MAB_Preliminäärikoe_Pisteytys_MFKA_K2024

Kokeessa on yhteensä 13 tehtävää jaettuna kolmeen osaan: A-osa, B1-osa ja B2-osa. Kaikki osan A neljä tehtävää ovat pakollisia tehtäviä. B1-osassa sinun tulee vastata kolmeen tehtävään ja B2-osassa kolmeen tehtävään. Kokeen kaikki tehtävät ovat 12 pisteen arvoisia, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa sinulla on käytössäsi taulukkokirja ja perusohjelmat. Kun olet valmis tämän osan kanssa, palauta se painikkeella "Palauta A-osa". Tämän jälkeen et voi enää muokata A-osan tehtäviä.

Kun olet palauttanut A-osan sinulla on kaikki koejärjestelmän ohjelmat käytössäsi. Voit myös vastata B-osan tehtäviin ennen kuin palautat A-osan.

Kirjoita kaikki osatehtävien vastauksesi samaan vastauskenttään ja jaottele ne osatehtävien mukaisesti.

Jos et halua jättää tehtävää arvosteltavaksi, niin muista ettet jätä mitään merkintöjä sen tehtävän vastaukseen varattuun tilaan.

Sisällys

A-osa
Vastaa neljään tehtävään.

1. Monivalintatehtäviä 12 p.
2. Lukiomatematiikan perusasioita 12 p.
3. Toisen asteen polynomifunktio 12 p.
4. Kokonaislukujen jakolasku 12 p.

B1-osa
Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Arjen matematiikkaa 12 p.
6. Neljäkkään pinta-ala Aineisto 12 p.
7. Omakotitalon sähkönkulutus Aineisto 12 p.
8. Remonttilaina ja korkokatto Aineisto 12 p.
9. Tulppaaneja Aineisto 12 p.

B2-osa
Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Maailman jyrkin funikulaari Aineisto 12 p.
11. Eksponentiaalinen malli 12 p.
12. Taidelasia Aineisto 12 p.
13. Valuuttakauppaa Aineisto 12 p.

Koe yhteensä **120 p.**

A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

1. Monivalintatehtäviä 12 p.

Valitse seuraavissa tehtävissä sopivin vastausvaihtoehto.

1.1 Laske $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} : \frac{5}{6} =$
2 p.

PERUSTELU:
$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 6}{4 \cdot 9 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{6}{6 \cdot 5} = \frac{1}{5}$

- ○ $\frac{1}{5}$
- ○ $\frac{5}{36}$
- ○ $\frac{4}{15}$
- ○ $\frac{20}{7}$
- ○ 9

1.2 Laske $\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 3^{-2} =$ **2 p.**

PERUSTELU:
$1 + \frac{3}{1} - \frac{1}{3^2} = 1 + 3 - \frac{1}{3^2} = 4 - \frac{1}{9} = 3\frac{8}{9} = \frac{35}{9}$

- ○ $\frac{2}{3}$
- ○ $\frac{26}{9}$
- ○ $9\frac{2}{3}$
- ○ $\frac{35}{9}$
- ○ 9

1.3 Suureet x ja y ovat kääntäen verrannolliset. Mikä on verrannollisuuskerroin?

x	y
4	2

2 p.

PERUSTELU:
$y = \frac{k}{x} \Rightarrow k = yx \ = 4 \cdot 2 \ = \ 8$

- ○ $2y$
- ○ 2
- ○ $\frac{1}{2}$
- ○ 8
- ○ $4x$

1.4 Vuokraa, jonka määrä on 620 €, korotetaan ensin 15 % ja lasketaan sitten 12 %. Paljonko vuokra on tämän jälkeen eurojen tarkkuudella? **2 p.**

PERUSTELU:
$620 \ \cdot \ 1{,}15 \cdot 0{,}88 \ = \ 627{,}44 \ \approx 627 \text{ €}$

○ 639 €

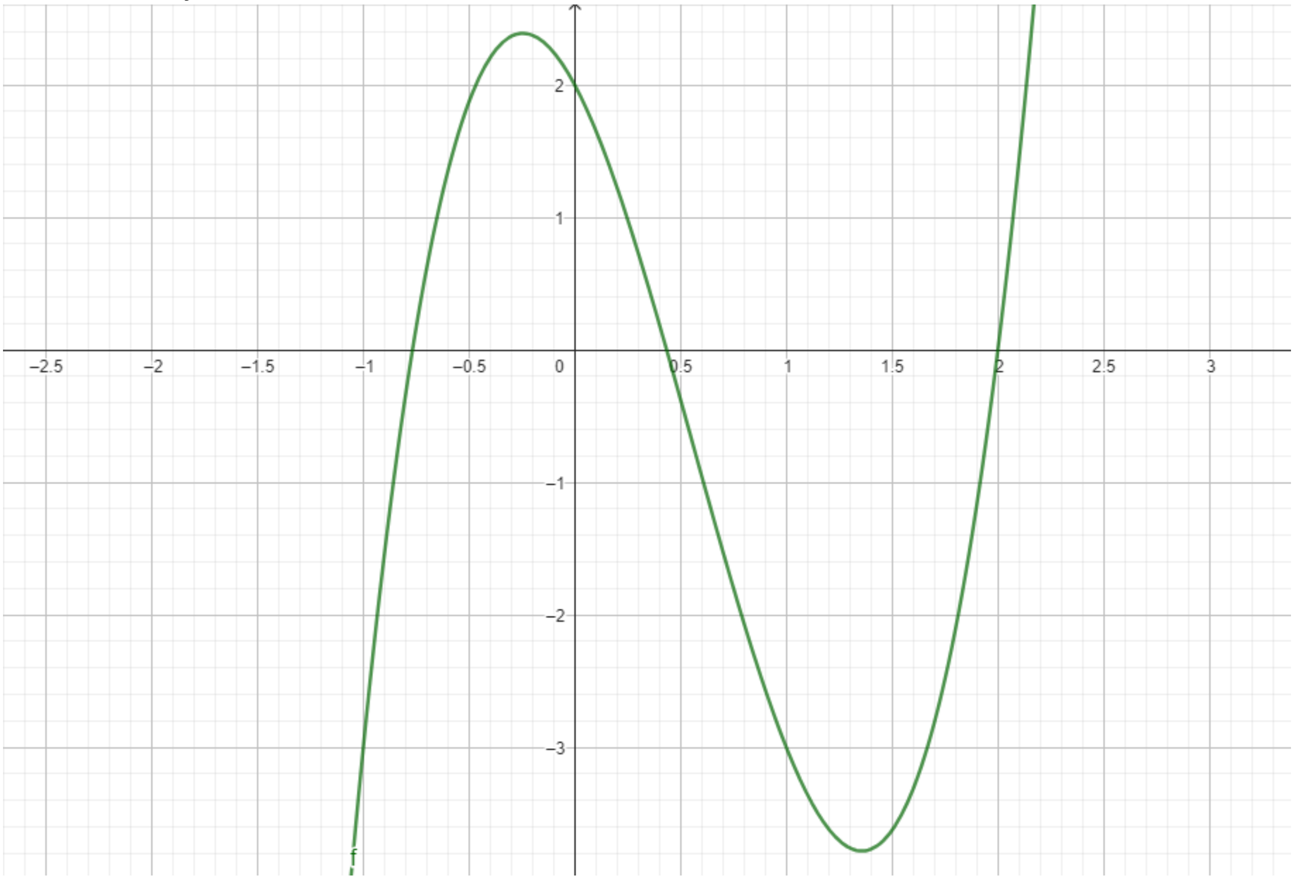
○ 637 €

○ 775 €

○ 627 €

○ 810 €

1.5 Määritä kuvasta yhden desimaalin tarkkuudella funktion *f* nollakohta/nollakohdat.



2 p.

PERUSTELU:

$x = -0{,}8;\ x = 0{,}4;\ x = 2{,}0$

○ $x = -0{,}8$ ja $x = 0{,}0$ ja $x = 0{,}4$ ja $x = 2{,}0$

○ $x = -0{,}8$ ja $x = 0{,}4$ ja $x = 2$

○ $x = -0{,}8$ ja $x = 0$ ja $x = 0{,}4$ ja $x = 2$

○ $x = -0{,}8$ ja $x = 0{,}4$ ja $x = 2{,}0$

○ $y = 2{,}0$

1.6 Opiskelija on pakannut makeisia YO-koetta varten kolmeen rasiaan. Yhdessä rasiassa on 10 kovaa piparminttunamua, toisessa rasiassa on 10 suklaanamua, jotka eivät ole pehmeitä eivätkä kovia, ja kolmannessa rasiassa on 5 pehmeää hedelmänamua sekä 5 pehmeää salmiakkinamua.

Koeaamuna opiskelija ottaa mukaansa kaksi rasiaa ja syö kokeessa kummastakin rasiasta 5 namua.

Mikä seuraavista vaihtoehdoista pitää paikkaansa? **2 p.**

PERUSTELU:

Minkä tahansa rasian kotiin jäämisen todennäköisyys on 1/3, joten vastatapahtuman eli mukaan tulemisen todennäköisyys on 1 - 1/3 = 2/3.

Suklaanamuja on jäljellä tasan 5 todennäköisyys on sama kuin suklaanamurasian mukaan tulemisen todennäköisyys.
Edellä mainittu pätee myös koviin piparminttunamuihin

Pehmeistä namuista on jäljellä
$P\left(5\ \text{hedelmää}\right)$
$= P\left(\text{pehmeiden rasia mukaan}\right)$ ja $P\left(1.\ \text{salmiakki ja 2. salmiakki ja 3. salmiakki ja 4. salmiakki ja 5. salmiakki}\right)$
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{378}$

- ○ $P\left(\text{pehmeitä namuja on jäljellä 5}\right) = \frac{1}{3}$
- ○ $P\left(\text{suklaanamurasia tulee mukaan}\right) = \frac{2}{3}$
- ○ Ei mikään mainituista vaihtoehdoista.
- ○ $P\left(\text{hedelmänamuja on jäljellä 5}\right) = \frac{1}{3}$
- ○ $P\left(\text{suklaanamurasia tulee mukaan}\right) = \frac{1}{3}$

2. Lukiomatematiikan perusasioita **12 p.**

1. Ratkaise yhtälö $\frac{x}{2} = x - 6$. **(3 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:
$\frac{x}{2} = x - 6$
$x = 2x - 12$
$-x = -12$
$x = 12$

PISTEYTYS:
- Nimittäjä poistettu oikein tai vastaava aloitus. (1 p.)
- $-x = -12$ tai vastaava (1 p.)
- vastaus (1 p.)

2. Määritä 10. jäsen geometrisessa lukujonossa 2, 6, 18, ... **(3 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:
$q = \frac{6}{2} = 3$
$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
$a_{10} = 2 \cdot 3^9 = 39366$

PISTEYTYS:
- q laskettu oikein. (1 p.)
- Jonon yleinen termi tai iterointi. (1 p.)
- vastaus (1 p.)

3. Olkoon funktio $f\left(x\right) = 2\left(x - 3\right) + 1$. Millä muuttujan x arvolla funktio saa arvon 99 ? **(3 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:
$f\left(x\right) = 99$
$2x - 6 + 1 = 99$
$2x = 104$
$x = 52$

PISTEYTYS:
- Yhtälö muodostettu oikein. (1 p.)

- Sulut avattu oikein. (1 p.)
- vastaus (1 p.)
- Kokeilemalla saatu vastaus. (max 1 p.)

4. Määritä sen suoran yhtälö, joka on yhdensuuntainen suoran $2x + y = 1$ kanssa ja kulkee pisteen $(0,\ 4)$ kautta. **(3 p.)**

   ESIMERKKIRATKAISU:
   $k = -2$ sillä $y = -2x + 1$
   $b = 4$ sillä leikkaa y -akselin kohdassa $y = 4$
   $y = -2x + 4$ tai $y + 2x - 4 = 0$ tai $y + 2x = 4$

   PISTEYTYS:
   - Ratkaistu k. (1 p.)
   - Ratkaistu b tai käytetty kaavaa y-y0=k(x-x0). (1 p.)
   - vastaus (1 p.)
   - Sijoitettu yhtälöön 2x+y=c piste (0,4) ja saatu c=4. (max. 3 p.)

3. Toisen asteen polynomifunktio **12 p.**

Olkoon polynomifunktio muotoa $f\,(x) = 2x^2 + 2x$.

1. Onko funktion kuvaaja ylös- tai alasaukeava paraabeli ja kulkeeko se origon kautta? **(3 p.)**

   ESIMERKKIRATKAISU:
   Toisen asteen termin kerroin >0, joten kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli.
   Koska $f(0) = 0$, niin kuvaaja kulkee origon kautta.

   PISTEYTYS:
   - Perusteltu paraabelin aukeavuus oikein. (1 p.)
   - Perusteltu origon kautta kulkeminen oikein. (2 p.)

2. Mikä on funktion arvo, kun $x = 3$? **(3 p.)**

   ESIMERKKIRATKAISU:
   $f\,(3) = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 2 \cdot 9 + 6 = 18 + 6 = 24$

   PISTEYTYS:
   - Oikea periaate. (1 p.)
   - Ratkaistu oikein. (2 p.)

3. Ratkaise funktion nollakohdat. **(6 p.)**

   ESIMERKKIRATKAISU:
   $f\,(x) = 0$
   $2x^2 + 2x = 0 \mid : 2$
   $x^2 + x = 0$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla(tai tulon nollasäännöllä):

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ a=1, b=1 ja c=0

$= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-0}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-1 \pm 1}{2}$

$x = 0 \text{ TAI } x = -1$

PISTEYTYS:
- Ymmärretty, mitä nollakohdat tarkoittavat. (2 p.)
- Saatu ratkaistua yksi nollakohta. (2 p.)
- Saatu ratkaistua toinen nollakohta. (2 p.)

4. Kokonaislukujen jakolasku **12 p.**

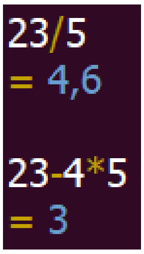
Kokonaislukujen jakolaskuun ja jaollisuuteen on tutustuttu jo alakoulussa.

Alakoulun matematiikassa esimerkiksi kokonaislukujen jakolasku 20/3 ratkaistaan seuraavasti: 20/3 = 6, jää 2. Tämä tarkoittaa sitä, että luku 3 menee 6 kertaa lukuun 20 ja jää 2. Yleisesti kokonaislukujen a ja b jakolaskusta a/b saadaan tulokseksi (vaillinnainen) osamäärä ja jakojäännös, kunhan b ei ole 0.

Edellisessä jakolaskussa osamäärä on 6 ja jakojäännös on 2. Mikäli jakojäännös on nolla eli jako menee tasan, sanotaan, että luku a on jaollinen luvulla b , tai että luku b jakaa luvun a .

1. Määritä osamäärä ja jakojäännös, kun luku 23 jaetaan luvulla 5. **(2 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:

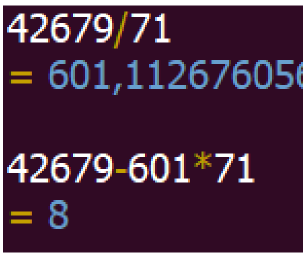


Osamäärä 4 ja jakojäännös 3.

PISTEYTYS:
- osamäärä (1 p.)
- jakojäännös (1 p.)
- Pelkät vastaukset riittää.

2. Määritä osamäärä ja jakojäännös, kun luku 42679 jaetaan luvulla 71. **(2 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:



Osamäärä 601 ja jakojäännös 8.

PISTEYTYS:
- osamäärä (1 p.)
- jakojäännös (1 p.)
- Pelkät vastaukset riittää.

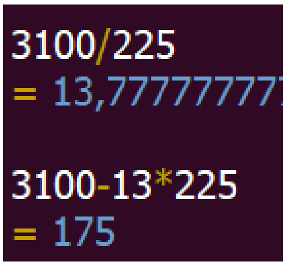
3. Esitä murtoluku $\frac{13}{5}$ sekalukuna. **(2 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:
$2\frac{3}{5}$

PISTEYTYS:
- kokonaisosa (1 p.)
- murto-osa (1 p.)

4. Lauri hakee armeijan erikoisjoukkoihin ja tavoittelee Cooperin testissä tulosta 3100 metriä. Testi juostaan urheiluhallissa 225 metriä pitkällä radalla. Kuinka monta kokonaista kierrosta Laurin pitää juosta? Kuinka pitkä matka hänen pitää juosta vielä kokonaisten kierrosten lisäksi? **(2 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:



$\frac{3100}{225} = 13$, jää 175
Laurin pitää juosta 13 kokonaista kierrosta ja lisäksi 175 metriä.

PISTEYTYS:
- Kokonaiset kierrokset. (1 p.)
- lisämatka (1 p.)

5. Kello on 15:00. Mitä kello on 100 tunnin päästä? **(2 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:
Jakolaskun $\frac{100}{24}$ jakojäännös on 4.
Kello on 19:00.

PISTEYTYS:
- jako luvulla 24 (1 p.)
- vastaus (1 p.)

6. Tänään on tiistai. Mikä viikonpäivä on 999 päivän kuluttua? **(2 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:
Jakolaskun $\frac{999}{7}$ jakojäännös on 5.
Viikonpäivä on sunnuntai.

PISTEYTYS:
- jako luvulla 7 (1 p.)
- vastaus (1 p.)

Voit käydä tarkastelemassa A-osan vastauksiasi nyt.
Palautettuasi A-osan et voi enää muokata A-osan vastauksia.

Siirry tarkastelemaan vastauksiasi

Tarkastelun jälkeen voit palata kokeeseen jatkamaan tehtäviin vastaamista.

...

Saat estetyt laskinohjelmat käyttöösi palautettuasi A-osan.

Palauta A-osa

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Arjen matematiikkaa 12 p.

1. Mehutiivistepullon kyljessä on teksti "1 osa tiivistettä sekoitetaan 4 osaan vettä". Kuinka paljon mehutiivistettä ja kuinka paljon vettä tarvitaan, kun halutaan 3,0 litraa mehua? **(6 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:
Mehutiivistettä x litraa
$x + 4x = 3$
$5x = 3$
$x = \frac{3}{5}$
$x = 0{,}6$ tai solve(x+4x=3,x)
Vettä
$3 - 0{,}6 = 2{,}4$
Vastaus: Tarvitaan 0,6 l mehutiivistettä ja 2,4 l vettä.
Tai päättelemällä:
Koska valmiissa mehussa on 1/5 tiivistettä, niin sitä on kolmessa litrassa $\frac{1}{5} \cdot 3 = 0{,}6$ litraa ja loput $2{,}4$ litraa on vettä.

PISTEYTYS:
- Muuttujan tai muuttujien esittely. (1 p.)
- Yhtälö tai yhtälöpari. (2 p.)
- Yhtälön tai yhtälöparin ratkaisu. (2 p.)
- vastaus (1 p.)

2. Bonus tarkoittaa autovakuutuksen tai muun ajoneuvovakuutuksen vakuutusmaksusta annettavaa alennusta. Autoilija, jolla oli 80 % bonus, maksoi autovakuutuksesta 360 euroa vuodessa. Kuinka paljon hän olisi joutunut maksamaan, jos hänellä ei olisi ollut lainkaan bonuksia? **(6 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:

Vakuutusmaksu ilman bonuksia x

$100\%-80\% = 0.2$

$\text{solve}(0.2\cdot x=360,x) \Rightarrow x=1800.$

Vastaus: 1800 euroa

PISTEYTYS:
- muuttujan esittely (1 p.)
- prosenttikerroin (1 p.)
- yhtälö (2 p.)
- yhtälön ratkaisu (1 p.)
- vastaus (1 p.)
- Järkevä sanallinen päättely, perustelu ja oikea vastaus. (max. 6p.)

6. Neljäkkään pinta-ala 12 p.

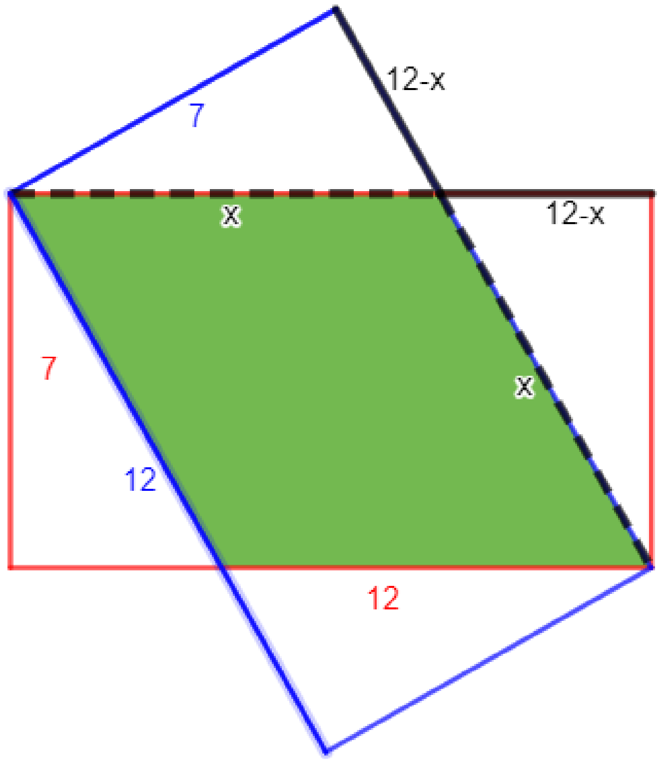
Aineisto

6.A Kuva: Neljäkäs

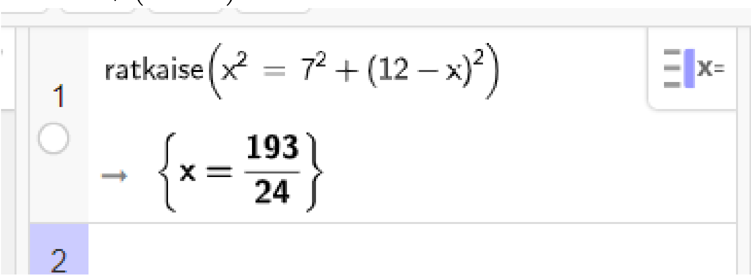
Määritä aineistossa 6.A annetun väritetyn neljäkkään pinta-ala tarkkana arvona ja kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. Kummankin suorakulmion sivujen pituudet ovat 7 ja 12.

ESIMERKKIRATKAISU:

Merkitään neljäkkään sivut .



Sivun pituus saadaan Pythagoraan lauseella:
$x^2 = 7^2 + (12 - x)^2$



Neljäkkään pinta-ala:

Neljäkkään kanta on x ja sen korkeus on punaisen suorakulmion korkeus 7, joten
$A_{\text{neljäkäs}} = \frac{193}{24} \cdot 7 = \frac{1351}{24} = 56{,}29... \approx 56$

Neljäkkään pinta-alan tarkka arvo on siis $\frac{1351}{24}$ ja kahden merkitsevän numeron tarkkuudella likiarvo 56.

GeoGebralla tehty graafinen ratkaisu kelpaa myös.

PISTEYTYS:
- lähdetty selvittämään neljäkkään sivun pituuutta (1 p.)
- päätelty suorakulmaisen kolmion hypotenuusan ja neljäkkään sivun yhteys (1 p.)
- suorakulmaisen kolmion lyhyempi kateetti on 12- x , jos hypotenuusa on x (1 p.)
- käytetty Pythagoraan lausetta (1 p.)
- ratkaistu hypotenuusan (eli neljäkkään sivun / x :n) pituus oikein (2 p.)
- käytetty jotakin neljäkkään pinta-alan kaavaa (1 p.)
- sijoitettu pinta-alan kaavaan siihen kuuluvat luvut (vaikka niissä olisi virheitä, ei vähennyksiä tässä kohdassa) (2 p.)
- pinta-alan tarkka-arvo oikein (2 p.)
- likiarvo oikein (1 p.)

7. Omakotitalon sähkönkulutus **12 p.**

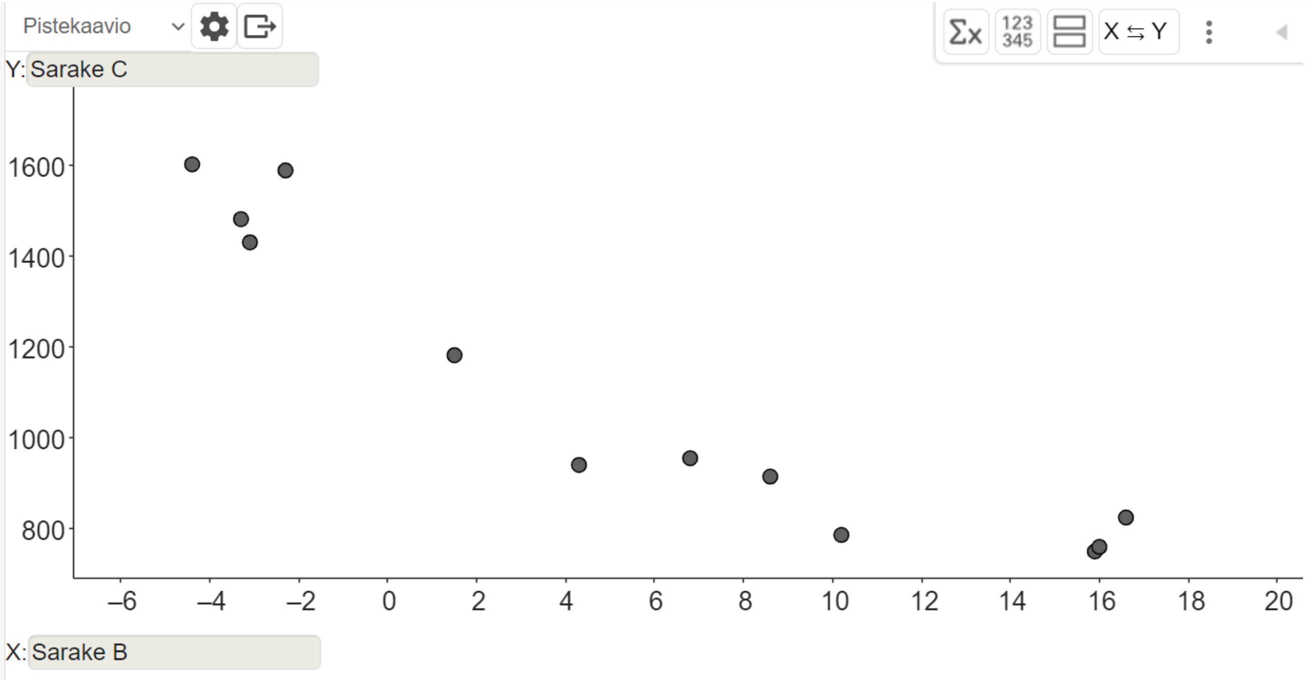
Aineisto

7.A Taulukko: Sähkönkulutus

Oheisessa tiedostossa on taulukoitu kuukauden keskilämpötiloja (°C), omakotitalon sähkönkulutusta (kWh) ja sähkölaskun suuruutta (€).

1. Tee hajontakuvio, jossa pystyakselilla on kuukauden sähkönkulutus ja vaaka-akselilla kuukauden keskilämpötila. **(2 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:



PISTEYTYS:
- hajontakuvio (2 p.)

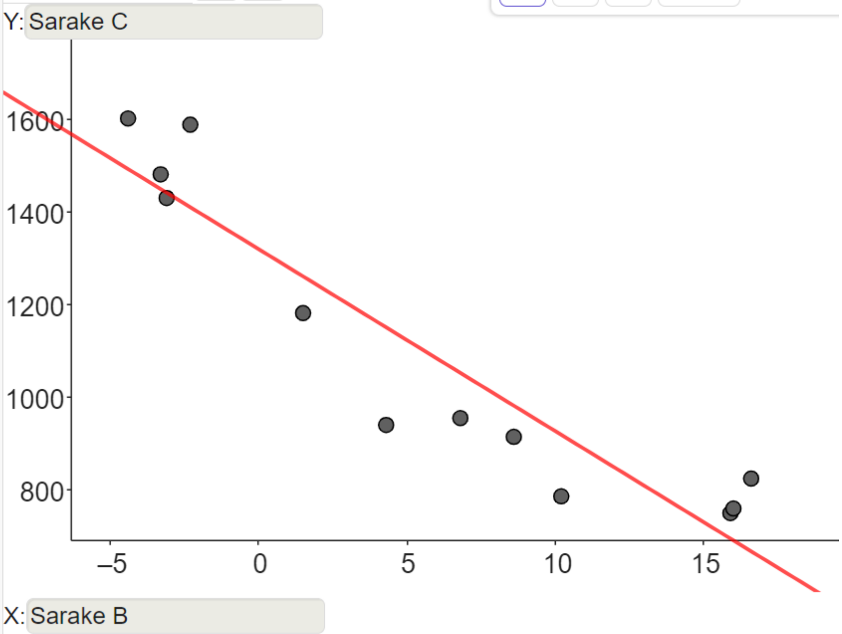
2. Sovita aineistoon regressiosuora ja määritä korrelaatiokerroin. Miten luonnehtisit korrelaation suuruutta? **(3 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:

Tilastot

KeskiarvoX	5.5667
KeskiarvoY	1100.7883
Sx	7.9923
Sy	336.4817
r	-0.9337
ρ	-0.9231
Sxx	702.6467
VarianssiY	1245419.26
Sxy	-27621.0967
R²	0.8718
SSE	159631.7408

Pistekaavio



Regressiomalli

Lineaarinen

$$y = -39.3101\,x + 1319.6144$$

Korrelaatiokerroin on -0,93 ja korrelaatio on voimakas.

PISTEYTYS:
- sovitus (1 p.)
- Saatu korrelaatiokerroin r. (1 p.)
- Luonnehdittu korrelaatiota. (1 p.)

3. Arvioi regressiosuoran avulla, kuinka suuri sähkönkulutus olisi, jos kuukauden keskilämpötila on -16 °C? **(2 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:

Regressiomalli

Lineaarinen

$$y = -39.31\,x + 1319.61$$

Tarkka arvo: x = -16 y = 1948.5757

Sähkönkulutus olisi 1950 kWh.

PISTEYTYS:
- sijoitus suoran yhtälöön (1 p.)
- vastaus (1 p.)

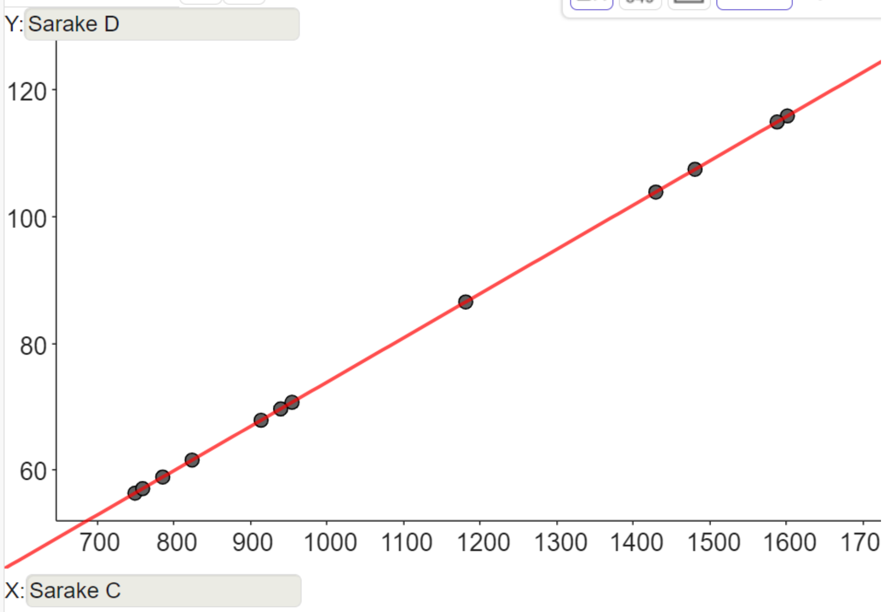
4. Muodosta lineaarinen malli $y = k \cdot x + b$, jossa y on sähkölaskun suuruus euroina ja x on sähkönkulutus kilowattitunteina. Mitkä ovat kertoimien k ja b käytännön merkitys sähkölaskun muodostumisen kannalta? **(5 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:
Käytetään regressiosuoraa

Tilastot

KeskiarvoX	1100.7883
KeskiarvoY	80.8967
Sx	336.4817
Sy	23.5186
r	1
ρ	1
Sxx	1245419.26
VarianssiY	6084.3595
Sxy	87049.2825
R^2	1
SSE	0.0007

Pistekaavio



Regressiomalli

Lineaarinen

$$y = 0.0699\,x + 3.9564$$

tai

otetaan kaksi pistettä suoralta

Sähkön kulutus kilowattitunteima	Sähkölaskun suuruus euroina
914,16	67,85
954,65	70,68

joista saadaan laskettua kulmakerroin

$k = \frac{70{,}68-67{,}85}{954{,}65-914{,}16} \approx 0{,}0699$

ja suoran yhtälö muodossa

$y - 67{,}85 = \frac{70{,}68-67{,}85}{954{,}65-914{,}16} \cdot (x - 914{,}16)$

josta y

$y = 0{,}069894 \cdot x + 3{,}95659$

Tällöin $b = 3{,}96$ on kuukauden perusmaksu euroina ja $k = 0{,}0699$ on yhden kilowattitunnin hinta euroina.

PISTEYTYS:

- Regressiosuoran idea tai kaksi pistettä suoralta. (1 p.)
- Ratkaistu k ja selitetty sen merkitys. (1 p. + 1 p.)
- Ratkaistu b ja selitetty sen merkitys. (1 p. + 1 p.)

8. Remonttilaina ja korkokatto 12 p.

Aineisto

8.A Teksti: Korkokatto

30 000 euron tasalyhennyslaina otettiin viideksi vuodeksi ja sen korkona oli 12 kk euribor + pankin marginaali $4{,}5\ \%$. Lainanottohetkellä 12 kk euribor oli $3{,}02\ \%$ ja sitä seuraavina korontarkastuspäivinä se oli $4{,}17\ \%,\ 5{,}20\ \%,\ 5{,}56\ \%\ \text{ja}\ 4{,}39\ \%$. Lainaa maksetaan takaisin pankille kuukausittain.

Lainanottaja halusi lainaan $8{,}5\ \%$ korkokaton ja maksoi siitä lainanottamishetkellä 1300 euroa. Oliko tämä taloudellisesti kannattavaa?

ESIMERKKIRATKAISU:

5 vuotta on 60 kuukautta.
Lyhennyksen osuus jokaisesta maksuerästä on
$\frac{30000}{60} = 500\ €$

kk	Maksu	Lyhen	Korko	7,52 %	lainaa jäljellä	kk	Maksu	Lyhen	Korko	7,52	lainaa jäljellä	
1	688	500	188		30000	1	688	500	188		30000	Korko laskettu
2	684,867	500	184,867		29500	2	684,867	500	184,867		29500	"=lainaa jäljellä * korkoprosentti/12/100"
3	681,733	500	181,733		29000	3	681,733	500	181,733		29000	Maksu laskettu
4	678,6	500	178,6		28500	4	678,6	500	178,6		28500	"=lyhen + korko"
5	675,467	500	175,467		28000	5	675,467	500	175,467		28000	
6	672,333	500	172,333		27500	6	672,333	500	172,333		27500	
7	669,2	500	169,2		27000	7	669,2	500	169,2		27000	
8	666,067	500	166,067		26500	8	666,067	500	166,067		26500	
9	662,933	500	162,933		26000	9	662,933	500	162,933		26000	
10	659,8	500	159,8		25500	10	659,8	500	159,8		25500	
11	656,667	500	156,667		25000	11	656,667	500	156,667		25000	
12	653,533	500	153,533		24500	12	653,533	500	153,533		24500	
				8,67 %						8,5		
13	673,4	500	173,4		24000	13	670	500	170		24000	
14	669,788	500	169,788		23500	14	666,458	500	166,458		23500	
15	666,175	500	166,175		23000	15	662,917	500	162,917		23000	
16	662,563	500	162,563		22500	16	659,375	500	159,375		22500	
17	658,95	500	158,95		22000	17	655,833	500	155,833		22000	
18	655,338	500	155,338		21500	18	652,292	500	152,292		21500	
19	651,725	500	151,725		21000	19	648,75	500	148,75		21000	
20	648,113	500	148,113		20500	20	645,208	500	145,208		20500	
21	644,5	500	144,5		20000	21	641,667	500	141,667		20000	
22	640,888	500	140,888		19500	22	638,125	500	138,125		19500	
23	637,275	500	137,275		19000	23	634,583	500	134,583		19000	
24	633,663	500	133,663		18500	24	631,042	500	131,042		18500	
				9,70 %						8,5		
25	645,5	500	145,5		18000	25	627,5	500	127,5		18000	
26	641,458	500	141,458		17500	26	623,958	500	123,958		17500	
27	637,417	500	137,417		17000	27	620,417	500	120,417		17000	
28	633,375	500	133,375		16500	28	616,875	500	116,875		16500	
29	629,333	500	129,333		16000	29	613,333	500	113,333		16000	
30	625,292	500	125,292		15500	30	609,792	500	109,792		15500	
31	621,25	500	121,25		15000	31	606,25	500	106,25		15000	
32	617,208	500	117,208		14500	32	602,708	500	102,708		14500	
33	613,167	500	113,167		14000	33	599,167	500	99,1667		14000	
34	609,125	500	109,125		13500	34	595,625	500	95,625		13500	
35	605,083	500	105,083		13000	35	592,083	500	92,0833		13000	
36	601,042	500	101,042		12500	36	588,542	500	88,5417		12500	
				10,06 %						8,5		
37	600,6	500	100,6		12000	37	585	500	85		12000	
38	596,408	500	96,4083		11500	38	581,458	500	81,4583		11500	
39	592,217	500	92,2167		11000	39	577,917	500	77,9167		11000	
40	588,025	500	88,025		10500	40	574,375	500	74,375		10500	
41	583,833	500	83,8333		10000	41	570,833	500	70,8333		10000	
42	579,642	500	79,6417		9500	42	567,292	500	67,2917		9500	
43	575,45	500	75,45		9000	43	563,75	500	63,75		9000	
44	571,258	500	71,2583		8500	44	560,208	500	60,2083		8500	
45	567,067	500	67,0667		8000	45	556,667	500	56,6667		8000	
46	562,875	500	62,875		7500	46	553,125	500	53,125		7500	
47	558,683	500	58,6833		7000	47	549,583	500	49,5833		7000	
48	554,492	500	54,4917		6500	48	546,042	500	46,0417		6500	
				8,89 %						8,5		
49	544,45	500	44,45		6000	49	542,5	500	42,5		6000	
50	540,746	500	40,7458		5500	50	538,958	500	38,9583		5500	
51	537,042	500	37,0417		5000	51	535,417	500	35,4167		5000	
52	533,338	500	33,3375		4500	52	531,875	500	31,875		4500	
53	529,633	500	29,6333		4000	53	528,333	500	28,3333		4000	
54	525,929	500	25,9292		3500	54	524,792	500	24,7917		3500	
55	522,225	500	22,225		3000	55	521,25	500	21,25		3000	
56	518,521	500	18,5208		2500	56	517,708	500	17,7083		2500	
57	514,817	500	14,8167		2000	57	514,167	500	14,1667		2000	
58	511,113	500	11,1125		1500	58	510,625	500	10,625		1500	
59	507,408	500	7,40833		1000	59	507,083	500	7,08333		1000	
60	503,704	500	3,70417		500	60	503,542	500	3,54167		500	
SUMMA	36590,3	30000	6590,3			SUMMA	36214,2	30000	6214,2			

Ilman korkokattoa korkoa maksetaan 6590,30 € ja korkokaton kanssa 6214,20 €, joten ei kannattanut maksaa korkokatosta 1300 €.

PISTEYTYS:

- käy ilmi, että on ymmärretty lyhennyksen olavan saman suuruinen ja maksuerien eri suuruisia (2 p.)
- osattu laskea lyhennyksen osuus jokaisesta maksuerästä (2 p)
- osattu ratkaista koron määrä ilman korkokattoa (4 p.)
- ja vastaavasti koron määrä korkokaton kanssa (2 p.)
- todettu perustellen lopputulos (2 p.)

9. Tulppaaneja 12 p.

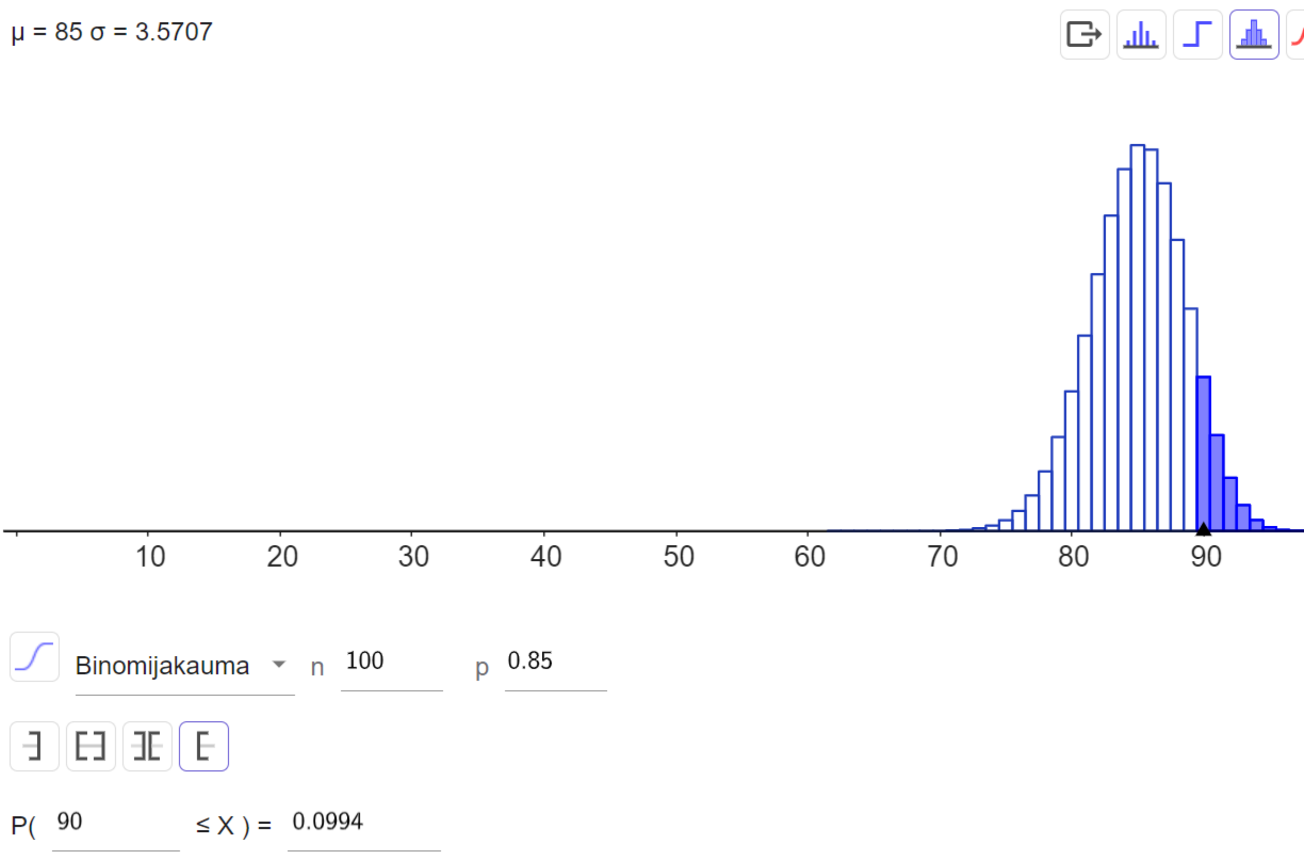
Aineisto

9.A Kuva: Tulppaani

Todennäköisyys, että tulppaanin sipuli itää, on 0,85.

1. Jos puutarhuri istuttaa 100 sipulia, millä todennäköisyydellä niistä itää vähintään 90 sipulia? **(6 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:
Kyseessä on toistokoe, $n = 100$ ja $p = 0{,}85$. Käytetään binomijakaumaa.



P(vähintään 90 sipulia itää)=0,0994.

PISTEYTYS:
- toistokoe (1 p.)
- n ja p (1 p.)
- X>=90 (1 p.)
- valittu oikea työkalu tai komento (1 p.)
- vastaus (2 p.)

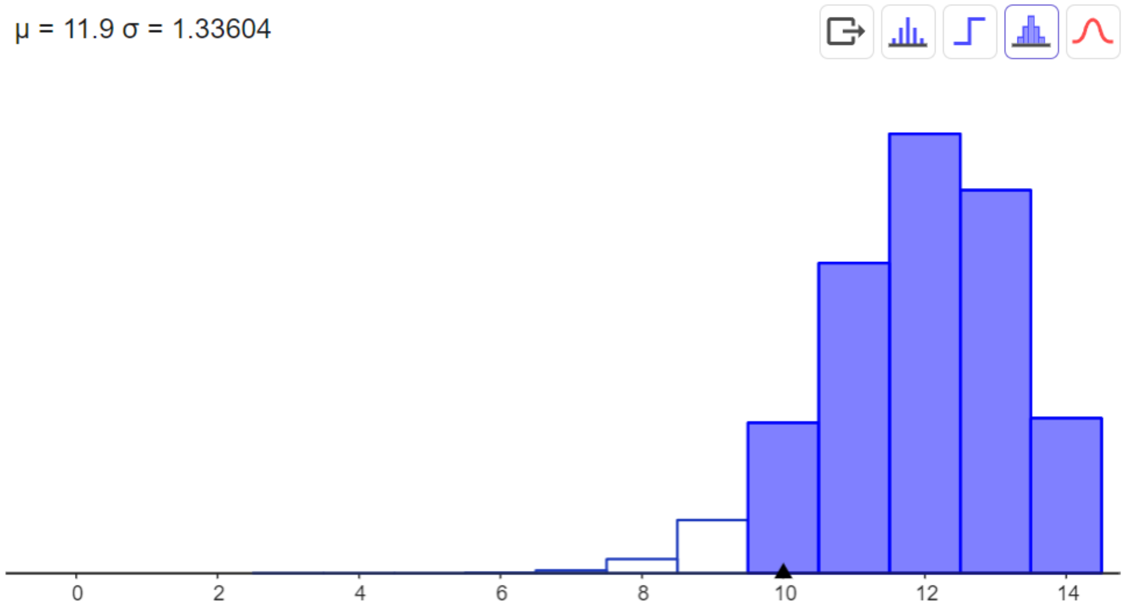
2. Kuinka monta sipulia on istutettava, jotta niistä ainakin 10 itäisi vähintään 95 % todennäköisyydellä? **(6 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:
Taulukoidaan käyttäen kaavaa binomCdf(a1,0.85,10,a1) solussa b1 ja kopioimalla kaavaa alaspäin.

	A n	B todennäköisyys	C
=			
1	10	0.1968744044	
2	11	0.4921860096	
3	12	0.7358180861	
4	13	0.8819973314	
5	14	0.9532597135	
6	15	0.983189914	
7	16	0.9944137391	
8	17	0.9982619078	
9	18	0.9994885115	
10	19	0.9998564926	
11	20	0.9999613673	
12	21	0.9999899694	
13	22	0.9999974775	
14			

TAI
käytetään laskuria ja taulukoidaan todennäköisyydet

μ = 11.9 σ = 1.33604



k	P(X = k)
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0.00003
6	0.00029
7	0.00188
8	0.00932
9	0.03521
10	0.09977
11	0.20558
12	0.29124
13	0.2539
14	0.10277

Binomijakauma n 14 p 0.85

P(10 ≤ X) = 0.95326

	A	B
1	n	todennäköisyys
2	10	0.1969
3	11	0.49219
4	12	0.73582
5	13	0.882
6	14	0.95326
7	15	0.98319
8	16	0.99441
9	17	0.99826
10	18	0.99949
11	19	0.99986
12	20	0.99996
13	21	0.99999

Sipuleja tulee istuttaa vähintään 14.

PISTEYTYS:
- Taulukoitu n=10,11,12,13,14,15 ja kaava tai työkalu esitelty. (3 p. + 1 p.)
- vastaus (2 p.)

B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Maailman jyrkin funikulaari 12 p.

Aineisto

10.A Kuva: Funikulaari

1. Stoosbahn on Keski-Sveitsissä Schwyzin ja Morschachin kunnissa sijaitseva maailman jyrkin kiskoköysirata eli funikulaari. Selitä funikulaarin aineistossa 10.A olevan merkinnän 110 % = 47,7 ° idea ja perustele se laskemalla. **(6 p.)**

   ESIMERKKIRATKAISU:
   Olkoon suurempi kulma α .
   Kuvan merkinnöin
   $\tan \alpha = \frac{110}{100}$
   $\alpha = \arctan(\frac{110}{100}) \approx 47{,}7°$
   Toisaalta
   $\frac{110}{100} \cdot 100\ \% = 110\ \%$
   eli pystysuora siirtymä on 110% vaakasuorasta siirtymästä.

   PISTEYTYS:
   - Kulman esittely, oikea trigonometrinen yhtälö ja sen ratkaisu. (1 p. + 1 p. + 1 p.)
   - Oikea prosenttilasku, sen vastaus ja tulkinta. (1 p. + 1 p. + 1 p.)
   - Selitetty ideat oikein, mutta ei laskettu mitään. (max. 2 p.)

2. Turun funikulaari on Suomen ensimmäinen ulkona kulkeva kaupunkivinohissi, joka sijaitsee Kakolanmäellä. Radan pituus on 130 metriä ja korkeuseroa ala- ja yläaseman välillä on 30 metriä. Määritä Turun funikulaarin jyrkkyys samalla lailla kuin edellisessä kohdassa eli asteina ja prosentteina. **(6 p.)**

   ESIMERKKIRATKAISU:
   Asteina
   $\sin \alpha = \frac{30}{130}$
   $\alpha = \arcsin(\frac{30}{130}) \approx 13{,}3°$
   Prosentteina
   $\frac{30}{\sqrt{130^2 - 30^2}} \approx 0{,}237 = 23{,}7\%$

   PISTEYTYS:
   - oikea kuva tilanteesta tai selitys tekstinä (1 p.)
   - oikea yhtälö ja saatu kulma oikein (1 p. + 1 p.)
   - laskettu toinen kateetti Pythagoraan lauseella (2 p.)
   - jyrkkyys prosentteina (1 p.)

11. Eksponentiaalinen malli **12 p.**

Lääketieteessä käytetyn radiojodin tyypillisen hoitoannoksen radioaktiivisuus on keskimäärin 650 MBq . Natriumjodidina annetusta hoitoannoksesta noin $60\ \%$ kulkeutuu kilpirauhaseen lopun $40\ \%$ jäädessä veriplasmaan.

$^{131}\mathrm{I}$ efektiivinen puoliintumisaika on veriplasmassa noin 12 tuntia ja kilpirauhasessa noin 6 vuorokautta. Efektiivinen puoliintumisaika on yhdistelmä fysikaalisesta ja biologisesta puoliintumisajasta. Käytännössä se tarkoittaa aikaa, jonka kuluessa puolet aktiivisuudesta on poistunut kudoksesta.
Jäljellä olevaa radioaktiivisuuden määrää kuvaa funktio $f(x) = Aq^x$, jossa
$A = \text{radioaktiivisuus alkuhetkellä}$
$q = \text{radioaktiivisuuden muutoskerroin annetussa aikayksikössä}$
$x = \text{kulunut aika annetussa aikayksikössä}$

1. Laske, kuinka monta Bq on veriplasmassa, ja kuinka monta Bq kilpirauhasessa hoitoannoksen saamisen jälkeen. **(2 p.)**

   ESIMERKKIRATKAISU:

   Hoitoannoksen radioaktiivisuus jakautuu
   veriplasmaan:
   $0{,}40 \cdot 650 \text{ MBq} = 260 \text{ MBq} = 260 \cdot 10^6 \text{ Bq}$

   kilpirauhaseen:
   $0{,}60 \cdot 650 \text{ MBq} = 390 \text{ MBq} = 390 \cdot 10^6 \text{ Bq}$

   PISTEYTYS:
   - Kummastakin oikeasta ratkaisusta 1 p. eli yhteensä (2 p.) .

2. Laske radioaktiivisuuden muutoskertoimet veriplasmassa q_{vp} ja kilpirauhasessa q_{kr}, kun x on alkuhetkestä kuluneita tunteja. **(6 p.)**

   ESIMERKKIRATKAISU:
   $Aq_{vp}^{12} = 0{,}5A \mid : A$
   $q_{vp}^{12} = 0{,}5 \mid \sqrt[12]{}$
   $q_{vp} = \pm\sqrt[12]{0{,}5} = 0{,}94387431\ldots$ muutoskerroin ei voi olla <0

   6 vuorokautta tunteina on $6 \cdot 24 = 144$
   $Aq_{kr}^{144} = 0{,}5A \mid : A$
   $q_{kr}^{144} = 0{,}5 \mid \sqrt[144]{}$
   $q_{kr} = \pm\sqrt[144]{0{,}5} = 0{,}99519804\ldots$ muutoskerroin ei voi olla <0

   PISTEYTYS:
   - Sijoitettu oikeat arvot. (1 p. + 1 p.)
   - Hylätty negatiiviset juuret. (1 p.)
   - Vuorokaudet muutettu tunneiksi. (1 p.)
   - Saatu oikeat tulokset. (1 p. + 1 p.)

3. Ihmiskehossa on luonnostaan radioaktiivisuutta noin 7000 Bq.

Laske kuinka monta vuorokautta kuluu siihen, että annetusta annoksesta on jäljellä saman verran kuin kehossa on luonnostaan radioaktiivisuuutta. **(4 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:

$260 \cdot 10^6 \cdot 0{,}94387431...^x + 390 \cdot 10^6 \cdot 0{,}99519804...^x = 7000$

RatkaiseNumeerisesti$(260 \cdot 10^6 \cdot 0.94387431^x + 390 \cdot 10^6 \cdot 0.99519804^x = 7000)$

$\rightarrow \ \{\mathbf{x = 2270.26733}\}$

Aikaa kuluu

$\frac{2270{,}2673...}{24} = 94{,}5944... \ \approx 95$ vuorokautta

PISTEYTYS:

- Oikein laadittu yhtälö. (2 p.)
- Ratkaistu yhtälöstä aika. (1 p.)
- Muutettu tunnit vuorokausiksi. (1 p.)

12. Taidelasia 12 p.

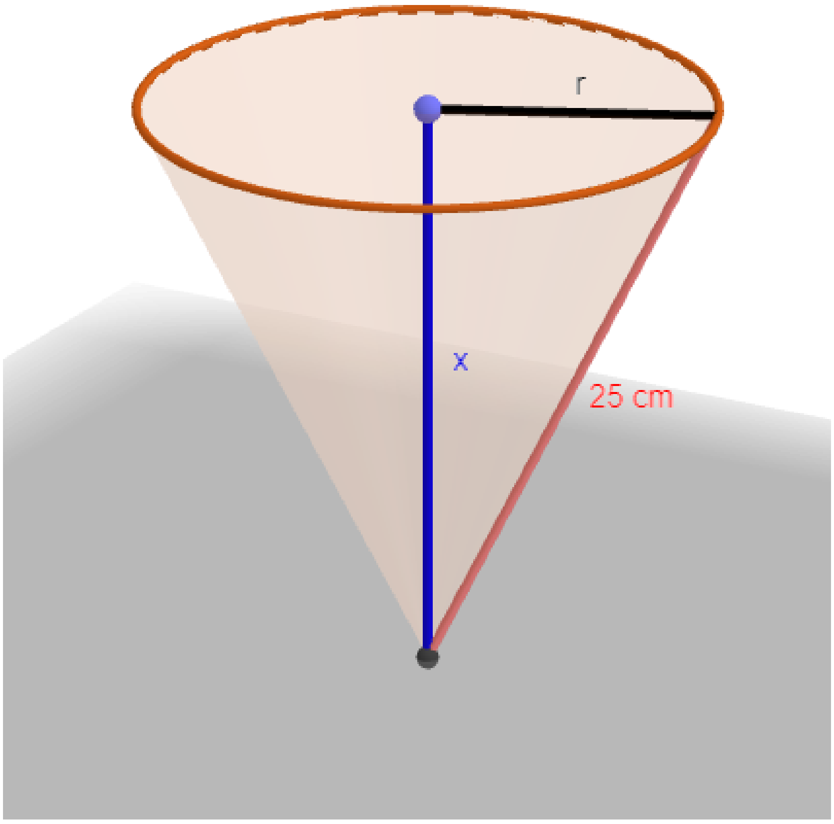
Aineisto

12.A Kuva: Lasimalja

Ympyrälieriön muotoisesta lasinpalasta, jonka tiheys on 3600 kg/m^3, tehdään lasimalja kaivertamalla siihen ympyräkartion muotoinen tyhjä tila. Tämän ympyräkartion sivujanan pituus on 25 cm.

1. Määritä kartion pohjaympyrän säde korkeuden funktiona sivujanan pituuden ollessa 25. **(2 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:



Kartion korkeus (maljan syvyys) olkoon *x* .
Määritetään kartion pohjaympyrän säde *r* .
$r^2 + x^2 = 25^2$
$r^2 = 625 - x^2$
$f(r) = \sqrt{625 - x^2}$

PISTEYTYS:
- Oivallettu käyttää pythagoraan lausetta. (1 p.)
- Sijoitettu ja saatu vastaus. (1 p.)

2. Millä välillä kartion korkeus voi vaihdella? Perustele. **(2 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:
Rajoite-epäyhtälöt
x > 0, koska kyseessä pituusmitta
x < 25, koska kateetti ei voi olla pidempi kuin hypotenuusa
Tutkitaan siis väliä $]0,\ 25[$.
PISTEYTYS:
- Alaraja perusteluineen. (1 p.)
- Yläraja perusteluineen. (1 p.)
- Jos annettu vain ala- ja yläraja ilman perustelua, max 1 p.

3. Määritä maljan (kartion) tilavuus korkeuden funktiona. **(2 p.)**

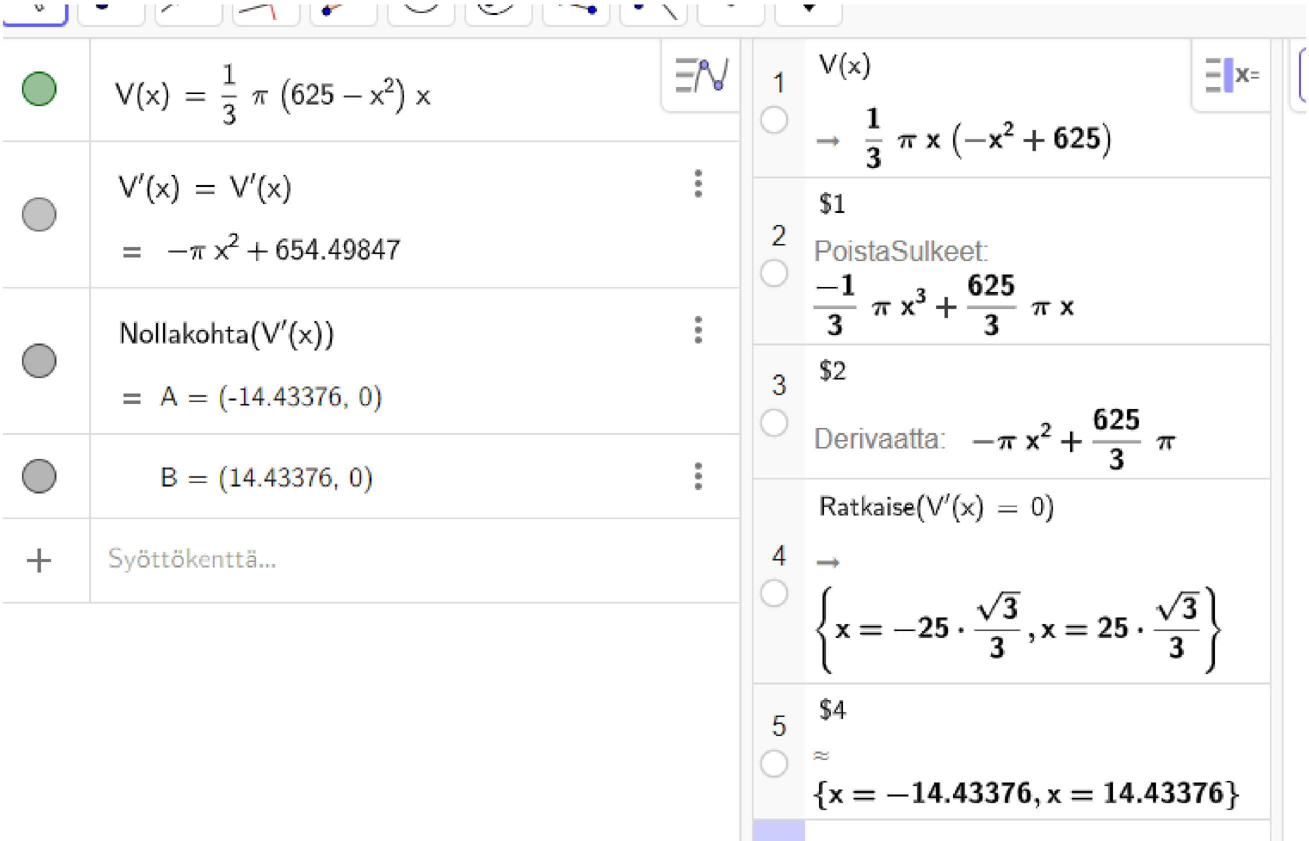
ESIMERKKIRATKAISU:
$V(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot x = \frac{1}{3}\pi\left(625 - x^2\right) \cdot x$

PISTEYTYS:
- Funktio merkitty oikein. (1 p.)
- Sijoitettu oikein. (1 p.)

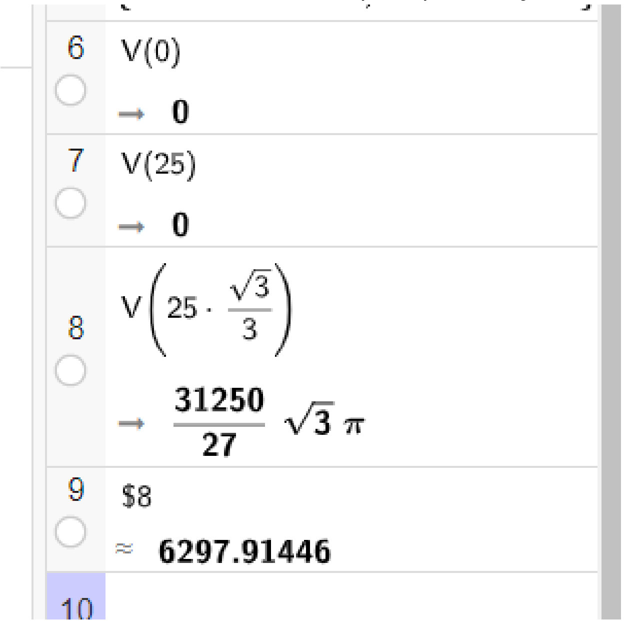
4. Mikä on lasimaljan (kartion) suurin mahdollinen tilavuus? **(3 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:

Tilavuusfunktiota voidaan tutkia suljetulla välillä, jolloin funktio saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välille olevassa derivaatan nollakohdassa.



Derivaatan nollakohdiksi saadaan $x = \pm 14{,}4337\ldots$, josta tarkasteluvälille sijoittuu 14,4337...
Tutkitaan siis funktion arvo välin päätepisteissä ja tässä derivaatan nollakohdassa



Maljan (kartion) suurin tilavuus on
$6297{,}91446\ldots\ \mathrm{cm}^3 \ = 6{,}29791446\ldots\ \mathrm{dm}^3 \ \approx 6{,}3\ \mathrm{dm}^3$

PISTEYTYS:
- Derivoitu ja saatu derivaatan nollakohdat, joista toinen hylätty. (1 p.)

- Tutkittu päätepisteet ja derivaatan nollakohta. (1 p.)
- Valittu suurin tilavuus järkevällä tarkkuudella + yksikössä. (1 p.)

5. Mikä on maljan massa, kun lasia on oltava vähintään 1,0 cm paksuudelta kaiverretun kartion ja astian ulkoreunan välissä? **(3 p.)**

ESIMERKKIRATKAISU:

Maljan ulkoreunan säde on

$$R \;=\; 1{,}0 \;+r \;=\; 1{,}0+\sqrt{625-x^2}$$

$$=1{,}0+\sqrt{625-\left(25\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=21{,}41241452\ldots(\mathrm{cm})$$

Maljan korkeus on

$$h=1{,}0+x \;=\; 1{,}0+25\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=15{,}4337\ldots\;(\mathrm{cm})$$

Maljan lasimassan tilavuus

$$V_{\text{lasi}} \;=V_{\text{lieriö}}-V_{\text{kartio}}=\pi R^2 h-V_{\text{kartio}}$$

8 $V\left(25\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\rightarrow \frac{31250}{27}\sqrt{3}\,\pi$

9 $8

$\approx$ 6297.91446

10 $\pi\cdot 21.41241^2\left(25\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)-\$9$

$\approx$ 15932.75925

11

$$V_{\text{lasi}}=15932{,}75925\ \mathrm{cm}^3=15{,}93275925\ \mathrm{dm}^3$$

Lasimaljan massa

$$m=\rho V=3{,}600\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}\cdot 15{,}93275325\ \mathrm{dm}^3=57{,}35793\ \mathrm{kg}\ \approx 57\ \mathrm{kg}$$

PISTEYTYS:
- Päätelty säde ja korkeus. (1 p.)
- Saatu lasimassan tilavuus. (1 p.)
- Saatu oikea massa. (1 p.)

13. Valuuttakauppaa 12 p.

Aineisto

13.A Teksti: Valuutan vaihtotapahtuman periaatteet sovellettuna Suomeen

13.B Taulukko: Valuuttakurssit ja valuuttojen lyhenteet

Suursijoittaja Aaro tekee osakesijoittamisen rinnalla myös pienimuotoista valuuttakauppaa. Aaron käyttämän välittäjän valuutan osto- ja myyntikurssin erotus on 0,15 %-yksikköä riippumatta vaihdettavista valuutoista. Valuutanvaihtokulu on tällöin 0,075 %-yksikköä. Jos esimerkiksi EUR/USD kurssi on 1,32, valuutanvaihtokulujen jälkeen vaihtokurssiksi tulee ostettaessa 1,32099 (ostokurssi) ja myytäessä 1,31901 (myyntikurssi). Valuuttakursseina käytetään Euroopan keskuspankin julkaisemia euron viitekursseja, jotka löydät aineistosta 13.B.

Aaro sijoitti 50000 euroa 30.12.2020 valuuttoihin. Hän osti 20000 eurolla Australian dollareita, 12000 eurolla jenejä, 18000 eurolla Brasilian realeja. Keskittyessään osakekauppaan, hän unohti tekemänsä valuuttakaupan ja vasta 19.1.2023 hän vaihtoi valuutat takaisin euroiksi.
Paljonko Aaro sai tällöin euroja?

ESIMERKKIRATKAISU:

		30.12.2020 euron viitekurssi	myyntikurssi	eurot	valuutat	19.01.2023 euron viitekurssi	ostokurssi	eurot
Australian dollari	AUD	1,6025	1,6013	20000	32025,96	1,5726	1,57377945	20349,71
jeni	JPY	126,57	126,4751	12000	1517700,87	139,02	139,124265	10908,96
Brasilian real	BRL	6,3574	6,3526	18000	114347,38	5,6326	5,63682445	20285,78
			yht.	**50000**			yht.	**51544,45**

joka saadaan kaavoilla

		30.12.2020 euron viitekurssi	myyntikurssi	eurot	valuutat	19.01.2023 euron viitekurssi	ostokurssi	eurot
Australian dollari	AUD	1,6025	=0,99925*D4	20000	=E4*F4	1,5726	=1,00075*H4	=G4/I4
jeni	JPY	126,57	=0,99925*D5	12000	=E5*F5	139,02	=1,00075*H5	=G5/I5
Brasilian real	BRL	6,3574	=0,99925*D6	18000	=E6*F6	5,6326	=1,00075*H6	=G6/I6
			yht.	**=SUMMA(F4:F6)**			yht.	**=SUMMA(J4:J6)**

Vastaus: Aaro sai 51544,45 euroa.

PISTEYTYS:
- oikeat viitekurssit poimittu aineistosta (2 p.)
- laskettu myyntikurssit ja valuutat oikein (1 p. + 2 p.)
- laskettu ostokurssit ja eurot oikein (1 p. + 2 p.)
- laskentakaavat tai laskut näkyvissä (2 p.)
- vastaus (2 p.)

Kokeen tehtävät loppuvat tähän.

Tarkista, että vastasit ohjeiden mukaiseen määrään tehtäviä. Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

Siirry tarkastelemaan vastauksiasi

Tarkastelun jälkeen voit vielä palata muokkaamaan vastauksia, tai päättää kokeen.