Polynomien jaollisuus

Esimerkki Olkoon $p(x) = 3x^2 + x - 4$. Osoita, että $(x-1)|p(x)$.

Jaetaan annettu polynomi $p(x)$ tekijöihin. Polynomin $p(x)$ nollakohdat ovat $x_1 = 1$ ja $x_2 = -4/3$, joten

$$p(x) = 3x^2 + x - 4 = 3(x - x_1)(x - x_2) = 3(x-1)\left(x + \frac{4}{3}\right)$$
$$= (x-1)(3x+4)\ .$$

Tämähän tarkoittaa sitä, että binomi $(x-1)$ jakaa polynomin $p(x)$, eli

$$(x-1)|p(x)\ .$$

Sama asia yleisesti: Polynomi $p(x)$ on *jaollinen* polynomilla $s(x)$, jos on olemassa sellainen polynomi $q(x)$, että

$$p(x) = s(x)q(x)\ .$$

Tällöin sanotaan myös, että polynomi $s(x)$ on polynomin $p(x)$ *tekijä*, eli $s(x)$ *jakaa* $p(x)$:n ja tätä merkitään $s(x)|p(x)$. Kuten ed. kurssilla!

Jos polynomi $s(x)$ ei jaa polynomia $p(x)$, niin merkitään $s(x) \nmid p(x)$. Edelleen sanotaan, että polynomi $q(x)$ on polynomien $p(x)$ ja $s(x)$ *osamäärä*. Siis

$$\frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = s(x)q(x).$$

Esimerkki Olkoon $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, $s(x) = x - 2$ ja $q(x) = x^2 + 1$. Kertomalla $s(x)$ ja $q(x)$ havaitaan, että

$$p(x) = s(x)q(x).$$

Siis $s(x)|p(x)$, mutta myös $q(x)|p(x)$!

Tulon $s(x)q(x)$, eli polynomin $p(x)$ aste 3 on tekijöiden $s(x)$ ja $q(x)$ asteiden 1 ja 2 summa. Tämä pätee yleisesti.

Lause, tulon ja osamäärän aste:

Polynomien tulon aste on tekijöiden asteiden summa. Polynomien osamäärän aste on jaettavan ja jakajan asteiden erotus.

Huomautus **1)** Palautetaan mieleen, että polynomin termin ax^k aste on k, jos $a \neq 0$. Nollannen asteen termi on siis vakiotermi, $a \neq 0$.

2) Nollapolynomissa 0 ei ole edes vakiotermiä, joten sen astetta ei määritellä.
3) Jokainen polynomi on jaollinen nollapolynomista eroavalla vakiopolynomilla.

Esimerkki Suorita jakolasku $(x^3-x-6):(x^2+2x+3)$.
Polynomien asteista havaitaan, että osamäärän aste on $3-2=1$. Eli saadaan ensimmäisen asteen polynomi (suora), mikäli jako menee tasan. Merkitään tätä osamäärää $ax+b$. Nyt kaikilla $x\in\mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned}(x^3-x-6)&=(ax+b)(x^2+2x+3)\\&=ax^3+2ax^2+3ax+bx^2+2bx+3b\\&=ax^3+(2a+b)x^2+(3a+2b)x+3b\end{aligned}$$

Vertaamalla termien kertoimia saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a=1\\ 2a+b=0\\ 3a+2b=-1\\ 3b=6\end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $a=1$ ja $b=-2$, siis osamäärä on binomi

$$x-2\,.$$

Kertausta jaettava = jakaja × (vaillinainen) osamäärä + jakojään.

Luvuilla:	37	$=$	5	$\times$	7	$+$	2
Yleisesti:	p	$=$	s	$\times$	q	$+$	r
Polynomeilla:	$p(x)$	$=$	$s(x)$	$\times$	$q(x)$	$+$	$r(x)$

missä $s(x)$:n ja $q(x)$:n asteet ovat pienempiä kuin $p(x)$:n aste ja toisaalta $r(x)$:n aste on pienempi kuin $s(x)$:n aste.

Polynomien jakokulma

Esimerkki **a)** Laske $\frac{13x^4-5x^3+4x}{2x}$, **b)** $\frac{13x^4-5x^3+4x-3}{2x}$, **c)** $\frac{13x^4-5x^3+4x}{2x-1}$

a) Havaitaan, että jakajana on monomi (siis vain 1 termi). Osoittaja voidaan supistaa x:llä, siis

$$\frac{\overbrace{13x^4-5x^3+4x}^{=p(x)}}{\underbrace{2x}_{=s(x)}}=\frac{13x^4}{2x}-\frac{5x^3}{2x}+\frac{4x}{2x}=\overbrace{\frac{13x^3}{2}-\frac{5x^2}{2}+2}^{=q(x)}$$

Huom! Jako menee tasan.

b) Muuten sama, mutta vakiotermi -3 lisäksi:

$$\frac{\overbrace{13x^4-5x^3+4x-3}^{=p(x)}}{\underbrace{2x}_{=s(x)}}=\ \dots\ =\overbrace{\frac{13x^3}{2}-\frac{5x^2}{2}+2}^{=q(x)}\overbrace{-\frac{3}{2x}}^{=r(x)}$$

Huom! Jako ei mene tasan.

c) Nyt jakajana ei ole monomi → jakokulma (ellei osoittaja voida jakaa tekijöihin siten, että eräs tekijä on jakaja): Muista "lokerointi", eli jokaiselle asteelle oma sarake

$$\begin{array}{r|lllll}
 & \frac{13}{2}x^3 & +\frac{3}{4}x^2 & +\frac{3}{8}x & +\frac{35}{16} & \\ \hline
2x-1 & 13x^4 & -5x^3 & & +4x & -3 \\
 & \mp 13x^4 & \pm\frac{13}{2}x^3 & & & \\ \cline{2-3}
 & — & +\frac{3}{2}x^3 & & & \\
 & & \mp\frac{3}{2}x^3 & \pm\frac{3}{4}x^2 & & \\ \cline{3-4}
 & & — & +\frac{3}{4}x^2 & & \\
 & & & \mp\frac{3}{4}x^2 & \pm\frac{3}{8}x & \\ \cline{4-5}
 & & & — & +\frac{35}{8}x & \\
\end{array}$$

Saadaan

$$\underbrace{13x^4-5x^3+4x-3}_{p(x)}=\underbrace{(2x-1)}_{s(x)}\underbrace{\left(\frac{13}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{8}x+\frac{35}{16}\right)}_{q(x)}\underbrace{-\frac{13}{16}}_{r(x)}$$