# Jaollisuustehtäviä

tehtävä 172

*a.*

$27 : 10 = \frac{27}{10} = 2 + \frac{7}{10}$ eli osamäärä 2, jakojäännös 7

jakoyhtälö : $27 = 10 \cdot 2 + 7$

*b.*

$305 : 100$ osamäärä 3, jakojäännös 5

jakoyhtälö : $305 = 100 \cdot 3 + 5$

*c.*

$9999 : 1000$ osamäärä 9, jakojäännös 999

jakoyhtälö : $9999 = 1000 \cdot 9 + 999$

tehtävä 174

ilmaise luku muodossa $3q + r$, missä $0 \leq r < 3$ (eli $r = 0$, 1 tai 2)

*a.* $21 = 3 \cdot 7 + 0$

*b.* $43 = 42 + 1 = 3 \cdot 14 + 1$

*c.* $-28 = -30 + 2 = 3 \cdot (-10) + 2$

*d.* $-44 = -45 + 1 = 3 \cdot (-15) + 1$

tehtävä 177

väite : viiden peräkkäisen kokonaisluvun summa on jaollinen luvulla 5

viisi peräkkäistä kokonaislukua : $n$

$n + 1$

$n + 2$

$n + 3$

$n + 4$

näiden summa :

$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5 \cdot (n+2)$

missä n + 2 on kokonaisluku.

Viiden peräkkäisen kokonaisluvun summa on viiden monikerta, joten se on jaollinen luvulla 5 □

tehtävä 179

Väite : Jos $n$ on kokonaisluku, niin $n\left(n^2 + 8\right)$ on jaollinen luvulla 3.

*Todistus* :

Jokainen kokonaisluku voidaan esittää luvun 3 jäännösluokkien avulla,

eli muodossa $3q$, $3q+1$ tai $3q+2$. Tutkitaan jokainen vuorollaan. $q \in \mathbb{Z}$

| $n$ | $n\left(n^2+8\right)$ |
|---|---|
| $3q$ | $3q \cdot \left((3q)^2 + 8\right) = 3 \cdot q\left(9q^2 + 8\right)$ |
| $3q+1$ | $(3q+1)\left((3q+1)^2 + 8\right)$ <br> $= (3q+1)\left(9q^2 + 6q + 1 + 8\right)$ <br> $= 3 \cdot (3q+1)\left(3q^2 + 2q + 3\right)$ |
| $3q+2$ | $(3q+2)\left((3q+2)^2 + 8\right)$ <br> $= (3q+2)\left(9q^2 + 12q + 4 + 8\right)$ <br> $= 3 \cdot (3q+2)\left(3q^2 + 4q + 4\right)$ |

Kaikissa tilanteissa $n\left(n^2 + 8\right)$ on luvun 3 monikerta,

eli $n\left(n^2 + 8\right)$ on aina jaollinen luvulla 3. □

tehtävä 186

Väite : Jos $n$ on kokonaisluku, niin $(n+1)^2 - (n-1)^2$ on jaollinen luvulla 4.

Todistus :

Sievennetään annettu lauseke :

$(n+1)^2 - (n-1)^2 = n^2 + 2n + 1 - \left(n^2 - 2n + 1\right) = \cancel{n^2} + 2n + \cancel{1} - \cancel{n^2} + 2n - \cancel{1} = 4n$

Eli annettu lauseke on aina luvun 4 monikerta...

eli eipä tarvinnutkaan tehdä muuta □

SUURIN YHTEINEN TEKIJÄ

Kokonaisluvun tekijät

= ne positiiviset kokonaisluvut, joilla luku on jaollinen

luvun 28 tekijät: 2, 7, 4, 14, 1, 28

luvun 42 tekijät: 2, 21, 7, 6, 3, 14

Kahden luvun yhteiset tekijät

= luvut, joilla kumpikin on jaollinen. Tässä:
2, 7, 14

Yksi tavanomaisimmista sovelluksista on murtolukujen supistaminen. Silloin mielenkiinnon kohteena on suurin mahdollinen supistaja, eli lukujen suurin yhteinen tekijä (SYT)

SYT(28,42) = 14

Mitä suuremmat luvut, sitä suurempi määrä eri tekijöitä niillä on.

Esim syt(396, 332)

Yhteisen tekijän löytymiseen voidaan käyttää jakoyhtälöä:

a ja b kokonaislukuja, a=bq+r

isommat pienemmät

tällöin syt(a,b)=syt(b,r)

ESIM 396=332+64 eli syt(396,332)=syt(332, 64)

tehdään sama uudestaan, niin saadaan taas pienemmät!

332=64*5+12 eli syt(332,64)=syt(64,12)

ja ei kun uudestaan!

? → ?

Edellinen toimenpidejono on nimeltään <u>Eukleideen algoritmi.</u>

Viimeinen nollasta poikkeava jakojäännös on alkuperäisten lukujen suurin yhteinen tekijä.

ESIM 1+2 s.88

PIENIN YHTEINEN MONIKERTA

Lukujen a  ja b pienin yhteinen monikerta on pienin luku, joka on jaollinen niillä kummallakin.

esim.    a= 28

b= 42

pym(28,42)= pienin luku, joka on jaollinen kummallakin näistä.

Voidaan selvittää supistamalla lukujen tulo niiden suurimmalla yhteisellä tekijällä

$$pym\,(a,b) = \frac{a \cdot b}{syt\,(a,b)}$$

edelleen, mitä isommat luvut, sitä hankalammaksi menee. Tehdään syrjähyppy lukujen alkutekijöihin...

Luvun alkutekijät:

Luku voidaan ilmaista kertolaskuna, missä mikään kertolaskun tekijöistä ei ole jaollinen muilla kuin itsellään ja ykkösellä.

$28 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 7$

$42 = 7 \cdot 6 = 7 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

yhteisiä tekijöitä on 2 ja 7, eli $syt\,(28{,}42) = \ 2 \cdot 7 = 14$

luku, joka on jaollinen kummallakin saadaan,

kun se sisältää molempien alkutekijät ilman toistoja

$pym\,(28{,}42) = (2 \cdot 2 \cdot 7) \cdot 3$

eli eka luku kokonaan, toisesta luvusta ne tekijät, joita ei vielä ole riittävästi

edellä esitetyn $pym -$ määrityksen yhtälön käsittelyä päässälaskullavoidaan tällä helpottaa

$$pym\,(28{,}42) = \frac{28 \cdot 42}{syt\,(28{,}42)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 7} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 4 \cdot 21 = 84$$

Esim 3 ja 4

tehtävät 194, 195, 196, 198, (203, 206, 207, 210)