tehtävät 194, 195, 196, 198 (203, 206, 207, 210)

tehtävä 196

$syt\,(364,\,495)$

$$\begin{aligned} 495 &= 364 + 131 \\ 364 &= 2\cdot 131 + 102 \\ 131 &= 102 + 29 \\ 102 &= 3\cdot 29 + 15 \\ 29 &= 15 + 14 \\ 15 &= 14 + 1 \\ syt\,(364{,}495) &= 1 \end{aligned}$$

murtolukua $\frac{364}{495}$ ei voi supistaa

tehtävä 198

$pym\,(140{,}182)$

$140 = 2\cdot 70 = 2\cdot 7\cdot 2\cdot 5 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 7$

$182 = 2\cdot 91 = 2\cdot 7\cdot 13$

$pym\,(140{,}182) = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 7\cdot 13 = 1820$

$pym\,(255,\,300)$

$255 = 5\cdot 51 = 5\cdot 3\cdot 17$

$300 = 3\cdot 100 = 3\cdot 5\cdot 4\cdot 5 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5$

$pym\,(255{,}300) = 5\cdot 3\cdot 17\cdot 2\cdot 2\cdot 5 = 5100$

tehtävä 203

$syt\,(11055,\,29614) = syt\,(29614,\,11055)$

eukleideen algoritmi

$29614 = 2\cdot 11055 + 7504$

$11055 = 7504 + 3551$

$7504 = 2\cdot 3551 + 402$

$3551 = 8\cdot 402 + 335$

$402 = 335 + 67$

$335 = 5\cdot 67$

$syt\,(29614{,}11055) = 67$

murtoluku voidaan supistaa, $\frac{11055}{29614}^{(67} = \frac{165}{442}$

tehtävä 206

$$\begin{cases} syt\,(x{,}28) = 14 \\ pym\,(x{,}28) = 84 \end{cases}$$

$pym\,(x{,}28) = \dfrac{x\cdot 28}{syt\,(x{,}28)}$

$84 = \dfrac{x\cdot 28}{14}$

$84 = x\cdot 2$

$x = 42$

tehtävä 207

$syt\,(a{,}b{,}c) = syt\,(syt\,(a{,}b)\,{,}c)$

$syt\,(3740,\,1938,\,510) = ?$

etsitään ensin $syt\,(3740,\,1938)$

eukleideen algoritmi

$3740 = 1938 + 1802$

$1938 = 1802 + 136$

$1802 = 13\cdot 136 + 34$

$136 = 4\cdot 34$

$syt\,(3740{,}1938) = 34$

Nyt riittää etsiä $syt\,(510{,}34)$

eukleideen algoritmi

$510 = 15\cdot 34$

$syt\,(510{,}34) = 34$

joten $syt\,(3740,\,1938,\,510) = 34$

tehtävä 210

Väite : $syt\,(11n+3,\,7n+2) = 1$

Todistus :

eukleideen algoritmi

$11n + 3 = (7n+2) + (4n+1)$

$7n + 2 = (4n+1) + (3n+1)$

$4n + 1 = (3n+1) + (n)$

$3n + 1 = 3\cdot n + 1$

$syt\,(11n+3,\,7n+2) = 1$

$\square$

DIOFANTOKSEN YHTÄLÖ

Määritä jotkin sellaiset luvut x ja y, joilla 29x+16y = 1

Määritä kaikki luvut, jotka toteuttavat yhtälön 29x+16y = 1

Määritä jotkin luvut x ja y, jotka toteuttavat yhtälön 29x+16y=8

Määritä kaikki luvut x ja y, jotka toteuttavat yhtälön 29x+16y=8

Yhtälöllä on ratkaisuja vain, jos c on syt(a,b) monikerta.
→ yleensä ensimmäisenä ratkaistaan ax+by=syt(a,b)

a) 29x+16y=1

b) 29x+16y=8 (kerrotaan a-kohdan vastaus 8:lla)

$ax + by = c$

Yhtälöllä on ääretön määrä ratkaisuja, eli ratkaisuparvi

$$\begin{cases} x = x_0 + n \cdot \dfrac{b}{syt\,(a,b)} \\ y = y_0 - n \cdot \dfrac{a}{syt\,(a,b)} \end{cases}$$

Ratkaisun vaiheet ax+by=c

Ratkaistaan syt(a,b) eukleideen algoritmilla

→ voidaan varmistaa, että ratkaisu edes löytyy

→ algoritmin vaiheita käytetään ratkaisun etsimiseen

etsitään $syt\,(29,16)$ eukleideen algoritmilla :

$$\begin{aligned}29 &= 16+13\\ 16 &= 13+3\\ 13 &= 4\cdot 3+1\\ 3 &= 3\cdot 1+0\end{aligned}$$

$syt\;(29,16)=1$, joten yhtälöllä $29x+16y=1$ on ratkaisuja

Etsitään lukuparia (x,y), joka toteuttaa yhtälön 1=29x+16y

→ ratkaistaan algoritmin vaiheet jakojäännöksen suhteen:

etsitään $syt\,(29,16)$ eukleideen algoritmilla :

eukleides :	*jakojäännökset*
$29 = 16+13$	$13 = 29-16$
$16 = 13+3$	$3 = 16-13$
$13 = 4\cdot 3+1$	$1 = 13-4\cdot 3$
$3 = 3\cdot 1+0$	

$syt\;(29,16)=1$, joten yhtälöllä $29x+16y=1$ on ratkaisuja

muokataan viimeinen jakojäännös 1=13-4·3

muotoon 1=29·?+16·?

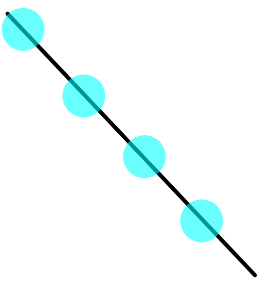
etsitään $syt\,(29,16)$ eukleideen algoritmilla :

eukleides :	*jakojäännökset*	
$29 = 16+13$	$13 = 29-16$	A
$16 = 13+3$	$3 = 16-13$	B
$13 = 4\cdot 3+1$	$1 = 13-4\cdot 3$	C
$3 = 3\cdot 1+0$		

$syt\;(29,16)=1$, joten yhtälöllä $29x+16y=1$ on ratkaisuja

1	$=13-4\cdot 3$	C
	$=13-4\cdot(16-13)$	$sij.\ B$
	$=13-4\cdot 16+4\cdot 13$	
	$=5\cdot 13-4\cdot 16$	
	$=5\cdot(29-16)-4\cdot 16$	$sij.\ A$
	$=5\cdot 29-5\cdot 16-4\cdot 16$	
	$=5\cdot 29-9\cdot 16$	

yhtälön eräs ratkaisu on $(x,y)=(5,-9)$



2. yhtälön kaikki ratkaisut:

yhtälön ratkaisuparvi :

$$\begin{cases} x = 5+n\cdot\dfrac{16}{syt(29,16)}\\ y=-9-n\cdot\dfrac{29}{syt(29.16)}\end{cases}$$

$syt\;(29,16)=1$

$$\begin{cases} x=5+16n\\ y=-9-29n\end{cases}$$, missä n on kokonaisluku

<u>Graafinen tulkinta</u>

29x+16y=1 on suoran yhtälö (y = -29/16x+ 1/16)

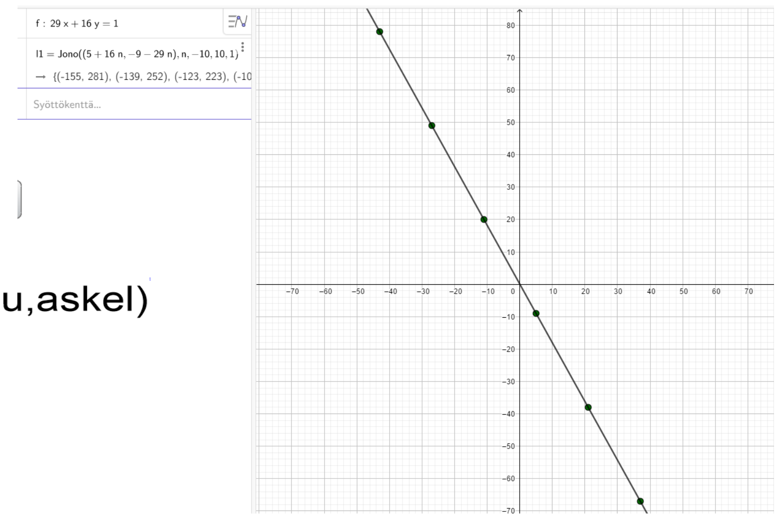
Yhtälön ratkaisuja on kaikki kokonaislukukoordinaatit (x,y) jotka ovat tällä suoralla.

geogebra:

suora 29x+16y=1

pisteet:

jono((x,y),n,alku, loppu,askel)



esimerkki 5 kirjassa (sama, mikä jo käyty)

esim 41x+12y=3 Katsotaan matikkaeditorissa.

tehtävät 211, 212, 213