

## Ratkaisut ja pisteytys MAB MFKA preliminääri K2023

### 1. Perusasioita (12 p.)

Laske tai ratkaise välivaiheet esittäen. Pelkkä vastaus antaa vain 1 p. / kohta.

#### 1.1 Lausekkeen arvo (3 p.)

Laske  
$$\frac{7-5 \cdot (-3)}{11}.$$

$$\frac{7-5 \cdot (-3)}{11} = \frac{7+15}{11} = \frac{22}{11} = 2 \quad (1 \text{ p} + 1 \text{ p} + 1 \text{ p})$$

#### 1.2 Funktion arvo (3 p.)

Olkoon  $f(x) = x^2 + 3x$ . Laske  $f(5)$ .

$$f(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 = 25 + 15 = 40 \quad (\text{sijoitus } 2 \text{ p, vastaus } 1 \text{ p})$$

#### 1.3 Ensimmäisen asteen yhtälö (3 p.)

Ratkaise yhtälö  
 $20x + 2 = 4x + 10.$

$$20x + 2 = 4x + 10$$

$$20x - 4x = 10 - 2 \quad (1 \text{ p})$$

$$16x = 8$$

$$x = \frac{8}{16} \quad (1 \text{ p})$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (1 \text{ p})$$

1.4 Toisen asteen yhtälö **3 p.**

Ratkaise yhtälö

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} \quad (1 \text{ p})$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$x = \frac{2 + 8}{2} \text{ tai } x = \frac{2 - 8}{2}$$

$$x = 5 \text{ tai } x = -3 \quad (1 \text{ p} + 1 \text{ p})$$

## 2. Monivalintatehtävä 12 p.

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

2.1 Yhtälön  $x^2(x + 3) = 0$  ratkaisu on 2 p.

2.2 Suora  $y = 5 - \frac{x}{2}$  leikkaa y-akselin pisteessä 2 p.

2.3 Suorakulmaisen kolmion pinta-ala on  $20\text{m}^2$ . Kateettien pituudet voivat olla 2 p.

2.4 Rekursiivisen lukujonon

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1 \end{cases}$$

3. jäsen  $a_3$  on 2 p.

2.5 Geometrisen jonon viides jäsen on 112 ja kuudes jäsen on -224. Jonon yleinen jäsen  $a_n$  on 2 p.

2.6 Salmiakkin kilohinta nousee 8 % ja samalla sitä ruvetaan myymään massaltaan 12 % suuremmassa pussissa. Salmiakkipussin hinta 2 p.

### 3. Suora ja aritmeettinen lukujono 12 p.

#### 3.1 Suoran yhtälö 6 p.

Suora  $l$  kulkee pisteiden  $A = (2, -3)$  ja  $B = (4,1)$  kautta. Muodosta suoran  $l$  kulmakerroin ja yhtälö.

suoran  $l$  kulmakerroin

$$k = \frac{1 - (-3)}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2 \quad (2 \text{ p oikea sijoitus ja 1 p kulmakerroin oikein})$$

suoran  $l$  yhtälö

$$y - 1 = 2(x - 4) \quad (2 \text{ p})$$

$$y - 1 = 2x - 8$$

$$y = 2x - 7 \quad (1 \text{ p})$$

#### 3.2 Aritmeettinen lukujono 6 p.

Aritmeettisen lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat

$a_1 = 10$  ja  $a_2 = 18$ . Laske lukujonon 500. jäsen ja 500 ensimmäisen jäsenen summa.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$$

$$d = 18 - 10 = 8 \quad (1 \text{ p})$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

jonon 500. jäsen

$$a_{500} = 10 + 499 \cdot 8 = 4002 \quad (1 \text{ p sijoitus ja 1 p oikea tulos})$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = n \frac{a_1 + a_n}{2}$$

jonon 500 ensimmäisen jäsenen summa

$$S_{500} = 500 \cdot \frac{10 + 4002}{2} = 1003000 \quad (2 \text{ p sijoitus ja 1 p oikea tulos})$$

#### 4. Noppa tai laatikko 12 p.

Vastaa joko tehtävään 4.1 tai 4.2.

Tehtävä 4.1

Tavallista arpakuutiota heitetään kaksi kertaa.

- a) Millä todennäköisyydellä silmälukujen summa on suurempi kuin viisi? (3 p.)
- b) Millä todennäköisyydellä silmälukujen tulo on kolmella jaollinen? (3 p.)
- c) Millä todennäköisyydellä saadaan ainakin kerran vähintään 4? (3 p.)
- d) Millä todennäköisyydellä 1.heitolla saadaan vähintään 3 ja toisella enintään 4? (3 p.)

Ratkaistaan taulukoimalla. Ensimmäisessä sarakkeessa on 1. heiton tulos ja ensimmäisessä rivissä 2. heiton tulos. Alkeistapauksia on  $6 \times 6 = 36$ .

a)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Suotuisia tapauksia 26 kpl.

b)

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Suotuisia tapauksia 20 kpl.

c)

	1	2	3	4	5	6
1				x	x	x
2				x	x	x
3				x	x	x
4	x	x	x	x	x	x
5	x	x	x	x	x	x
6	x	x	x	x	x	x

Suotuisia tapauksia 27 kpl.

d)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3	x	x	x	x		
4	x	x	x	x		
5	x	x	x	x		
6	x	x	x	x		

Suotuisia tapauksia 16 kpl.

$$(a) P(\text{summa} > 5) = \frac{13}{18}$$

$$(b) P(\text{tulo kolmella jaollinen}) = \frac{5}{9}$$

$$(c) P(\text{ainakin toinen vähintään 4}) = \frac{3}{4}$$

$$(d) P(\text{1. vähintään 3 ja toisella vähintään 4}) = \frac{4}{9}$$

a) summataulukko 1p ja oikea tulos 2p

b) tulotaulukko 1p ja oikea tulos 2p

c) ymmärretty ainakin ja vähintään 1p ja oikea tulos 2p

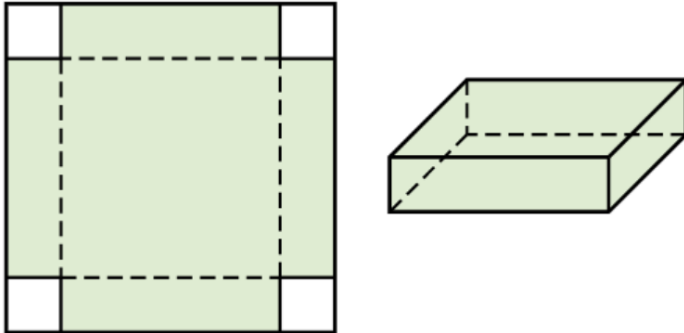
d) ymmärretty vähintään ja enintään sanat 1p ja oikea tulos 2p

Jos vastauksia ei ole supistettu, vähennetään kokonaisuudessaan vain 1 p.

Jos kaikkien tapausten lukumäärä, saa siitä yhteensä 2 p.

Tehtävä 4.2

Neliön muotoisen pahvin nurkista leikataan pois samankokoiset neliöt ja pahvi taitellaan kannettomaksi suorakulmaisen särmiön muotoiseksi laatikoksi. Alkuperäisen pahvineliön sivun pituus on 6 dm.



a) Olkoon poisleikattavan neliön sivun pituus  $x$  dm. Osoita, että laatikon tilavuus on  $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ . (5 p.)

b) Mistä tiedetään, että  $0 \leq x \leq 3$ ? (4 p.)

c) Millä  $x$ :n arvolla saavutetaan suurin laatikon tilavuus ja paljonko tämä suurin tilavuus on? (3 p.)

a)

Laatikon särmien pituudet ovat

$$6 - 2x, 6 - 2x, x$$

Laatikon tilavuus

$$(6 - 2x) \cdot (6 - 2x) \cdot x = (36 - 12x - 12x + 4x^2) \cdot x = (36 - 24x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

sivujen pituudet 2 p, tilavuuden lauseke 2 p, sievennys oikein 1 p

b)

Koska sivun pituudet ovat positiivisia

$$6 - 2x > 0 \quad \text{ja} \quad x > 0$$

$$-2x > -6$$

$$x < 3$$

tai

Koska  $x$  on neliön sivun pituus, on se positiivinen.

Kun 6 pituisesta sivusta/särmästä leikataan pois kaksi samanpituista osaa, on leikattava osa pienempi kuin  $\frac{6}{2} = 3$

alarajan perustelu 2 p ja ylärajan perustelu 2 p

c)

$$f'(x) = 12x^2 - 48x + 36$$

(1 p)

$$f'(x) = 0$$

$$x = \frac{-(-48) \pm \sqrt{(-48)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 36}}{2 \cdot 12} = \frac{48 \pm \sqrt{576}}{24} = \frac{48 \pm 24}{24}$$

$x = 1$  tai  $x = 3$  joista

$x = 1$  on välin  $0 < x < 3$  sisällä

Kohdassa  $x=1$  derivaatan merkki muuttuu positiivisesta negatiiviseksi, sillä derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin avautuva paraabeli.

Näin ollen funktio on kasvava kun  $x \leq 1$  ja vähenevä kun

$x \geq 1$ .

Kohdassa  $x=1$  saadaan funktion suurin arvo

$$f(1) = 4 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 = 16$$

Vastaus: Laatikon suurin tilavuus on  $16 \text{ dm}^3$

(1 p)

ja se saadaan kun  $x = 1 \text{ dm}$ .

(1 p)

TAI

nojaudutaan liitteenä olevaan kuvaajaan ja luetaan vastaus suoraan kuvaajasta



## 5. Lääkelasku 12 p.

Funktio

$$f(x) = 500 \cdot 0,5^{\frac{x}{3}}$$

ilmaisee asetyylisalisyylihapon määrän milligrammoina elimistössä, kun lääketabletin ottamisesta on kulunut  $x$  tuntia.

- Kuinka paljon lääkettä on elimistössä 6 tunnin kuluttua lääkkeen ottamisesta? (2 p.)
- Kuinka paljon lääketabletissa on asetyylisalisyylihappoa? (2 p.)
- Kuinka pitkän ajan kuluttua lääkkeen ottamisesta asetyylisalisyylihappoa oli jäljellä elimistössä 300 milligrammaa? Anna vastaus minuutin tarkkuudella. (2 p.)
- Mikä on lääkkeen puoliintumisaika eli missä ajassa asetyylisalisyylihapon määrä puoliintuu? (3 p.)
- Ibuprofeenin puoliintumisaika on 2 tuntia. Tabletissa on 400 milligrammaa ibuprofeenia. Määritä funktio, joka ilmaisee ibuprofeenin määrän milligrammoina elimistössä, kun lääketabletin ottamisesta on kulunut  $x$  tuntia. (3 p.)

Määritellään funktio  $f(x) := 500 \cdot (0.5)^{\frac{x}{3}}$  ▶ *Valmis*

a)  $f(6)$  ▶ 125. **Vastaus:** 125 milligrammaa

(1 p + 1p)

b)  $f(0)$  ▶ 500. **Vastaus:** 500 milligrammaa

(1 p + 1p)

c)  $\text{solve}(f(x)=300,x)$  ▶  $x=2.2108967825$ , muunnos minuuteiksi  $0.210896782 \cdot 60$  ▶ 12.65380692

(1 p)

**Vastaus:** 2 tunnin ja 12 minuutin kuluttua

(1 p)

d)  $\text{solve}\left(f(x)=\frac{f(0)}{2},x\right)$  ▶  $x=3$ . eli  $\text{solve}\left(500 \cdot (0.5)^{\frac{x}{3}}=250,x\right)$  ▶  $x=3$ .

(2 p)

**Vastaus:** 3 tuntia

(1 p)

e)  $g(x) := 400 \cdot (0.5)^{\frac{x}{2}}$  ▶ *Valmis*

Tarkistus  $g(0)$  ▶ 400. ja  $\text{solve}\left(g(x)=\frac{g(0)}{2},x\right)$  ▶  $x=2$ . eli  $\text{solve}\left(400 \cdot (0.5)^{\frac{x}{2}}=200,x\right)$  ▶  $x=2$ .

**Vastaus:**  $g(x) := 400 \cdot (0.5)^{\frac{x}{2}}$

(3 p, joku kolmesta 400, kantaluku ja eksponentti väärin - 2p)

## 6. Pörssisähköä ja verotusta 12 p.

### 6.1 8 p.

Pörssisähkösopimuksen energiahinta tunneittain määräytyy NordPool sähköpörssin Suomen hinta-alueen Spot-hinnan eli tuntihinnan perusteella. Tähän Spot-hintaan lisätään ensin välityspalkkio 0,3 c/kWh ja sitten arvonlisävero 24 %, jolloin saadaan tunnin kokonaishinta. Asiakkaan energiamaksu muodostuu siitä, että kunkin tunnin aikana käytetty energiamäärä kerrotaan kyseisen tunnin kokonaishinnalla.

Oheisessa liitetiedostossa on taulukoituna kotitalouden yhden vuorokauden (5.11.2021) sähkönkulutus ja Spot-hinta tunneittain. Laske kotitalouden kyseisen vuorokauden energiamaksu.

#### Aineisto

##### 6.1.A Kulutus

Soluun E2 kirjoitetaan kaava  $=1,24*(D2+0,3)$ , joka kopioidaan soluun E25 saakka. (2 p)

Soluun F2 kirjoitetaan kaava  $=C2*E2$ , joka kopioidaan soluun F25 saakka. (2 p)

Lopuksi lasketaan summa soluun F26 kaavalla  $=SUMMA(F2:F25)$  (2 p)

Vastaus: 2 euroa ja 30 senttiä (2 p)

	C	D	E	F	
1	<b>Kulutus (kWh)</b>	<b>Spot tuntihinta (snt/kWh)</b>	<b>tunnin kokonaishinta</b>	<b>energiamaksu</b>	
2	0,88	2,75	3,782	3,32816	
3	1,47	2,43	3,3852	4,976244	
4	2,35	2,28	3,1992	7,51812	
5	1,06	2,24	3,1496	3,338576	
6	0,57	2,27	3,1868	1,816476	
7	0,63	2,3	3,224	2,03112	
8	0,65	2,75	3,782	2,4583	
9	0,6	9,51	12,1644	7,29864	
10	0,49	12,84	16,2936	7,983864	
11	0,85	13,12	16,6408	14,14468	
12	0,73	12,88	16,3432	11,930536	
13	0,81	12,47	15,8348	12,826188	
14	0,95	11,96	15,2024	14,44228	
15	1,44	11,28	14,3592	20,677248	
16	2,26	10,98	13,9872	31,611072	
17	0,83	10,71	13,6524	11,331492	
18	1,02	11,03	14,0492	14,330184	
19	0,95	11,32	14,4088	13,68836	
20	0,91	11,68	14,8552	13,518232	
21	0,88	11,41	14,5204	12,777952	
22	0,76	5,99	7,7996	5,927696	
23	1,96	2,27	3,1868	6,246128	
24	0,91	2,08	2,9512	2,685592	
25	1,03	1,93	2,7652	2,848156	
26			<b>summa</b>	<b>229,735296</b>	

6.2 4 p.

Hallitus on päättänyt laskea sähkön energiamaksun arvonlisäveron määräaikaisesti 24 prosentista 10 prosenttiin. Kuinka monta prosenttia kuluttajan energialaskun suuruus pienenee?

Tarkastellaan tilannetta, jossa veroton hinta on  $a$  euroa.

Aluksi verollinen hinta on  $1.24a$ ,

(1 p)

Veromuutoksen jälkeen verollinen hinta on  $1.10a$ .

(1 p)

$$\frac{1.24 \cdot a - 1.1 \cdot a}{1.24 \cdot a} \cdot 100 \triangleright 11.29$$

(1 p)

Vastaus: Kuluttajan energialaskun suuruus pienenee 11,3 %.

(1 p)

## 7. Pyramidi (12 p.)

Tässä tehtävässä vastaukset voi antaa joko tarkkoina arvoina tai likiarvoina kahden desimaalin tarkkuudella. Tehtävän voi ratkaista joko laskemalla tai geometriaohjelmistolla piirtämällä ja mittaamalla.

Suoran pyramidin korkeus on 4 ja neliönmuotoisen pohjan lävistäjän pituus 5.

- Mikä on pyramidin sivusärmän ja pohjan lävistäjän välinen kulma? (3 p.)
- Mikä on pyramidin pohjaneliön sivun pituus? (3 p.)
- Mikä on pyramidin tilavuus? (3 p.)
- Mikä on pyramidin sivutahkon pinta-ala? (3 p.)

a)

$$\tan^{-1}\left(\frac{4}{\frac{1}{2} \cdot 5}\right) \rightarrow 57.99 \text{ astetta}$$

(tangentin lauseke 2 p ja siitä kulma 1 p)

b)

Olkoon pohjaneliön sivun pituus  $x$

Pythagoraan lauseella

$$\text{solve}(x^2 + x^2 = 5^2, x) | x > 0 \rightarrow x = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

(2 p Pythagoras sovellettuna tai MAOL:n kaava)

$$\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} \rightarrow 3.54$$

(1 p)

c) Tilavuus

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 4 \rightarrow \frac{50}{3}$$

(2 p)

$$\frac{50}{3} \rightarrow 16.67$$

(1 p)

d) Olkoon sivutahkon korkeus  $h$

$$\text{solve}\left(\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4^2 = h^2, h\right) | h > 0 \rightarrow h = \frac{3 \cdot \sqrt{34}}{4}$$

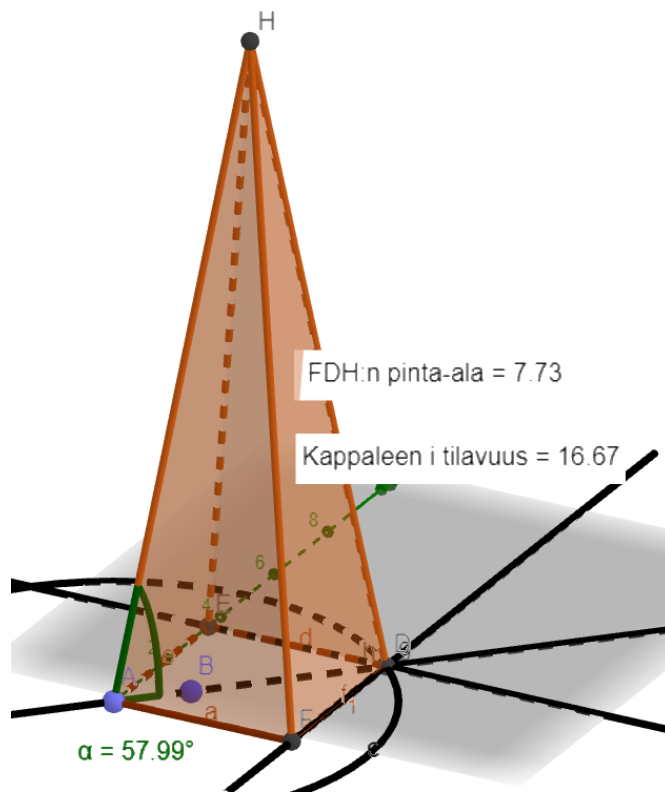
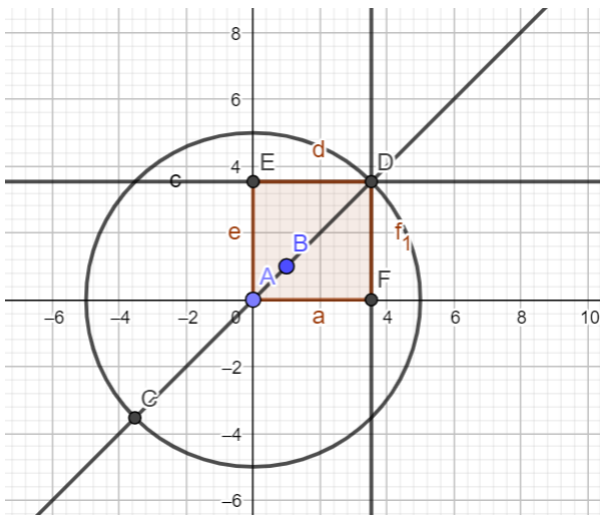
(2 p)

Sivutahkon pinta-ala

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{34}}{4} \rightarrow \frac{15 \cdot \sqrt{17}}{8}$$

$$\frac{15 \cdot \sqrt{17}}{8} \rightarrow 7.73$$

(1 p)



	Nimi	Kuvaus	Arvo
1	Piste A	Piste objektilla yAkseli	$A = (0, 0)$
2	Ympyrä c	Ympyrä, jonka keskipiste on A ja säde 5	$c: x^2 + y^2 = 25$
3	Piste B		$B = (1, 1)$
4	Suora f	Suora A, B	$f: -x + y = 0$
5	Piste C	Objektien c ja f leikkauspiste	$C = (-3.54, -3.54)$
5	Piste D	Objektien c ja f leikkauspiste	$D = (3.54, 3.54)$
6	Suora g	D:n kautta kulkeva ja objektia xAkseli vastaan kohtisuora suora	$g: x = 3.54$
7	Suora h	D:n kautta kulkeva ja objektia yAkseli vastaan kohtisuora suora	$h: y = 3.54$
8	Piste E	h ja yAkseli leikkaus	$E = (0, 3.54)$
9	Piste F	g ja xAkseli leikkaus	$F = (3.54, 0)$
10	Nelikulmio m1	Monikulmio A, F, D, E	$m1 = 12.5$
10	Jana a	Jana [A, F]	$a = 3.54$
10	Jana f <sub>1</sub>	Jana [F, D]	$f_1 = 3.54$
10	Jana d	Jana [D, E]	$d = 3.54$
10	Jana e	Jana [E, A]	$e = 3.54$

11	Pyramidi i	Pyramidi(m1, 4)	$i = 16.67$
11	Piste H	Pyramidi(m1, 4)	$H = (1.77, 1.77, 4)$
11	Jana särmäFH	Jana [F, H]	särmäFH = 4.72
11	Jana särmäAH	Jana [H, A]	särmäAH = 4.72
11	Kolmio tahkoAFH	Monikulmio A, F, H	tahkoAFH = 7.73
11	Jana särmäDH	Jana [D, H]	särmäDH = 4.72
11	Kolmio tahkoDFH	Monikulmio F, D, H	tahkoDFH = 7.73
11	Jana särmäEH	Jana [E, H]	särmäEH = 4.72
11	Kolmio tahkoDEH	Monikulmio D, E, H	tahkoDEH = 7.73
11	Kolmio tahkoAEH	Monikulmio E, A, H	tahkoAEH = 7.73

12	Teksti TekstitahkoDFH	" " + (Nimi(F)) + (Nimi(D)) + (Nimi(H)) + ":n pinta-ala = " + tahkoDFH	" FDH:n pinta-ala = 7.73"
13	Piste PistetahkoDFH	Piste objektin tahkoDFH sisällä.	PistetahkoDFH = (2.68, 1.93, 1.93)
14	Luku tilavuusi	Tilavuus(i)	tilavuusi = 16.67
15	Teksti Tekstii	"Kappaleen " + (Nimi(i)) + " tilavuus = " + tilavuusi	"Kappaleen i tilavuus = 16.67"
16	Piste Pistei	Piste objektin i sisällä.	Pistei = (1.2, 0.83, 1.88)
17	Kulma α	H:n, A:n ja D:n välinen kulma	$\alpha = 57.99^\circ$

## 8. Tuulivoimalat Suomessa 12 p.

Oheisessa taulukossa on vuosina 1991 - 2022 Suomessa valmistuneet tuulipuistot ja -voimalat.

Lähde: Suomen tuulivoimayhdistys ry,

<https://tuulivoimayhdistys.fi/kategoria/tilastot-2>

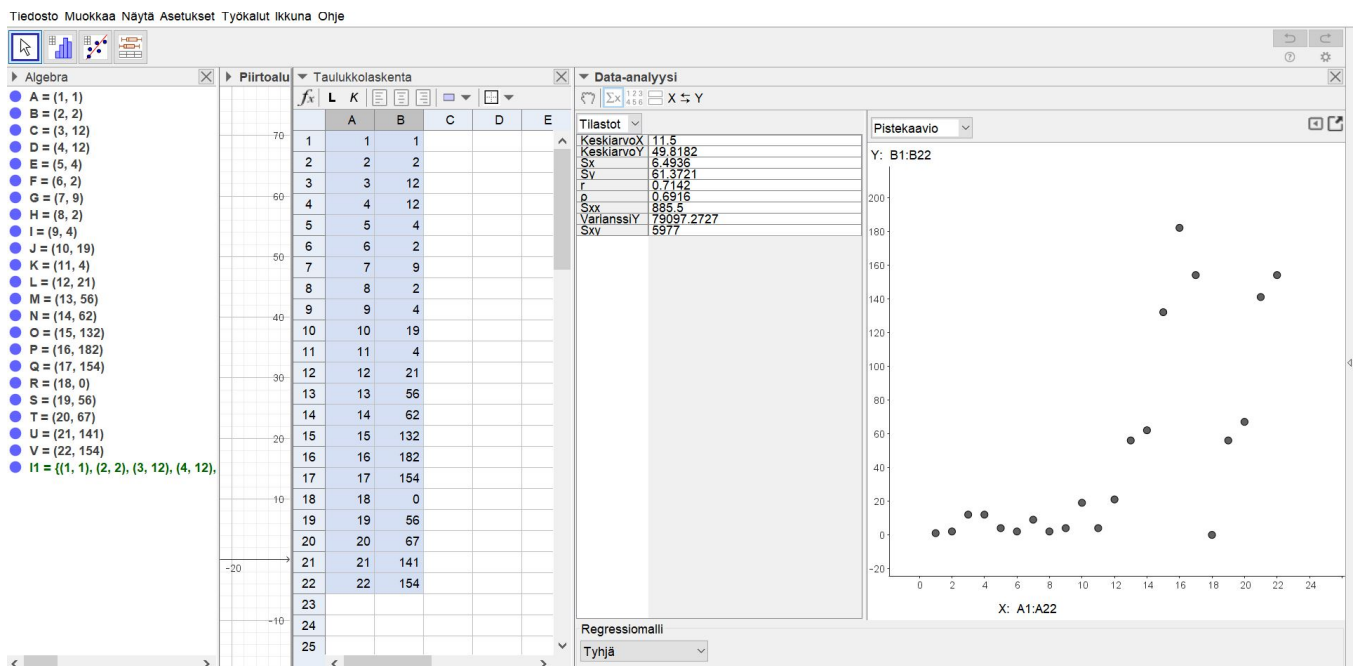
a) Laadi pistekaavio, josta ilmenee vuodesta 2001 alkaen vuosittain valmistuneiden voimaloiden lukumäärän kehitys. Kuinka monta voimalaa vuosittain valmistui keskimäärin ja kuinka suuri oli keskihajonta. (6p.)

b) Luokittele vuodesta 2001 vuoteen 2022 valmistuneiden tuulipuistojen tehot kuuteen eri tasaväliseen luokkaan ja muodosta luokitellun aineiston frekvenssitaulukko sekä pistekaavio. (6p.)

### Aineisto

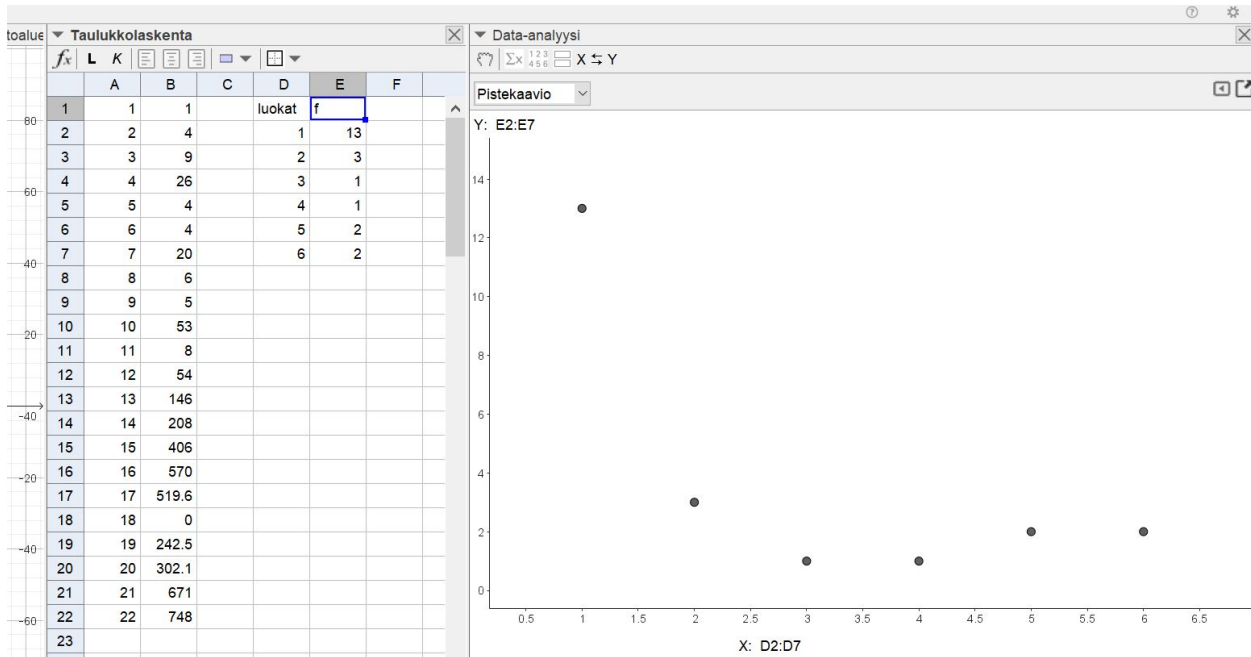
#### 8.A Tuulivoimalat Suomessa

a)



Vuosittain voimaloita rakennettiin keskimäärin 50 , keskihajonta on 61.

b)



luokka	frekvenssi
0-132	13
133-266	3
267-400	1
401-534	1
535-668	2
669-800	2

a) oikeat vuodet ja lukumäärät 2p

oikein laadittu pistekaavio ja siitä kuvankaappaus 2p

keskiarvo oikein 1p

keskihajonta oikein 1p

b) oikeat tehot, 6 eri luokkaa 0-132, 133-266, 267-400, 401-534, 535-668, 669-800 2p

frekvenssitaulukko oikein 2p

pistekaavio oikein 2p



## 9. Laulujoutsen (Cygnus cygnus) 12 p.

Suomessa oli 1930-luvulla enää 20 pesivää laulujoutsenparia niiden metsästyksen ja pesänryöstöjen takia. Rauhoituksen ansiosta kanta elpyi nopeasti ja 1970-luvulla oli jo 200 pesivää paria. Valistuksen ja luonnonsuojelun ansiosta kanta kasvoi ja oli 2000-luvulla jo 4500 paria ja edelleen 2010-luvulla jo 11000 pesivää paria.

a) Kuinka monta prosenttia laulujoutsenten lukumäärä on kasvanut keskimäärin vuodessa, jos kasvuprosentti on koko ajan pysynyt samana kullakin aikavälillä

I) 1930 - 1980, II) 1980 - 2010 ja edelleen III) 2010 - 2020. (6 p.)

b) Vanhin Suomessa rengastettu laulujoutsen on ollut 16 vuotta 8 kuukautta ja 12 päivää vanha. Euroopan vanhin oli 26 vuotta 6 kuukautta vanha Tanskassa rengastettu joutsen.

Kuinka moninkertainen Tanskassa rengastetun joutsenen ikä oli verrattuna Suomessa rengastettuun? (4 p.)

c) Laulujoutsen munii maassa olevaan pesään 4-7 kermanvalkeaa munaa. Silti näet joutsenperheessä vain kaksi poikasta ja emot. Millä todennäköisyydellä 5 kuoriutuneesta poikasesta selviytyy vain 2, jos poikasen selviytymistodennäköisyys on 35%. (2 p.)

a)

I)

$$40 \cdot x^{50} = 400$$

$$x = \sqrt[50]{10} = 1,06175 \Rightarrow 6,2 \%$$

II)

$$400 \cdot x^{30} = 9000$$

$$x = \sqrt[30]{22,5} = 1,10936 \Rightarrow 10,9\%$$

III)

$$9000 \cdot x^{10} = 22000$$

$$x = \sqrt[10]{\frac{22}{9}} = 1,0935 \Rightarrow 9,4\%$$

b)

Suomalainen joutsen 16v 8kk 12 vrk = 6092 vrk, tanskalainen joutsen 26v 6 kk = 9670 vrk

$$\frac{9670}{6092} = 1,58733 \Rightarrow 1,6 \text{ - ker } tainen$$

c)

P(kaksi viidestä selviytyy)=

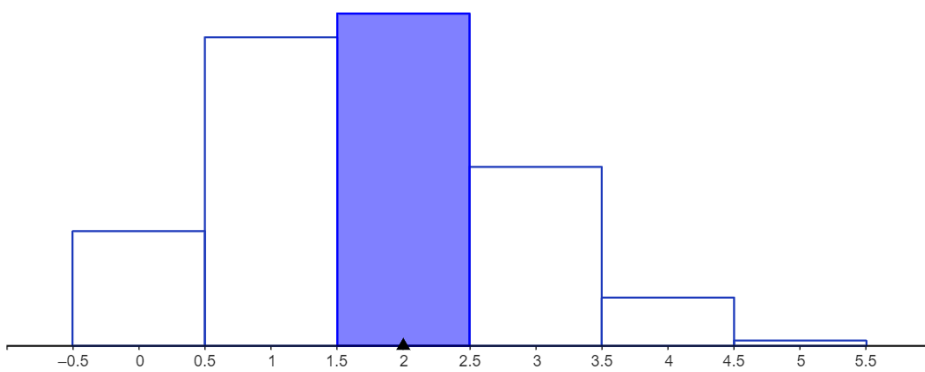
$$nC(5,2) \cdot (0.35)^2 \cdot (0.65)^3 \approx 0.3364 \approx 34\%$$

TAI

$\mu = 1.75$   $\sigma = 1.06654$



k	P(X = k)
0	0.11603
1	0.31239
2	0.33642
3	0.18115
4	0.04877
5	0.00525



Binomijakauma  $n$  5  $p$  0.35



P( 2  $\leq$  X  $\leq$  2 ) = 0.33642



a)

vuodet oikein 1p

potenssit oikein 1p

yhtälöt oikein 1p

juuret otettu oikein 1p

prosentit oikein 2p

b)

laskettu päivät oikein 2p

luvut oikein päin, oikea vastaus 2p

c)

oikea kaava ja oikea tulos 2p

## 10. Asuntolaina (12 p.)

Vilhelmiina ja Lauri ottivat 150 000 euron asuntolainan 18.11.2021. Laina-aika on 25 vuotta ja lainaa lyhennetään tasaerin kuukausittain.

Lainan vuosikorko on muuttuva viitekorko Euribor 12 kk + kiinteä asiakaskohtainen marginaali 0,984 %. Lainan viitekoron arvo tarkistetaan kerran vuodessa, jolloin vuosikorko muuttuu ja maksuerä voi nousta tai laskea tai laina-aika voi pidentyä tai lyhentyä. Lainan vuosikorko muuttuu ensimmäisen kerran 18.11.2022. Päivämäärällä 18.11.2021 Euribor 12 kk oli -0,488 % ja 18.11.2022 2,837 %. Asuntolainan viitekorko on aina vähintään 0, vaikka Euribor olisi negatiivinen.

- a) Kuinka suuri takaisinmaksuerä oli ensimmäisen 12 kk aikana? (4 p.)  
b) Kuinka paljon lainaa oli jäljellä 12 kuukauden kuluttua juuri lyhennyksen jälkeen? (2 p.)  
c) 18.11.2022 lasketaan uusi takaisinmaksuerä perustuen jäljellä olevaan lainapääomaan ja uuteen vuosikorkoon. Mikäli laina-aika pidetään ennallaan, kuinka suuri takaisinmaksuerä on 18.11.2022 alkaen? (3 p.)  
d) Mikäli takaisinmaksuerä pidetään ennallaan 18.11.2022, kuinka pitkä on jäljellä oleva laina-aika vuosina? (3 p.)

a)

Maksuerä on

$$n = 25 \cdot 12 \rightarrow 300 \text{ kappaletta} \quad (1 \text{ p})$$

Lainapääoma on

$$\text{iso}_k = 150000 \rightarrow 150000$$

$$\text{korko } 0 + 0.984 \rightarrow 0.984$$

$$100\% + \frac{(0.984)\%}{12} \rightarrow 1.00082 \quad (1 \text{ p})$$

Maksukauden korkokerroin

$$q = 1.00082 \rightarrow 1.00082$$

Takaisinmaksuerä

$$\text{iso}_k \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \rightarrow 564.222902336 \quad (1 \text{ p})$$

$$a_{\text{iso}} = 564.22$$

**Vastaus:** Takaisinmaksuerä on 564 euroa ja 22 senttiä. (1 p)

b)

lyhennysten määrä  $k:=12 \rightarrow 12$

$$\text{iso\_k} \cdot q^k - a_{\text{iso}} \cdot \frac{1-q^k}{1-q} \rightarrow 145073.179501 \quad (1 \text{ p})$$

**Vastaus:** Lainaa on jäljellä 145073 euroa ja 18 senttiä. (1 p)

c)

Maksueriä on jäljellä

$$n:=25 \cdot 12 - 12 \rightarrow 288 \text{ kappaletta} \quad (1 \text{ p})$$

Lainapääoma on

$$\text{iso\_k}:=145073.18 \rightarrow 145073.18$$

korke  $2.837+0.984 \rightarrow 3.821$

$$100\% + \frac{(3.821)\%}{12} \rightarrow 1.00318416667 \quad (1 \text{ p})$$

Maksukauden korkokerroin

$$q:=1.00318416667 \rightarrow 1.00318416667$$

Takaisinmaksuerä

$$\text{iso\_k} \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \rightarrow 770.258814955$$

**Vastaus:** Takaisinmaksuerä on 770 euroa ja 26 senttiä. (1 p)

d)

Tarvittavien maksuerien määrä  $m$

$$\text{solve}\left(\text{iso\_k} \cdot q^m \cdot \frac{1-q}{1-q^m} = 564.22, m\right) \rightarrow m=537.164071521 \quad (2 \text{ p})$$

Maksueriä tarvitaan nyt 537 kappaletta.

$$\frac{537}{12} \rightarrow 44.75$$

$$0.75 \cdot 12 \rightarrow 9.$$

**Vastaus:** Laina aika on 44 vuotta ja 9 kuukautta. (1 p)

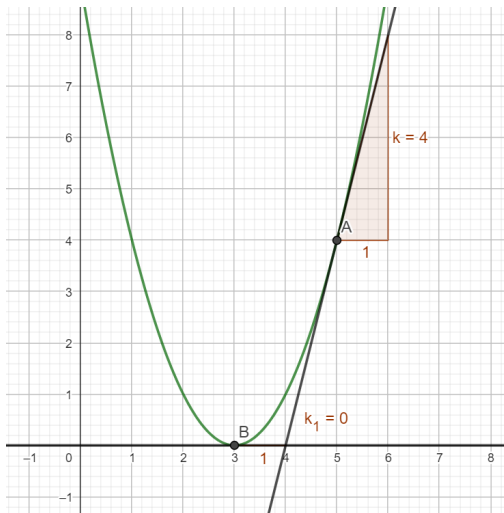
## 11. Derivaatta 12 p.

Tutkitaan funktiota

$$f(x) = (x - 3)^2.$$

### 11.1 Derivaatta graafisesti 4 p.

Määritä funktion  $f$  kuvaajan avulla  $f'(5)$  ja funktion  $f(x)$  derivaatan nollakohta.



(kuva 2p)

Vastaus:  $f'(5)=4$  ja derivaatan nollakohta on  $x=3$ . (1p + 1p)

### 11.2 Korjaa väärä derivointi 6 p.

Laura ja Lassi derivoivat funktion  $f(x)$  seuraavasti:

Laura sievensi ensin ja derivoi sitten

$$D(x - 3)^2 = D(x^2 - 9) = 2x.$$

Lassi taas pyöritteli päässään vastauksen suoraan

$$D(x - 3)^2 = 2x - 6.$$

Toisen heistä vastaus on väärin. Kumman? Perustele. Korjaa väärä vastaus esittäen kaikki välivaiheet.

Lauran vastaus on väärin. Hän on siventänyt funktion lausekkeen väärin, joka johtaa myöskin väärään derivaattaan. (2p)

Lauran lasku korjattuna

$$(x - 3)^2 = (x - 3) \cdot (x - 3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9 \quad (2p)$$

$$D(x - 3)^2 = D(x^2 - 6x + 9) = 2x - 6 \quad (2p)$$

11.3 Derivaatta laskemalla (2 p.)

Määritä laskemalla derivaatan lauseketta käyttäen  $f'(5)$  ja funktion  $f(x)$  derivaatan nollakohta.

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$f'(5) = 2 \cdot 5 - 6 = 10 - 6 = 4 \quad (1 \text{ p})$$

Derivaatan nollakohta

$$f'(x) = 0$$

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3 \quad (1 \text{ p})$$

tai

$$\frac{d}{dx}((x-3)^2) \triangleright 2 \cdot (x-3)$$

derivaatan arvo kohdassa  $x=5$

$$2 \cdot (x-3)|_{x=5} \triangleright 4$$

derivaatan nollakohta

$$\text{solve}(2 \cdot (x-3)=0, x) \triangleright x=3$$

## 12. Ilmakehä 12 p.

Käytä apunasi taulukkokirjaa.

a) Määritä Maan ilmakehän massa, kun jokaista maanpinnan neliösenttimetriä kohden on noin 1,01 kg ilmaa. (4 p.)

b) Piirrä ilmakehän lämpötilan muutoskäyrä korkeuden  $x$  ( $0 \text{ km} \leq x \leq 50 \text{ km}$ ) funktiona. Sovita taulukkokirjan aineistoon 3.asteen polynomifunktio. Arvioi tämän funktion perusteella ilmakehän lämpötila 6,0 km korkeudessa. (4 p.)

c) Piirrä ilmakehän ilmanpaineen muutoskäyrä korkeuden  $x$  ( $0 \text{ km} \leq x \leq 50 \text{ km}$ ) funktiona sovittamalla taulukkokirjan aineistoon eksponenttifunktio ja määritä sen kantaluku  $a$ . Mitä  $a$  käytännössä tässä tapauksessa tarkoittaa? (4 p.)

a)

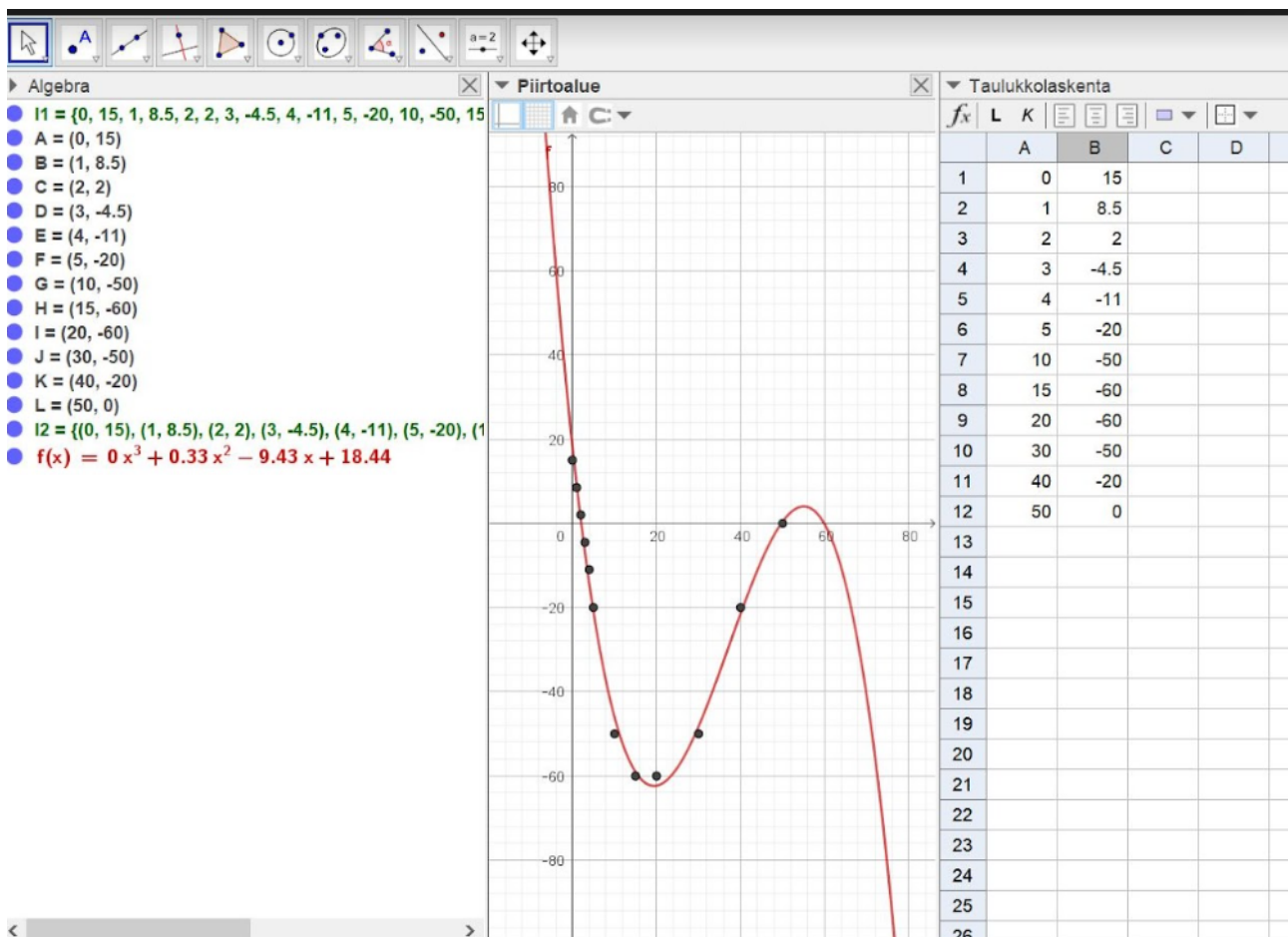
$$\text{maapallon pinta-ala } A = 4\pi r^2$$

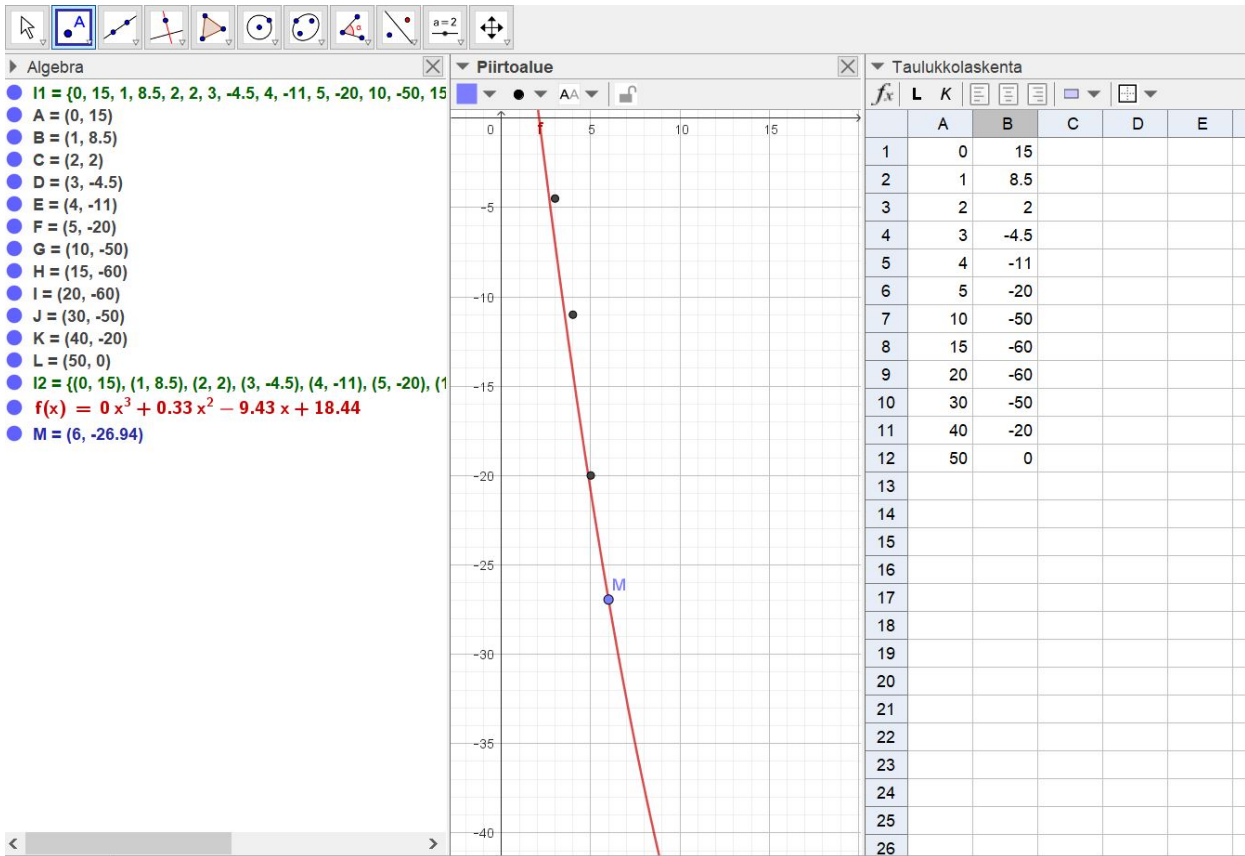
$$A = 4\pi \cdot (6371 \text{ km})^2 = 510064471,9097883 \text{ km}^2$$

$$= 5,100644719097883 \cdot 10^{18} \text{ cm}^2$$

$$\text{ilmakehän massa} = 5,100644719097883 \cdot 10^{18} \text{ cm}^2 \cdot 1,01 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 5,15201 \cdot 10^{18} \text{ kg} \approx 5,2 \cdot 10^{18} \text{ kg}$$

b)

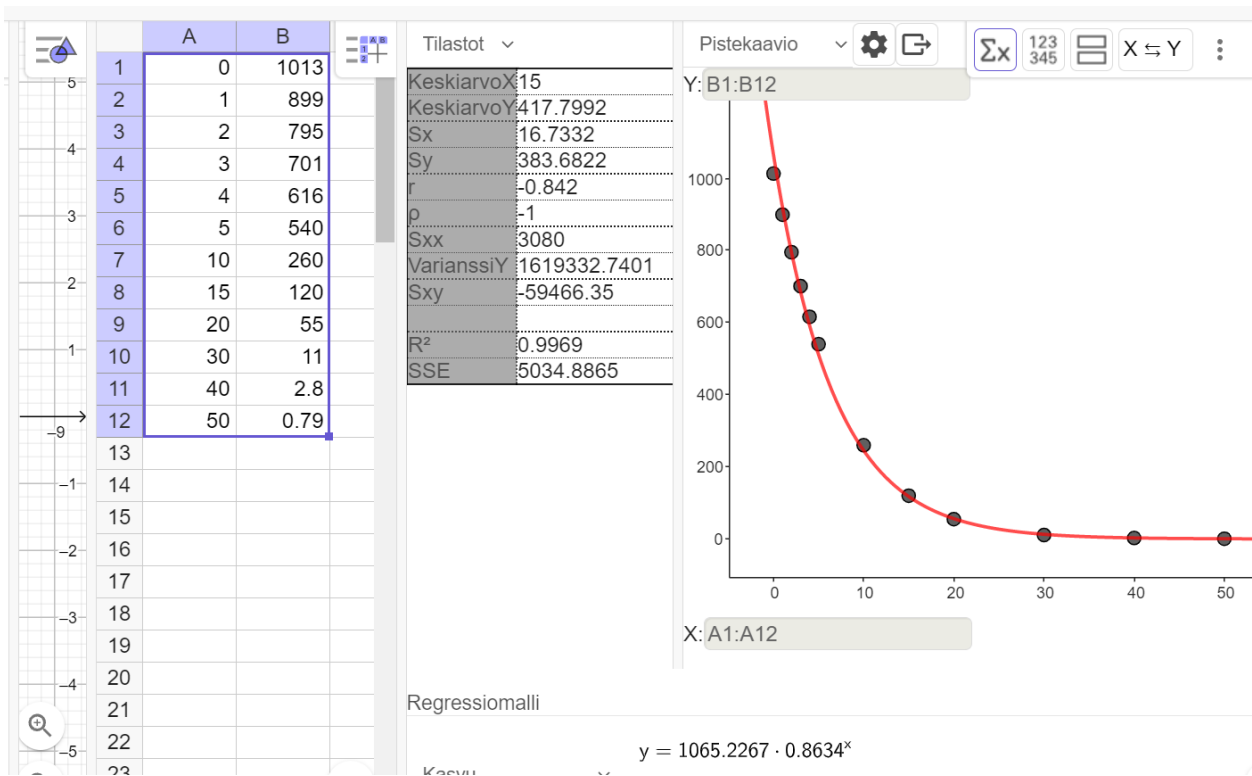




Ilmakehän lämpötila 6 km korkeudessa on noin  $-27$  astetta.



c)



Kantaluku  $a=0.86$  ja se kertoo, että ilmanpaine alenee 14% / km.

a) yksikkömuunnos oikein 1p, pallon pinta-ala oikein 1p ja laskettu oikein 2p

b) taulukkokirjasta oikeat arvot 1p, pistelista oikein 1p, sovitus oikein 1p, oikea tulos 6km kohdalla ja kuvankaappaus 1

c) oikeat ilmanpaineen arvot 1p, sovita eksponenttifunktio ja kuvankaappaus 1p, oikea kantaluku a 1p ja mitä se tarkoittaa 1p

### 13. Leija 12 p.

Ohessa on deltoidi eli leija. Leijan kehikon tukiosat AC ja BD ovat kohtisuorassa toisiaan vasten. Lisäksi tämän sateenkaarileijän kulmat A ja C ovat suoria kulmia.

a) Määritä leijan piiri senttimetrien tarkkuudella, jos pienemmän kolmion kateetit ovat 15 cm ja 25 cm. (3 p.)

b) Määritä leijan pinta-ala kolmella merkitsevällä numerolla, jos kateetit ovat edelleen 15cm ja 25 cm. Ilmoita tulos neliödesimetreinä. (3 p.)

c) Piirrä sateenkaarileijän mallikuvan mukainen sateenkaarileija piirto-ohjelmalla värejä käyttäen. Merkitse kärkipisteet A, B, C ja D ja niiden koordinaatit näkyviin. Oleta, että leijan kärjestä (25,0) lähtevät janat jakavat vastaiset sivut keskenään yhtäpitkiin osiin. (3 p.)

d) Määritä c-kohdan väritettyjen osien pinta-alat neliösenttimetrin tarkkuudella. Voit selvittää pinta-alat mittaamalla. (3 p.)

#### Aineisto

##### 13.A Sateenkaarileija

a)

Olkoon  $O=(0,0)$ .

Olkoon  $z$  janan AB pituus,  $v$  janan AD pituus ja  $y$  janan OD pituus.

Pythagoraan lauseella kolmiosta AOB

$$\text{solve}(z^2=15^2+25^2, z) | z > 0 \rightarrow z=5 \cdot \sqrt{34}$$

Pythagoraan lauseella kolmioista OAD ja ADB

$$\text{solve}\left(\left\{\begin{array}{l} y^2+25^2=v^2 \\ v^2+(5 \cdot \sqrt{34})^2=(v+15)^2 \end{array}\right\}, \{v, y\}\right) | v > 0 \rightarrow v=\frac{25 \cdot \sqrt{34}}{3} \text{ and } y=\frac{125}{3}$$

$$\text{Piiri } 2 \cdot z + 2 \cdot v | z=5 \cdot \sqrt{34} \text{ and } v=\frac{25 \cdot \sqrt{34}}{3} \rightarrow 155.49205$$

Vastaus: Piiri on 155 cm.

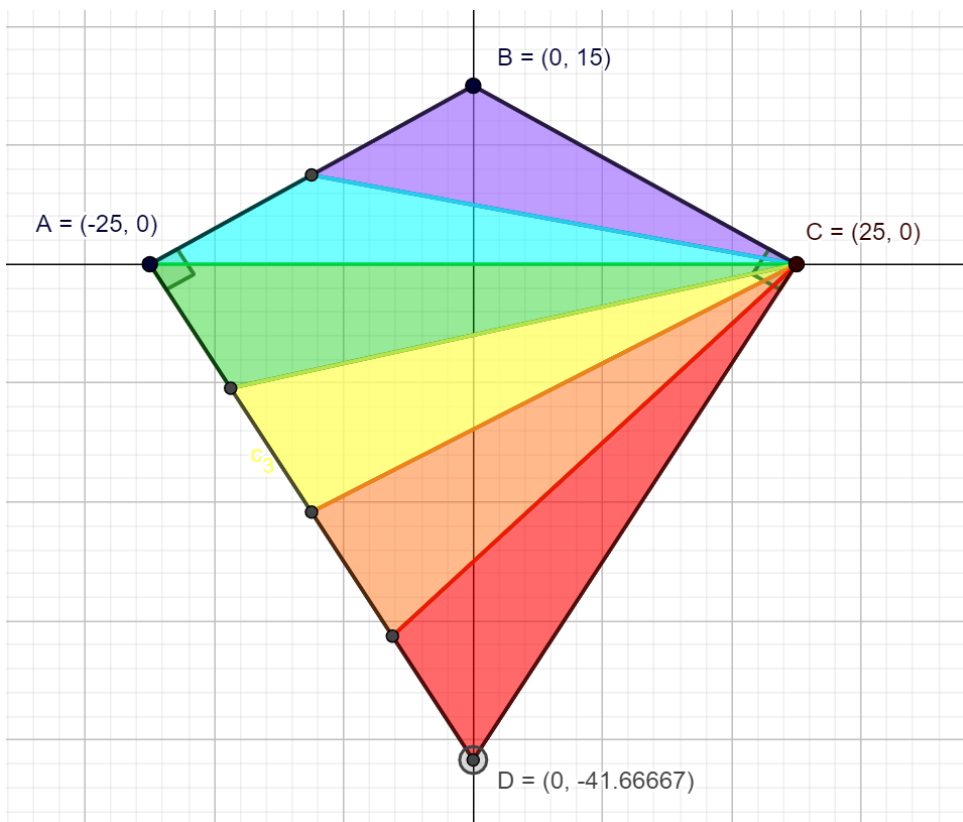
b)

$$\text{Ala } 2 \cdot \frac{25 \cdot (15+y)}{2} \Big|_{y=\frac{125}{3}} \rightarrow 1416.6667$$

$$1416.6667 \cdot \text{cm}^2 \rightarrow \text{dm}^2 \rightarrow 14.166667 \cdot \text{dm}^2$$

Vastaus:  $14,2 \text{ dm}^2$

c)



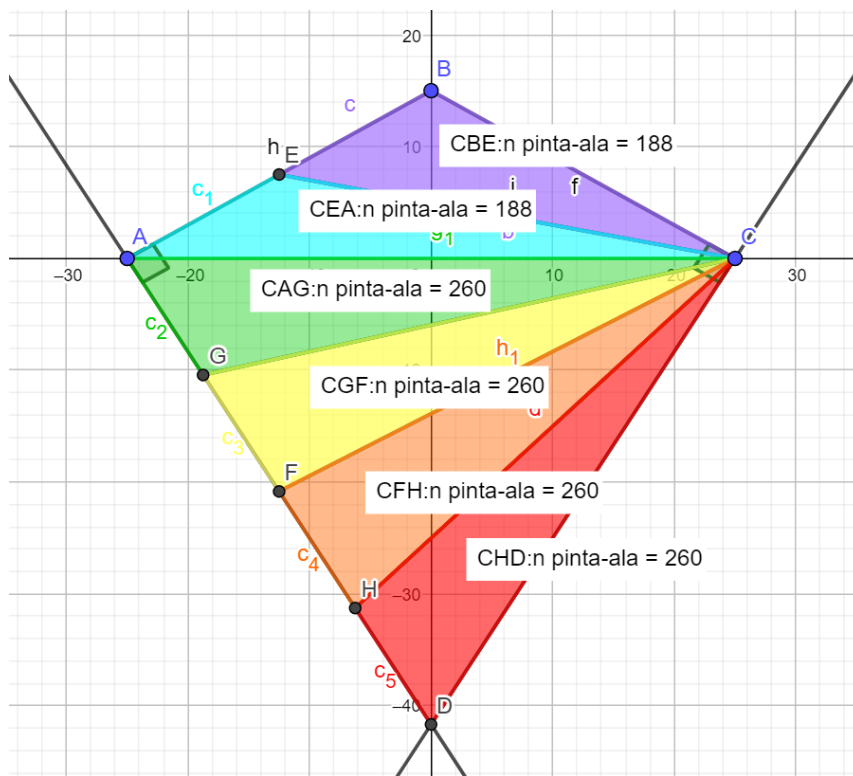
Piste  $D = (0; -41,67)$

	Nimi	Kuvaus	Arvo
1	Piste A		$A = (-25, 0)$
2	Piste B		$B = (0, 15)$
3	Piste C		$C = (25, 0)$
4	Jana f	Jana [B, C]	$f = 29.15476$
5	Suora g	C:n kautta kulkeva ja objektia f vastaan kohtisuora suora	$g: -5x + 3y = -125$
6	Jana h	Jana [B, A]	$h = 29.15476$
7	Suora i	A:n kautta kulkeva ja objektia h vastaan kohtisuora suora	$i: 5x + 3y = -125$
8	Piste D	i ja g leikkaus	$D = (0, -41.66667)$
9	Kulma $\alpha$	B:n, C:n ja D:n välinen kulma	$\alpha = 90^\circ$
10	Kulma $\beta$	D:n, A:n ja B:n välinen kulma	$\beta = 90^\circ$
11	Piste E	Janan h keskipiste	$E = (-12.5, 7.5)$
12	Piste F	Janan AD keskipiste	$F = (-12.5, -20.83333)$
13	Piste G	Janan AF keskipiste	$G = (-18.75, -10.41667)$
14	Piste H	Janan FD keskipiste	$H = (-6.25, -31.25)$
15	Jana j	Jana [C, E]	$j = 38.24265$
16	Jana k	Jana [C, G]	$k = 44.97299$
17	Jana l	Jana [C, F]	$l = 42.89846$
18	Jana m	Jana [C, H]	$m = 44.19417$

	Nimi	Kuvaus	Arvo
19	Jana b	Jana [E, C]	$b = 38.24265$
20	Kolmio k2	Monikulmio C, E, A	$k2 = 187.5$
20	Jana a	Jana [C, E]	$a = 38.24265$
20	Jana c <sub>1</sub>	Jana [E, A]	$c_1 = 14.57738$
20	Jana e <sub>1</sub>	Jana [A, C]	$e_1 = 50$
21	Kolmio k3	Monikulmio C, A, G	$k3 = 260.41667$
21	Jana g <sub>1</sub>	Jana [C, A]	$g_1 = 50$
21	Jana c <sub>2</sub>	Jana [A, G]	$c_2 = 12.14782$
21	Jana a <sub>1</sub>	Jana [G, C]	$a_1 = 44.97299$
22	Kolmio k4	Monikulmio C, G, F	$k4 = 260.41667$
22	Jana f <sub>1</sub>	Jana [C, G]	$f_1 = 44.97299$
22	Jana c <sub>3</sub>	Jana [G, F]	$c_3 = 12.14782$
22	Jana g <sub>2</sub>	Jana [F, C]	$g_2 = 42.89846$
23	Kolmio k5	Monikulmio C, F, H	$k5 = 260.41667$
23	Jana h <sub>1</sub>	Jana [C, F]	$h_1 = 42.89846$
23	Jana c <sub>4</sub>	Jana [F, H]	$c_4 = 12.14782$
23	Jana f <sub>2</sub>	Jana [H, C]	$f_2 = 44.19417$

24	Kolmio k6	Monikulmio C, H, D	$k_6 = 260.41667$
24	Jana d	Jana [C, H]	$d = 44.19417$
24	Jana c <sub>5</sub>	Jana [H, D]	$c_5 = 12.14782$
24	Jana h <sub>2</sub>	Jana [D, C]	$h_2 = 48.59127$
25	Jana n	Jana [D, A]	$n = 48.59127$
26	Jana p	Jana [D, C]	$p = 48.59127$
27	Jana q	Jana [C, B]	$q = 29.15476$
28	Jana r	Jana [B, A]	$r = 29.15476$

d)



Pinta-alat ovat 188 neliösenttimetriä ja 260 neliösenttimetriä (kuva).

- a) pythagoras tai vastaava 1p ja oikea piirin arvo 2p
- b) oikea idea 1p , oikea pinta-ala 1p ja pyöristys 1p
- c) mallikuvan mukainen leiija 2p, pisteen D koordinaatti oikein 1p
- d) pinta-alat oikein ja oikealla tarkkuudella 3p

Kohdat a ja b voi selvittää myös mittaamalla.