tehtävä 144

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 1 \quad , \text{kun } n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \end{cases}$$

VÄITE : $a_n = 2^n + 1$, kun $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Osoitetaan väite induktiolla.

Induktion alkuaskel $\quad n = 1$

Väitteen mukaan olisi $a_1 = 2^1 + 1 = 3$ eli lukujono toteutuu

Induktioaskel :

oletetaan, että väite pätee kohtaan $n = k$ asti, eli $a_k = 2^k + 1$.

Tutkitaan lukujonon jäsentä a_{k+1}. Lukujonon säännön mukaan $a_{k+1} = 2 \cdot a_k - 1$

Sijoitetaan a_k

$$a_{k+1} = 2 \cdot a_k - 1 = 2 \cdot \left(2^k + 1\right) - 1 = 2 \cdot 2^k + 2 - 1 = 2^{k+1} + 1$$

eli väitetty sääntö pätee myös kohdassa $n = k + 1$

On osoitettu induktion alkuaskel ja induktioaskel, joten väitetty kaava pätee. $\square$

tehtävä 146

Väite : $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n

Osoitetaan väite todeksi induktiolla

Induktion alkuaskel, $n=1$

vasen puoli 1

oikea puoli $1^2=1$ $\Rightarrow$ induktion alkuaskel ok

Induktio − oletus : kaava pätee kohtaan $n=k-1$ asti

eli $1+3+5+\ldots+(2(k-1)-1)=(k-1)^2$

Lisätään summan seuraava termi $2k-1$ kummallekin puolelle.

$1+3+5+\ldots+(2(k-1)-1)+(2k-1)=(k-1)^2+(2k-1)$

$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2-2k+1+2k-1$

$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$

Eli väitteen mukainen lause pätee myös kohdassa $n=k$.

Näin on osoitettu sekä induktion alkuaskel, että induktioaskel, joten väite on tosi. $\square$

tehtävä 147

Väite : $3+3^2+3^3+\ \dots\ +\ 3^n=\dfrac{3^{n+1}-3}{2}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n

Osoitetaan väite todeksi induktiolla

Induktion alkuaskel $n=1$

vasen puoli $3^1=3$

oikea puoli $\dfrac{3^{1+1}-3}{2}=\dfrac{9-3}{2}=3$ $\Rightarrow$ lause pätee

Var sin ainen induktioaskel

oletetaan, että lause pätee kohtaan $n=k$ asti, eli $3+3^2+3^3+\ \dots\ +\ 3^k=\dfrac{3^{k+1}-3}{2}$

Tutkitaan summaa $3+3^2+3^3+\ \dots\ +\ 3^{k+1}$

$3+3^2+3^3+\ \dots\ +\ 3^k+3^{k+1}=\dfrac{3^{k+1}-3}{2}+3^{k+1}$

$=\dfrac{3^{k+1}-3}{2}+\dfrac{2\cdot 3^{k+1}}{2}=\dfrac{3^{k+1}-3+2\cdot 3^{k+1}}{2}=\dfrac{3\cdot 3^{k+1}-3}{2}=\dfrac{3^{k+2}-3}{2}$

eli väite pätee myös, kun $n=k+1$.

Olemme osoit tan eet sekä induktion alkuaskeleen että induktioaskeleen, joten v äitetty lause on tosi.

tehtävät 149, 150, 152, 154