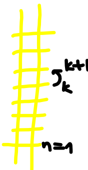
INDUKTIOTODISTUS

Tutkitaan väitettä $1+2+3+\dots+n = \frac{n^2+n}{2}$

① Sijoitetaan n arvoja



$n=1 \quad 1 = \frac{1^2+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ tosi

$n=2 \quad 1+2 = \frac{2^2+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$ tosi

$n=3 \quad 1+2+3 = \frac{3^2+3}{2} = \frac{9+3}{2} = \frac{12}{2} = 6$ tosi

② Oletetaan, että kaava pätee arvoon $n=k$ asti

$\longrightarrow$ päteekö tällöin myös arvolle $n=k+1$?

oletus: $1+2+3+\dots+k = \frac{k^2+k}{2}$ $\qquad \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}$

$\longrightarrow$ tutkitaan summaa $1+2+\dots+k+(k+1)$?

$$\underbrace{1+2+3+\dots+k}+(k+1)$$

$$= \frac{k^2+k}{2} + \frac{{}^{2)}k+1}{1}$$

k^2+2k+1

$\frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}$

$$= \frac{k^2+k}{2} + \frac{2k+2}{2}$$

$$= \frac{k^2+3k+2}{2}$$

$$= \frac{k^2+2k+1+k+1}{2}$$

$$= \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}$$ eli kaava pätee myös, kun $n=k+1$

Induktiotodistus sisältää kaksi vaihetta

Alkuaskel $\Rightarrow$ sijoitetaan 1. käytettävissä oleva n ja tarkistetaan, että kaava pätee.

Induktioaskel $\Rightarrow$ Oletetaan, että kaava pätee kohtaan $n=k$ asti, ja osoitetaan, että pätee myös, kun $n=k+1$

pätee $n=k-1$ $\longrightarrow$ päteekö $n=k$

esim äskeinen $\underbrace{\frac{(k-1)^2+(k-1)}{2}}_{1+2+\dots+k-1} + k = \frac{k^2 \cancel{-2k} + \cancel{1} + k \cancel{-1}}{2} + \frac{\cancel{2k}}{2} = \frac{k^2+k}{2}$

ESIM 3 s. 70

s. 76

144
146
147

157
159

rekursiivinen lukujono

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} - 1 \end{cases}$$

$a_2 = 2a_1 - 1$

$a_3 = 2a_2 - 1$

$a_{10} = 2 \cdot a_9 - 1$