Numeerinen integrointi

NUMEERISIA JA ALGEBRAL-LISIA MENETELMIÄ, MAA12

Lyhyehkö johdanto integraalilaskentaan.

Integraalilaskennan lähtökohta 1:

Laskutoimitukset + ja − ovat keskenään käänteisiä, samoin · ja ÷ ovat käänteisiä, kunhan ei jaeta nollalla. Edelleen operaatiot x^n ja $\sqrt[n]{x}$ tai a^x ja $\log_a x$ ovat käänteisoperaatioita toisilleen (määrittelyehdot huomioiden).
Differentiaalilaskennan alkuaikoina, noin 1600 – 1700, opittiin määrittämään hetkellisiä muutoksia (muutosnopeuksia), eli osattiin derivoida. → Luontevaa olikin kysyä: ”Jos derivaattafunktio tiedetään, niin mistä funktiosta se on saatu”.

Eli mikä olisi käänteinen laskutoimenpide derivoimiselle?

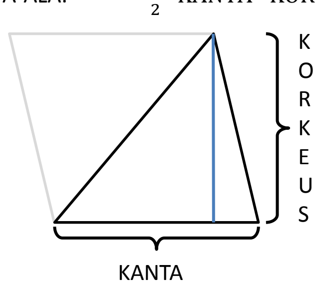
$$f' \quad \text{tunnettu} \quad \rightarrow \quad \text{mikä on} \quad f \quad ?$$

Integraalilaskennan lähtökohta 2:

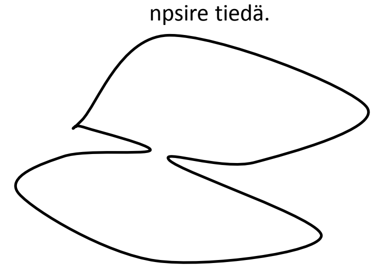
Jo antiikin aikoina osattiin määrittää geometristen muotojen ja kappaleiden pinta-aloja/tilavuuksia, kunhan muodoissa/kappaleissa oli jonkinlaista symmetriaa tai se voitiin palauttaa symmetriseksi. Esimerkiksi mielivaltainen kolmio voitiin täydentää suunnikkaaksi jne. → Mutta annetun mielivaltaisen muodon pinta-ala tai tilavuus tuotti haastetta ja niinpä sellaisten tapauksissa tyydyttiin arvioihin.

Eli mikä on mielivaltaisen muodon pinta-ala ja/tai kappaleen tilavuus?

PINTA-ALA: $\frac{1}{2} \cdot \text{KANTA} \cdot \text{KORKEUS}$



PINTA-ALA: ÖÖÖ…ei edes google / TI-npsire tiedä.



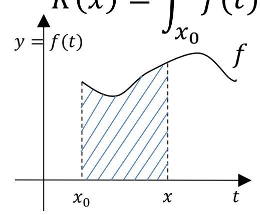
Integraalilaskenta

Määräämätön

- Etsitään funktiota
- Derivoinnille käänteistoimen-pide → ”integroiminen”
- Integraalifunktio $F(x)$, jolle
$$F'(x) = f(x),$$
lisäksi integraalifunktioille
$$G(x) = F(x) + C.$$
- Vakion C lisäys (merkitys), kun
$$G(x) = F(x) + C$$
niin
$$G'(x) = F'(x)$$

Määrätty

- Etsitään reaalilukua
- Pinta-alan/tilavuuden ratkaise-minen tai määrittäminen
- Välin jako ja porrasfunktiot → arviointi ja rajankäynti, jolloin
$$\sum \rightarrow \int \quad , \qquad \Delta x \rightarrow dx$$
- Kertymäfunktion määritelmä
$$K(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$



Kertynyt pinta-ala vastaa funktion K arvoa, tässä viivoi-tettu pinta-ala on funktion K arvo $K(x)$ muuttujan t arvolla x.

Havainto: $K(x)$ on eräs f:n Integraalifunktio, eli…

ANALYYSIN PERUSLAUSE

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt$$

Numeerinen integrointi keskittyy täysin määrätyn integraalin tarkasteluun. Eli halutaan määrittää pinta-ala tai tilavuus (siis jokin reaaliluku) numeerisilla menetelmillä:

- suorakaidesääntö,
- puolisuunnikassääntö ja
- Simpsonin sääntö,

joista Simpsonin sääntö on tarkin/tehokkain.

Numeerinen integrointi on erittäin tehokas tapa saada jokin likiarvo, kun integroitavana on funktio f, jolle ei löydy integraalifunktiota F alkeisfunktioiden joukosta. Esimerkiksi mitä olisi (tarkasti)

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx, \qquad \int_{0,2}^{0,8} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx, \qquad k \neq 0\,.$$

Näitä ei siis tiedetä (alkeisfunktioiden kautta).
Integraalilaskennassa on tulos: *Jatkuvalla funktiolla f on aina olemassa integraalifunktio F, vaikka sitä ei eksplisiittisesti voidakaan esittää.*