K1

Lasketaan polynomien jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rl}
 & \phantom{8x^3 - {}}4x^2 - 3x + 2 \\
2x - 2 & \big) \; 8x^3 - 14x^2 + 10x - 4 \\
- & \underline{\;8x^3 - 8x^2\phantom{{} + 10x - 4}} \\
 & - 6x^2 + 10x - 4 \\
- & \underline{ - 6x^2 + 6x\phantom{{} - 4}} \\
 & \phantom{8x^3 - 6x^2 + {}} 4x - 4 \\
- & \underline{\phantom{8x^3 - 6x^2 + {}} 4x - 4} \\
 & \phantom{8x^3 - 6x^2 + 4x - {}} 0
\end{array}
$$

Vastaus $\quad 4x^2 - 3x + 2$

K2

Lasketaan polynomien jakolasku jakokulmassa.

a)

$$
\begin{array}{r|lll}
 & 2x^2 & & \\
\cline{2-4}
x^2+3 & 2x^4 & +6x^2 & -8 \\
- & 2x^4 & +6x^2 & \\
\cline{2-4}
 & & & -8
\end{array}
$$

Ei ole jaollinen, koska jakojäännökseksi saatiin $-8 \neq 0$.

b)

$$
\begin{array}{r|lll}
 & 2x^2 & +8 & \\
\cline{2-4}
x^2-1 & 2x^4 & +6x^2 & -8 \\
- & 2x^4 & -2x^2 & \\
\cline{2-4}
 & & 8x^2 & -8 \\
 & - & 8x^2 & -8 \\
\cline{3-4}
 & & & 0
\end{array}
$$

On jaollinen, koska jakojäännös on 0.

Vastaus a) Ei ole, koska jakojäännös on -8.

b) On, koska jakojäännös on 0.

K3

Jakolasku $\dfrac{3x^3-7x^2-ax-1}{3x-1}$ menee tasan, kun nimittäjä on osoittajan tekijä. Tällöin jakajan $3x-1$ nollakohdan on oltava myös osoittajan nollakohta. Määritetään jakajan nollakohta:

$$
\begin{aligned}
3x-1&=0\\
3x&=1\\
x&=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $x=\dfrac{1}{3}$ osoittajan lausekkeeseen.

$$
\begin{aligned}
3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3-7\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)-1&=0\\
\frac{3}{27}-\frac{7}{9}-\frac{a}{3}-1&=0\\
\frac{1}{9}-\frac{7}{9}-\frac{a}{3}-1&=0\\
1-7-3a-9&=0\\
-3a&=15\\
a&=-5
\end{aligned}
$$

Vastaus $a=-5$

K4

Polynomilla $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$ on nollakohta $x = 2$, joten $x - 2$ on polynomin P tekijä. Jaetaan polynomi P jakokulmassa tekijällä $x - 2$.

$$
\begin{array}{rl}
 & -x^2 - 4x - 3 \\
x - 2 & \overline{\big)\, -x^3 - 2x^2 + 5x + 6} \\
- & \underline{-x^3 + 2x^2} \\
 & \quad -4x^2 + 5x + 6 \\
- & \quad \underline{-4x^2 + 8x} \\
 & \qquad\qquad -3x + 6 \\
- & \qquad\qquad \underline{-3x + 6} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Siis $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6 = (x-2)(-x^2 - 4x - 3)$.

Jaetaan polynomi $-x^2 - 4x - 3$ tekijöihin nollakohtien avulla.

$$-x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{4 \pm 2}{-2}
\end{aligned}
$$

$$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

Siis $-x^2 - 4x - 3 = -1 \cdot (x - (-3))(x - (-1)) = -1 \cdot (x + 3)(x + 1)$.

Esitetään polynomi $P(x)$ tulomuodossa.

$$\begin{aligned}
P(x) &= -x^3 - 2x^2 + 5x + 6 \\
&= (x-2)(-x^2 - 4x - 3) \\
&= -1 \cdot (x-2)(x+3)(x+1) \\
&= -1 \cdot (x+3)(x+1)(x-2)
\end{aligned}$$

Vastaus $\quad P(x) = -1 \cdot (x+3)(x+1)(x-2)$

K5

Koska polynomilla Q on kaksinkertainen nollakohta -3, niin sillä on tekijä $(x-(-3))(x-(-3))=(x+3)^2$.

Koska polynomilla Q on nollakohta 1, niin sillä on tekijä $x-1$.

Kolmannen asteen polynomilla on korkeintaan kolme ensimmäisen asteen tekijää, joten polynomilla Q ei ole edellä olevien lisäksi muita tekijöitä.

$Q(x)=a(x-1)(x+3)^2$

Kerroin a saadaan määritettyä tiedon $Q(-1)=24$ avulla.

$$\begin{aligned}
Q(-1) &= 24 \\
a(-1-1)(-1+3)^2 &= 24 \\
a\cdot(-2)\cdot 2^2 &= 24 \\
-8a &= 24 \\
a &= -3
\end{aligned}$$

Siis $Q(x)=-3(x-1)(x+3)^2$.

Vastaus $\quad Q(x)=-3(x-1)(x+3)^2$

K6

Ratkaistaan yhtälö tulon nollasäännön avulla.

$-9(x-7)(2x+6)(4-8x)=0$

$$\begin{aligned} x-7&=0 \quad \text{tai} \quad & 2x+6&=0 \quad \text{tai} \quad & 4-8x&=0 \\ x&=7 & 2x&=-6 & 8x&=4 \\ & & x&=-3 & x&=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vastaus $x=-3$, $x=\frac{1}{2}$ tai $x=7$

K7

Polynomin $x^3+4x^2-11x-30$ eräs nollakohta on $x=3$, joten tekijänä on $x-3$.

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x-3$.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & +7x & +10 & \\ \cline{2-5}
x-3 \,\big) & x^3 & +4x^2 & -11x & -30 \\
- & x^3 & -3x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & 7x^2 & -11x & -30 \\
- & & 7x^2 & -21x & \\ \cline{3-5}
 & & & 10x & -30 \\
- & & & 10x & -30 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$$
$$(x-3)(x^2 + 7x + 10) = 0$$

$x - 3 = 0$ tai $x^2 + 7x + 10 = 0$

$x = 3$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2}$$

$x = -5$ tai $x = -2$

Vastaus $x = -5$, $x = -2$ tai $x = 3$

K8

Kokeilemalla havaitaan, että polynomin $Q(x)=x^4+2x^3-34x^2+2x-35$ eräs nollakohta on $x=5$, joten tekijänä on $x-5$.

Jaetaan polynomi Q jakokulmassa tekijällä $x-5$.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^3+7x^2+x+7 \\
\cline{2-2}
x-5 & \big)\; x^4+2x^3-34x^2+2x-35 \\
- & x^4-5x^3 \\
\cline{2-2}
 & 7x^3-34x^2+2x-35 \\
- & 7x^3-35x^2 \\
\cline{2-2}
 & x^2+2x-35 \\
- & x^2-5x \\
\cline{2-2}
 & 7x-35 \\
- & 7x-35 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

Jaetaan osamääräksi saatu kolmannen asteen polynomi tekijöihin ryhmittelemällä.

$$\begin{aligned} x^4+2x^3-34x^2+2x-35&=0 \\ (x-5)(x^3+7x^2+x+7)&=0 \\ (x-5)(x^2(x+7)+1\cdot(x+7))&=0 \\ (x-5)(x+7)(x^2+1)&=0 \end{aligned}$$

Siis polynomilla on kaksi ensimmäisen asteen tekijää.

Vastaus On osoitettu, että polynomilla Q on ainakin kaksi ensimmäisen asteen tekijää.

K9

Määritetään vakion a arvo siten, että yhtälöllä $2x^4 + 5x^2 + a = 0$ ei ole ratkaisua.

Termit $2x^4$ ja $5x^2$ ovat epänegatiivisia kaikilla reaaliluvuilla x.

Vakion a muuttaminen siirtää funktion $f(x) = 2x^4 + 5x^2 + a$ kuvaajaa pystysuunnassa.

Yhtälöllä $2x^4 + 5x^2 + a = 0$ ei ole ratkaisua, kun $2x^4 + 5x^2 + a > 0$ kaikilla x. Tämä toteutuu, kun $a > 0$, sillä tällöin

$$\underbrace{2x^4}_{\geq 0} + \underbrace{5x^2}_{\geq 0} + \underbrace{a}_{>0} > 0 \quad \text{kaikilla } x.$$

Vastaus $a > 0$

K10

Jos polynomiyhtälön $P(x)=0$ kertoimet ovat kokonaislukuja, niin sen kaikki rationaalijuuret ovat muotoa $\frac{p}{q}$, missä p on vakiotermin tekijä ja q korkeimman asteen termin kertoimen tekijä.

Luetteloidaan yhtälön $3x^4+5x^3+5x^2+5x+2=0$ vakiotermin ja korkeimman asteen termin kertoimen tekijät.

Vakiotermin 2 tekijät: ±1, ±2

Korkeimman asteen termin kertoimen 3 tekijät: ±1, ±3

Tällöin juurivaihtoehdot ovat $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, ±1 ja ±2.

Etsitään testaamalla, mitkä kaksi vaihtoehdoista ovat yhtälön ratkaisut.

$P(x)=3x^4+5x^3+5x^2+5x+2$

$P\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{27}$	$P\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{40}{9}$
$P\left(-\frac{2}{3}\right)=0$	$P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{260}{27}$
$P(-1)=0$	$P(1)=20$
$P(-2)=20$	$P(2)=120$

Vastaus Rationaalilukujuuret ovat $x=-\frac{2}{3}$ ja $x=-1$.

K11

Sijoitetaan kompleksiluku $z = 5 - 2i$ yhtälöön $z^2 - 10z + 29 = 0$.

$$\begin{aligned} z^2 - 10z + 29 &= (5-2i)^2 - 10(5-2i) + 29 \\ &= 25 - 20i + 4i^2 - 50 + 20i + 29 \\ &= 4 + 4i^2 = 4 + 4 \cdot (-1) \\ &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Siis $z = 5 - 2i$ toteuttaa yhtälön. □

Ratkaistaan yhtälö $z^2 - 10z + 29 = 0$ täydellisesti.

$$z^2 - 10z + 29 = 0$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 116}}{2} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{16}\, i}{2} \\ &= \frac{10 \pm 4i}{2} = 5 \pm 2i \end{aligned}$$

$z = 5 + 2i$ tai $z = 5 - 2i$

Vastaus Toisena ratkaisuna on liittoluku $z = 5 + 2i$.

K12

a) Ratkaistaan yhtälö $-z^2-4z-6=0$ kompleksilukujen joukossa.

$$-z^2-4z-6=0$$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot(-1)\cdot(-6)}}{2\cdot(-1)}\\
&= \frac{4\pm\sqrt{-8}}{-2}\\
&= \frac{4\pm\sqrt{8}\,i}{-2}\\
&= \frac{4\pm2\sqrt{2}\,i}{-2}\\
&= -2\pm\sqrt{2}\,i
\end{aligned}$$

b) Ratkaistaan yhtälö $2z^2 - 6z + 8 = 0$ kompleksilukujen joukossa.

$$2z^2 - 6z + 8 = 0 \qquad \Big| :2$$

$$z^2 - 3z + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{7}\, i}{2} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i \end{aligned}$$

Vastaus a) $z = -2 - \sqrt{2}\, i$ tai $z = -2 + \sqrt{2}\, i$

b) $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$ tai $z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$

K13

Ratkaistaan yhtälö $|z|^2 = z^2$ täydellisesti (siis kompleksilukujen joukossa). Olkoon $z = a + bi$, missä a ja b ovat reaalilukuja.

$$|z|^2 = z^2$$
$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = (a+bi)^2$$
$$a^2+b^2 = a^2+2abi+b^2i^2$$
$$a^2+b^2 = a^2+2abi+b^2\cdot(-1)$$
$$a^2+b^2 = a^2-b^2+2abi$$

Vasemmalla ja oikealla puolella olevien kompleksilukujen tulee olla samat.
Kun verrataan yhtälön molemmilla puolilla olevia reaaliosia ja imaginääriosia toisiinsa, saadaan

$$\begin{cases} a^2+b^2 = a^2-b^2 \\ 2ab = 0 \end{cases} \text{eli} \begin{cases} 2b^2 = 0 \\ ab = 0 \end{cases} \text{eli} \begin{cases} b = 0 \\ a \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan $b = 0$. Tällöin a voi olla mikä reaaliluku tahansa.

Yhtälön toteuttaa siis kompleksiluku, joka on reaalinen eli $z \in \mathrm{R}$.

Vastaus $z \in \mathbf{R}$

K14

Muokataan yhtälöä.

$$\sqrt{x^2+1} = x^4 - x$$
$$\sqrt{x^2+1} - x^4 + x = 0$$

Yhtälön juuret ovat samat kuin funktion $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x^4 + x$ nollakohdat.

Funktio f on kaikkialla määritelty ja jatkuva, koska $x^2+1>0$ kaikilla x.

Tutkitaan funktion f arvoja.

$$f(-1) = \sqrt{(-1)^2+1} - (-1)^4 + (-1) = \sqrt{2} - 2 < 0$$

$$f(0) = \sqrt{0^2+1} - 0^4 + 0 = 1 > 0$$

Koska funktion arvot välin $[-1,\ 0]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]-1,\ 0[$.

Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(2) = \sqrt{2^2+1} - 2^4 + 2 = \sqrt{5} - 14 < 0$$

Koska funktion arvot välin $[0,\ 2]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,\ 2[$.

Koska välit $]-1,\ 0[$ ja $]0,\ 2[$ ovat erilliset, funktiolla f on ainakin kaksi nollakohtaa. Täten yhtälöllä on ainakin kaksi ratkaisua.

K15

Muokataan yhtälöä.

$$x^2 = \cos x$$
$$x^2 - \cos x = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^2 - \cos x$ nollakohdat.

Määritetään nollakohta yhden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

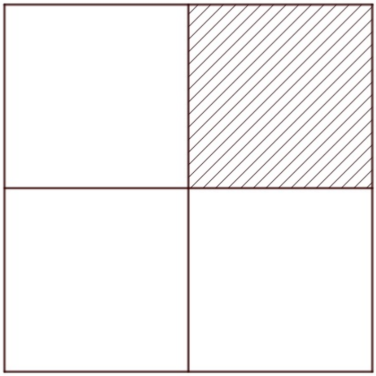
	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	0	1	0,5	-1	-0,6275826...	0,62758256...
3	0,5	1	0,75	-0,627582562...	-0,1691889...	0,10617998...
...						
6	0,8125	0,875	0,84375	-0,027529312...	0,04724833...	-0,0013007...
7	0,8125	0,84375	0,828125	-0,027529312...	0,00953282...	-0,0002624...

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis $x \approx 0{,}8$.

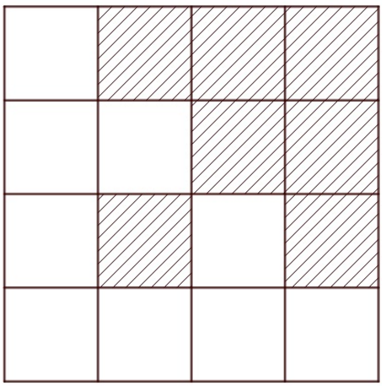
Vastaus $\quad x \approx 0{,}8$

K16

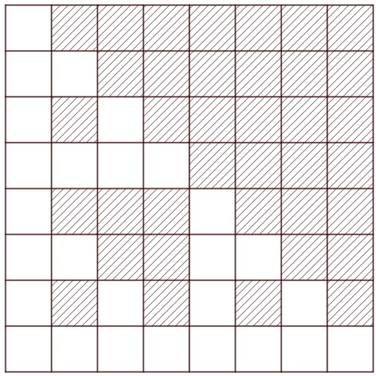
Kuvio 1. iterointikierroksen jälkeen (viivoitetut neliöt ovat kuviosta poistettuja):



Kuvio 2. iterointikierroksen jälkeen:



Kuvio 3. iterointikierroksen jälkeen:



Alkuperäisen neliön pinta-ala on 1.

1. kierroksen jälkeen jäljellä on pinta-ala $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

2. kierroksen jälkeen jäljellä on pinta-ala $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

3. kierroksen jälkeen jäljellä on $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-9\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{27}{64}$

Valkoisten neliöiden pinta-ala on $\frac{27}{64}$.

(LISÄTIETO: Jokaisella kierroksella poistetaan $\frac{1}{4}$ jäljellä olevasta pinta-alasta, jolloin jäljelle jää $\frac{3}{4}$. Näin ollen n. kierroksen jälkeen jäljellä oleva pinta-ala on $A_n=1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n$.)

K17

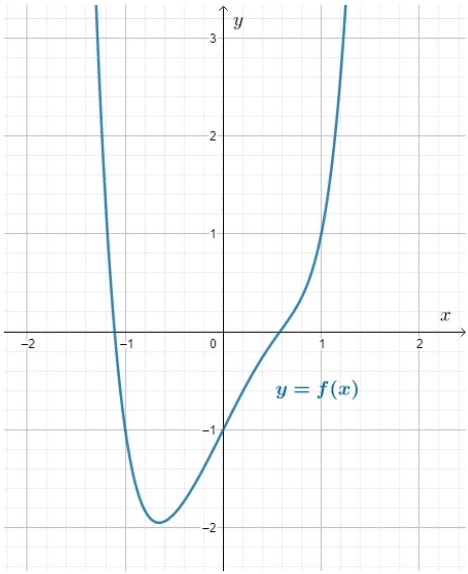
Yhtälön $x^6 - x^3 + 2x - 1 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^6 - x^3 + 2x - 1$ nollakohdat. Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x^6 - x^3 + 2x - 1$$

$$f'(x) = 6x^5 - 3x^2 + 2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^6 - x_n^3 + 2x_n - 1}{6x_n^5 - 3x_n^2 + 2}$$

Piirretään funktion f kuvaaja. Kuvan perusteella nollakohdat ovat väleillä $]-2, -1[$ ja $]0,\ 1[$. Valitaan ensimmäisen nollakohdan alkuarvoksi $x_1 = -1$ ja toisen alkuarvoksi $x_1 = 1$.



Muodostetaan iterointikaavaa vastaava funktio.

$$g(x) = x - \frac{x^6 - x^3 + 2x - 1}{6x^5 - 3x^2 + 2}$$

Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvoista $x_1 = -1$ ja $x_1 = 1$, kunnes iteraation arvo pysyy kolmen desimaalin tarkkuudella muuttumattomana.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	-1	1
x_2	-1,14285714...	0,8
x_3	-1,11089672...	0,62887081...
x_4	-1,10847939...	0,57836828...
x_5	-1,10846638...	0,57786475...

Iteroinnin perusteella nollakohtien likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella ovat $-1{,}108$ ja $0{,}578$.

Vastaus $\quad x \approx -1{,}108$ ja $x \approx 0{,}578$

K18

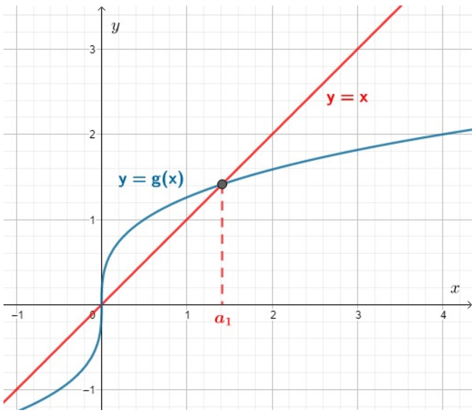
Funktion f nollakohdat ovat yhtälön $2x - x^3 = 0$ ratkaisut.

Muokataan yhtälö muotoon $x = g(x)$.

$$
\begin{aligned}
2x - x^3 &= 0 \\
x^3 &= 2x \\
x &= \sqrt[3]{2x}
\end{aligned}
$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = \sqrt[3]{2x}$ kiintopisteet.

Piirretään funktion g kuvaaja ja suora $y = x$ samaan koordinaatistoon. Kuvan perusteella funktion g ainoa positiivinen kiintopiste on välillä $]1,\ 2[$.



Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 1$. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A
1	1
2	1,25992105...
3	1,36079000...
...	
10	1,41418866...
11	1,41420526...

Iteroinnin perusteella funktion g ainoan kiintopisteen likiarvo neljän desimaalin tarkkuudella on $1,4142$.

Siis funktion $f(x)=2x-x^3$ positiivinen nollakohta on $x\approx 1,4142$.

Vastaus $\quad 1,4142$

K19

a) Funktio f on polynomifunktio, joten se on kaikkialla jatkuva ja derivoituva. Muodostetaan derivaattafunktio $f'(x)$.

$$f'(x) = 12x^3 - 60x^2 + 12x + 10$$

Tutkitaan derivaatan f' arvoja.

$$f'(-1) = -74 < 0$$

$$f'(0) = 10 > 0$$

Koska derivaattafunktion arvot välin $[-1,\ 0]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $]-1,\ 0[$. Funktiolla f on tällä välillä myös ainakin yksi minimikohta, koska funktio on vähenevä kohdassa -1, mutta kasvava kohdassa 0.

Jatketaan derivaattafunktion arvojen tutkimista.

$$f'(4) = -134 < 0$$

$$f'(5) = 70 > 0$$

Koska derivaattafunktion arvot välin $[4,\ 5]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $]4,\ 5[$. Funktiolla f on myös ainakin yksi minimikohta välillä $]4,\ 5[$.

Koska välit $]-1,\ 0[$ ja $]4,\ 5[$ ovat erilliset, funktiolla f on siis ainakin kaksi minimikohtaa.

b) Kahden minimikohdan välissä aina vähintään yksi maksimikohta. Jos minimikohtia olisi kolme, olisi myös maksimikohtia vähintään kaksi, eli yhteensä ääriarvokohtia olisi vähintään viisi. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska derivaattafunktio on kolmatta astetta, joten sillä on korkeintaan kolme nollakohtaa (eli mahdollista funktion ääriarvokohtaa).

K20

a) Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^7 - 3x + 6$ nollakohdat. Määritetään välillä $]-2, -1[$ oleva ratkaisu puolitusmenetelmällä kahden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	-2	-1	-1,5	-116	-6,585937...	763,9687...
3	-1,5	-1	-1,25	-6,585937...	4,981628...	-32,80869...
...						
10	-1,394531...	-1,390625	-1,392578...	-0,072872...	0,021400...	-0,001559...
11	-1,394531...	-1,392578...	-1,393554...	-0,072872...	-0,025630...	0,001867...

Viimeisen välin $[a, b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis $x \approx -1,39$.

b) Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$f(x) = x^7 - 3x + 6$

$f'(x) = 7x^6 - 3$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^7 - 3x_n + 6}{7x_n^6 - 3}$$

Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa, ja alkuarvoa $x_1 = -1$.

	A
1	-1
2	-3
3	-2,57411764...
...	
8	-1,41441414...
9	-1,39402298...
10	-1,39302530...

Iterointi lähestyy kahden desimaalin tarkkuudella lukua $x \approx -1,39$.

c) Muokataan alkuperäinen yhtälö muotoon $x = g(x)$.

$$x^7 - 3x + 6 = 0$$
$$x^7 = 3x - 6$$
$$x = \sqrt[7]{3x-6}$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = \sqrt[7]{3x-6}$ kiintopisteet. Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = -1$.

	A
1	-1
2	-1,36873810...
3	-1,39159430...
4	-1,39293921...

Iteroinnin perusteella funktion g kiintopisteen likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella on $x \approx -1,39$.

Vastaus a) $x \approx -1,39$ b) $x \approx -1,39$ c) $x \approx -1,39$

K21

a) Määritetään lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä.

$$x_1 = 100$$

$$x_2 = \sqrt[2]{100} = 10$$

$$x_3 = \sqrt[3]{10}$$

b)

	A
1	100
2	10
3	2,154434690...
4	1,211527659...
⋮	
13	1,000000001...
14	1

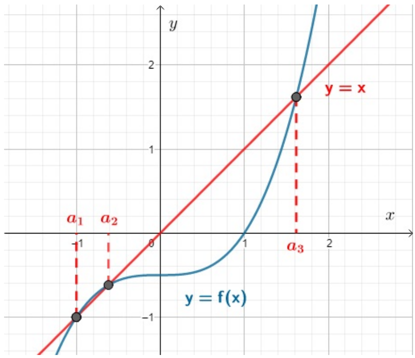
Lukujonon arvot näyttävät lähestyvän lukua 1, kun n suurenee.

Vastaus a) 100, 10 ja $\sqrt[3]{10}$ b) $a = 1$

K22

a) Yhtälön $x^3 - 2x = 1$ juuret ovat funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{2}$ kiintopisteet, joita on kuvaajan perusteella kolme kappaletta.

Kuvaajan perusteella näyttäisi, että kiintopiste a_2 on puoleensavetävä, eli se voidaan selvittää tätä funktiota iteroimalla. Kiintopisteet a_1 ja a_3 näyttäisivät puolestaan olevan hylkiviä. Iteroidaan funktiota f lähtien alkuarvosta $x_1 = -0,5$.

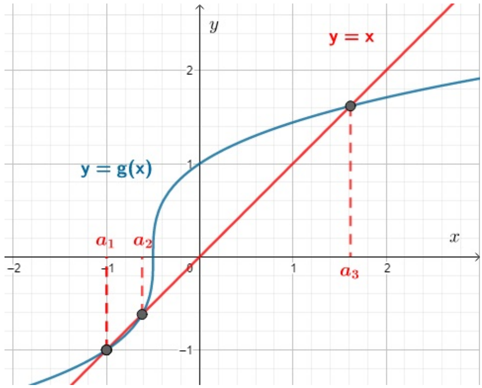


	A
1	-0,5
2	-0,5625
3	-0,588989258
4	-0,602162645
5	-0,609172042
6	-0,613029002

Iteroinnin perusteella kiintopisteen a_2 eli yhtälön toisen juuren likiarvo on $-0,61$.

b) Yhtälön $x^3 - 2x = 1$ juuret ovat myös funktion $g(x) = \sqrt[3]{2x+1}$ kiintopisteitä.

Kuvaajan perusteella näyttäisi, että kiintopisteet a_1 ja a_3 ovat puoleensavetäviä, eli ne voidaan selvittää tätä funktiota iteroimalla. Kiintopiste a_2 puolestaan näyttää olevan hylkivä. Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvoista $x_1 = -2$ ja $x_1 = 1$.



	A	B
1	-2	1
2	-1,44224957...	1,44224957...
3	-1,23518492...	1,57197273...
...		
12	-1,00426361...	1,61803377...
13	-1,00283436...	1,61803393...

Iteroinnin perusteella kiintopisteen a_1 likiarvo on $-1,00$ ja kiintopisteen a_3 likiarvo on $1,62$.

Vastaus a) Kyllä, $x \approx -0,61$ b) Kyllä, $x \approx -1,00$ ja $x \approx 1,62$

K23

a) Yhtälön $e^x - x^4 + 1 = 0$ juuret ovat samat kuin funktion $f(x) = e^x - x^4 + 1$ nollakohdat. Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio g.

$$f(x) = e^x - x^4 + 1$$

$$f'(x) = e^x - 4x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x - x^4 + 1}{e^x - 4x}$$

Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = -2$.

	A
1	−2
2	−1,3040756...
3	−1,0524807...
4	−1,0630020...
⋮	
13	−1,0760396...
14	−1,0760653...

Iteroinnin perusteella nollakohdan likiarvo on $-1,076$.

b) Muokataan yhtälöä.

$$e^x - x^4 + 1 = 0$$

$$x^4 = e^x + 1$$

$$x = -\sqrt[4]{e^x + 1} \text{ (haetaan negatiivista juurta)}$$

Funktion $h(x) = -\sqrt[4]{e^x + 1}$ kiintopisteet ovat samat kuin yhtälön negatiiviset juuret.

Iteroidaan funktiota h lähtien alkuarvosta $x_1 = -2$.

	A
1	−2
2	−1,0322408...
3	−1,0791493...
4	−1,0758874...
5	−1,0761103...
6	−1,0760950...
7	−1,0760961...

Kiintopisteiterointi tuottaa likiarvon $-1,076$ nopeammin kuin Newtonin menetelmä.

Vastaus a) $x \approx -1,076$ b) kyllä, $x = -\sqrt[4]{e^x + 1}$

K24

a) Muodostetaan erotusosamäärä kohdassa 2.

$$f'(2)=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\frac{3^{\frac{1}{2+h}}-3^{\frac{1}{2}}}{h}$$

b) Määritetään erotusosamäärän arvot, kun $h=0,1$ ja $h=-0,1$.

$$f'(2)=\frac{3^{\frac{1}{2+h}}-3^{\frac{1}{2}}}{h}$$
$$=\frac{3^{\frac{1}{2+0,1}}-3^{\frac{1}{2}}}{0,1}$$
$$=-0,44718...\approx-0,45$$

$$f'(2)=\frac{3^{\frac{1}{2+h}}-3^{\frac{1}{2}}}{h}$$
$$=\frac{3^{\frac{1}{2-0,1}}-3^{\frac{1}{2}}}{-0,1}$$
$$=-0,50805...\approx-0,51$$

Vastaus a) $f'(2)=\dfrac{3^{\frac{1}{2+h}}-3^{\frac{1}{2}}}{h}$

b) $h=0,1:\ f'(2)\approx-0,45$ ja $h=-0,1:\ f'(2)\approx-0,51$

K25

Määritetään keskeisdifferenssin avulla funktion derivaatan likiarvo kohdassa 0, kun $h = 0,01$.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} \\
&= \frac{f(0,01) - f(-0,01)}{0,02} \\
&= \frac{\dfrac{\sin(0,01)}{0,01+1} - \dfrac{\sin(-0,01)}{-0,01+1}}{0,02} \\
&= \frac{\dfrac{\sin(0,01)}{1,01} - \dfrac{\sin(-0,01)}{0,99}}{0,02} \\
&= 1,000083... \approx 1,000
\end{aligned}
$$

Vastaus $\quad f'(0) \approx 1,000$

K26

a) Kiihtyvyys on nopeuden derivaatta ajan suhteen: $a = v'(t)$. Pitää siis määrittää derivaatan $v'(5)$ likiarvo. Lyhin aikojen välinen ero on $1\ s$, joten valitaan $h = 1$.

$$\begin{aligned} v'(5) &= \frac{v(5+1) - v(5-1)}{2\cdot 1} \\ &= \frac{v(6) - v(4)}{2} \\ &= \frac{17,0 - 11,2}{2} = 2,9 \end{aligned}$$

b) Valitaan taas $h = 1$, ja lasketaan derivaatan $v'(9)$ likiarvo.

$$\begin{aligned} v'(9) &= \frac{v(9+1) - v(9-1)}{2\cdot 1} \\ &= \frac{v(10) - v(8)}{2} \\ &= \frac{17,6 - 19,1}{2} = -0,75 \end{aligned}$$

Vastaus a) $2,9\ \text{m/s}^2$ b) $-0,75\ \text{m/s}^2$

K27

a–b)

Muodostetaan erotusosamäärän ja keskeisdifferenssin lausekkeet kohdassa 1.

Erotusosamäärä:

$$f'(1) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\cos(1+h)-\cos 1}{h}$$

Keskeisdifferenssi:

$$f'(1) = \frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h} = \frac{\cos(1+h)-\cos(1-h)}{2h}$$

Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa, ja määritetään erotusosamäärän ja keskeisdifferenssin arvot h:n arvoilla 0,1; 0,01; 0,001 ja 0,0001.

h	**erotusosamäärä**	**keskeisdifferenssi**
0,1	-0,86706	-0,84007
0,01	-0,84416	-0,84146
0,001	-0,84174	-0,84147
0,0001	-0,84150	-0,84147

K28

a) Lasketaan suorakaidesäännöllä arvio funktion $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ kuvaajan ja x-akselin välillä $[0, 4]$ rajaaman alueen pinta-alalle käyttäen neljää osaväliä ja laskentapisteenä osavälin keskipistettä.

Jaetaan väli $[0, 4]$ neljään osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on $d=\frac{4-0}{4}=1$.

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned} A &\approx 1\cdot(f(0,5)+f(1,5)+f(2,5)+f(3,5)) \\ &= 9,2534 \approx 9,25 \end{aligned}$$

b) Lasketaan puolisuunnikassäännöllä arvio funktion $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ kuvaajan ja x-akselin välillä $[0, 4]$ rajaaman alueen pinta-alalle käyttäen neljää osaväliä.

Jaetaan väli $[0, 4]$ neljään osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on $h=\frac{4-0}{4}=1$.

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned} A &\approx 1\cdot(\frac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\frac{1}{2}f(4)) \\ &= 9,374... \approx 9,37 \end{aligned}$$

Vastaus a) $A \approx 9{,}25$ b) $A \approx 9{,}37$

K29

Funktion $f(x)=\dfrac{1}{\sin x+2}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $\left[-1,1\right]$ alueen. Lasketaan arvio alueen pinta-alalle Simpsonin säännön perusmuodolla eli osavälejä on kaksi. Yhden osavälin pituus on siis

$$h=\frac{1-(-1)}{2}=1\,.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}A&\approx\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(f(-1)+4f(0)+f(1))\\&=1,0716...\approx 1,07\end{aligned}$$

Vastaus $\quad A\approx 1,07$

K30

Funktion $f(x) = x^x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1, 3]$ alueen.

a) Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja osavälien lukumäärää 10.

$$A \approx \text{suorakulmiosumma}\left(x^x, 1, 3, 10, 0.5\right) \approx 13,63$$

b) Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja osavälien lukumäärää 50.

$$A \approx \text{suorakulmiosumma}\left(x^x, 1, 3, 50, 0.5\right) \approx 13,72$$

Vastaus a) $A \approx 13,63$ b) $A \approx 13,72$

K31

Funktion $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[2, 4]$ alueen. Määritetään arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä.

a) Lasketaan geometriaohjelmalla arvio pinta-alalle, kun osavälien lukumäärä on 20.

$$A \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(\frac{x+1}{x-1}, 2, 4, 20\right) \approx 4{,}199$$

b) Lasketaan geometriaohjelmalla arvio pinta-alalle, kun osavälien lukumäärä on 60.

$$A \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(\frac{x+1}{x-1}, 2, 4, 60\right) \approx 4{,}197$$

Vastaus a) $A \approx 4{,}199$ b) $A \approx 4{,}197$

K32

a) Funktion f kuvaaja ja x-akseli rajaavat alueen välillä $[1, 3]$.

Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä. Taulukosta voidaan havaita, että osavälin pituus on $0,5$ ja osavälien lukumäärä on 4.

x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$f(x)$	7,02	5,05	3,52	2,15	1,95

$$\begin{aligned} A &\approx 0,5\cdot(\frac{1}{2}f(1,0)+f(1,5)+f(2,0)+f(2,5)+\frac{1}{2}f(3,0)) \\ &= 0,5\cdot(\frac{1}{2}\cdot 7,02+5,05+3,52+2,15+\frac{1}{2}\cdot 1,95) \\ &= 7,6025 \approx 7,60 \end{aligned}$$

b) Lasketaan arvio pinta-alalle Simpsonin säännöllä. Taulukosta voidaan havaita, että osavälin pituus on $0,5$ ja osavälien lukumäärä on 4.

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot(f(1,0)+4f(1,5)+2f(2,0)+4f(2,5)+f(3,0)) \\ &= \frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot(7,02+4\cdot 5,05+2\cdot 3,52+4\cdot 2,15+1,95) \\ &= 7,46833\ldots \approx 7,47 \end{aligned}$$

Vastaus a) $A \approx 7,60$ b) $A \approx 7,47$

K33

Funktiolla $f(x)=x^2-4x$ on nollakohdat $x=0$ ja $x=4$, joten funktion kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0, 4]$ alueen. Alue rajautuu x-akselin alapuolelle, koska kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli.

Lasketaan arvio pinta-alalle suorakaidesäännöllä käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja neljää osaväliä. Jaetaan väli $[0, 4]$ neljään osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on

$$d=\frac{4-0}{4}=1.$$

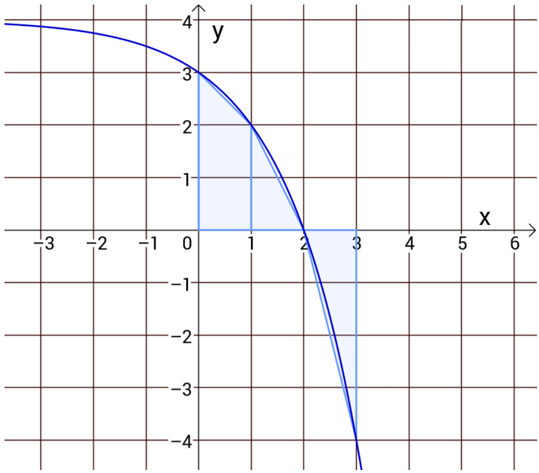
Alue sijaitsee siis x-akselin alapuolella. Tällöin suorakulmioiden korkeudet saadaan ottamalla itseisarvot vastaavista funktioiden arvoista.

$$\begin{aligned}A &\approx 1\cdot(|f(0,5)|+|f(1,5)|+|f(2,5)|+|f(3,5)|)\\ &=11\end{aligned}$$

Vastaus $A\approx 11$

K34

Funktion $f(x)=4-2^x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0,3]$ alueen.



Kuvasta nähdään, että osa alueesta muodostuu x-akselin alapuolelle. Tällöin puolisuunnikkaan sivun pituuden laskemiseksi, funktion arvosta pitää laskea itseisarvo.

Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä käyttäen kolmea osaväliä. Jaetaan väli $[0,3]$ kolmeen osaväliin, jolloin osavälin pituus on

$$h=\frac{3-0}{3}=1.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$A \approx 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\left|f(0)\right| + \left|f(1)\right| + \left|f(2)\right| + \frac{1}{2}\left|f(3)\right|\right)$$
$$= 5,5$$

Vastaus $\qquad A \approx 5,5$

K35

a) Määritetään määrätyn integraalin likiarvo Simpsonin säännöllä käyttäen neljää osaväliä. Kun väli $[0, 2]$ jaetaan neljään osaväliin, on yhden osavälin pituus

$$h = \frac{2-0}{4} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ .}$$

Lasketaan arvio määrätylle integraalille.

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot (f(0) + 4f(0,5) + 2f(1) + 4f(1,5) + f(2))$$
$$= 1,09682... \approx 1,10$$

b) Lasketaan määrätty integraali laskimella.

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = 1,0900... \approx 1,09$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia a-kohdan arvio poikkeaa laskimen antamasta likiarvosta.

$$\frac{1,10-1,09}{1,09} \cdot 100\,\% = 0,917...\,\% \approx 0,9\,\%$$

Vastaus a) $1,10$ b) $1,09$; eroaa $0,9\,\%$

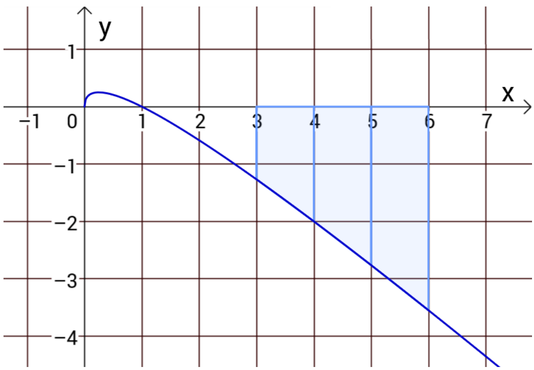
K36

a) Sovelletaan puolisuunnikassääntöä funktioon $f(x)=\sqrt{x}-x$.
Kun väli $[3,6]$ jaetaan kolmeen osaväliin, on yhden osavälin pituus $h=\dfrac{6-3}{3}=1$.

Lasketaan arvio määrätylle integraalille.

$$\int_3^6(\sqrt{x}-x)\,\mathrm{d}x\approx 1\cdot\left(\frac{1}{2}f(3)+f(4)+f(5)+\frac{1}{2}f(6)\right)$$
$$=-7{,}1731\ldots\approx -7{,}17$$

b) Kuvaajan perusteella huomataan, että muodostuva alue on x-akselin alapuolella. Tällöin pinta-alaa laskettaessa funktion arvoista pitää määrittää itseisarvot.



Lasketaan arvio alueen pinta-alalle.

$$A \approx 1 \cdot (\frac{1}{2}|f(3)| + |f(4)| + |f(5)| + \frac{1}{2}|f(6)|)$$
$$= 7{,}1731... \approx 7{,}17$$

Vastaus a) $-7{,}17$ b) $7{,}17$

K37

a) Pekan ratkaisusta puuttui kertoimet summan ensimmäisestä ja viimeisestä termistä.

$$\int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx 0,5\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}+\sqrt{0,5}+\sqrt{1}+\sqrt{1,5}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)$$

$$=1,8194\ldots\approx 1,82$$

b) Pekan ratkaisusta puuttui kerroin $\frac{1}{3}$ osavälin pituuden h edestä ja kertoimet funktion arvojen edestä.

$$\int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot\left(\sqrt{0}+4\cdot\sqrt{0,5}+2\cdot\sqrt{1}+4\cdot\sqrt{1,5}+\sqrt{2}\right)$$

$$=1,85693\ldots\approx 1,86$$

Vastaus a) $1,82$ b) $1,86$

K38

Funktion $f(x)=x^{\frac{x}{2}}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1,3]$ alueen.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla arvio pinta-alalle käyttämällä suorakaidesääntöä. Käytetään laskentapisteenä osavälin alkupistettä ja 40 osaväliä. Jaetaan väli $[1,3]$ neljäänkymmeneen osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on

$$d=\frac{3-1}{40}=\frac{2}{40}=0,05.$$

Suorakaidesäännön mukainen arvio pinta-alalle on

$$A\approx 0,05\cdot(f(1)+f(1+0,05)+f(1+2\cdot 0,05)+...+f(2,95)).$$

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla osavälien alkupisteet, funktion arvot näissä kohdissa ja funktion arvojen summa kerrottuna osavälin pituudella.

	A	B	C	D	E	F
=						
1	1	1.	4.592			
2	1.05	1.026				
3	1.1	1.054				
4	1.15	1.084				
5	1.2	1.116				
6	1.25	1.15				
7	1.3	1.186				
8	1.35	1.225				

A2 =a1+0.05

	A	B	C	D	E	F
=						
1	1	1.	4.592			
2	1.05	1.026				
3	1.1	1.054				
4	1.15	1.084				
5	1.2	1.116				
6	1.25	1.15				
7	1.3	1.186				

B1 $=a1^{\frac{a1}{2.}}$

	A	B	C	D	E	F
=						
36	2.75	4.019				
37	2.8	4.227				
38	2.85	4.448				
39	2.9	4.682				
40	2.95	4.932				
41						
42						

B40 $=a40^{\frac{a40}{2.}}$

	A	B	C	D	E	F
=						
1	1	1.	4.592			
2	1.05	1.026				
3	1.1	1.054				
4	1.15	1.084				
5	1.2	1.116				
6	1.25	1.15				
7	1.3	1.186				
8	1.35	1.225				

C1 $=0.05\cdot \text{sum}(b1:b40)$

Pinta-alan arvioksi saadaan $A \approx 4{,}59$.

Vastaus $\quad A \approx 4{,}59$

K39

a) Funktion $f(x)=\dfrac{1}{x^x}$ kuvaaja ja x -akseli rajaavat välillä $[1,3]$ alueen. Määritetään puolisuunnikassäännöllä summalauseke, jolla saadaan laskettua arvio alueen pinta-alalle. Yleisesti puolisuunnikassääntö on muotoa

$$A_n \approx h\cdot(\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n))$$

Osavälin pituus on nyt $h=\dfrac{3-1}{n}=\dfrac{2}{n}$. Lisäksi $x_0=1$,

$$x_1=1+\frac{2}{n}=,\ x_2=1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n}=1+\frac{2\cdot 2}{n},\ x_k=1+\frac{2k}{n}.$$

Tällöin puolisuunnikassääntö voidaan kirjoittaa summamerkinnän avulla muodossa

$$A_n \approx \frac{2}{n}\cdot(\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(3)+\sum_{k=1}^{n-1}f(1+\frac{2k}{n})).$$

b) Arvioidaan alueen pinta-alaa summalausekkeen avulla, kun osavälien lukumäärä on 10 ja 50.

$$A_{10} \approx \frac{2}{10}\cdot(\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(3)+\sum_{k=1}^{9}f(1+\frac{2k}{10}))=0,69061\ldots\approx 0,691$$

$$A_{50} \approx \frac{2}{50}\cdot(\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(3)+\sum_{k=1}^{49}f(1+\frac{2k}{50}))=0,68765\ldots\approx 0,688$$

Vastaus a) $A_n \approx \frac{2}{n} \cdot (\frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} f(3) + \sum_{k=1}^{n-1} f(1 + \frac{2k}{n}))$

b) $A_{10} \approx 0,691$, $A_{50} \approx 0,688$

M1

$34:15 = 2 \cdot 15 + 4$, joten jakojäännös on 4.

Vastaus b

M2

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 \quad + x \quad + 1 \\
\hline
2x-2 & 6x^3 - 4x^2 \\
 & -\underline{6x^3 - 6x^2} \\
 & \qquad 2x^2 \\
 & \qquad -\underline{2x^2 - 2x} \\
 & \qquad\qquad 2x \\
 & \qquad\qquad -\underline{2x - 2} \\
 & \qquad\qquad\qquad 2
\end{array}
$$

Jakojäännös on kaksi, eli a- ja c-vaihtoehdot ovat oikein.

Vastaus a, c

M3

$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2),$ joten sekä b- että c-kohdan polynomit ovat sen tekijöitä.

Polynomi $x^2 - 4$ on siis jaollinen b- ja c-kohdan polynomeilla.

Polynomin $x^2 - 4$ tekijänä ei kuitenkaan ole polynomi $x - 4,$ joten Polynomi $x^2 - 4$ ei ole jaollinen a-kohdan polynomilla.

Vastaus b, c

M4

Jos polynomin P tekijä on polynomi $x+1=x-(-1)$, niin tällöin polynomin P nollakohta on -1. Lasketaan $P(-1)$.

$$P(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)^2+(-1)+6=0$$

Siis polynomi $x+1$ on polynomin P tekijä.

Testataan samalla tavalla polynomit $x-1$ ja $x-2$.

$$P(1)=1^3-4\cdot1^2+1+6=4$$

Polynomi $x-1$ ei siis ole polynomin P tekijä.

$$P(2)=2^3-4\cdot2^2+2+6=0$$

Polynomi $x-2$ on siis polynomin P tekijä.

Vastaus a, c

M5

Koska $3x^2 + 27 > 0$ kaikilla x:n arvoilla, ei polynomilla Q ole yhtään nollakohtaa. Sillä ei siis ole yhtään ensimmäisen asteen tekijää.

Vastaus a

M6

Polynomi $x-a$ on polynomin P tekijä, jos a on polynomin P nollakohta.

Polynomi $3x-2$ on polynomin P tekijä, sillä $3x-2=3(x-\frac{2}{3})$.

Jotta polynomi $2x-3=2(x-\frac{3}{2})$ olisi polynomin P tekijä, tulisi polynomilla P olla nollakohta $x=\frac{3}{2}$.

Polynomi $x-\frac{2}{3}$ on selvästi polynomin P tekijä.

Vastaus a, c

M7

Kaikki vaihtoehdot ovat oikein.

Kun $x = 2$, tulon tekijä $(x-2) = 0$, joten myös tulo on 0.

Kun $x = -3$, tulon tekijä $(x+3) = 0$, joten myös tulo on 0.

Kun $x = 4$, tulon tekijä $(x-4) = 0$, joten myös tulo on 0.

Vastaus a, b, c

M8

Muokataan yhtälöä.

$$x(x^2-6x+12)=8$$
$$x^3-6x^2+12x-8=0$$

Huomataan, että $x=2$ on yhtälön juuri, sillä

$$2^3-6\cdot 2^2+12\cdot 2-8=0.$$

Se on myös ainoa juuri. Osoitetaan tämä esimerkiksi muokkaamalla yhtälö ryhmittelemällä tekijämuotoon.

$$\begin{aligned}
x^3-6x^2+12x-8&=0\\
x^3\underbrace{-2x^2-4x^2}_{-6x^2}+\underbrace{8x+4x}_{12x}-8&=0\\
x^3-4x^2+4x-2x^2+8x-8&=0\\
x(x^2-4x+4)-2(x^2-4x+4)&=0\\
(x^2-4x+4)(x-2)&=0\\
(x-2)(x-2)(x-2)&=0
\end{aligned}$$

Vastaus c

M9

Sijoitetaan $x = -1$ yhtälöön $15x^3 + 8x^2 + ax - 2 = 0$, ja ratkaistaan vakio a.

$$\begin{aligned} 15 \cdot (-1)^3 + 8 \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) - 2 &= 0 \\ -15 + 8 - a - 2 &= 0 \\ a &= -9 \end{aligned}$$

Vastaus b

M10

Funktio f on polynomifunktio, joten se on kaikkialla jatkuva. Tutkitaan funktion arvoja välien päätepisteissä.

$$f(-1) = -(-1)^3 + (-1) + 1 = 1 > 0$$

$$f(0) = -0^3 + 0 + 1 = 1 > 0$$

$$f(1) = -1^3 + 1 + 1 = 1 > 0$$

$$f(2) = -2^3 + 2 + 1 = -5 < 0$$

Väleillä $]-1,\ 0[$ ja $]0,\ 1[$ funktiolla ei välttämättä ole yhtään nollakohtaa, koska välien päätepisteissä funktion arvoilla on sama merkki. Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä $[1,\ 2]$ ja funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, on funktiolla ainakin yksi nollakohta välillä $]1,\ 2[$.

Vastaus b

M11

Funktio on määritelty ja jatkuva, kun $x \neq 0$. Ratkaistaan sen nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
x + \frac{1}{x} &= 0 \qquad \left| \cdot x,\ x \neq 0 \right. \\
x^2 + 1 &= 0 \\
x^2 &= -1 \\
x &= \pm\sqrt{-1}
\end{aligned}
$$

Funktiolla ei siis ole yhtään nollakohtaa, joten ei sillä myöskään ole nollakohtia välillä $]-1,\ 1[$.

Vastaus c

M12

a-kohdan ehdolla ei voi vielä sanoa mitään nollakohdan likiarvosta, sillä voi olla, ettei funktiolla ole ollenkaan nollakohtia, ja silti $f(1,6)=0,031$.

b-kohdassa taas nollakohta voi olla missä tahansa välillä $]1,5;\ 1,6[$, eli ei tiedetä, onko sen likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella 1,5 vai 1,6.

c-kohdassa välin $]1,55;\ 1,6[$ molempien päätepisteiden likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella on 1,6, ja välin päätepisteiden funktion arvot erimerkkiset, joten funktion nollakohta on tällä välillä ja sen likiarvo on 1,6.

Vastaus c

M13

Koska välien $]8{,}34;\ 8{,}345[$ ja $]8{,}345;\ 8{,}35[$ päätepisteissä funktion arvot ovat erimerkkiset, on funktiolla nollakohta molemmilla väleillä.

Välillä $]8{,}34;\ 8{,}345[$ olevat luvut pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella lukuun $8{,}34,$ joten se on toisen nollakohdan likiarvo.

Välillä $]8{,}345;\ 8{,}35[$ olevat luvut pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella lukuun $8{,}35,$ joten se on toisen nollakohdan likiarvo.

Näiden tietojen pohjalta ei voi sanoa, onko kummankaan nollakohdan likiarvo kolmen desimaalin tarkkuudella $8{,}345.$

Vastaus a, c

M14

Iteroidessa funktiota $x_n = f(x_{n-1})$, joten $x_2 = f(x_1)$.

$x_2 = f(x_1) = \sqrt{x_1} + 1 = \sqrt{1} + 1 = 2.$

Vastaus a

M15

Rekursiivisen lukujonon määrittelystä nähdään, että lukujono on aritmeettinen lukujono, missä $a_1 = 3$ ja $d = -1$. Sen yleinen jäsen saadaan kaavasta $x_n = x_1 + (n-1)d$.

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (n-1)d \\ &= 3 + (n-1)\cdot(-1) \\ &= 3 - n + 1 \\ &= -n + 4 \end{aligned}$$

Siis $x_{10} = -10 + 4 = -6$, $x_9 = -9 + 4 = -5$ ja $x_n = -n + 4$.

Vastaus b, c

M16

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio g.

$$f(x) = \cos 2x + x^3$$

$$f'(x) = -2\sin 2x + 3x^2$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\cos 2x + x^3}{-2\sin 2x + 3x^2}$$

Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = -1$.

	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	-1
x_2	-0,70610792...
x_3	-0,65017043...
x_4	-0,64776993...
x_5	-0,64776543...

Iteroinnin perusteella nollakohdan neljädesimaalinen likiarvo on $x \approx -0,6478$, ja ensimmäisenä tämän likiarvon tuottaa iteraatio x_4.

Vastaus b

M17

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio g.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^4 - 2x^3 - 1}{4x^3 - 6x^2}$$

Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 1$.

	A
1	1
2	0
3	Ei määritelty

Ensimmäinen iterointikierros tuottaa arvon 0, jolla funktiota g ei ole määritelty. Tällä alkuarvolla ei siis saa selville mitään funktion nollakohtaa.

Vastaus c

M18

Ratkaistaan funktion nollakohta.

$$\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x}{2} \quad \left| \cdot\sqrt{x}, \cdot 2\right.$$

$$2=x\sqrt{x}$$

$$x^{\frac{3}{2}}=2 \quad \left|(\ )^{\frac{2}{3}}\right.$$

$$x=2^{\frac{2}{3}}$$

$$x=\sqrt[3]{4}$$

a-kohdan vaihtoehto on funktio itse. Sitä iteroimalla ei saa selville funktion nollakohtia, vaan kiintopisteet. Funktion kiintopiste on saman funktion nollakohta vain, jos se on 0. Funktion f nollakohta ei kuitenkaan ole 0.

b-kohdan funktion kiintopiste on kohdassa

$$x=\frac{2}{x^2} \quad \left| \cdot x^2,\ x\neq 0\right.$$

$$x^3=2 \quad \left| \sqrt[3]{\ }\right.$$

$$x=\sqrt[3]{2}.$$

Tämä ei kuitenkaan ole funktion f nollakohta, joten tätäkään funktiota iteroimalla ei voida selvittää funktion f nollakohtia.

c-kohdan funktion kiintopiste on kohdassa

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2}{\sqrt{x}} && \Big| \cdot \sqrt{x},\ x \neq 0 \\
x^{\frac{3}{2}} &= 2 && \Big| (\ )^{\frac{2}{3}} \\
x &= \sqrt[3]{4}.
\end{aligned}
$$

Tämä on funktion f nollakohta. Kiintopiste on myös puoleensavetävä, sillä $\left|h'(\sqrt[3]{4})\right| = \left|-\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}\right| \approx 0,79 < 1.$

Näin ollen funktiota h iteroimalla voidaan selvittää funktion f nollakohta.

Vastaus c

M19

Iteroidaan funktiota f alkuarvoilla $x_1 = -2$, $x_1 = 0$ ja $x_1 = 2$.

	A	B	C
1	-2	0	2
2	1,44224957...	-1	1,44224957...
3	1,02601211...	0	1,02601211...
...			
99	-0,75488014...	0	-0,75488014...
100	-0,75487547...	-1	-0,75487547...

Alkuarvolla $x_1 = 0$ funktion f kiintopisteiterointi pomppii arvojen -1 ja 0 välillä, eikä siis suppene. Alkuarvoilla $x_1 = -2$ ja $x_1 = 2$ kiintopisteiterointi näyttäisi suppenevan, joskin hitaasti.

Vastaus a, c

M20

Kohdan a lauseke on funktion f keskeisdifferenssi kohdassa 2, kun $h = 0{,}1.$ Sillä voidaan arvioida derivaattaa $f'(2).$

Kohdan b lauseke on funktion f oikeanpuoleinen erotusosamäärä kohdassa 2, kun $h = 0{,}1.$ Sillä voidaan arvioida derivaattaa $f'(2).$

Kohdan c lauseke on puolestaan funktion f vasemmanpuoleinen erotusosamäärä kohdassa 2, kun $h = 0{,}1.$ Sillä voidaan arvioida derivaattaa $f'(2).$

Vastaus a, b, c

M21

Keskeisdifferenssin lauseke on

$$
\begin{aligned}
g'(1) &= \frac{g(1+h)-g(1-h)}{2h} \\
&= \frac{g(1+0{,}1)-g(1-0{,}1)}{2\cdot 0{,}1} \\
&= \frac{g(1{,}1)-g(0{,}9)}{0{,}2}.
\end{aligned}
$$

Ainoastaan kohdan c lauseke on oikein.

Vastaus c

M22

Suorakaidesäännöllä pinta-alan lausekkeeksi saadaan

$A \approx 0,5 \cdot (f(0,25) + f(0,75) + f(1,25) + f(1,75)).$

Vaihtoehdon a lausekkeessa suorakulmioiden korkeuksien laskentakohdat eivät ole osavälien keskipisteissä, vaan alkupisteissä.

Vaihtoehdon b lausekkeessa suorakulmioiden korkeuksia ei ole kerrottu osavälien pituudella.

Vaihtoehdon c lauseke on oikein.

Vastaus c

M23

Lasketaan arvio pinta-alalle suorakaidesäännöllä. Osavälin pituus on $d=\frac{1-(-1)}{2}=1.$ Suorakulmioiden korkeudet lasketaan osavälien keskipisteissä.

$$
\begin{aligned}
A &\approx 1\cdot(f(-0,5)+f(0,5))\\
&=0,5^{-0,5}+0,5^{0,5}\\
&=2,12132...\approx 2,1
\end{aligned}
$$

Vaihtoehto b on oikein.

Vastaus b

M24

Puolisuunnikassäännöllä pinta-alan lausekkeeksi saadaan

$$A \approx 0,5 \cdot (\frac{1}{2} f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5) + \frac{1}{2} f(2)).$$

Vaihtoehdon a lausekkeessa puuttuu kerroin $\frac{1}{2}$ välin päätepisteiden korkeuksista.

Vaihtoehdon b lauseke on oikein.

Vaihtoehdon c lausekkeessa osavälien päätepisteiden korkeuksien kertoimet ovat väärin.

Vastaus b

M25

Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä. Osavälin pituus on $d = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} f(1) + f(1,5) + \frac{1}{2} f(2)\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1,5^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}\right) \\
&= 0,53472... \approx 0,53
\end{aligned}
$$

Vaihtoehto c on oikein.

Vastaus c

M26

Simpsonin säännöllä pinta-alan lausekkeeksi saadaan

$$A \approx \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot (f(0) + 4f(0,5) + 2f(1) + 4f(1,5) + f(2)).$$

Vaihtoehdon a lausekkeessa puuttuu kerroin $\frac{1}{3}$.

Vaihtoehdon b lausekkeessa osavälien päätepisteiden korkeuksien kertoimet ovat väärin.

Vaihtoehdon c lauseke on oikein.

Vastaus c

M27

Lasketaan arvio pinta-alalle Simpsonin säännöllä. Osavälin pituus on $d = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (f(1) + 4f(1,5) + f(2)) \\
&= \frac{1}{6} \cdot (\sqrt{1} + 4\sqrt{1,5} + \sqrt{2}) \\
&= 1,21886... \approx 1,22
\end{aligned}
$$

Vaihtoehto b on oikein.

Vastaus b

M28

Koska funktio on positiivinen välillä $[a,\ b]$, pinta-alan lauseke on $\int_a^b f(x)dx = A.$ Siis vaihtoehto b on oikein.

Vastaus b

M29

Kohdassa a likiarvo integraalille on laskettu puolisuunnikassäännöllä. Se on oikein.

Kohdassa b likiarvo integraalille on yritetty laskea puolisuunnikassäännöllä, mutta koska funktio oli negatiivinen, itseisarvojen vuoksi saadaan väärä tulos. Jos kysyttäisiin funktion rajaamaa pinta-alaa integraalin arvon sijaan, likiarvo pinta-alalle voitaisiin laskea näin.

Kohdassa c likiarvo integraalille on laskettu Simpsonin säännöllä. Se on oikein.

Vastaus a, c

A1

Lasketaan jakokulmassa $(3x^3-7x^2+6x-1):(x-2)$.

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x^2 - x + 4 \\
\hline
x-2 \,\big| & 3x^3 - 7x^2 + 6x - 1 \\
- & 3x^3 - 6x^2 \\
\hline
 & -x^2 + 6x - 1 \\
- & -x^2 + 2x \\
\hline
 & 4x - 1 \\
- & 4x - 8 \\
\hline
 & 7
\end{array}
$$

a) Osamäärä on $3x^2-x+4$.

b) Jakojäännös on 7.

c) Jakoyhtälö on

$$3x^3-7x^2+6x-1=(x-2)(3x^2-x+4)+7.$$

Vastaus a) $3x^2-x+4$
b) 7
c) $3x^3-7x^2+6x-1=(x-2)(3x^2-x+4)+7$

A2

Polynomin $x + 2$ nollakohta on $x = -2$.

Polynomi $P(x) = x^5 + ax^2 - 4$ on jaollinen polynomilla $x + 2$ täsmälleen silloin, kun $P(-2) = 0$.

Ratkaistaan a.

$$
\begin{aligned}
P(-2) &= 0 \\
(-2)^5 + a \cdot (-2)^2 - 4 &= 0 \\
4a - 36 &= 0 \\
4a &= 36 \\
a &= 9
\end{aligned}
$$

Vastaus $a = 9$

A3

a)

$$(x^2-1)(x-2)=0$$

$$x^2-1=0 \quad \text{tai} \quad x-2=0$$

$$x^2=1 \qquad\qquad x=2$$

$$x=\pm 1$$

Siis $x=-1$, $x=1$ tai $x=2$.

b)

$$(x^2-1)(x-2)=2$$

$$x^3-2x^2-x+2=2$$

$$x^3-2x^2-x=0$$

$$x(x^2-2x-1)=0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad x^2-2x-1=0$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot 2}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\frac{\cancel{2}(1\pm\sqrt{2})}{\cancel{2}}=1\pm\sqrt{2}$$

Siis $x=1-\sqrt{2}$, $x=0$ tai $x=1+\sqrt{2}$.

Vastaus a) $x = -1$, $x = 1$ tai $x = 2$

b) $x = 1 - \sqrt{2}$, $x = 0$ tai $x = 1 + \sqrt{2}$

A4

$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$

Kokeilemalla huomataan, että luku $x = -1$ toteuttaa yhtälön.

$(-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 3 = 0$

Siten polynomi $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ on jaollinen polynomilla $x - (-1) = x + 1$.

$$
\begin{array}{rl}
 & \phantom{x^3+{}} x^2 + 4x + 3 \\
\cline{2-2}
x+1 & \big) \; x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \\
- & \quad x^3 + x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4x^2 + 7x + 3 \\
- & \qquad 4x^2 + 4x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 3x + 3 \\
- & \qquad\qquad 3x + 3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Siis $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = (x+1)(x^2 + 4x + 3)$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$(x+1)(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$x + 1 = 0$ tai $x^2 + 4x + 3 = 0$

$x = -1$ $\qquad x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$x = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ tai $x = \dfrac{-4-2}{2} = -3$

Vastaus $x = -3$ tai $x = -1$

A5

Koska $x = -2$ on polynomin kaksinkertainen nollakohta, polynomilla on kaksi kertaa tekijänä $x - (-2) = x + 2$.

Koska $x = 1$ on polynomin kaksinkertainen nollakohta, polynomilla on kaksi kertaa tekijänä $x - 1$.

Neljännen asteen polynomilla on enintään neljä nollakohtaa ja neljä tekijää.

Polynomi on muotoa $P(x) = a(x+2)^2(x-1)^2$.

Koska polynomin vakiotermi on 20, tulee olla $P(0) = 20$.

Ratkaistaan kerroin a.

$$\begin{aligned} P(0) &= 20 \\ a(0+2)^2(0-1)^2 &= 20 \\ 4a &= 20 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Saadaan

$$\begin{aligned} P(x) &= 5(x+2)^2(x-1)^2 \\ &= 5(x^2+4x+4)(x^2-2x+1) \\ &= 5x^4+10x^3-15x^2-20x+20. \end{aligned}$$

Vastaus $5(x+2)^2(x-1)^2$ eli $5x^4+10x^3-15x^2-20x+20$

A6

a) Osoitetaan, että funktiolla $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2$ on välillä]0, 1[ainakin yksi nollakohta.

Funktio f on polynomifunktio, ja siksi se on jatkuva välillä [0, 1].

Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä.

$$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 2 = -2 < 0$$

$$f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 2 = 1 > 0$$

Koska funktion arvot välin [0, 1] päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä]0, 1[.

b) Osoitetaan, että funktiolla $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2$ on välillä]0, 1[täsmälleen yksi nollakohta.

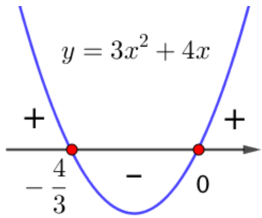
Tutkitaan funktion f kulkua derivaattafunktion avulla.

Derivoidaan.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x$$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 4x &= 0 \\ x(3x+4) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x + 4 &= 0 \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$



Laaditaan funktion f kulkukaavio.

		$-\frac{4}{3}$		0		1	
$f'(x)$	+		−		+		+
$f(x)$	↗		↘		↗		↗

Koska funktio f on aidosti kasvava välillä [0, 1], sillä on enintään yksi nollakohta välillä]0, 1[.

Koska a-kohdan perusteella funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä]0, 1[, niin nollakohtia on täsmälleen yksi.

A7

Iteroidaan funktiota $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ lähtien alkuarvosta 3.

$$f^1(3)=f(3)=\sqrt{3}$$

$$f^2(3)=f(\sqrt{3})=\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{4}}$$

$$f^3(3)=f(3^{\frac{1}{4}})=\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{8}}$$

$$f^4(3)=f(3^{\frac{1}{8}})=\left(3^{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{16}}$$

$$f^5(3)=f(3^{\frac{1}{16}})=\left(3^{\frac{1}{16}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{32}}=\sqrt[32]{3}$$

Vastaus $f^5(3)=\sqrt[32]{3}$

A8

Lukujonon rekursiokaava on

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{3}{2} \\ a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{6}, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots . \end{cases}$$

Jonon seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen aina $\frac{1}{6}$.

Kyseessä on siis aritmeettinen jono.
Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{6}n - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6}n + \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

missä $n = 1, 2, 3, \dots$.

a) $a_4 = \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{4}{3} = 2$

b) $a_{100} = \frac{1}{6}\cdot 100 + \frac{4}{3} = 18$

Vastaus a) 2 b) 18

A9

$f(x)=\sqrt[3]{x}$

a) Muodostetaan funktion f erotusosamäärä kohdassa 1.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{1+h}-\sqrt[3]{1}}{h}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{1+h}-1}{h}$$

b) Lasketaan erotusosamäärän arvo, kun $h = 0{,}001$.

$$\frac{\sqrt[3]{1+0{,}001}-1}{0{,}001}=0{,}33322...\approx 0{,}333$$

Siis $f'(1)\approx 0{,}333$.

Vastaus a) $\frac{\sqrt[3]{1+h}-1}{h}$ b) $f'(1)\approx 0{,}333$

A10

a) Käytetään suorakaidesääntöä.

$$
\begin{aligned}
A &\approx 1\cdot\big(f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\big)\\
&=1\cdot(4+2+2+3)\\
&=11
\end{aligned}
$$

b) Käytetään puolisuunnikassääntöä.

$$
\begin{aligned}
A &\approx 1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\frac{1}{2}\cdot f(5)\right)\\
&=1\cdot(\frac{1}{2}\cdot 4+2+2+3+\frac{1}{2}\cdot 3)\\
&=10{,}5
\end{aligned}
$$

c) Käytetään Simpsonin sääntöä.

$$
\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\big(f(1)+4\cdot f(2)+2\cdot f(3)+4\cdot f(4)+f(5)\big)\\
&=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(4+4\cdot 2+2\cdot 2+4\cdot 3+3)\\
&\approx 10{,}33
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 11 b) 10,5 c) 10,33

B1

Polynomi $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ on jaollinen binomilla $x^2 - 1$.

Koska $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, niin polynomi P on jaollinen binomeilla $x - 1$ ja $x + 1$. Siten $P(1) = 0$ ja $P(-1) = 0$.

Sijoitetaan tunnetut arvot polynomin lausekkeeseen ja ratkaistaan vakiot a, b ja c.

$$\begin{aligned} P(0) &= 4 \\ 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= 4 \\ c &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1) &= 0 \\ 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 4 &= 0 \\ a + b &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-1) &= 0 \\ (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 4 &= 0 \\ a - b &= -3 \end{aligned}$$

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a + b = -5 \\ a - b = -3 \end{cases}$$

Saadaan $a = -4$ ja $b = -1$.

Vastaus $a = -4$, $b = -1$ ja $c = 4$

B2

Funktioiden $f(x) = x - 2$ ja $g(x) = 2\cos x$ kuvaajien leikkauskohdassa on $f(x) = g(x)$. Muokataan yhtälöä.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x - 2 &= 2\cos x \\ 0 &= 2\cos x - x + 2 \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $h(x) = 2\cos x - x + 2$ nollakohdat.

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$h(x) = 2\cos x - x + 2$$
$$h'(x) = -2\sin x - 1$$
$$N(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)} = x - \frac{2\cos x - x + 2}{-2\sin x - 1}$$

Valitaan iteroinnin alkuarvoksi $x_1 = 2$.

x_{n+1}	Iteraatio $N(x_n)$
x_1	2
x_2	1,714191...
x_3	1,714187...
x_4	1,714191...
x_5	1,714191...

Yhtälön ratkaisu on $x = 1{,}714191...$.

Lasketaan leikkauspisteen y-koordinaatti.

$f(1,714191...) = 1,714191... - 2 = -0,285808...$

Leikkauspiste on noin (1,714; –0,286).

Vastaus (1,714; –0,286)

B3

Yhtälön $x = 3 + \log_2 x$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = 3 + \log_2 x$ kiintopisteet.

Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 1$.
Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa (tai laskinta).

	A
1	1
2	3,0000
3	4,5850
...	
10	5,4448
11	5,4449
12	5,4449

Yhtälön ratkaisu on $x \approx 5,44$.

Muokataan yhtälö toisella tavalla iteroitavaan muotoon.

$$x = 3 + \log_2 x$$
$$x - 3 = \log_2 x$$
$$2^{x-3} = x$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $h(x) = 2^{x-3}$ kiintopisteet.

Iteroidaan funktiota h lähtien alkuarvosta $x_1 = 1$.
Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa (tai laskinta).

	A
1	1
2	0,2500
3	0,1487
4	0,1386
5	0,1376
6	0,1375
7	0,1375

Yhtälön ratkaisu on $x \approx 0{,}14$.

Vastaus $x \approx 0{,}14$ ja $x \approx 5{,}44$

B4

Lukujonon rekursiokaava on

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{5} \\ a_n = \dfrac{1}{2} a_{n-1}, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \ldots . \end{cases}$$

Lasketaan taulukkolaskentaohjelman sarakkeeseen A
jonon peräkkäiset jäsenet $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$
ja sarakkeeseen B niiden summa $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

	A	**B**
1	0,40000000	0,400000
2	0,20000000	0,600000
3	0,10000000	0,700000
...		
20	0,00000076	0,799999
21	0,00000038	0,800000
...		
100	$6{,}13 \cdot 10^{-31}$	0,800000

1) Syötä soluun A1 arvo 2/5.

2) Syötä soluun A2 kaava
"= 0,5 · A1".

3) Syötä soluun B1 kaava
"= A1".

4) Syötä soluun B2 kaava
"= B1 + A2".

Summa näyttää lähestyvän lukua $0{,}8 = \dfrac{4}{5}$.

Vastaus $\dfrac{4}{5}$

B5

Funktion $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ kuvaajalle piirretään tangentti kohtaan $x = 3$.

a) Tangentin kulmakerroin on $f'(3)$.
Arvioidaan derivaattaa $f'(3)$ keskeisdifferenssin avulla.
Lasketaan keskeisdifferenssi kohdassa 3, kun $h = 0{,}01$.

$$\begin{aligned} f'(3) &\approx \frac{f(3+h)-f(3-h)}{2h} \\ &= \frac{f(3+0{,}01)-f(3-0{,}01)}{2\cdot 0{,}01} \\ &= \frac{f(3{,}01)-f(2{,}99)}{0{,}02} \\ &= \frac{3{,}01^{\sqrt{3{,}01}}-2{,}99^{\sqrt{2{,}99}}}{0{,}02} \\ &= 5{,}9976... \approx 5{,}998 \end{aligned}$$

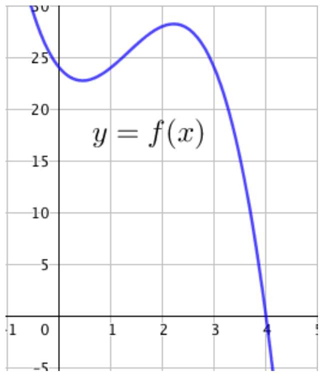
Tangentin kulmakerroin $k \approx 5{,}998$.

b) Lasketaan tangentin suuntakulma.

$$\alpha = \tan^{-1} k = \tan^{-1} 5{,}9976... = 80{,}534...^\circ \approx 81^\circ$$

Vastaus a) 5,998 b) 81°

B6



$f(x) = -2x^3 + 8x^2 - 6x + 24$

Funktion f nollakohta on $x = 4$, sillä $f(4) = 0$.

Funktion f kuvaaja ja koordinaattiakselit rajaavat alueen välillä $[0, 4]$.

Jaetaan väli $[0, 4]$ neljään osaväliin ja käytetään Simpsonin sääntöä.

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \big(f(0) + 4 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 4 \cdot f(3) + f(4)\big) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \big(24 + 4 \cdot 24 + 2 \cdot 28 + 4 \cdot 24 + 0\big) \\ &= \frac{272}{3} \\ &= 90\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Koska f on polynomifunktio, alueen pinta-alan arvio ei riipu Simpsonin säännössä käytettyjen osavälien lukumäärästä.

Vastaus $90\frac{2}{3}$

B7

Funktion $f(x) = x^2$ kuvaajan kaaren pituus välillä $[0, 1]$ on määrätty integraali

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x .$$

Integroitava funktio on $g(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$.

Lasketaan määrätty integraali puolisuunnikassäännöllä jakamalla väli $[0, 1]$ neljään osaväliin.

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot g(0) + g(\tfrac{1}{4}) + g(\tfrac{1}{2}) + g(\tfrac{3}{4}) + \frac{1}{2} \cdot g(1) \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \right) \\ &= 1{,}4882... \approx 1{,}49 \end{aligned}$$

Kaaren pituus on noin 1,49.

Vastaus 1,49

B8

Asuntolaina 240 000 €,
laina-aika 20 vuotta,
vuosikorko 2,00 %.

a) 1. vuoden alussa velan suuruus $a_1 = 240\,000$.
1. vuoden lopussa velan suuruus on $1{,}02 \cdot a_1$.

Tämän jälkeen pankille maksetaan tasaerä a.

2. vuoden alussa velan suuruus $a_2 = 1{,}02 \cdot a_1 - a$.

Näin jatkamalla muodostuu rekursiivinen lukujono

$$\begin{cases} a_1 = 240\,000 \\ a_n = 1{,}02a_{n-1} - a, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

b) Lasketaan jonon ensimmäisiä jäseniä.
Merkitään $b = 240\,000$ ja $q = 1{,}02$.

$$a_1 = b$$
$$a_2 = qb - a$$
$$a_3 = q(qb - a) - a = q^2 b - qa - a$$
$$a_4 = q(q^2 b - qa - a) - a = q^3 b - q^2 a - qa - a$$

Havaitun säännönmukaisuuden perusteella

$$\begin{aligned} a_n &= q^{n-1} b - q^{n-2} a - \ldots - qa - a \\ &= q^{n-1} b - (q^{n-2} a + \ldots + qa + a) \\ &= q^{n-1} b - \frac{a(1 - q^{n-1})}{1 - q}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan arvot.

$$\begin{aligned} a_n &= 1{,}02^{n-1} \cdot 240\,000 - \frac{a(1 - 1{,}02^{n-1})}{1 - 1{,}02} \\ &= 1{,}02^{n-1} \cdot 240\,000 - \frac{a(1 - 1{,}02^{n-1})}{-0{,}02} \\ &= 1{,}02^{n-1} \cdot 240\,000 + 50a(1 - 1{,}02^{n-1}) \end{aligned}$$

c) Takaisinmaksuaika on 20 vuotta.
21. vuoden alussa $a_{21} = 0$.

Ratkaistaan tasaerä a.

$$\begin{aligned} a_{21} &= 0 \\ 1{,}02^{21-1} \cdot 240\,000 + 50a(1 - 1{,}02^{21-1}) &= 0 \\ a &= 14677{,}6124 \\ &\approx 14677{,}60 \end{aligned}$$

Tasaerä on noin 14 677,60 euroa.

Vastaus a) $\begin{cases} a_1 = 240\,000 \\ a_n = 1{,}02a_{n-1} - a, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \ldots . \end{cases}$

b) $a_n = 1{,}02^{n-1} \cdot 240\,000 + 50a(1 - 1{,}02^{n-1})$

c) $a = 14\,677{,}60$