

Lukujonon raja-arvo

Jos lukujonon a_n jäsenet lähenevät lukua a , kun n kasvaa rajatta, niin sanotaan, että lukujono *suppenee* ja sen raja-arvo on a .

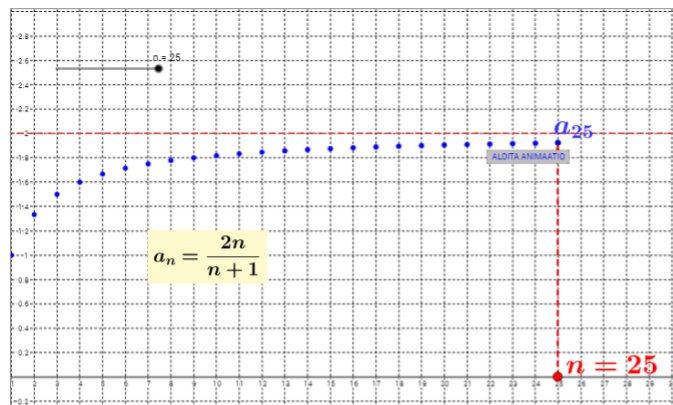
Merkitään $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

tai $a_n \rightarrow a$, kun $n \rightarrow \infty$.

Esim.

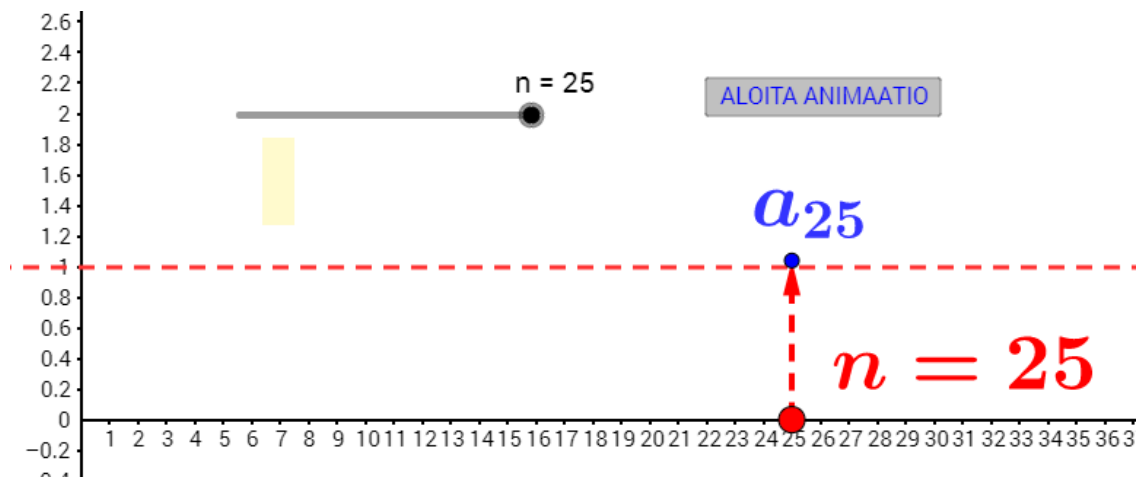
$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

Piirrä geogebraan!
ks. materiaalit
→ lukujono



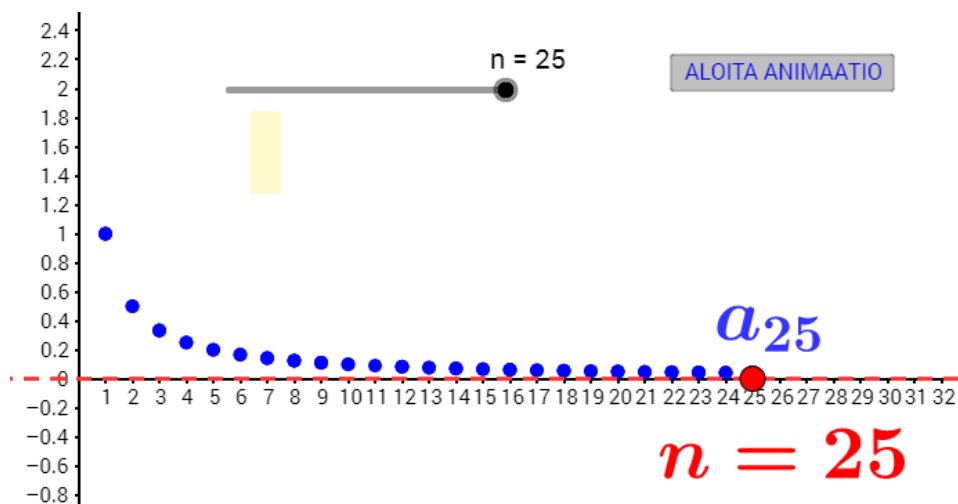
Jonon $a_n = \frac{n+1}{n}$ eli jonon $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots$ raja-arvo on 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$



Jonon $a_n = \frac{1}{n}$ eli jonon $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ raja-arvo on 0.

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$



Rekursiivinen jono

Määritä laskimen avulla jonon viisi ensimmäistä jäsentä.
Tutki myös, suppeneeko jono.

$$a_1 = 3, \quad a_n = -1 + \frac{2}{3}a_{n-1}, \quad \text{kun } n \geq 2.$$

Laskimella:

$$3 =$$

$$-1 + 2 \div 3 * \boxed{\text{Ans}}$$

Toistetaan $-1 + 2/3 * \text{Ans} \blacktriangleright \text{Frac}$

$$\begin{array}{ll} a_1 = 3 & a_6 = -2,2098.. \\ a_2 = 1 & a_7 = -2,47325. \\ a_3 = -0,33... & a_8 = -2,6488... \\ a_4 = -1,22... & a_9 = -2,76588. \\ a_5 = -1,8148148... & a_{10} = -2,8439 \end{array}$$

jne...

$$\begin{array}{l} a_{11} = -2,895... \\ a_{15} = -2,97944... \\ a_{20} = -2,99729... \\ a_{30} = -2,999953... \end{array}$$

Jono a_n määritellään rekursiivisesti:

$$a_1 = 3, \quad a_n = 1 + \frac{5}{a_{n-1}}, \quad \text{kun } n \geq 2.$$

- a) Määritä jonon kymmenes jäsen a_{10} .
 b) Tutki laskimen avulla, suppeneeko jono.

Laskimella:

$$3 \boxed{=}$$

$$1 + 5 \boxed{\div} \boxed{\text{ANS}}$$

$a_1 = 3$	$a_8 = 2,7823\dots$
$a_2 = 2,66\dots$	$a_9 = 2,79703\dots$
$a_3 = 2,875$	$a_{10} = 2,7876\dots$
$a_4 = 2,739\dots$	$a_{15} = 2,791688\dots$
$a_5 = 2,82539\dots$	$a_{20} = 2,7912\dots$
$a_6 = 2,7696\dots$	$a_{30} = 2,79128733$
$a_7 = 2,8052\dots$	$a_{40} = 2,79128784$

Tutki numeerisesti raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$.

Laskimesra:

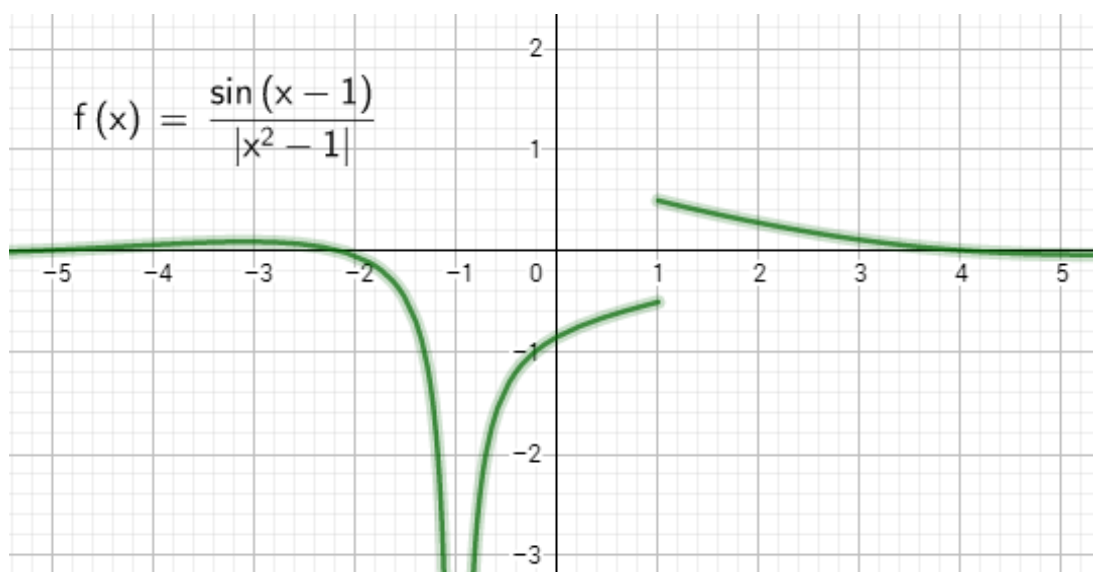
$$(2 - \sqrt{x}) \div (x - 4)$$

ks. kirjan s.84

x	$f(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$	x	$f(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$
4,1	-0,24845...	3,9	
4,01		3,99	
4,001		3,999	
4,0001		3,9999	
4,00001		3,99999	
4,000001		3,999999	
4,0000001		3,9999999	

161, 162,
 164, 166,
 168, 169,
 (173),
 174,
 176, 178

ks. kirja E5/s.86



$$161. a_1 = \frac{1^2 - 5 \cdot 1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$a_2 = \frac{2^2 - 5 \cdot 2}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{-6}{7} = -\frac{6}{7}$$

$$a_3 = \frac{3^2 - 5 \cdot 3}{3 \cdot 3 + 1} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$a_{43} = \frac{43^2 - 5 \cdot 43}{3 \cdot 43 + 1} = \frac{1634}{130} = \frac{817}{65}$$