Aineisto: Pisteytysohje MAB Preliminäärikoe MFKA K2026

1. Pikkutehtäviä

1.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

HUOMIO
Tehtävä on laadittu automaattitarkisteiseksi.. Alla on oikeat vastaukset ja perustelut.

Valitse oikea vaihtoehto. Mikäli et vastaa tähän tehtävään, varmista että jokaisesta pudotusvalikosta on valittuna tyhjä rivi. Kohdissa 1-3 oikea vastaus 2 pistettä ja kohdissa 4-5 oikea vastaus 3 pistettä. Väärä vastaus 0 pistettä.

1. Lausekkeen $4\left(2x+5\right)+100$ arvo on *96* , kun $x=-3$.

PERUSTELU
$4\left(2\cdot\left(-3\right)+5\right)+100$
$=4\cdot\left(-6+5\right)+100$
$=4\cdot\left(-1\right)+100$
$=-4+100$
$=96$

2. $17\ \%$ luvusta 351 on *59,67* .

PERUSTELU
$17\ \%=0{,}17$
$0{,}17\cdot351=59{,}67$

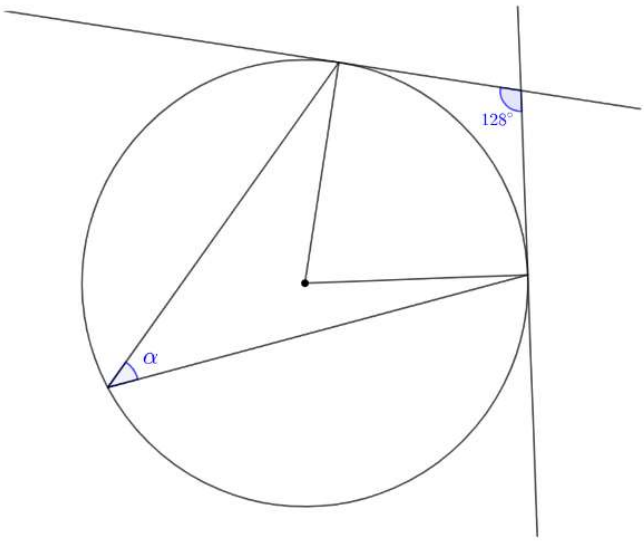
3. Lukujen $5,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 10,\ 10,\ 12,\ 14,\ 14,\ 14,\ 21,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22$ moodi on *22* .

PERUSTELU
Moodi eli tyyppiarvo on se arvo, jota esiintyy aineistossa eniten.

4. Lauseke $\frac{\left(4x^3\right)^2}{x\cdot x^3}$ voidaan sieventää muotoon $16x^2$.

PERUSTELU
$\frac{\left(4x^3\right)^2}{x\cdot x^3}=\frac{4^2\cdot x^{2\cdot3}}{x^{1+3}}=\frac{16x^6}{x^4}=16x^{6-4}=16x^2$.

5 . Ympyrälle piirretään kaksi tangenttia. Muodostuneen tangenttikulman suuruus on $128°$.



Kuvaan merkityn kehäkulman α suuruus on $26°$.

PERUSTELU
Tangenttikulmaa vastaavan keskuskulman suuruus on $180° - 128° = 52°$. Kehäkulman suuruus on puolet vastaavaan keskuskulman suuruudesta eli kulman α suuruus on $\frac{52°}{2} = 26°$.

2. Yhtälötyyppejä

2.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

1. Ratkaise yhtälö $2 - 3(x-2) = x$.

RATKAISU
$2 - 3(x-2) = x$
$2 - 3x + 6 = x$
$x + 3x = 8$
$4x = 8 \quad \|: 4$
$x = 2$

Vastaus: $x = 2$

PISTEYTYS
- Sulkeet poistettu oikein (3 p.)
- Yhditetty muuttujaa sisältävät termit oikein (1 p.)
- Yhdistetty vakiotermit (1 p.)
- Oikea vastaus (1 p.)

2. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ 3x - \frac{1}{5}y = \frac{7}{5} \end{cases}$.

RATKAISU
Tapa 1:
$\begin{cases} 5x - y = 5 \\ 3x - \frac{1}{5}y = \frac{7}{5} \quad \| \cdot (-5) \end{cases}$
$\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -15x + y = -7 \end{cases}$
Lasketaan yhtälöt yhteen.
$-10x = -2$

$x = \frac{-2}{-10}$
$x = \frac{1}{5}$
Ratkaistaan y sijoittamalla $x = \frac{1}{5}$ ylempään yhtälöön:
$5 \cdot \frac{1}{5} - y = 5$
$1 - y = 5$
$y = 1 - 5$
$y = -4$

Vastaus: $x = \frac{1}{5}$ ja $y = -4$

Tapa 2:
sijoitusmenetelmällä

$$\begin{cases} 5x - y = 5 \\ 3x - \frac{1}{5}y = \frac{7}{5} \end{cases} \quad \Rightarrow \;\; y = 5x - 5$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön $y = 5x - 5$.
$3x - \frac{1}{5}(5x - 5) = \frac{7}{5}$
$3x - x + 1 = \frac{7}{5}$
$2x = \frac{7}{5} - 1$
$2x = \frac{7}{5} - \frac{5}{5}$
$2x = \frac{2}{5} \parallel \;\; : 2$
$x = \frac{1}{5}$, jolloin $y = 5 \cdot \frac{1}{5} - 5 = -4$

Vastaus: $x = \frac{1}{5}$ ja $y = -4$

PISTEYTYS
Tapa 1:
- Kerrottu yhtälöä sopivalla luvulla (2 p.)
- Laskettu yhtälöt yhteen (1 p.)
- Ratkaistu muuttuja (1 p.)
- Ratkaistu toinen muuttuja (2 p.)

Tapa 2:
- Ilmaistu jompi kumpi muuttuja toisen avulla (1 p.)
- Sijoitettu muuttujan lauseke toiseen yhtälöön (1 p.)
- Ratkaistu muuttuja (2 p.)
- Ratkaistu toinen muuttuja (2 p.)

3. Funktioiden ominaisuuksia

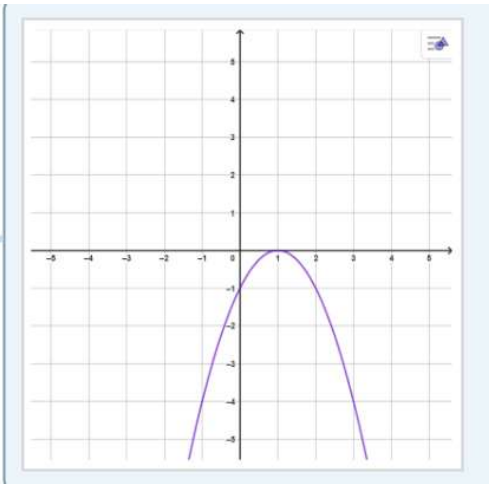
3.A Ratkaisut ja pisteysohjeet

1. Yhdistä funktion kuvaukseen sopiva kuvaaja.

HUOMIO
Tehtävä on laadittu automaattitarkisteiseksi. Jokaisessa kohdassa oikea vastaus 2 pistettä. Alla on oikeat vastaukset ja perustelut.

Sanallinen kuvaus ja oikea kuvaaja:

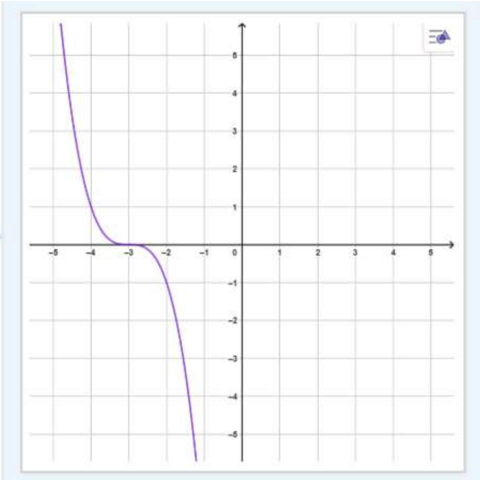
Toisen asteen polynomifunktio, jolla on täsmälleen yksi nollakohta



PERUSTELU
Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on paraabeli. Jos toisen asteen polynomifunktiolla on täsmälleen yksi nollakohta, sivuaa paraabeli x-akselia.

Sanallinen kuvaus ja oikea kuvaaja:

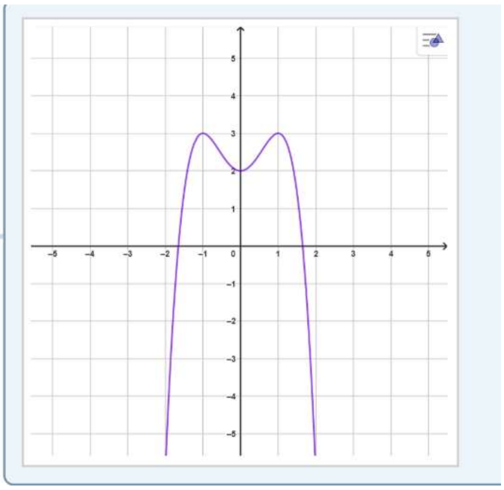
Funktio, joka saa positiivisia arvoja, kun $x < -3$



PERUSTELU
Kun funktio saa positiivisia arvoja, on sen kuvaaja x-akselin yläpuolella. Kuvaukseen sopii siis kuvaaja, joka on kohdan x=-3 vasemmalla puolella x-akselin yläpuolella.

Sanallinen kuvaus ja oikea kuvaaja:

Funktio, jonka suurin arvo on 3



PERUSTELU
Funktion suurin arvo näkyy kuvaajalla suurimman y-koordinaatin arvona. Funktion, jonka suurin arvo on 3, kuvaajan y-koordinaatti on suurimmillaan 3.

2. Millä muuttujan arvoilla funktiot $f\left(x\right) = 8x^2 - 3x + 20$ ja $g\left(x\right) = 7x^2 - 14x - 8$ saavat saman arvon?

RATKAISU
$f\left(x\right) = g\left(x\right)$

$8x^2 - 3x + 20 = 7x^2 - 14x - 8$
$x^2 + 11x + 28 = 0$

Tapa 1:
$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1}$
$x = \frac{-11 \pm \sqrt{9}}{2}$
$x = \frac{-11 \pm 3}{2}$
$x = \frac{-11+3}{2} = \frac{-8}{2} = -4$ tai $x = \frac{-11-3}{2} = \frac{-14}{7} = -7$

Tapa 2:
a=1
= 1

b=11
= 11

c=28
= 28

x1 = (-b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a)
= -4

x2 = (-b - sqrt(b^2 - 4*a*c))/(2*a)
= -7

Vastaus: $x = -7$ tai $x = -4$

PISTEYTYS
- Merkitty lausekkeet yhtä suuriksi (1 p.)
- Yhdistetty samanmuotoiset termit (1 p.)
- Sijoitettu kertoimet ratkaisukaavaan tai syötetty kertoimet laskimeen (2 p.)
- Oikea vastaus (2 p.)

4. Maalauspalvelun hinta

4.A Ratkaisu ja pisteytysohjeet

Maalausyrittäjät A ja B tarjoavat maalauspalvelua.
Yrittäjän A työn hinta koostuu kiinteästä 55 euron osasta ja 53 euron tuntiveloituksesta.
Yrittäjän B työn hinta koostuu kiinteästä 100 euron osasta ja 50 euron tuntiveloituksesta.

1. Kuinka paljon neljä tuntia kestävä maalaustyö tulisi maksamaan yrittäjän A tekemänä? Entä yrittäjän B tekemänä?

RATKAISU
Yrittäjä A
Työn hinta euroina $55 + 53 \cdot 4 = 267$.

Yrittäjä B
Työn hinta euroina $100 + 50 \cdot 4 = 300$.

Vastaus: Työ maksaa yrittäjällä A 267 euroa ja yrittäjällä B 300 euroa.

PISTEYTYS
- Laskettu yrittäjän A hinta (3 p.)
- Laskettu yrittäjän B hinta (3 p.)

2. Asiakkaalla on maalaustyö, jonka tekemiseen kuluu x tuntia. Hän vertailee yrittäjien A ja B hintoja ja laskee, että työ tulee

27 euroa edullisemmaksi yrittäjän B tekemänä. Muodosta yhtälö ja ratkaise sen avulla työn kesto.

RATKAISU

Yrittäjän A työn hinta euroina: $55 + 53x$.
Yrittäjän B työn hinta euroina: $100 + 50x$.
Koska yrittäjän B hinta on 27 euroa pienempi kuin yrittäjän A hinta, saamme yhtälön

$55 + 53x - (100 + 50x) = 27$
$55 + 53x - 100 - 50x = 27$
$3x = 27 - 55 + 100$
$3x = 72 \quad \|: \ 3$
$x = 24$

Vastaus: Työn kesto on 24 tuntia.

PISTEYTYS

- Muodostettu yrittäjän A työn hintaa kuvaava lauseke (1 p.)
- Muodostettu yrittäjän B työn hintaa kuvaava lauseke (1 p.)
- Muodostettu oikea yhtälö (2 p.)
- Ratkaistu yhtälö (1 p.)
- Oikea vastaus yksikköineen (1 p.)

5. Mullankauhontaa

5.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Palvelukodissa suunnitellaan asukkaiden viriketoiminnaksi kesäkukkien siementen kylvämistä. Kylvöjä varten on hankittu suorakulmaisen särmiön muotoinen kukkalaatikko, jonka pohjan mitat ovat 10 cm ja 80 cm. Mullan syvyyden tulee olla vähintään 9 cm. Asukkaat kauhaisevat vuorollaan pussista multaa puolipallon muotoisen kauhan täyteen ja kaatavat mullan kukkalaatikkoon. Kauhan säde on 6 cm.
Kuinka monta asukasta vähintään tarvitaan kaatamaan laatikkoon kauhallinen multaa, jotta laatikossa olisi riittävästi multaa?

RATKAISU

Yhden kauhallisen tilavuus on $\frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (6 \ cm)^3}{2} = 144\pi \ cm^3 = 452{,}38934 \ldots cm^3$.
Laatikkoon tarvittavan multamäärän tilavuus on $10 \ cm \cdot 80 \ cm \cdot 9 \ cm = 7200 \ cm^3$.
Lasketaan montako kauhallista multaa tarvitaan: $\frac{7200 \ cm^3}{144\pi \ cm^3} = 15{,}9154$.

Vastaus: 16 asukkaan tulee kaataa kauhallinen multaa laatikkoon, jotta laatikossa olisi riittävästi multaa.

PISTEYTYS

- Laskettu kauhan tilavuus (4 p.)
- Laskettu laatikon tilavuus (4 p.)
- Laskettu tilavuuksien suhde (3 p.)
- Oikea vastaus (1 p.)

6. Polynomifunktion kasvavuus

6.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Millä muuttujan arvoilla funktio $f\left(x\right) = 2x^3 - 24x + 5$ on kasvava?

RATKAISU
Polynomifunktio $f\,(x)$ on kasvava, kun derivaattafunktio $f'\,(x) \geq 0$.
Derivoidaan funktio:
$f'\,(x) = 2 \cdot 3x^2 - 24 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 24$

Derivaattafunktio f' on polynomifunktio, joten sen merkki voi muuttua vain sen nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat:
$f'\,(x) = 0$
$6x^2 - 24 = 0$
$6x^2 = 24 \quad \|: 6$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x = \pm 2$

Selvitetään, millä muuttujan arvoilla $f'\,(x) \geq 0$.
Tapa 1:
Testipisteillä
$f'\,(-3) = 6 \cdot (-3)^2 - 24 = 54 - 24 = 30 \quad > 0$
$f'\,(0) = 6 \cdot 0^2 - 24 = -24 \quad < 0$
$f'\,(3) = 6 \cdot 3^2 - 24 = 54 - 24 = 30 \quad > 0$

Tapa 2:
Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten sen arvot ovat positiivisia kun $x \leq -2$ tai $x \geq 2$.

Vastaus: Funktio f on kasvava, kun $x \leq -2$ tai $x \geq 2$.

PISTEYTYS
- Derivoitu funktio oikein (3 p.)
- Lähdetty määrittämään derivaatan nollakohtia (2 p.)
- Laskettu derivaatan nollakohdat (3 p.)
- Perusteltu derivaatan merkki nollakohtien määrittämillä väleillä (3 p.)
- Oikea vastaus (1 p.)

7. Mathland

7.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

1. Sirpa on säästänyt Mathlandin matkaa varten rahaa. Hän on tallettanut 300 euroa tilille, jonka nettovuosikorko on 1,04 %. Talletus on kerryttänyt puolessa vuodessa korkoa *1,56* euroa.

PERUSTELU
$r = kit = 300\ € \cdot 0{,}0104 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}56\ €$

2. Sirpa vaihtaa 250 euroa kotikaupunkinsa pankissa Mathlandin lanteiksi. Pankissa Mathlandin lantin (MAL) myyntikurssi on 1 EUR = 3,759 MAL ja ostokurssi on 1 EUR = 3,764 MAL.
Sirpa saa pankilta vaihdossa *939,75* Mathlandin lanttia.

PERUSTELU
Pankki myy Mathlandin valuuttaa, joten käytetään myyntikurssia.
$1\ € \ = \ 3{,}759\ MAL \quad \| \cdot 250$
$250\ € \ = \ 939{,}75\ MAL$

3. Sirpa vaihtoi edellisen kerran euroja Mathlandin lanteiksi viisi vuotta sitten. Silloin myyntikurssi oli 1 EUR = 4,102 MAL ja

ostokurssi oli 1 EUR = 4,111 MAL . Verrataan nykyhetken myyntikurssia 1 EUR = 3,759 MAL ja ostokurssia 1 EUR = 3,764 MAL viiden vuoden takaisiin myynti- ja ostokursseihin.
Euro on viiden vuoden aikana *devalvoitunut* suhteessa Mathlandin lantiin.

PERUSTELU
Koska samalla määrällä euroja sai viisi vuotta aikaisemmin enemmän Mathlandin lantteja, on euron arvo laskenut suhteessa lanttiin. Euro on siis devalvoitunut suhteessa lanttiin.

4.
Mathland on tunnettu masideeli-koruistaan. Sirpa työskentelee reissullaan masideelitehtaalla ja saa työstään palkaksi 6700 lanttia. Mathlandissa työntekijän tulee maksaa palkastaan progressiivista vierailijatyöveroa oheisen taulukon mukaisesti:

Mathlandin vierailijatyöveroasteikko 2026		
Verotettava ansiotulo (lanttia)	**Vero alarajan kohdalla (lanttia)**	**Vero alarajan ylittävästä tulon osasta (%)**
0 – 5 000	0	1,5
5 000 – 22 300	75,00	3,2
22 300 – 54 800	628,60	4,9
54 800 –	2 221,10	5,6

Kuinka paljon Sirpa joutuu maksamaan Mathlandille veroa palkastaan?

RATKAISU
$6\ 700$ lanttia kuuluu välille $5\ 000\ -\ 22\ 300$ lanttia.
Vero alarajan kohdalla: $75{,}00$ lanttia.
Ylimenevän osan suuruus: $6700 \text{ lanttia} - 5000 \text{ lanttia} = 1700 \text{ lanttia}$.
Veron suuruus ylimenevästä osasta: $0{,}032 \cdot 1700 \text{ lanttia} = 54{,}40 \text{ lanttia}$.

Veroa yhteensä: $75{,}00 \text{ lanttia } + \ 54{,}40 \text{ lanttia } = 129{,}40 \text{ lanttia}$.

Vastaus: Sirpa joutuu maksamaan Mathlandille veroa $129{,}40$ lanttia.

PISTEYTYS
- Valittu oikea väli taulukosta (1 p.)
- Vero alarajan kohdalla oikein (1 p.)
- Laskettu alarajan ylittävä osuus (1 p.)
- Laskettu vero alarajan ylittävältä osuudelta (2 p.)
- Laskettu vero yhteensä (1 p.)

8. Kynttilöiden alennusmyynti

8.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Verkkokaupassa on kynttilöiden alennusmyynti. Kynttilöitä voi tilata viiden kynttilän setteinä. Verkkokaupan varastossa olevista kynttilöistä $33\ \%$ on valkoisia ja loput punaisia. Myyjä pakkaa varastosta kynttiläsettiin valkoisia ja punaisia kynttilöitä satunnaisina väriyhdistelminä. Yksi setti sisältää siis viisi kynttilää, joista valkoisia voi olla nollasta viiteen.

Tehtävän tilanteissa voidaan olettaa, että varastossa olevien valkoisten ja punaisten kynttilöiden suhteelliset osuudet eivät muutu.

1. Millä todennäköisyydellä yksittäiseen viiden kynttilän settiin ei tule yhtään valkoista kynttilää eli se on täysin punainen setti? (6 p.)

RATKAISU

P("Satunnaisesti valittu kynttilä on punainen.")
= 1-P("Satunnaisestai valittu kynttilä on valkoinen.")

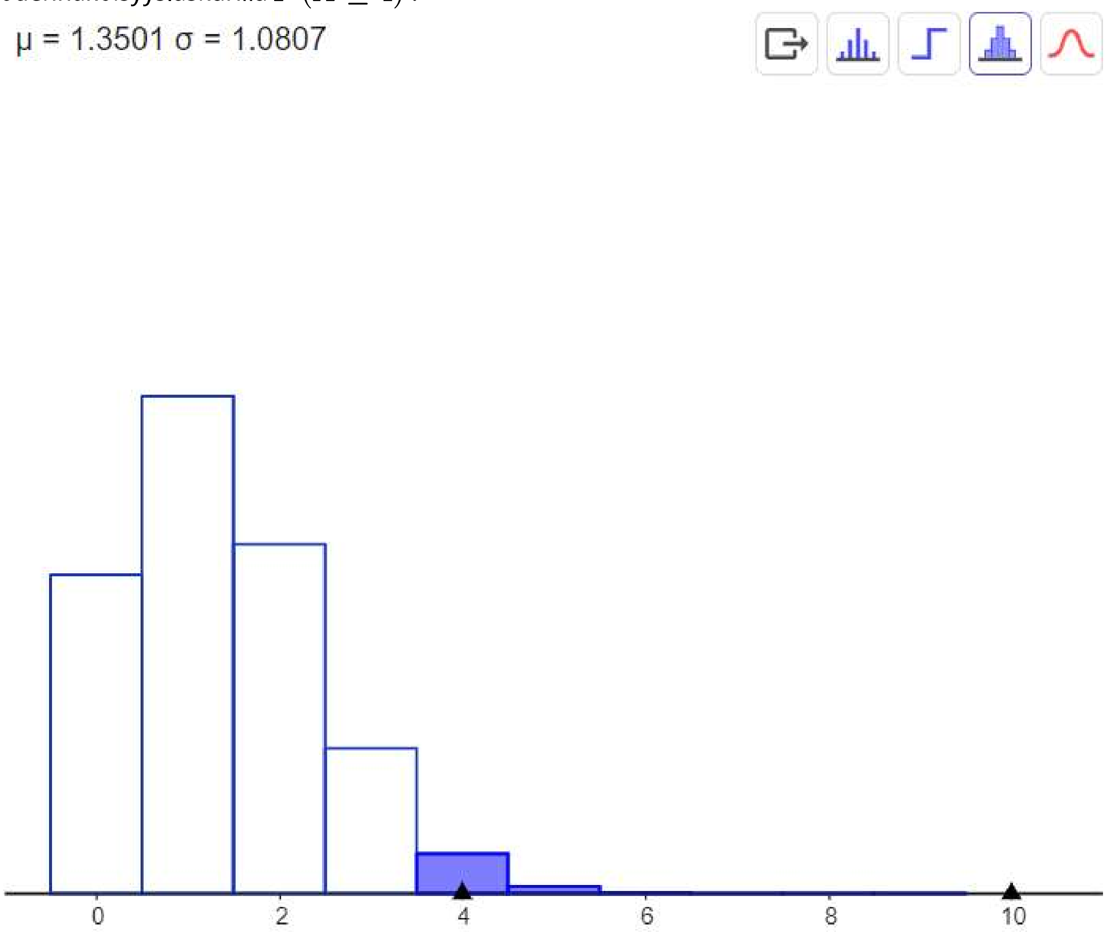
$= 1 - 0{,}33 = 0{,}67$
P("kaikki viisi kynttilää ovat punaisia")= $0{,}67^5 = 0{,}1350125107$

Vastaus: Viiden setti on täysin punainen noin 14 % todennäköisyydellä.

PISTEYTYS
- Punaisen kynttilän todennäköisyys (1 p.)
- Laskettu todennäköisyys, että viisi kynttilää ovat kaikki punaisia (4 p.)
- Vastaus annettu kahden tai kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella (1 p.)

2. Asiakas tilaa kymmenen kappaletta viiden kynttilän settejä. Millä todennäköisyydellä hän saa ainakin neljä täysin punaista settiä? (6p.)

RATKAISU
Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa täysin punaisten settien lukumäärää kymmenen setin tilauksessa. Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa parametrein $n = 10,\ \ p = 0{,}1350125107$. Määritetään todennäköisyyslaskurilla $P\left(X \geq 4\right)$.



k	P(X = k)
0	0.2344759268
1	0.3659842942
2	0.2570627503
3	0.1069971154
4	0.0292263315
5	0.0054741884
6	0.0007120372
7	0.0000635081
8	0.0000037173
9	0.0000001289
10	0.000000002

Binomijakauma n 10 p 0.135012

P(4 ≤ X ≤ 10) = 0.0354799133

Vastaus: Kymmenen setin tilauksessa on ainakin neljä täysin punaista settiä noin 3,5 % todennäköisyydellä.

PISTEYTYS
- Tunnistettu toistokoe/binomijakauma (1 p.)
- Toistojen lukumäärä 10 (1 p.)
- Yksittäisen toiston onnistumisen todennäköisyyden arvo (1 p.)
- Saatu oikea vastaus ja dokumentoitu menetelmä (2 p.)
- Annettu vastaus yhden, kahden tai kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella (1 p.)

- Laskettu ensimmäisen osatehtävän virheellisellä todennäköisyyden arvolla (max 5 p.)
- Yksittäisen toiston onnistumisen todennäköisyyden arvossa tulee olla vähintään yksi merkitsevä numero enemmän kuin lopullisessa vastauksessa. Mikäli merkitseviä numeroita on vähemmän tai saman verran (max 5 p.)

9. Remonttilaina

9.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Eerik ottaa 9 000 € suuruisen remonttilainan. Laina on tasalyhennyslaina eli jokaisessa maksuerässä lyhennyksen suuruus on yhtä suuri. Laina-ajaksi sovitaan 2 vuotta ja lainaa lyhennetään 3 kuukauden välein. Lainan korkokanta on 2,7 %. Laadi takaisinmaksusuunnitelma, josta näkyy jokaisen maksuerän suuruus. Kuinka monta prosenttia lainan korot kaikkiaan ovat lainan suuruudesta?

RATKAISU
Koska kyseessä on tasalyhennyslaina, saadaan yhden maksuerän lyhennyksen määrä jakamalla lainan suuruus maksuerien määrällä. Lyhennyksen suuruus on laskettu solussa B2.
Korkotekijä on laskettu jakamalla vuosikorko vuotuisten maksukertojen määrällä. Korkotekijä on laskettu solussa B3.
Sarakkeessa C on kunkin maksuerän koron määrä ja sarakkeessa D kunkin maksuerän suuruus.
Yhteensä korkoa maksetaan 273,38 €. Lasketaan montako prosenttia koron määrä on lainan suuruudesta. Se on laskettu solussa D16.

	A	B	C	D
1	maksukertojen lkm.	=4*2		
2	lyhennyksen suuruus	=9000/8		
3	korkotekijä	=0,027/4		
4				
5	maksukerta	jäljellä oleva laina ennen lyhennystä	koron määrä	maksuerän suuruus
6	1	9000	=B6*0,00675	=1125+C6
7	2	=B6-1125	=B7*0,00675	=1125+C7
8	3	=B7-1125	=B8*0,00675	=1125+C8
9	4	=B8-1125	=B9*0,00675	=1125+C9
10	5	=B9-1125	=B10*0,00675	=1125+C10
11	6	=B10-1125	=B11*0,00675	=1125+C11
12	7	=B11-1125	=B12*0,00675	=1125+C12
13	8	=B12-1125	=B13*0,00675	=1125+C13
14			=SUMMA(C6:C13)	=SUMMA(D6:D13)
15				
16			koron osuus lainasta	=C14/9000*100

	A	B	C	D
3	korkotekijä	0,00675		
4				
5	maksukerta	jäljellä oleva laina ennen lyhennystä	koron määrä	maksuerän suuruus
6	1	9000	60,75	1185,75
7	2	7875	53,16	1178,16
8	3	6750	45,56	1170,56
9	4	5625	37,97	1162,97
10	5	4500	30,38	1155,38
11	6	3375	22,78	1147,78
12	7	2250	15,19	1140,19
13	8	1125	7,59	1132,59
14			273,38	9273,38
15				
16			koron osuus lainasta	3,0375

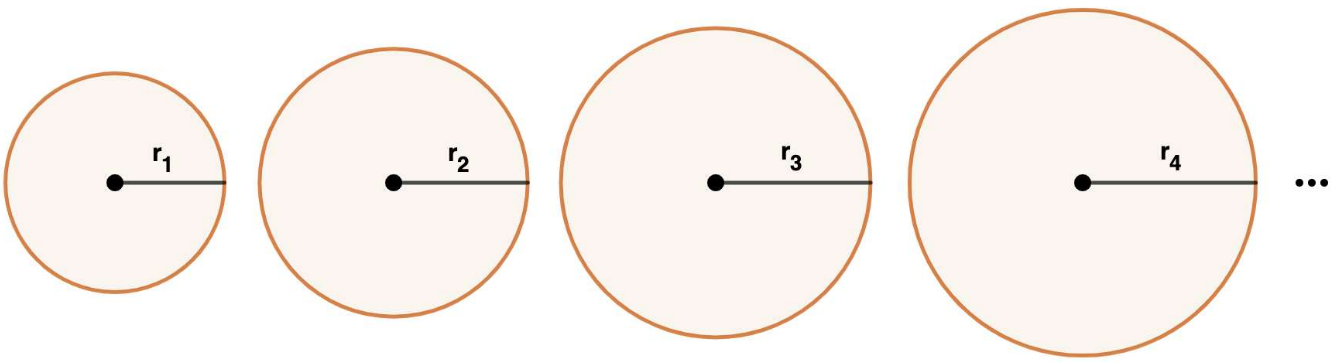
Vastaus: Suunnitelma yllä taulukossa. Lainan korot ovat kaikkiaan noin 3,0 % lainan suuruudesta.

PISTEYTYS
- Maksukertojen lukumäärä (1 p.)
- Lyhennyksen suuruus (1 p.)
- Korkotekijä (1 p.)
- Laskettu koron määrä jokaiselle maksukerralle (4 p.)
- Laskettu jokaisen maksuerän suuruus (2 p.)
- Laskettu korkojen summa (1 p.)
- Laskettu korkojen osuus lainasta (2 p.)

10. Ympyräjonoja

10.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Tarkastellaan ympyröitä, joiden säteet muodostavat lukujonon $r_n = \sqrt{n+1}$, jossa $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.



1. Luettele kolmen ensimmäisen ympyrän säteiden r_1, r_2 ja r_3 tarkat arvot. (2 p.)

RATKAISU
$r_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$r_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$
$r_3 = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

PISTEYTYS
- Yksi jäsen oikein (1 p.)
- Kaksi muuta jäsentä oikein (1 p.)

- Jos vastaukset likiarvoina (max 1 p.)

2. Osoita, että säteet eivät muodosta aritmeettista lukujonoa. (3 p.)

RATKAISU
Aritmeettisen lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.
$r_2 - r_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0{,}32$
$r_3 - r_2 = \sqrt{4} - \sqrt{3} \approx 0{,}27$

Koska peräkkäisten jäsenten erotuksista ei tule samat arvot, ei säteiden muodostama lukujono ole aritmeettinen.

PISTEYTYS
- Laskettu peräkkäisten jäsenten erotukset (2 p.)
- Todettu erotukset erisuuriksi (1 p.)

3. Osoita, että säteet eivät muodosta geometrista lukujonoa. (3 p.)

RATKAISU
Geometrisen lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde on vakio.
$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 1{,}22$
$\frac{r_3}{r_2} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$

Koska peräkkäisten jäsenten suhteista ei tule samat arvot, ei säteiden muodostama lukujono ole geometrinen.

PISTEYTYS
- Laskettu peräkkäisten jäsenten suhteet (2 p.)
- Todettu suhteet erisuuriksi (1 p.)

4. Ympyröiden pinta-alat muodostavat aritmeettisen lukujonon. Muodosta pinta-aloja kuvaavan lukujonon yleisen jäsenen lauseke a_n, jossa a_n on r_n-säteisen ympyrän pinta-ala. (6 p.)

RATKAISU
Ympyrän pinta-ala lasketaan kaavalla $A = \pi r^2$

Lasketaan kahden ensimmäisen ympyrän pinta-alat eli jonon kaksi ensimmäistä jäsentä a_1 ja a_2:
$a_1 = \pi \cdot \sqrt{2}^2 = 2\pi$
$a_2 = \pi \cdot \sqrt{3}^2 = 3\pi$

Aritmeettisen jonon erotusluku eli differenssi:
$d = a_2 - a_1 = 3\pi - 2\pi = \pi$

Yleinen jäsen:
$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 2\pi + (n-1)\,\pi = 2\pi + \pi n - \pi = \pi + \pi n = \pi\,(n+1)$

Vastaus: $a_n = \pi + \pi n = \pi\,(n+1)$

PISTEYTYS
- Laskettu ensimmäinen jäsen oikein (1 p.)

- Laskettu toinen jäsen oikein (1 p.)
- Laskettu differenssi (1 p.)
- Sijoitettu arvot yleisen jäsenen lausekkeeseen (2 p.)
- Sievennetty lauseke (1 p.)

- Kumpikin vastauksessa esitetty yleisen jäsenen sievennetty muoto hyväksytään
- Jos laskettu likiarvoilla (max 4 p.)
- Jos laskettu ensimmäisessä osatehtävässä säteet väärin ja ratkaistu tehtävä oikein virheellisillä säteen tarkoilla arvoilla (max 4 p.)

5. Lasketaan jonon ympyröiden pinta-aloja yhteen. Kuinka monen ensimmäisen ympyrän pinta-alat on laskettava yhteen, jotta summa ensimmäisen kerran ylittää arvon 1000. (4 p.)

RATKAISU

Tapa 1:

Taulukoidaan jonon jäsenten arvoja ja lasketaan taulukkolaskennan avulla jäsenten summia viereiseen sarakkeeseen.

Syötteet:

	A	B	C
1	**n**	**a_n**	**S_n**
2	1	=PII()+PII()*A2	=B2
3	2	=PII()+PII()*A3	=C2+B3
4	3	=PII()+PII()*A4	=C3+B4
5	4	=PII()+PII()*A5	=C4+B5
6	5	=PII()+PII()*A6	=C5+B6
7	6	=PII()+PII()*A7	=C6+B7
8	7	=PII()+PII()*A8	=C7+B8
9	8	=PII()+PII()*A9	=C8+B9
10	9	=PII()+PII()*A10	=C9+B10
11	10	=PII()+PII()*A11	=C10+B11
12	11	=PII()+PII()*A12	=C11+B12
13	12	=PII()+PII()*A13	=C12+B13
14	13	=PII()+PII()*A14	=C13+B14
15	14	=PII()+PII()*A15	=C14+B15
16	15	=PII()+PII()*A16	=C15+B16
17	16	=PII()+PII()*A17	=C16+B17
18	17	=PII()+PII()*A18	=C17+B18
19	18	=PII()+PII()*A19	=C18+B19
20	19	=PII()+PII()*A20	=C19+B20
21	20	=PII()+PII()*A21	=C20+B21
22	21	=PII()+PII()*A22	=C21+B22
23	22	=PII()+PII()*A23	=C22+B23
24	23	=PII()+PII()*A24	=C23+B24
25	24	=PII()+PII()*A25	=C24+B25
26	25	=PII()+PII()*A26	=C25+B26
27	26	=PII()+PII()*A27	=C26+B27
28	27	=PII()+PII()*A28	=C27+B28
29	28	=PII()+PII()*A29	=C28+B29
30	29	=PII()+PII()*A30	=C29+B30
31	30	=PII()+PII()*A31	=C30+B31

Saadut arvot:

	A	B	C
1	n	a_n	S_n
2	1	6.28	6.28
3	2	9.42	15.71
4	3	12.57	28.27
5	4	15.71	43.98
6	5	18.85	62.83
7	6	21.99	84.82
8	7	25.13	109.96
9	8	28.27	138.23
10	9	31.42	169.65
11	10	34.56	204.20
12	11	37.70	241.90
13	12	40.84	282.74
14	13	43.98	326.73
15	14	47.12	373.85
16	15	50.27	424.12
17	16	53.41	477.52
18	17	56.55	534.07
19	18	59.69	593.76
20	19	62.83	656.59
21	20	65.97	722.57
22	21	69.12	791.68
23	22	72.26	863.94
24	23	75.40	939.34
25	24	78.54	1017.88
26	25	81.68	1099.56
27	26	84.82	1184.38
28	27	87.96	1272.35
29	28	91.11	1363.45
30	29	94.25	1457.70
31	30	97.39	1555.09

Summa S_n ylittää ensimmäisen kerran arvon 1000, kun $n = 24$.

Vastaus: 24 ensimmäisen ympyrän pinta-alat.

Tapa 2:
Aritmeettisen jonon summakaava:
$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

$S_n > 1000$
$a_1 = 2\pi$
$a_n = \pi\,(n+1)$

Muodostetaan epäyhtälö
$n \cdot \frac{2\pi + \pi(n+1)}{2} > 1000$

Ratkaistaan laskimella:

$$\text{solve}\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi+\pi\cdot(n+1)}{2}>1000,n\right)$$

$$\blacktriangleright\ n<-26.7759 \text{ or } n>23.7759$$

Vastaus: 24 ensimmäisen ympyrän pinta-alat.

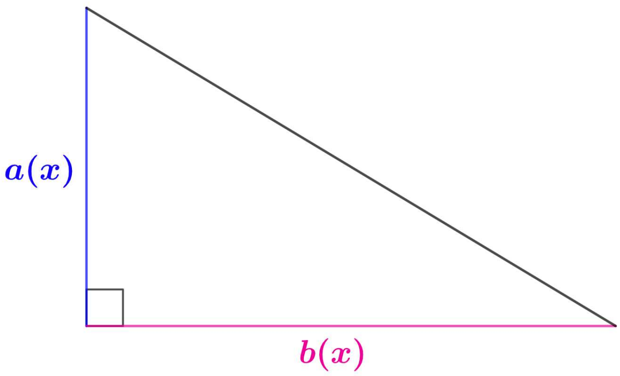
PISTEYTYS
Tapa 1:
- Taulukoitu riittävästi jonon jäsenten eli pinta-alojen arvoja (1 p.)
- Taulukoitu pinta-alojen summia (2 p.)
- Saatu oikea vastaus (1 p.)

Tapa 2:
- Sijoitettu a_1 aritmeettisen jonon summakaavaan (1 p.)
- Sijoitettu a_n aritmeettisen jonon summakaavaan (1 p.)
- Muodostettu yhtälö tai epäyhtälö ja ratkaistu se (1 p.)
- Saatu oikea vastaus (1 p.)

- Laskettu vain muutamia ensimmäisiä pinta-aloja yhteen (max 1 p.)
- Käytetty piin likiarvoa 3,14 tai tarkempaa arvoa (max 4 p.)

11. Kateettifunktiot

11.A Ratkaisut ja pisteytysohjeet



Suorakulmaisen kolmion kateetin a pituus määräytyy funktion $a(x) = (x-k)^2 + 1$ arvon mukaisesti ja kateetin b pituus määräytyy funktion $b(x) = (k-1)x + 3$ arvon mukaisesti. Molemmissa funktioissa parametri $k > 1$ ja muuttuja $x > 0$.

1. Laske suorakulmaisen kolmion pinta-ala, kun $k = 2$ ja $x = 3$.

RATKAISU

$a(3) = (3-2)^2 + 1 = 2$
$b(3) = (2-1)\cdot 3 + 3 = 6$

Pinta-ala:
$A = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6 = 6$

Vastaus: Kolmion pinta-ala on 6.

PISTEYTYS
- Sijoitettu parametrin k ja muuttujan x arvot (1 p.)
- Laskettu kateetin a pituus (1 p.)

- Laskettu kateetin b pituus (1 p.)
- Laskettu pinta-ala (1 p.)

2. Tarkastellaan tilannetta, jossa $k = 3$. Millä muuttujan x arvoilla kolmio on tasakylkinen?

RATKAISU
Kolmio on tasakylkinen, kun funktiot saavat saman arvon.
$a(x) = b(x)$
$(x-3)^2 + 1 = (3-1)x + 3$
$\text{solve}\left((x-3)^2+1=(3-1)\cdot x+3,x\right) \blacktriangleright x=1 \text{ or } x=7$

Vastaus: Kolmio on tasakylkinen, kun $x = 1$ tai $x = 7$.

PISTEYTYS
- Merkitty kateettien lausekkeet yhtä suuriksi (2 p.)
- Ratkaistu yhtälö (3 p.)
- Oikea vastaus (1 p.)

3. Kateetin a pituus on 2, kun $x = 5$. Määritä parametrin k kaikki mahdolliset arvot. Laske kolmion hypotenuusan pituuden tarkka arvo kaikilla näillä parametrin k arvoilla.

RATKAISU
Ratkaistaan parametrin k arvo.
$a(5) = 2$
$(5-k)^2 + 1 = 2$
$\text{solve}\left((5-k)^2+1=2,k\right) \blacktriangleright k=4 \text{ or } k=6$

Tarkastellaan kolmiota, kun $k = 4$:
Kateetin b pituus: $b(5) = (4-1)\cdot 5 + 3 = 18$
Hypotenuusan c pituus:
$2^2 + 18^2 = c^2$
$\text{solve}\left(2^2+18^2=c^2,c\right)$
$\blacktriangleright c=-2\cdot\sqrt{82} \text{ or } c=2\cdot\sqrt{82}$
Hypotenuusan pituus ei voi olla negatiivinen.

Tarkastellaan kolmiota, kun $k = 6$:
Kateetin b pituus: $b(5) = (6-1)\cdot 5 + 3 = 28$
Hypotenuusan c pituus:
$2^2 + 28^2 = c^2$
$\text{solve}\left(2^2+28^2=c^2,c\right)$
$\blacktriangleright c=-2\cdot\sqrt{197} \text{ or } c=2\cdot\sqrt{197}$
Hypotenuusan pituus ei voi olla negatiivinen.

Vastaus: Hypotenuusan pituus on $2\sqrt{82}$, kun $k = 4$ ja $2\sqrt{197}$, kun $k = 6$.

PISTEYTYS
- Muodostettu yhtälö parametrin k ratkaisemiseksi kateetin a avulla (2 p.)
- Ratkaistu kateetin b pituus, kun $k = 4$ (1 p.)
- Ratkaistu hypotenuusan pituus, kun $k = 4$ (2 p.)
- Ratkaistu kateetin b pituus, kun $k = 6$ (1 p.)
- Ratkaistu hypotenuusan pituus, kun $k = 6$ (2 p.)

- Jos laskettu hypotenuusan pituus väärillä kateetin arvoilla (max 2p.)