

# 1 MAB Preli K2022-

ENSIMMÄISENÄ OIKEA RATKAISU - automaattisesti tarkastuva - 2 p/kohta

## 1. Monivalintatehtävä 12 p.

Valitse sopivin vaihtoehto

### 1.1 2 p.

Mikä seuraavista ei pidä paikkansa

- $\frac{8}{0} = 8$
- $5 \cdot 0 + 2 + 0 = 2$
- $\frac{0}{8} = 0$
- $(7x)^0 = 1$

Nollalla ei voi jakaa

### 1.2 2 p.

Yhtälön  $25x^2 = 100$  oikea ratkaisu on

- $x = \pm 2$
- $x = \pm 5$
- $x = \pm \frac{10}{25}$
- $x = \pm 5\sqrt{3}$

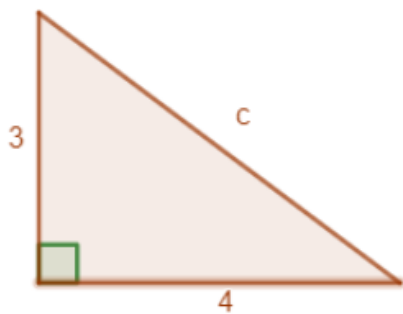
$$25x^2 = 100 \quad || : 25$$

$$x^2 = 4 \quad || \sqrt{\quad}$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

1.3 2 p.

Kuvassa olevan kolmion hypotenuusan pituus on



- 5
- 25
- 7
- 9

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ koska pituus niin ei voi olla negatiivinen}$$

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

1.4 2 p.

Epäyhtälön  $-4(x + 2) > 4$  oikea ratkaisu on

- $x < -3$
- $x > -3$
- $x < 1$
- $x > 1$

$$-4(x + 2) > 4$$

$$-4x - 8 > 4$$

$$-4x > 12 \quad || \quad :(-4)$$

$$x < -3$$

## 1.5 2 p.

Yhtälön  $3^{x+1} = 9$  oikea ratkaisu on

- $x = 1$   
  $x = 2$   
  $x = \frac{8}{3}$   
  $x = 4$

$$3^{x+1} = 9$$

$$3^{x+1} = 3^2$$

$$x + 1 = 2$$

$$x = 1$$

## 1.6 2 p.

Pussissa on viisi mustaa, kymmenen punaista, kaksi keltaista ja kolme vihreää pastillia. Millä todennäköisyydellä et saa yhtään mustaa ottaessasi pussista umpimähkään kaksi pastillia palauttamatta niitä pussiin?

- $\frac{21}{38}$   
  $\frac{21}{50}$   
  $\frac{18}{19}$   
  $\frac{9}{16}$

ei mustia on  $10 + 2 + 3 = 15$  ja yhteensä pastilleja on 20

$P(\text{ei yhtään mustaa}) = P(\text{ensimmäinen ei ole musta ja toinen ei ole musta})$

$$= \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{19} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{19} = \frac{21}{38}$$

## 2. Tekstitehtävä 12 p.

### A: YHTÄLÖN RATKAISEMISTA

Ratkaise yhtälöt:

a)  $\frac{4x + 2}{3} - \frac{2x - 7}{4} = \frac{1}{2}$  (4 p.)

b)  $81^{2-x} = 1$  (4 p.)

c)  $(x + 1)^2 - (3 - x)^2 = (x - \sqrt{17})(x + \sqrt{17})$  (4 p.)

Ratkaisu:

a)

$$\frac{4x + 2}{3} - \frac{2x - 7}{4} = \frac{1}{2} \quad | \cdot 12$$

$$4 \cdot (4x + 2) - 3 \cdot (2x - 7) = 6$$

$$16x + 8 - 6x + 21 = 6$$

$$10x + 29 = 6 \quad | -29$$

$$10x = -23 \quad | : 10$$

$$x = -\frac{23}{10}$$

On kerrottu nimittäjä pois (1 p.)

On kerrottu negat. luvulla lauseke (1 p.)

Muuttujat vasemmalla ja paljaat luvut oikealla puolella (1 p.)

On saatu oikea ratkaisu (1 p.)

\* Vähäinen laskuvirhe (maks. 2 p.)

\*\*\*\*\*

Saatu sama kantaluku mol. puolille (1 p.)

Verrataan eksponentteja (2 p.)

Oikea vastaus (1 p.)

b)

$$81^{2-x} = 1$$

$$81^{2-x} = 81^0$$

$$2 - x = 0$$

$$x = 2$$

tai päätelty, että  $x = 2$ , niin  $81^{2-2} = 81^0 = 1$

c)

$$(x+1)^2 - (3-x)^2 = (x - \sqrt{17})(x + \sqrt{17})$$

$$(x+1)(x+1) - (3-x)(3-x) = x^2 + x\sqrt{17} - x\sqrt{17} - 17$$

$$x^2 + x + x + 1 - (9 - 3x - 3x + x^2) = x^2 - 17$$

$$x^2 + 2x + 1 - 9 + 6x - x^2 = x^2 - 17$$

$$8x - 8 = x^2 - 17$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

On kerrottu sulut pois (1 p.)

On päädytty 2. asteen yhtälöön (1 p.)

Tämän voi laskea 2. asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2}$$

On saatu oikea ratkaisu (2 p.)

$$x = \frac{8 + 10}{2} = 9 \quad \text{tai} \quad x = \frac{8 - 10}{2} = -1$$

\* Vähäinen laskuvirhe (maks. 2 p.)

Tai hyväksi käyttäen SpeedCrunchia:

$$a=1$$
$$= 1$$

$$b=-8$$
$$= -8$$

$$c=-9$$
$$= -9$$

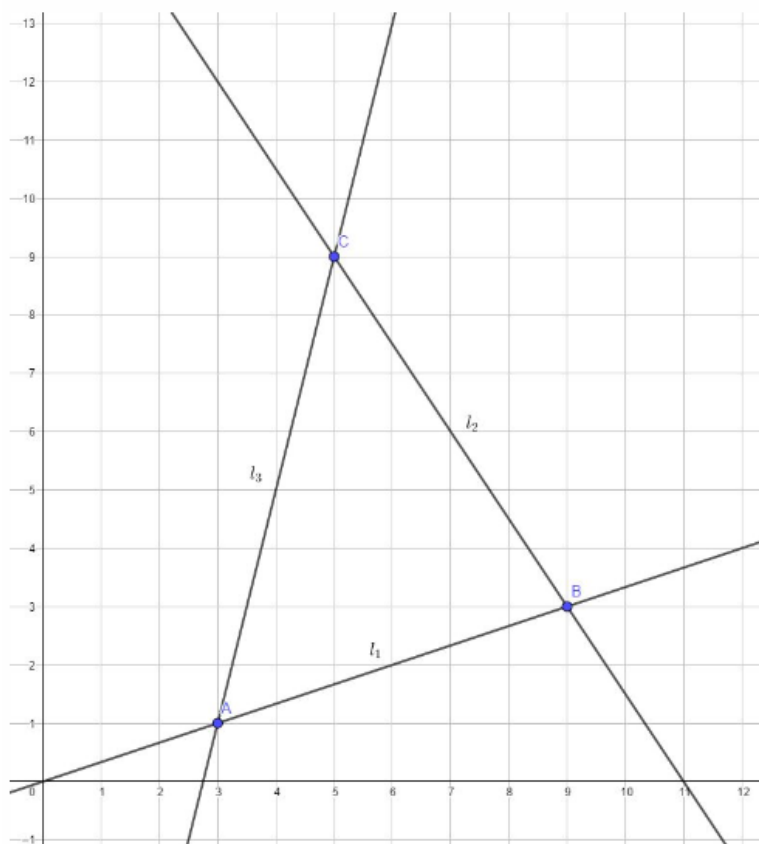
$$x1 = (-b + \text{sqrt}(b^2 - 4*a*c))/(2*a)$$
$$= 9$$

$$x2 = (-b - \text{sqrt}(b^2 - 4*a*c))/(2*a)$$
$$= -1$$

Vastaus:  $x = -1$  tai  $x = 9$

### 3. Tekstitehtävä 12 p.

#### A: KOLMION GEOMETRIIKKAA



Kuvaan on merkitty pisteet  $A = (3, 1)$ ,  $B = (9, 3)$  ja  $C = (5, 9)$ . Pisteiden kautta on piirretty kolme suoraa.

- Määritä suoran  $l_1$  yhtälö. (4 p.)
- Määritä kolmion  $\triangle(ABC)$  pinta-ala. (4 p.)
- Määritä suorien  $l_2$  ja  $l_3$  välinen tylppä kulma (4 p.)

a) Määritä suoran  $l_1$  yhtälö. (4 p.)

Ratkaisu:

Määritetään kulmakerroin  $k = \frac{3-1}{9-3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Piste  $A = (3, 1) \in l_1$  niin:  $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 3)$

$$y = \frac{1}{3}x$$

Vastaus: Suoran  $l_1$  yhtälö on  $y = \frac{1}{3}x$ .

On kulmakerroin määritetty (1 p.)

On sijoitettu piste ja kulmakerroin (1 p.)

On saatu oikea ratkaisu (2 p.)

\* Vähäinen laskuvirhe (maks. 2 p.)

b) Määritä kolmion  $\Delta(ABC)$  pinta-ala. (4 p.)

Ratkaisu:

Täydennetään suorakaiteeksi ja vähennetään pikkukolmioiden pinta-alat.

$$A = 6 \cdot 8 - \left( \frac{6 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 8}{2} + \frac{4 \cdot 6}{2} \right) = 48 - 26 = 22$$

Vastaus: Kolmion pinta-ala on 22 p.a.y.

On täydennetty suorakaiteeksi (1 p.)

On tehty yhtälö pinta-alalle (1 p.)

On saatu oikea ratkaisu (2 p.)

\* Vähäinen laskuvirhe (maks. 2 p.)

\*\*\*\*\*

c) Määritä suorien  $l_2$  ja  $l_3$  välinen tylppä kulma (4 p.)

Ratkaisu:

Lasketaan kahden kulman summa:

$$\tan \alpha = \frac{4}{1}, \text{ josta } \alpha \approx 75,96^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{3}{2}, \text{ josta } \beta \approx 56,31^\circ$$

On laskettu tylpän kulman osakulma (1 p.)

On laskettu toinen osakulma (1 p.)

On laskettu tylpän kulman suuruus (2 p.)

\*

Vaihtoehtoinen ratkaisu (4 p.)

$$\arctan(4) + \arctan(3/2) \\ = 132,27368900609373450358$$

Vastaus: Tylppä kulma on noin  $132,3^\circ$

#### 4. Tekstitehtävä (12 p.)

##### A: LAIMENNUSLASKU

Tarvitaan yksi litra puhdistusainetta, jonka pitoisuus on 16 %. Harmillisesti kaapista ei löydy lainkaan laimentamatonta tiivistettä. Tarjolla on vain 8,0 % laimennosta kaksi litraa ja 20,0 % laimennosta 0,70 litraa. Kuinka paljon näitä on sekoitettava, että saadaan haluttu liuos? Voisiko halutun liuoksen valmistaa pelkästään lisäämällä toiseen olemassa olevaan laimennokseen vettä?

Ratkaisu:

20,0 % liuosta tarvitaan yhteen litraan  $x$  verran ja 8,0 % liuosta näin ollen  $1-x$  verran.

(2 p)

Saadaan siis yhtälöksi:

$$\frac{0,20x + 0,08(1-x)}{1} = 0,16$$

tai joku muu toimiva yhtälö (2 p)

$$0,20x + 0,08 - 0,08x = 0,16$$

$$0,12x = 0,08 \quad ||: 0,12$$

$$x = 0,6666... \approx 0,67$$

yhtälö ratkaistu oikein, oikea tarkkuus (2 p)

20,0 % liuosta tarvitaan siis 0,67 litraa ja 8,0 % liuosta  $1-0,666... = 0,333... \approx 0,33$  litraa

(2 p)

8,0 % laimennoksesta ei saa vettä lisäämällä 16,0 % liuosta.

(1 p)

20,0 % voi laimentaa vedellä 16 %:ksi. Tällöin sitä tarvittaisiin

$$0,20 \cdot x = 0,16 \quad ||: 0,20$$

$$x = 0,80$$

(2 p)

Koska 20 % liuosta tarvittaisiin 0,80 litraa, ei sitä ole riittävästi eikä näin ollen haluttua laimennosta voi valmistaa vettä lisäämällä.

(1 p)



## 5. Tekstitehtävä 12 p.

### B1: MASIN MATEMATIIKAN NUMERO

Masi on saanut lyhyen matematiikan kurseista seuraavat arvosanat:

MAY1 8

MAB2 6

MAB3 5

MAB4 7

MAB5 9

MAB6 7

Masi haluaa päättöarvosanakseen matematiikasta 8.

Masi ehtii halutessaan käydä vielä kaksi matematiikan kurssia eli kurssit MAB7 ja MAB8. Masi voi myös uusia heikoimmin menneen MAB3-kurssin, mutta tällöin hän ei ehdi osallistua kuin ainoastaan toiselle syventävistä kursseista.

Selvitä perustellen kaikki eri vaihtoehdot.

Ratkaisu:

Masin kuuden kurssin suorituksen keskiarvo on

$$\frac{8 + 6 + 5 + 7 + 9 + 7}{6} = 7$$

(1 p)

Saadakseen kahdeksan Masin kurssien keskiarvon on oltava vähintään 7,5.

(1 p)

Hänellä on vaihtoehtoinaan

1. uusia heikoimmin mennyt kurssi
2. tehdä toinen syventävistä kursseista
3. tehdä molemmat syventävistä kursseista
4. uusia heikoimmin mennyt kurssi ja toinen syventävistä kursseista

tästä päätelmästä voi antaa yhden pisteen, jos arvosanoja ei ole osattu laskea

1. Jos Masi ainoastaan uusii heikoimmin menneen kurssin, olisi hänen saatava siitä arvosanakseen

$$\frac{8 + 6 + x + 7 + 9 + 7}{6} = 7,5$$

$$\frac{37 + x}{6} = 7,5 \quad || \cdot 6$$

$$37 + x = 45$$

$$x = 45 - 37 = 8$$

Masin on siis saatava kurssista arvosanaksi 8

yhtälö ja ratkaisu (2 p)

2. Jos Masi käy vain toisen syventävistä kursseista, on hänen saatava siitä arvosanakseen

$$\frac{8 + 6 + 5 + 7 + 9 + 7 + x}{7} = 7,5$$

$$\frac{42 + x}{7} = 7,5 \quad || \cdot 7$$

$$42 + x = 52,5$$

$$x = 52,5 - 42 = 10,5$$

Eli tämä ei yksin riitä.

yhtälö, sen ratkaisu ja ratkaisun tulkinta (2 p)

3. Jos Masi käy molemmat syventävät kurssit, on hänen saatava niistä arvosanat

$$\frac{8 + 6 + 5 + 7 + 9 + 7 + y}{8} = 7,5$$

$$\frac{42 + y}{8} = 7,5 \quad || \cdot 8$$

$$42 + y = 60$$

$$y = 60 - 42 = 18$$

kurssien arvosanojen on siis oltava yhteensä vähintään 18  
eli vaihtoehdot arvosanoiksi ovat 10 ja 8 sekä 9 ja 9

yhtälö, sen ratkaisu ja ratkaisun tulkinta (3 p)

4. Jos Masi uusii heikoimmin menneen kurssin ja suorittaa toisen syventävän kurssin, on hänen saatava niistä arvosanat

$$\frac{8 + 6 + 7 + 9 + 7 + y}{7} = 7,5$$

$$\frac{37 + y}{7} = 7,5 \quad || \cdot 7$$

$$37 + y = 52,5$$

$$y = 15,5$$

kurssien arvosanojen on siis oltava yhteensä vähintään 16  
eli vaihtoehdot ovat 10 ja 6, 9 ja 7 sekä 8 ja 8

yhtälö, sen ratkaisu ja ratkaisun tulkinta (3 p)

## 6. Tekstitehtävä 12 p.

### B1: TALLELUKSIA

Mauno talletti rahaa kuutena peräkkäisenä vuotena maaliskuun ja heinäkuun alussa 500 € pankkiin. Pankki maksoi korkoa talletuksille 2 % p.a.. Korkotulon lähdevero on 30 prosenttia koron määrästä. Oletetaan, että kuukaudessa on 30 päivää ja vuodessa 360 päivää.



Kuvan lähde: PIXABAY (CC0)

- a) Paljonko tilillä oli rahaa ensimmäisen talletusvuoden joulukuun viimeinen päivä koron maksun jälkeen? (6 p.)  
b) Paljonko tilillä oli rahaa viimeisen talletusvuoden joulukuun viimeinen päivä koron maksun jälkeen? (6 p.)

a) Paljonko tilillä oli rahaa ensimmäisen talletusvuoden joulukuun viimeinen päivä koron maksun jälkeen? (6 p.)  
Ratkaisu:

Tehollinen korko on  $p = 2 \cdot 0,7 = 1,4 \%$   $i = 0,014$

Vuoden lopussa oleva korko alle korkokauden talletuksella:  $R = kit$

On huomioitu korossa lähdevero (2 p.)

$$R = 500 \cdot 0,014 \cdot \frac{10}{12} + 500 \cdot 0,014 \cdot \frac{6}{12} = 9 \frac{1}{3}$$

On laskettu maaliskuun tall. korko (1 p.)

On laskettu heinäkuun tall. korko (1 p.)

$$K_1 = 1009,33$$

Vastaus: Tilillä on rahaa siis 1009,33 €

On laskettu saldo (2 p.)

\* Vähäinen laskuvirhe (maks. 3 p.)

b) Paljonko tilillä oli rahaa viimeisen talletusvuoden joulukuun viimeinen päivä koron maksun jälkeen? (6 p.)  
Ratkaisu:

Seuraavina vuosina talletukset kasvavat korkoa korolle periaatteella, missä korkotekijä  $q = 1,014$  :

Nämä muodostavat geometrisen summan:

On laskettu korkotekijä q (2 p.)

$$K_{1-6} = K_1 \cdot q^5 + K_1 \cdot q^4 + K_1 \cdot q^3 + K_1 \cdot q^2 + K_1 \cdot q + K_1 =$$

Geometrisen summa (2 p.)

$$K_1 (q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = K_1 \cdot 1 \cdot \frac{1 - q^6}{1 - q}$$

$$(1000 + 9,33) \cdot \frac{1 - (1,014)^6}{1 - 1,014} = 6271,94$$

On saatu laskettua tilin saldo euron tarkkuudella. (2 p.)

\* Vähäinen laskuvirhe (maks. 3 p.)

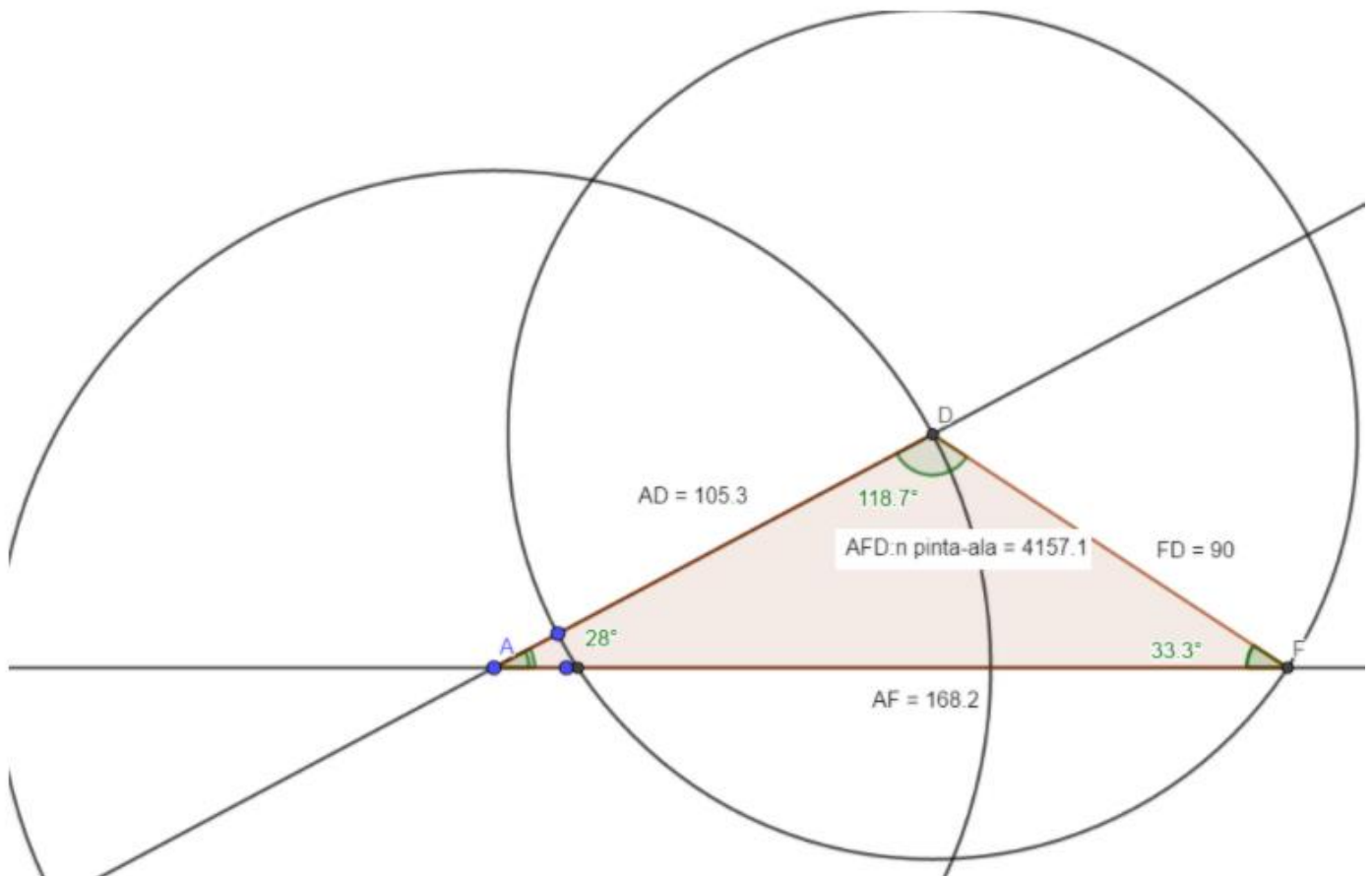
Vastaus: Viimeisen säästämisvuoden jälkeen tilillä on 6271,94 €.

## 7. Tekstitehtävä 12 p.

### B1: PUISTOALUE

Eräs puistoalue on kolmion muotoinen ja sen kaksi lyhintä sivua ovat 90,0 m ja 105,3 m. Lyhimmän sivun vastainen kulma on  $28,0^\circ$ . Määritä piirto-ohjelman avulla muiden kulmien suuruudet, pisimmän sivun pituus ja alueen pinta-ala.

Ratkaisu:



Vastaus: Muut kulmat ovat  $118,7^\circ$  ja  $33,3^\circ$ . Pisin sivu on 168,2 m ja alueen pinta-ala noin  $4160 \text{ m}^2$ .

Kuva tai vastaava (4 p.)

On saatu kulmien suuruudet (4 p.)

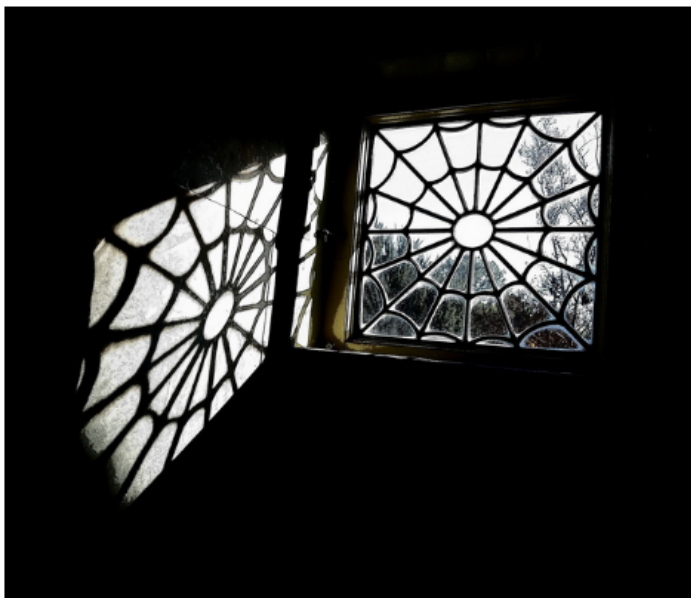
On saatu määritettyä pisimmän sivun pituus (2 p.)

Pinta-ala (2 p.)

## 8. Tekstitehtävä 12 p.

### B1: HÄMÄHÄKIN SEITTI

Hämähäkki kutoi säännöllisen muotoista seittiä neliönmuotoiseen ikkuna-aukkoon, jonka sivun pituus oli 2 m. Hämähäkki tekee ensin 16 sädelankaa keskustasta pois päin. Seitin keskelle hämähäkki jättää ympyrän muotoisen aukon, jonka halkaisija on 40 cm. Oletetaan, että kaikki hämähäkin kutomat kehät ovat ympyrän muotoisia ja ne ovat 3 cm etäisyydellä toisistaan. Hämähäkki kuitenkin kääntää keskuskehän ulkopuolella sädelankojen väliset kaaret keskustan suuntaan kuvan mukaisesti.



Kuvan lähde: PIXABAY (CC0)

- Montako astetta on kahden sädelangan välinen kulma? (2 p.)
- Tutki piirto-ohjelman avulla, kuinka paljon seittiä menee sädelankoihin? Anna vastaus yhden senttimetrin tarkkuudella. (5 p.)
- Laske, kuinka paljon seittiä menee seittikehiin. Anna vastaus metrin tarkkuudella. (5 p.)

a) Montako astetta on kahden sädelangan välinen kulma? (2 p.)

Ratkaisu:

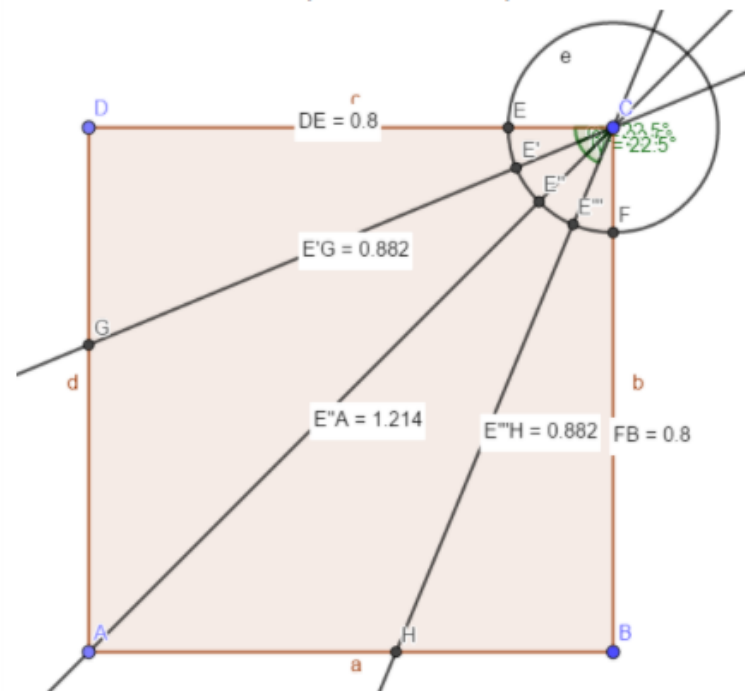
$$\alpha = \frac{360^\circ}{16} = 22,5^\circ$$

On määritetty kulma (2 p.)

Vastaus: Kahden sädelangan välinen kulma on 22,5°.

b) Tutki piirto-ohjelman avulla, kuinka paljon seittiä menee sädelankoihin? Anna vastaus yhden senttimetrin tarkkuudella. (5 p.)

Piirretään GeoGebralla neljännes ikkunasta ja seitistä.



Sädelankojen DE, E'G, E''A ja E'''H pituudet kattaa neljäsosan kaikista sädelangoista.

Saadaan siis

Idea sädelankojen pituuksista (1 p.)

$$|DE| + |E'G| + |E''A| + |E'''H| = 3,778$$

Kaikki sädelangat:

$$4 \cdot 3,778 = 15,112$$

On laskettu joidenkin sädelankojen pituuksia (2 p.)

On saatu laskettua kaikkien sädelankojen yhteispituus (2 p.)

Vastaus: Ikkuna sisällä oleviin sädelankoihin menee siis noin 15,11 m hämähäkin seittiä.

\* Vähäinen laskuvirhe (maks. 2 p.)

c) Laske, kuinka paljon seittiä menee seittikehiin. Anna vastaus metrin tarkkuudella. (5 p.)

Ensimmäinen seittikehä:

$$K_1 = 2 \cdot \pi \cdot 20 = 40\pi$$

Toinen seittikehä:

$$K_2 = 2 \cdot \pi \cdot 23 = 46\pi$$

Kolmas seittikehä:

$$K_3 = 2 \cdot \pi \cdot 26 = 52\pi$$

Idea seittikehien pituuksista (1 p.)

On sovellettu aritmeettisen summan kaavaa (2 p.)

Seittikehät muodostavat aritmeettisen lukujonon, missä  $d = 46\pi - 40\pi = 6\pi$

Seittikehien säteet muodostavat lukujonon: 20, 23, 26 ... Tämä on aritmeettinen lukujono  $a_n = 20 + (n - 1) \cdot 3$

Koska  $a_n \leq 100$  Ti-Nspire:  $\text{solve}(20 + (n - 1) \cdot 3 \leq 100, n)$   $n \leq 27.6667$

Kun  $n = 27$  niin uloimman kehän säde on 98 cm, ja sen pituus  $K_n = 2 \cdot \pi \cdot 98 = 196\pi$ .

Lasketaan seitin kehien summa:

$$S_{27} = \frac{40\pi + 196\pi}{2} \cdot 27 = 3186\pi \approx 10009$$

On saatu laskettua seittikehien yhteispituus (2 p.)

\* Vähäinen laskuvirhe (maks. 2 p.)

\* Metrin tarkkuus vastauksessa riittää.

Vastaus: Seittikehiin menee noin 100 m hämähäkin seittiä.

## 9. Tekstitehtävä 12 p.

### B1: ROKOTE

Eräessä kaupungissa ihmisiä rokotettiin kulkutautia vastaan. Rokotetta A oli saanut 80 % koko kaupungin väestöstä ja rokotetta B oli saanut 60 % heistä, jotka olivat saaneet rokotteen A.

a) Mikä on todennäköisyys sille, että kuuden sattumanvaraisesti valitun henkilön joukossa on neljä henkilöä, jotka ovat saaneet molemmat rokotteet? (6 p.)

b) Kuinka monta henkilöä on valittava, jotta valittujen henkilöiden joukossa on ainakin yksi henkilö, joka on saanut molemmat rokotteet vähintään 95 %:n todennäköisyydellä? (6 p.)

a) Mikä on todennäköisyys sille, että kuuden sattumanvaraisesti valitun henkilön joukossa on neljä henkilöä, jotka ovat saaneet molemmat rokotteet? (6 p.)

Ratkaisu:

Lasketaan todennäköisyys molempien rokotteiden saaneille:

$$p = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48 \quad \text{tällöin} \quad q = 0,52$$

Tässä binomitodennäköisyydessä  $n = 6$  ja  $k = 4$

$$nCr(6,4) \cdot (0.48)^4 \cdot (0.52)^2$$

On tunnistettu binomitodennäköisyys (1 p.)  
On laskettu tn. mol. rokottein saaneille (1 p.)

On sovellettu kaavaa oikein (2 p.)

0.215309

On saatu oikea ratkaisu (2 p.)  
\* Vähäinen laskuvirhe (maks. 3 p.)

Vastaus: Todennäköisyydellä 21,5 %.

b) Kuinka monta henkilöä on valittava, jotta valittujen henkilöiden joukossa on ainakin yksi henkilö, joka on saanut molemmat rokotteet vähintään 95 %:n todennäköisyydellä? (6 p.)

Ratkaisu:

Olkoon a-kohdan mukaisesti  $p = 0,48$  ja  $q = 0,52$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \geq 0,95$$

$$1 - 0,52^n \geq 0,95$$

$$\text{solve}(1 - (0.52)^n \geq 0.95, n)$$

$n \geq 4.58115$

Komplementti todennäköisyys (1 p.)  
On muodostettu epäyhtälö (2 p.)  
On ratkaistu oikein epäyhtälö (2 p.)

Vastaus: Täytyy siis valita ainakin 5 henkilöä.

Oikea pyöristys vastauksessa (1 p.)  
\*\*\*

Voi laskea myös taulukoimalla. (maks. 6 p.)

## 10. Tekstitehtävä 12 p.

### B2: MUMMON PERINTÖ

Parhaat ystävät ja pikkuserkukset Siri ja Laura asuivat opiskelupaikkakunnalla Sirin mummolassa ja auttoivat Elvi-mummoa arkipäivän askareissa. Kun Elvi-mummo kuoli, jätti hän testamentissaan talonsa puoliksi Sirille ja Lauralle. Talon arvo oli 114 000 €.

Sirillä ja Lauralla oli perintöveron maksamista varten säästöjä yhtä paljon kummallakin. Sirin rahat riittivät juuri, ja Laura joutui ottamaan lainaa puuttuvan osuuden verran. Laura pystyi maksamaan lainaa ja sen hoitokuluja 150 € kuukaudessa. Pankki tarjosi vakuudetonta tasaerälainaa, jonka todellinen vuosikorko oli 11,1 %.

Kuinka paljon Siri ja Laura kumpikin osaltaan maksoivat perintöveroa ja kuinka pitkä takaisinmaksuaika Lauran tasaerälainalle tuli?

Verotaulukot löydät liitteestä Verotaulukko\_2022k-10 (aineisto G)

Ratkaisu:

Perinnön arvo kummallekin tytöistä on

$$\frac{114000}{2} = 57000$$

(1 p)

Siri kuuluu Elvi-mummon lapsenlapsena ensimmäiseen veroluokkaan

Perinnön arvo	Vero alarajan kohdalla	Veroprosentti yli menevästä osasta
20 000–40 000	100	7
40 000–60 000	1 500	10
60 000–200 000	3 500	13

$$1500 + (57000 - 40000) \cdot 0,10$$

$$= 1500 + 17000 \cdot 0,10 = 1500 + 1700 = 3200$$

Joten Sirin tulee maksaa veroa 3200 €

oikein valittu veroluokka + ymmärretty veron laskemisen periaate + saatu oikea tulos (3 p)



Laura kuuluu toiseen veroluokkaan

Perinnön arvo	Vero alarajan kohdalla	Veroprosentti yli menevästä osasta
20 000–40 000	100	19
40 000–60 000	3 900	25

$$3900 + (57000 - 40000) \cdot 0,25$$

$$= 3900 + 17000 \cdot 0,25 = 3900 + 4250 = 8150$$

Joten Lauran tulee maksaa veroa 8150 €

oikein valittu veroluokka + saatu oikea tulos (2 p)

Lauralla oli saman verran rahaa säästössä kuin Sirillä oli veroihinsa eli 3200 €

Näin ollen Laura tarvitsee velkarahaa

$$8150 - 3200 = 4950$$

(1 p)

Lasketaan annuiteetin kaavalla

$$A = Kq^n \frac{1 - q}{1 - q^n}$$

ymmärretty valita annuiteetin kaava (1 p)

vuotuinen korkoprosentti jaetaan kuukausin määrällä  $11,1/12=0,925$  joten  $q = 1,00925$

(1 p)

$$150 = 4950 \cdot 1,00925^n \frac{1 - 1,00925}{1 - 1,00925^n}$$

ratkaistaan tästä korkokausien määrä

sijoitus oikein (1 p)

1 Ratkaise  $\left( 150 = 4950 \cdot 1,00925^n \cdot \frac{1 - 1,00925}{1 - 1,00925^n}, n \right)$

$\rightarrow \left\{ n = \frac{\ln(2779) - \ln(4000)}{\ln(4000) - \ln(4037)} \right\}$

2 \$1

$\approx \{ n = 39.56 \}$

Lainassa on 40 maksuerää eli Laura maksaa sitä 3 vuotta ja 4 kk.

lainaerät + laina-aika oikein (2 p)

## 11. Tekstitehtävä 12 p.

### B2: KOLMION SUURIN PINTA-ALA

Kun kolmion kannan ja sen korkeuden pituuksien summa on 20 cm, niin mikä on suurin mahdollinen pinta-ala tälle kolmiolle? Onko suurinta mahdollista pinta-alaa varten kolmion oltava suorakulmainen kolmio? (Perustelee)

Ratkaisu:

Merkitään kantaa  $x$  ja korkeutta  $20-x$

(1 p)

Kumpikaan ei voi olla negatiivinen tai nolla, joten

$$20 - x > 0 \quad \text{ja} \quad x > 0$$

$$x < 20$$

eli

$$0 < x < 20$$

(1 p)

Pinta-alaksi saadaan tällöin

$$A(x) = \frac{1}{2}x \cdot (20 - x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10x$$

(2 p)

Polynomifunktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla välillä joko välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohtassa.

$$A'(x) = -x + 10$$

$$A'(x) = 0$$

$$-x + 10 = 0$$

$$x = 10$$

Derivaatan nollakohta kuuluu tarkasteluvälille.

Koska  $A(x)$ :n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, on kyseessä sen suurin arvo derivaatan nollakohtassa

Näin ollen kolmion kannan on oltava 10 cm ja korkeuden 20 cm - 10 cm = 10 cm

Kolmion pinta-alaksi saadaan

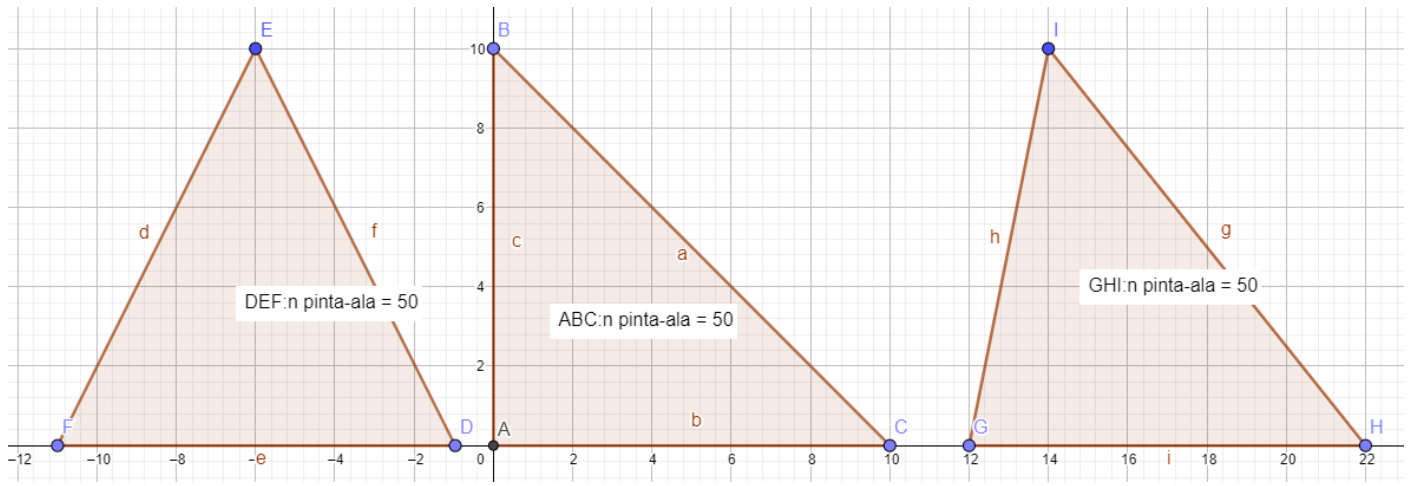
$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (20 - 10) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50 \text{ (cm}^2\text{)}$$

(6 p)

perustelu ratkaisutavalle 1 p, derivaatta ja sen nollakohta 2 p  
tarkasteluvälin huomioiminen 1 p, kanta ja korkeus 1 p, pinta-ala 1 p

Kolmion pinta-alan lasketaan kannan ja korkeuden avulla. Pinta-alaa laskettaessa ei ole merkitystä kolmion kulmien keskinäisellä suhteella, joten on aivan sama onko kyseessä suorakulmainen kolmio vai ei.

(2 p)



## 12. Maapallogeometriikka (12 p.)

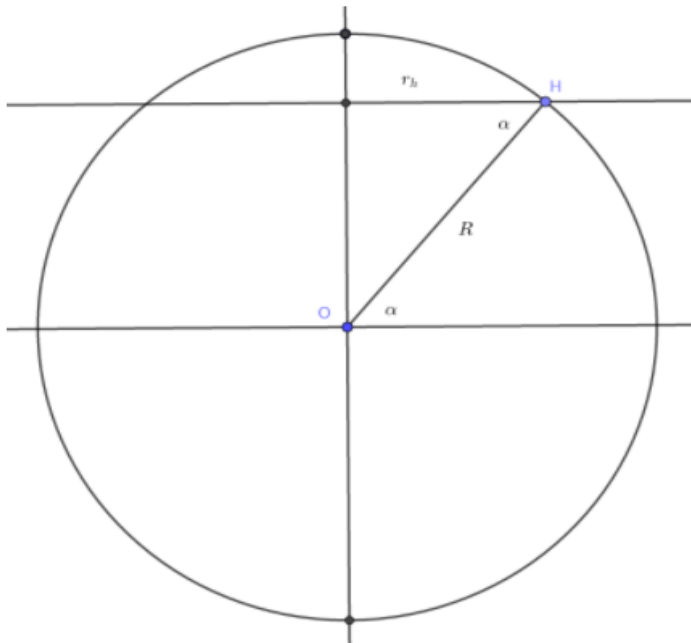
12. Maapallogeometriikka (12 p.)



Kartalla Helsingin koordinaatit ovat  $60^{\circ}10'15''\text{N}$ ,  $24^{\circ}56'15''\text{E}$  ja Istanbulin koordinaatit  $41^{\circ}00'45''\text{N}$ ,  $28^{\circ}58'33''\text{E}$ .

Lentokone lähtee lentämään täydellä tankilla Istanbulista leveyspiiriä pitkin. Mille pituuspiirille asti polttoaine riittää, kun täydellä tankillisella voisi lentää Helsingin kautta kulkevan leveyspiirin ympäri? Maapallon säde on noin 6 370 km. Anna vastaus yhden asteen tarkkuudella.

Ratkaisu: (huomaa kaksi ratkaisua länteen tai itään)



Helsinki:

Kuvassa  $R = 6370$      $\alpha = 60^{\circ}10'15''$

$$\cos \alpha = \frac{r_h}{R}$$

$$r_h = 6370 \cdot \cos 60^{\circ}10'15''$$

On laskettu Helsingin leveyspiirin säde maapallon pysty akseliin nähden (2 p.)

On laskettu Istanbulin leveyspiirin säde maapallon pysty akseliin nähden (1 p.)

Helsingin leveyspiirin pituus on siis  $K_{Hki} = 2 \cdot \pi \cdot 6370 \cdot \cos 60^\circ 10' 15'' \approx 19908,5$

$$2 \cdot \pi \cdot 6370 \cdot \cos(60^\circ 10' 15'') \quad 19908.5$$

Istanbul:

$$R = 6370 \quad \alpha = 41^\circ 00' 45''$$

$$\cos \alpha = \frac{r_i}{R}$$

$$r_i = 6370 \cdot \cos 41^\circ 00' 45''$$

On laskettu Helsingin leveyspiirin pituus (2 p.)

Istanbulin leveyspiirin pituus on siis  $K_{Isl} = 2 \cdot \pi \cdot 6370 \cdot \cos 41^\circ 00' 45'' \approx 30200,7$

$$2 \cdot \pi \cdot 6370 \cdot \cos(41^\circ 0' 45'') \quad 30200.7$$

On laskettu Istanbulin leveyspiirin pituus (1 p.)

Polttoainemäärällä siis pääsee jompaan kumpaan suuntaan:

$$\frac{19908.5}{30200.7} \cdot 360 \quad 237.314$$

$$237,314^\circ = 237^\circ + \frac{1130,4}{3600}^\circ = 237^\circ + \frac{18}{60} + \frac{50,4}{3600} \approx 237^\circ 18' 50''$$

On laskettu asteina (asteen tarkkuudella) siirto Istanbulista (2 p.)

1) Jos lennetään länteen, niin päädytään pituuspiirille:

$$237^\circ 18' 50'' - 28^\circ 58' 33'' = 208^\circ 20' 17'' \quad \text{eli takaisin itäisille pituuspiireille. Siis pituuspiiriltä } 180^\circ \text{ tullaan}$$

$28^\circ 20' 17''$  itäisille pituuspiireien puolelle. Päädytään siis seuraavalle itäiselle pituuspiirille:

$$151^\circ 39' 43'' \text{ E}$$

2) Jos lennetään itään, niin päädytään pituuspiirille:

$$237^\circ 18' 50'' + 28^\circ 58' 33'' = 266^\circ 17' 23''$$

Vähennetään tämä asteista  $360^\circ$ , niin päädytään pituuspiirille:

$$93^\circ 42' 37'' \text{ W}$$

On saatu tulos noin  $151^0$  E. (2 p.)

On saatu tulos noin  $93^0$  W. (2 p.)

Vastaus: Päädytään pituuspiirille  $151^\circ \text{ E}$  tai  $93^\circ \text{ W}$

Vähäinen laskuvirhe (maks. 8 p.)

### 13. Tekstitehtävä 12 p.

#### B2:SAIMAANNORPPA

Saimaannorpan syntyvyys, kuolleisuus ja niiden perusteella laskettu kannan suuruus vuosina 2010-2020

a)

Poimi liitetiedostona olevasta Saimaannorppakanta -tiedostosta todelliset tai, jos arvio on annettu, arvioidut syntyneiden kuuttien määrät sekä laske arvioitu kuolleiden norppien määrä kullekin vuodelle 2010-2020 ja taulukoi ne. (4 p)

b)

Piirrä kuvaaja, jossa ovat sekä syntyneiden että kuolleiden norppien määrät vuosittain.

Laske taulukoimiesi syntyneiden ja kuolleiden norppien lukumäärän perusteella oma arvio kunkin vuoden talvikannan suuruudelle käyttäen lähtöarvona vuoden 2010 arviotua talvikantaa. Piirrä laskemasi norppakannan kehitys samaan kuvaan Metsähallituksen arvioimien talvikantojen kanssa. (6 p)

c)

Kuinka monta prosenttia itse laskemasi vuoden 2020 talvikanta poikkeaa Metsähallituksen arvioimasta talvikannasta? (2 p)

Metsähallitus: Saimaannorpan kanta 2005-2019 sivut 15-50 löydät liitteestä Saimaannorppakanta\_2022k-13 (aineisto E)

#### Ratkaisu:

a)

	A	B	C	D	E	F	G	H
	vuosi	talvikanta	poikaset	hav kuol	kuol =havkuol/0,40	kan muut =poik-kuol	oma talvikanta	
	2010	271	57	17	42.5	14.5		
	2011	289	57	25	62.5	-5.5	285.5	=271+F2
	2012	311	61	24	60	1	280	=G3+F3
	2013	311	62	29	72.5	-10.5	281	
	2014	311	64	29	72.5	-8.5	270.5	
	2015	320	71	21	52.5	18.5	262	
	2016	360	87	24	60	27	280.5	
	2017	375	83	38	95	-12	307.5	
0	2018	392	86	32	80	6	295.5	
1	2019	408	88	15	37.5	50.5	301.5	
2	2020	425	88	30	75	13	352	

## SELITYKSET TAULUKKON OTETUILLE LUVUILLE

Vuosi	Määrä	Syntyneet	Kuolleet
2010	taulukosta	tekstistä	tekstistä
2011	taulukosta	taulukosta	tekstistä
2012	taulukosta	taulukosta	tekstistä
2013	selitys 1	taulukosta	tekstistä
2014	selitys 2	taulukosta arvio	tekstistä
2015	tekstistä	taulukosta arvio	tekstistä
2016	tekstistä	taulukosta arvio	tekstistä
2017	selitys 3	taulukosta arvio	tekstistä
2018	taulukosta	taulukosta arvio	tekstistä
2019	taulukosta	taulukosta arvio	tekstistä
2020	selitys 4	taulukosta arvio	tekstistä

Selitys 1. Norppien talvikannan arviointi epävarmaa. Kannan ylä- ja alarajasta lasketuksi keskiarvoksi saataisiin 307, joka on vähemmän kuin tekstissä annettu "kanta on vähän kasvanut edellisestä vuodesta..."

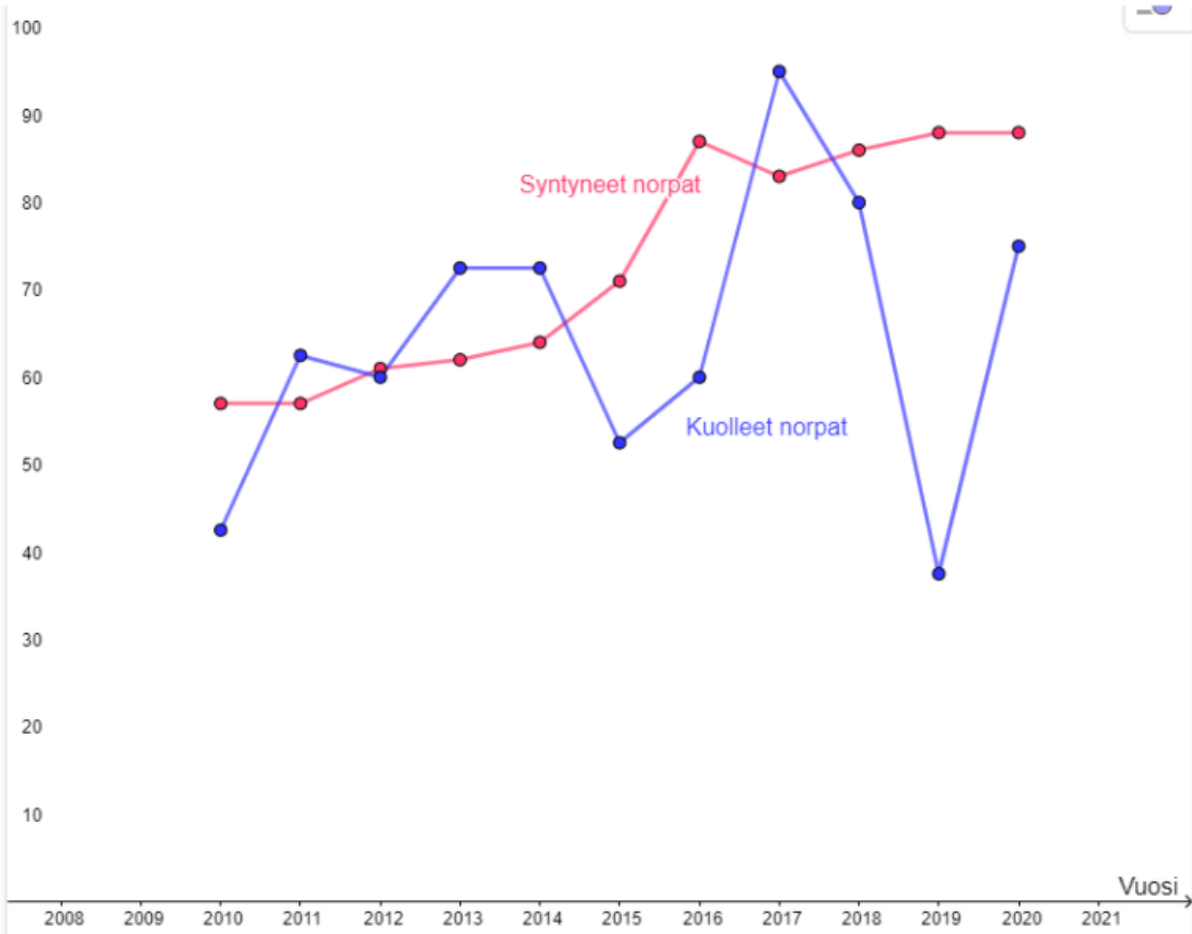
Selitys 2. Kannan arviointi on ollut mahdotonta, joten on käytetty edellisvuoden arviota

Selitys 3. Kannaksi arvioitiin 370-380 yksilöä, joten käytetään keskiarvoa

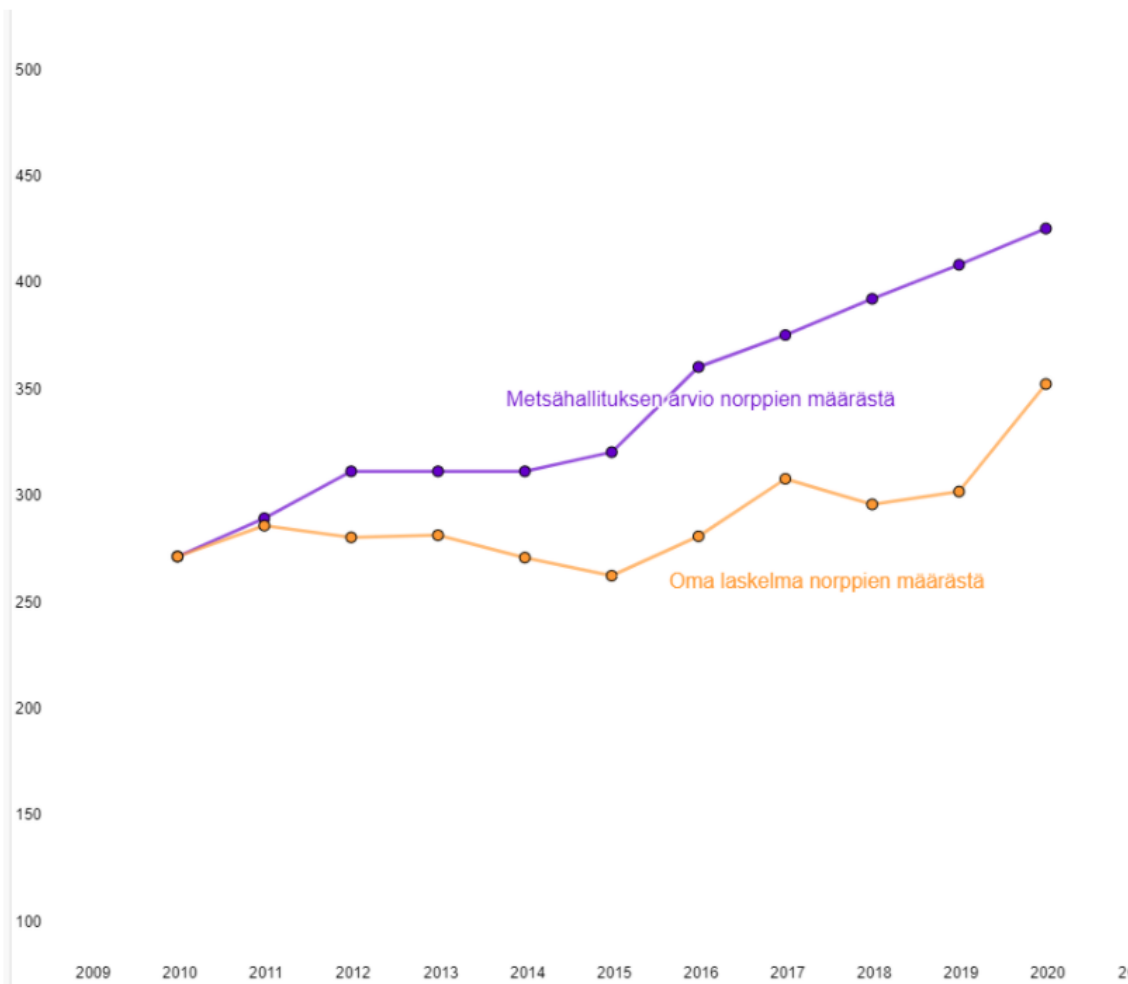
Selitys 4. Kannaksi arvioitiin 420-430 yksilöä, joten käytetään keskiarvoa

Taulukkoon on koottu pyydetty aineisto	2 p
Kuolleiden todellinen määrä on osattu laskea (myös kolmella kertominen hyväksytään)	1 p
Oman laskelman mukainen talvikanta on osattu...	1 p

b)|  
KUVAT:







Kuvaajiin on saatu x-akselille vuosiluvut 1 p  
ja y-akselille norppien määrä mielekkäällä tavalla 1 p  
pisteet näkyvissä ja yhdistettynä murtoviivalla 2 p  
kuvaajat on nimetty 2 p

jos toinen kuvista puuttuu max 3 p

c)

Oman laskelman mukaan norppia olisi talvella 2020 yhteensä 352 ja metsähallituksen arvion mukaan niitä olisi 425.

Talvikanta-arvioiden vertailu

$$\frac{352}{425} \cdot 100 \% = 82,823... \%$$

$$100 \% - 82,823... \% = 17,176... \% \approx 17 \%$$

Oma arvio talvikannasta on 17 % pienempi kuin Metsähallituksen arvio.

on saatu oikea prosenttiluku 1 p  
vastaus on tulkittu oikein 1 p

**HUOM!**

Jos todellinen kuolleiden määrä on laskettu havaituista kuolleista kertomalla kolmella ja muuten ratkaisun periaate ja kuvien laadinta ovat oikein, ei pistevähennyksiä tehdä.