

144
$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} - 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_1 = 3 \\ a_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ a_3 = 2 \cdot 5 - 1 = 9 \\ \vdots \end{matrix}$$

a) Väite: $a_n = 2^n + 1$

Tod: todistetaan induktiolla:

alkuaste $n=1 \rightarrow$ rekursiokaava $a_1=3$
 todistettua kaava $a_1=2^1+1=3$

induktioaste oletetaan, että toimii kohtaan $n=k$ asti
 $\rightarrow a_k = 2^k + 1$

tutkitaan jäsentä a_{k+1}
 rekursiokaavan mukaan

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k - 1 \quad \text{siis } a_k \\ &= 2(2^k + 1) - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k + 2 - 1 \\ &= 2^{k+1} + 1 \end{aligned}$$

eli osoitettava väite $a_n = 2^n + 1$ toimii myös jäsenelle a_{k+1}
 \rightarrow kaava $a_n = 2^n + 1$ on tosi tälle lukujonolle.

b) $a_{13} = 2^{13} + 1$

146 $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

Todistetaan lause induktiolla

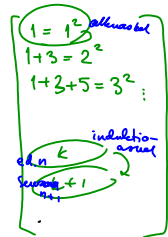
alkuaste $n=1$
 summan arvo 1 potenssin arvo $n^2 = 1$

induktio-aste
 oletus: $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

tutkitaan osko $1+3+5+\dots+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$

$$\begin{aligned} &\underbrace{1+3+5+\dots+(2n-1)}_{n^2} + (2n+1) \\ &= n^2 + (2n+1) \quad \text{binomin määri } a^2+2ab+b^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

eli jos kaava pätee kohtaan n asti ja lisätään yksi pariton luku lisää, se on edellään tosi ja väite on tosi.



147 $3+3^2+3^3+\dots+3^n = \frac{3^{n+1}-3}{2}$

induktion alkuaste $n=1$

vas. puolen arvo 3 oikean puolen arvo $\frac{3^{1+1}-3}{2} = \frac{3^2-3}{2} = \frac{9-3}{2} = 3$

$k+1$ induktio-aste

oletetaan, kaava pätee kohtaan $n=k-1$ asti
 eli $3+3^2+3^3+\dots+3^{k-1} = \frac{3^k-3}{2}$

tutkitaan summaa

$$\begin{aligned} &3+3^2+3^3+\dots+3^{k-1}+3^k \\ &= \frac{3^k-3}{2} + \frac{3^k}{1} \\ &= \frac{3^k-3}{2} + \frac{2 \cdot 3^k}{2} \\ &= \frac{3^k-3+2 \cdot 3^k}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 3^k-3}{2} \\ &= \frac{3^{k+1}-3}{2} \end{aligned}$$

$\frac{3^{k+1}-3}{2}$
 tavoite
 $3^k + 2 \cdot 3^k = 3 \cdot 3^k$
 $x + 2x = 3x$
 $3 \cdot 3^k = 3^1 \cdot 3^k = 3^{1+k}$

eli kaava pätee myös, kun summaan lisätään seuraava termi, joten kaava on tosi.

\Rightarrow ESIM $4+5$ s.72

s.76
 149
 152