

Alkeistason matikkaa

Plus-, miinus-, kerto- ja jakolaskujen laskujärjestys

Esim. jos pitää laskea tällainen lasku:

$$9 + 4 + 6 - 5 \cdot 4 \div 2 = ?$$

...niin järjestys on tämä: ensin kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle, sen jälkeen plus- ja miinuslaskut vasemmalta oikealle.

Toisin sanoen, ylläolevassa tapauksessa lasketaan ensin $5 \cdot 4 \div 2 = 20 \div 2 = 10$, jolloin lasku muuttuu muotoon

$$9 + 4 + 6 - 10 = 13 + 6 - 10 = 19 - 10 = 9$$

eli tulos on 9.

Tehtäviä:

1. Mitä on $8 + 4 - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 9 \div 3 + 10 \cdot 10$?
2. Mitä on $1 + 2 + 3 + 4 \cdot 5 - 6 + 7 \cdot 8$?
3. Mitä on $2 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 + 2 - 2 - 2 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$?

Huom:

- Mikä tahansa luku a kerrottuna 1:llä on a : esim. $71 \cdot 1 = 71$)
- Mikä tahansa luku b kerrottuna nolllalla on nolla: esim. $1021 \cdot 0 = 0$
- Positiivinen luku kerrottuna positiivisella luvulla on positiivinen: $5 \cdot 4 = 20$
- Negatiivinen luku kerrottuna negatiivisella on positiivinen: $(-5) \cdot (-4) = 20$
- Negatiivinen kertaa positiivinen on negatiivinen: $(-5) \cdot 4 = -20 = 5 \cdot (-4)$
- Nollalla ei saa jakaa! Esim. lukua $\frac{5}{0}$ ei ole olemassa (sitä ei ole määritelty).

Sulkeet

Sulkeiden () pointti matematiikassa on se, että niiden avulla voidaan muuttaa järjestystä, jossa lukujen väliset plus-, miinus-, jako- ja kertolaskuoperaatiot tehdään.

Sääntö on: **sulkujen sisältä lasketaan ensin**. Siis esim. näin: jos on laskettava

$$(9 + 4 + 6 - 5) \cdot 4 \div 2 = ?$$

...niin lasketaan ensin $9 + 4 + 6 - 5 = 14$, jolloin lasku muuttuu muotoon

$$14 \cdot 4 \div 2 = ?$$

ja tästä saadaan tulos 28.

Yllä sanotun perusteella voidaan todeta, että lausekkeessa $(5 \cdot 6) + 2$ sulut ovat turhat (laskujärjestys olisi sama vaikka ne poistettaisiin), mutta lausekkeessa $5 \cdot (6 + 2)$ ne eivät ole turhat (laskujärjestys muuttuu, jos ne poistetaan).

Tehtäviä:

1. Mitä on $(7 + 2) \cdot 3$?
2. Mitä on $(5 + 7) + 2 \cdot 9$?
3. Mitä on $(5 + 7 + 2) \cdot 9$?
4. Mitä on $5 + (7 + 2) \cdot 9$?
5. Ovatko sulut turhat lausekkeessa $(6 + 1) \cdot 3$?
6. Ovatko sulut turhat lausekkeessa $6 + (1 \cdot 3)$?
7. Ovatko sulut turhat lausekkeessa $(2 + 3) - 1$?
8. Ovatko sulut turhat lausekkeessa $(4 + 4) - (2 + 2)$?
9. Ovatko sulut turhat lausekkeessa $(4 \cdot 4) - (2 \cdot 2)$?
10. Ovatko sulut turhat lausekkeessa $(4 + 4) \cdot (2 + 2)$?

Murtoluvut

Murtoluvuilla laskeminen on monimutkaisempaa kuin edellä käsitellyt asiat. Murtolukuja voidaan kyllä plussata, miinustaa, kertoa ja jakaa toisillaan, mutta tässä on otettava huomioon aika paljon erilaisia sääntöjä.

Ykköstä suuremmat murtoluvut

Jos murtoluvun yläkerta eli **osoittaja** on suurempi kuin alakerta eli **nimittäjä**, murtoluku on jokin ykköstä suurempi luku. Esim: $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ eli kahdeksan kolmasosaa = kaksi ja kaksi kolmasosaa.

Jos osoittaja ja nimittäjä ovat samat, murtoluku on yhtä kuin yksi, esim. $\frac{7}{7} = 1$.

Jos nimittäjä on 1, murtoluku on yhtä kuin sen osoittaja, toisin sanoen esim. $\frac{12}{1} = 12$.

Tehtäviä:

1. Mitä on $\frac{12}{12}$?
2. Kirjoita yllä kuvattuun tapaan eri "formaatussa" luku $\frac{28}{3}$.

Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

Plus- ja miinuslaskut edellyttävät, että molemmissa murtoluvuissa on **sama nimittäjä**. Esim. luvut $\frac{2}{7}$ ja $\frac{3}{7}$ voidaan laskea sellaisinaan yhteen. Vastaus on $\frac{5}{7}$. Se saadaan laskemalla osoittajat yhteen näin: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$.

Vähennyslasku toimii samoin: $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = -\frac{1}{7}$. Nyt tuli negatiivinen luku, koska pienemmästä luvusta vähennettiin isompi.

Sen sijaan lukuja $\frac{2}{7}$ ja $\frac{2}{5}$ ei voida laskea suoraan sellaisinaan yhteen. Miksi ei? Vastaus: koska seitsemäsosien ja viidesosien laskeminen yhteen on vähän kuin yrittäisi laskea yhteen leipäkiloja ja maitolitroja. Ei onnistu; ne eivät ole yhteismitallisia. Siksi eri nimittäjää olevat murtoluvut täytyy muuttaa yhteismitallisiksi ennen kuin ne voidaan laskea yhteen tai vähentää. Miten tämä tapahtuu, se nähdään kotvan päästä.

Tehtäviä:

3. Mitä on $\frac{4}{17} + \frac{2}{17}$?
4. Mitä on $\frac{5}{21} - \frac{1}{21}$?
5. Mitä on $\frac{56}{3} + \frac{3}{3} - \frac{1}{3}$?

Murtolukujen kerto- ja jakolasku

Nyt nimittäjän ei tarvitse olla sama.

Kertolasku menee näin: osoittaja kerrotaan osoittajalla ja nimittäjä nimittäjällä. Esim. näin:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 2} = \frac{15}{14}$$

Samoin jakolaskussa osoittaja jaetaan osoittajalla ja nimittäjä nimittäjällä. Esim. näin:

$$\frac{6}{16} \div \frac{2}{4} = \frac{6 \div 2}{16 \div 4} = \frac{3}{4}$$

Tehtäviä:

6. Mitä on $\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9}$?
7. Mitä on $\frac{6}{2} \cdot \frac{10}{4}$?
8. Mitä on $\frac{15}{4} \div \frac{5}{2}$?
9. Mitä on $\frac{60}{9} \div \frac{12}{3}$?
10. Mitä on $\frac{60}{9} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{3}$?
11. Mitä on $\left(\frac{60}{9} + \frac{20}{9}\right) \div \frac{8}{3}$?

Murtolukujen laventaminen ja supistaminen

Nyt päästään siihen, miten eri nimittäjää olevia lukuja voidaan laskea yhteen ja vähentää.

Halutaan esim. laskea, mitä on $\frac{2}{7} + \frac{2}{5}$.

Aloitetaan huomaamalla, että kumpikaan yhteenlaskettavista ei muutu, jos se kerrotaan 1:llä.

Toisaalta mikä tahansa murtoluku $\frac{a}{a} = 1$. Joten: kumpikaan yhteenlaskettava ei muutu eri

luvuksi, jos se **lavennetaan** luvulla a eli kerrotaan luvulla $\frac{a}{a}$.

Voimme siis rauhassa kertoa luvun $\frac{2}{7}$ luvulla $\frac{5}{5}$ ja luvun $\frac{2}{5}$ luvulla $\frac{7}{7}$. Saadaan seuraava tulos:

$$\frac{2}{7} + \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{10}{35} + \frac{14}{35} = \frac{24}{35}.$$

Nyt nähdään, että laventamalla luvut sopivasti ne saatiin laskettua yhteen.

(Tehtävä: pohdi, mistä syntyi ajatus laventaa nimenomaan ensimmäinen luku 5:llä ja jälkimmäinen luku 7:llä.)

Laventaminen tarkoittaa siis sitä, että murtoluvun ylä- ja alaosa **kerrotaan** samalla luvulla, jolloin luku ei muutu eri luvuksi. Se vain kirjoitetaan eri tavalla; ts. $\frac{1}{2}$ ja $\frac{2}{4}$ ovat sama luku eri tavoin kirjoitettuna.

Supistaminen on sitä, että murtoluvun ylä- ja alaosa **jaetaan** samalla luvulla. Taas luvun kirjoitustapa muuttuu, mutta se on silti sama luku.

Tehtäviä:

12. Lavenna luku $\frac{1}{3}$ luvulla 2.

13. Supista luku $\frac{9}{12}$ luvulla 3.

14. Mitä on $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$?

15. Mitä on $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$?

16. Mitä on $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$?

17. Onko totta, että $\frac{1}{1/6} = 6$?

18. Onko totta, että yhtälö $\frac{1}{1/c} = c$ pätee kaikilla luvuilla c lukuunottamatta tapausta $c = 0$?

19. Onko totta, että yhtälö $\frac{1}{a/b} = b/a$ pätee kaikilla luvuilla a ja b , kunhan kumpikaan näistä ei ole nolla?

20. Millä luvuilla a pätee, että $\frac{a}{a} = 1$?

Tehtävien vastaukset

Laskujärjestys:

- $8 + 4 - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 9 \div 3 + 10 \cdot 10 = 8 + 4 - 15 - 6 + 100 = 91$
- $1 + 2 + 3 + 4 \cdot 5 - 6 + 7 \cdot 8 = 1 + 2 + 3 + 20 - 6 + 56 = 76$
- $2 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 + 2 - 2 - 2 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
 $= 2 + 2 + 8 + 2 + 2 - 2 - 2 + 2 + 16$
 $= 30$

Sulkeet:

- $(7 + 2) \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$
- $(5 + 7) + 2 \cdot 9 = 12 + 18 = 30$
- $(5 + 7 + 2) \cdot 9 = 14 \cdot 9 = 126$
- $5 + (7 + 2) \cdot 9 = 5 + 9 \cdot 9 = 5 + 81 = 86$
- Ovatko sulut turhat lausekkeessa $(6 + 1) \cdot 3$? Eivät ole.
- Ovatko sulut turhat lausekkeessa $6 + (1 \cdot 3)$? Ovat turhat.
- Ovatko sulut turhat lausekkeessa $(2 + 3) - 1$? Ovat turhat.
- Ovatko sulut turhat lausekkeessa $(4 + 4) - (2 + 2)$? Ensimmäiset ovat turhat, jälkimmäiset eivät ole.
- Ovatko sulut turhat lausekkeessa $(4 \cdot 4) - (2 \cdot 2)$? Molemmat sulut ovat turhat.
- Ovatko sulut turhat lausekkeessa $(4 + 4) \cdot (2 + 2)$? Kummatkaan sulut eivät ole turhat.

Murtoluvut

- $\frac{12}{12} = 1$
- $\frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$
- $\frac{4}{17} + \frac{2}{17} = \frac{6}{17}$
- $\frac{5}{21} - \frac{1}{21} = \frac{4}{21}$
- $\frac{56}{3} + \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{58}{3}$

$$6. \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3 \cdot 2}{9 \cdot 9} = \frac{6}{81}$$

$$7. \frac{6}{2} \cdot \frac{10}{4} = \frac{60}{8}$$

$$8. \frac{15}{4} \div \frac{5}{2} = \frac{15 \div 5}{4 \div 2} = \frac{3}{2}$$

$$9. \frac{60}{9} \div \frac{12}{3} = \frac{5}{3}$$

$$10. \frac{60}{9} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{60}{9} + \frac{14}{9} = \frac{74}{9}$$

$$11. \left(\frac{60}{9} + \frac{20}{9} \right) \div \frac{8}{3} = \frac{80}{9} \div \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

$$12. \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$13. \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$14. \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$$

$$15. \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$16. \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

17. Onko totta, että $\frac{1}{1/6} = 6$? On. Se nähdään laventamalla kuudella, jolloin saadaan $\frac{6}{6/6}$ eli $\frac{6}{1}$ eli 6.

18. Onko totta, että yhtälö $\frac{1}{1/c} = c$ pätee kaikilla luvuilla c lukuunottamatta tapausta $c = 0$?
Sekin on totta, ja asia nähdään taas laventamalla c :llä.

19. Onko totta, että yhtälö $\frac{1}{a/b} = b/a$ pätee kaikilla luvuilla a ja b , kunhan kumpikaan näistä ei ole nolla? Tämäkin on totta. Se nähdään laventamalla b :llä ja supistamalla a :lla.

20. Kaikilla paitsi $a = 0$ (sillä luku $\frac{0}{0}$ ei ole määritelty, ts. sitä ei ole olemassa).