Induktiotodistus

Kun väite liittyy peräkkäisiin kokonaislukuihin

0,1, 2, 3, 4, ..., k-1, k, k+1, ..., n, n+1, n+2,...

tai vaikka lukujonon jäseniin

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$$

Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee:

$$1+2+3+4+\ \dots\ +\ n\ =\frac{n^2+n}{2}$$

Tutkitaan kaavan toimivuutta sekä luvuilla, että yleisellä tasolla

A: kokeillaan ensin eri luvuilla

n=1

$$1=\frac{1^2+1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

n=2

$$1+2=\frac{2^2+2}{2}=\frac{6}{2}=3$$

n=3

$$1+2+3=\frac{3^2+3}{2}=\frac{12}{2}=6$$

n=4

$$1+2+3+4=\frac{4^2+4}{2}=\frac{20}{2}=10$$

$\longrightarrow$ näyttää toimivan

B: Kokeillaan, miltä kaava näyttää peräkkäisillä kirjainarvoilla

n=k-1

$$1+2+3+\ldots+(k-1)=\frac{(k-1)^2+(k-1)}{2}$$

n=k

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k^2+k}{2}$$

$$1+2+3+\ldots+(k-1)+k=\frac{k^2+k}{2}$$

n=k+1

$$1+2+3+\ldots+k+\ (k+1)=\frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}$$

n=k-1

$$1+2+3+\ldots+(k-1)=\frac{(k-1)^2+(k-1)}{2}$$

+k +k

n=k

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k^2+k}{2}$$

$$1+2+3+\ldots+(k-1)+k=\frac{k^2+k}{2}$$

?

$$1+2+3+\ldots+(k-1)+k=\frac{(k-1)^2+(k-1)}{2}+k$$

$$=\frac{k^2-2k+1+k-1}{2}+\frac{2k}{2}$$

$$=\frac{k^2-2k+1+k-1+2k}{2}$$

$$=\frac{k^2+k}{2}$$

jos pätee kohtaan n=k-1 asti, niin

pätee kohdassa n=k

n=k

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k^2+k}{2}$$

+k+1

n=k+1

$$1+2+3+\ldots+k+\ (k+1)=\frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}$$

+ k+1

?

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k^2+k}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k^2+k}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{k^2+k+2k+2}{2}$$

$$=\frac{k^2+3k+2}{2}$$

ei hyvä, mutta toisaalta:

$$\frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}=\frac{k^2+2k+1+k+1}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}$$

jos pätee kohtaan n=k asti, niin
pätee kohdassa n=k+1

Matemaattinen todistus sisältää edellisistä mahdollisimman niukat vaiheet:

$\longrightarrow$ <u>alkuaskel</u>: sijoitetaan pienin mahdollinen luku

$\longrightarrow$ <u>induktioaskel</u>: siirrytään yksi kokonaislukuaskel kirjaintasolla

joko $n=k \longrightarrow n=k+1$

tai $n=k-1 \longrightarrow n=k$

Merkinnöissä on eroja, esimerkiksi kirja suorittaa induktioaskeleen yleensä $n \longrightarrow n+1$

<u>Väite</u>: $1+2+3+4+\ \ldots\ +n = \frac{n^2+n}{2}$

<u>Todistus:</u>

induktion alkuaskel: väite toteutuu, kun n=1, sillä $1 = \frac{1^2+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

induktioaskel: oletetaan, että väite pätee kohtaan n=k-1 asti,

tällöin $1+2+3+\ldots+(k-1) = \frac{(k-1)^2+(k-1)}{2}$ on tosi.

Lisätään molemmille puolille luku k:

$$\begin{aligned}1+2+3+\ldots+(k-1)+k &= \frac{(k-1)^2+(k-1)}{2}+k \\ &= \frac{k^2-2k+1+k-1}{2}+\frac{2k}{2} \\ &= \frac{k^2-2k+1+k-1+2k}{2} \\ &= \frac{k^2+k}{2}\end{aligned}$$

eli $1+2+3+\ldots+k = \frac{k^2+k}{2}$, ja väite on tosi myös, jos n=k.

On osoitettu sekä alkuaskel, että induktioaskel, joten väite pätee kaikille positiivisille kokonaisluvuille n.

(sama löytyy kirjasta, esim 2 s.69: eri induktioaskel ja vähän eri merkinnät)

Esim 1+3 s. 68-71

Tehtävät 144, 146, 147, 157-159