasku muutetaan aluksi kertolaskuksi niin, että jaettava murtolauseke kerrotaan jakajan käänteislausekkeella.

Laske lausekkeiden $\frac{a^2-a}{a+1}$ ja $\frac{a}{a^2-1}$ tulo, b) osamäärä.

Ratkaisu:

a) $\frac{a^2-a}{a+1} \cdot \frac{a}{a^2-1} = \frac{a(a-1)}{a+1} \cdot \frac{a}{(a-1)(a+1)} = \frac{a^2}{(a+1)^2}$
 b) $\frac{a^2-a}{a+1} : \frac{a}{a^2-1} = \frac{a(a-1)}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(a-1)}{a} = (a-1)^2$

Esimerkki 4

TEHTÄVIÄ

Peruslaskutehtävät

63. Millä muuttujan arvoilla lauseke on määritelty?

a) $\frac{x-3}{x}$ b) $\frac{a-3}{a^2-5a}$
 c) $\frac{x+1}{x^2+1}$

Sievennä tehtävien 64–67 lausekkeet.

64. a) $\frac{6a^2}{2a^5}$ b) $\frac{3x+3}{3x}$
 c) $\frac{ab+b^2}{a^2+ab}$ d) $\frac{9a^2-1}{3a-1}$
 65. a) $\frac{8}{3a} + \frac{2}{a}$ b) $\frac{a^2+1}{5a} - \frac{a}{5}$
 c) $a - \frac{1+2a^2}{3a}$ d) $\frac{a-1}{a} - \frac{1}{a^2}$

66. a) $\frac{4x^2}{9} \cdot \frac{3x}{8}$ b) $\frac{x}{4} \cdot \frac{8}{x^2} \cdot \frac{1}{x}$
 c) $\frac{x^2-4}{15x} \cdot \frac{20x^2}{x-2}$

67. a) $\frac{3x^3}{5} : \frac{5x^2}{6}$ b) $\frac{7x}{2} - \frac{x^3}{6} : \frac{x}{3}$
 c) $\frac{7x}{4x-3} : \frac{x^2}{3-4x}$

Vaativat tehtävät

Sievennä tehtävien 68–70 lausekkeet.

68. a) $\frac{9a^2-6a+1}{9a-3}$ b) $\frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{1}{x+1}$
 c) $\frac{3}{x+1} - \frac{2x-1}{x^2+2x+1}$

69. a) $\frac{6}{x^2-4} + \frac{3}{x+2}$ b) $\frac{y}{2y+4} - \frac{2}{y^2+2y}$

c) $\frac{2ab-b^2}{a-b} + a-b$

70. a) $(9a^2-b^2) \cdot \frac{2}{3a+b}$

b) $\frac{8a^2b-2ab^3}{2ab^3} : (b-2a)$

71. Sievennä lauseke $\frac{3x-6}{P(x)-P(2)}$, kun $P(x) = x^2 + 1$.

72. Olkoon $a \neq 0, b \neq 0$. Sievennä $\frac{a+\frac{b^2}{a}}{b+\frac{a^2}{b}}$.

(yo-teht. S02/4a)

73. Osoita, että $x^2 - y^2 = 1$, kun $x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + t\right), y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right), t \neq 0$.
 (yo-teht. S02/4b)

Esimerkki 5

27. a) $3a^3 - a^2 - 8a$ b) $s^3 - s + 6$
 28. a) $-x^3 - 6x^2 - 11x$
 b) $-a^3 + 7a^2b - 14ab^2 + 16b^3$
 29. a) $x = 2$ b) $y = 1$
 30. $x > 4$



31. a) $25 - x^2$ b) $4x - 9$
 c) $x^4 - 49$ d) $4x^2 - 1$
 e) $1 - x^4$ f) $9y^2 - 4x^2$
 32. a) $a^2 + 10a + 25$ b) $b^2 - 2b + 1$
 c) $c^2 + 4c + 4$ d) $d^2 + d + \frac{1}{4}$
 e) $9e^2 + 2e + \frac{1}{9}$ f) $f^4 + 4f^3 + 4f^2$
 33. a) $8a^2 - 18$ b) $y^4 - 2y^3 + y^2$
 c) $4 - x^2$ d) $16t^2 + 4t + \frac{1}{4}$

34. a) $-8x$ b) $3x^4 - 3$
 c) $-20x + 8$
 35. a) $x = 1$ b) $y = 2$
 36. a) 2 b) 6
 c) $9 - 7\sqrt{2}$

37. a) $\sqrt{2} + 1$ b) $\sqrt{2} + 1$
 c) $\frac{6 - \sqrt{3}}{3}$ d) $5 - 2\sqrt{6}$

38. a) p b) $\frac{a^2}{9} + \frac{ab}{3} - \frac{b^2}{16}$

39. a) $V = 6a^3, A = 22a^2$
 b) $V = a^3 - \tilde{a}, A = 6a^2 - 2$

42. $2k - 1$

43. a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 b) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
 c) $27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$
 d) $16a^4 + 160a^3b + 600a^2b^2 + 1000ab^3 + 625b^4$

*44. $a\sqrt{2}$



45. a) $y(1 - xy)$ b) $-2a(1 + a^2)$
 c) $2x^2(x^2 + 4x - 4)$
 46. a) $(3a + 10)(3a - 10)$
 b) $2(a + 3)(a - 3)$
 c) $\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{3}\right)$

47. a) $(x + 4)^2$ b) $(3b - 5)^2$
 c) $-3(3c - 1)^2$
 48. a) $3a(a + 2)$ b) $b(b + 1)^2$
 c) $3c(3c + 2)(3c - 2)$
 d) $d(d^2 + 1)(d + 1)(d - 1)$
 e) $e(e^2 - 5)^2$
 f) ei jakaudu tekijöihin

49. a) $a = 12$ b) $a = 25$
 c) $a = \frac{1}{4}$ d) $a = \frac{d^2}{4}$

50. a) $(x - 7)(x + a)$ b) $a(a + 1)(a - 1)^2$
 51. a) $2^n(1 + 2^m)$ b) $a^n(a + 1)(a - 1)$
 c) $(x + y + z)(x - y - z)$

52. a) $(y + 4)(y + 1)(y - 1)$
 b) $(\pi - 9)(\pi - 8)$
 c) $(2 - a)^2(3 - a)$
 d) $(x + 2)(x - 3)$

53. a) $|x - 1|$ b) $|a + 2|$
 c) $y^2 + 5$

*55. $a^2 + \frac{1}{2}b^2$ on suurempi



57. a) $x = -2\frac{1}{2}$ b) $x = -\frac{4}{5}$
 c) $x = -1\frac{3}{7}$

58. a) $f(x) > 0$, kun $x < 2$
 $f(x) < 0$, kun $x > 2$
 b) $f(x) > 0$, kun $x > -10$
 $f(x) < 0$, kun $x < -10$
 c) $f(x) > 0$, kun $x < 6$
 $f(x) < 0$, kun $x > 6$

59. a) $k = \frac{1}{2}$ b) nouseva suora

- c) x-akselin pisteessä $(-6, 0)$,
 y-akselin pisteessä $(0, 3)$

60. a) $x = -10$ b) $x = -\sqrt{5}$
 c) $x = -1$

61. a) $a > 1$ b) $a < 1$
 c) $a = 1$

62. $x < -18$



63. a) $x \neq 0$ b) $a \neq 0$ ja $a \neq 5$
 c) kaikilla x :n arvoilla

64. a) $\frac{3}{a^3}$ b) $\frac{x+1}{x}$
 c) $\frac{b}{a}$ d) $3a + 1$

65. a) $\frac{14}{3a}$ b) $\frac{1}{5a}$
 c) $\frac{a^2 - 1}{3a}$ d) $\frac{a^2 - a - 1}{a^2}$

66. a) $\frac{x^3}{6}$ b) $\frac{1}{x}$
 c) $\frac{4x^2 + 8x}{3}$

67. a) $\frac{18x}{25}$ b) $3x$
 c) $\frac{7}{x}$

68. a) $\frac{3a-1}{3}$ b) $\frac{1}{x}$
 c) $\frac{x+4}{(x+1)^2}$

69. a) $\frac{3x}{x^2 - 4}$ b) $\frac{y-2}{2y}$
 c) $\frac{a^2}{a-b}$

70. a) $6a - 2b$ b) $-\frac{2a+b}{b^2}$

71. $\frac{3}{x+2}$

72. $\frac{b}{a}$