

14. ALGEBRALLINEN RATKAISEMINEN

Yhtälöparin algebrallinen ratkaiseminen tarkoittaa ratkaisun etsimistä laskemalla. Ratkaisumenetelmiä ovat sijoituskeino ja yhteenlaskukeino.

SIJOITUSKEINO

ESIMERKKI 1

Yhtälöpari on ratkaistava algebrallisesti, ellei erikseen pyydetä graafista ratkaisua.

$$\text{Ratkaise yhtälöpari } \begin{cases} y = -2x - 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön y :n paikalle lauseke $-2x - 4$.

$$-2x - 4 = x + 2$$

$$-2x - x = 2 + 4$$

$$-3x = 6$$

$$x = -2$$

Sijoitetaan saatu x :n arvo helpompaan yhtälöön $y = x + 2$:

$$y = -2 + 2 = 0.$$

$$\text{VASTAUS: } \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

ESIMERKKI 2

$$\text{Ratkaise yhtälöpari } \begin{cases} x - 3y = -3 \\ 3x + 5y = 19 \end{cases}$$

Ratkaistaan ylempi yhtälö x :n suhteen: $x = -3 + 3y$.

$$3(-3 + 3y) + 5y = 19$$

$$-9 + 9y + 5y = 19$$

$$9y + 5y = 19 + 9$$

$$14y = 28 \quad | : 14$$

$$y = 2$$

Sijoitetaan saatu y :n arvo helpompaan yhtälöön $x - 3y = -3$.

$$x - 3 \cdot 2 = -3$$

$$x - 6 = -3$$

$$x = -3 + 6$$

$$x = 3$$

$$\text{VASTAUS: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Sijoitetaan $-3 + 3y$ alempaan yhtälöön tuntemattoman x paikalle.

YHTEENLASKUKEINO

Yhteenlaskukeinossa lasketaan yhtälöparin yhtälöiden vasemmat puolet yhteen ja oikeat puolet yhteen eli **lasketaan yhtälöt puolittain yhteen**. Tätä ennen yhtälöitä on muokattava, jotta yhteen laskettaessa toinen muuttujista saadaan pois. Tätä kutsutaan muuttujan **eliminoimiseksi**.

ESIMERKKI 3

$$\text{Ratkaise yhtälöpari } \begin{cases} -2x + y = 1 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y = 1 & | \cdot 2 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -4x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = -3 \\ \hline -x = -1 \end{array} \quad | : (-1)$$

$$x = 1$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet kahdella, jotta saadaan kertoimiksi vastaluvut.

Vastalukujen summa on 0.

$$\begin{aligned} -2 \cdot 1 + y &= 1 \\ y &= 1 + 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 1$ ylempään yhtälöön.

$$\text{VASTAUS: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

ESIMERKKI 4

$$\text{Ratkaise yhtälöpari } \begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 5y = 3 & | \cdot 3 \\ 2x + 3y = 2 & | \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x - 15y = 9 \\ 10x + 15y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 9x - 15y = 9 \\ 10x + 15y = 10 \\ \hline 19x = 19 \end{array} \quad | : 19$$

$$x = 1$$

Muokataan yhtälöitä, jotta saadaan kertoimiksi vastaluvut.

$$\begin{aligned} \text{Sijoitus} \quad 3 \cdot 1 - 5y &= 3 \\ -5y &= 3 - 3 \\ -5y &= 0 & | : (-5) \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu x :n arvo jompaankumpaan yhtälöön.

$$\text{VASTAUS: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Yhtälöpareja ratkaistaessa kannattaa aina harkita, kumpi sijoitus- ja yhteenlaskukeinosta on tehtävässä parempi.

ESIMERKKI 5

Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 8x - 14y = -4 \\ -4x + 7y = 2 \end{cases}$.

Muokataan alempaa yhtälöä, jotta saadaan polynomin $8x - 14y$ vasta-polynomi $-8x + 14y$.

$$\begin{cases} 8x - 14y = -4 \\ -4x + 7y = 2 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} 8x - 14y = -4 \\ -8x + 14y = 4 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

identtisesti tosi

Yhtälöt $8x - 14y = -4$ ja $-4x + 7y = 2$ kuvaavat siis samaa suoraa.

VASTAUS: Yhtälöparin ratkaisuja ovat kaikki suoran $-4x + 7y = 2$ pisteet.

ESIMERKKI 6

Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} x = 2y + 2 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$.

Sijoitetaan $2y + 2$ alempaan yhtälöön tuntemattoman x paikalle.

Sijoitus: $3(2y + 2) - 6y = 3$

$$6y + 6 - 6y = 3$$

$$6y - 6y = 3 - 6$$

$$0 = -3$$

Muista sulkumerkit.

identtisesti epätosi

VASTAUS: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.