

4 Muuttuvan liikkeen matemaattinen mallintaminen

Tehtävien ratkaisut

Tehtävät 1–4 ovat automaattisesti tarkistettavia tehtäviä ja ne ovat digikirjassa.

4-1.

Täydennä.

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen ***nopeus*** hetkellä t on $v = v_0 + at$. Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen keskinopeus v_k voidaan laskea alkunopeuden v_0 ja loppunopeuden v ***keskiarvona***. Jos kiihtyvyys ***vaihtelee***, keskinopeuden yhtälö ei ole voimassa. Kappaleen ***paikka*** tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä hetkellä t on $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$. Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen ***paikan*** kuvaaja on muodoltaan paraabeli.

4-2.

Oikein/väärin väittämät

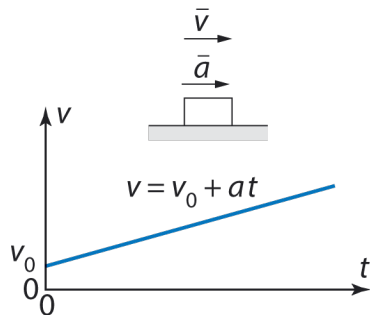
1. Suureyhtälö $v_k = \frac{v_0 + v}{2}$ liittyy vain tasaisesti muuttuvaan liikkeeseen. ***Kyllä//Ei***
2. Kappaleen paikan yhtälö ei välttämättä ilmoita kappaleen kulkemaa matkaa. ***Kyllä//Ei***
3. Kiihtyvyys lasketaan jakamalla nopeuden muutos muutokseen kuluneella ajalla. ***Kyllä//Ei***
4. Kiihtyvyyden numeroarvo ilmaisee, kuinka paljon kappaleen paikka muuttuu yhdessä sekunnissa. ***Kyllä//Ei***

Kommentti: Kiihtyvyyden numeroarvo ilmaisee, kuinka paljon kappaleen nopeus muuttuu yhdessä sekunnissa.

4-3.

Monivalintatehtävä

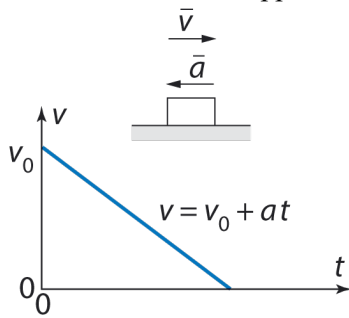
- a) Piirroksen mukaan kappaleen



- **nopeus ja kiihtyvyys ovat samansuuntaiset**
- **nopeus kasvaa**
- nopeus ei muutu
- **kiihtyvyys on positiivinen**
- kiihtyvyys on nolla
- **kulkeman matkan voi määrittää kuvan koordinaatistosta.**

4 Muuttuvan liikkeen matemaattinen mallintaminen

b) Piirroksen mukaan kappaleen



- **nopeus ja kiihtyvyys ovat vastakkaissuuntaiset**
- kiihtyvyys on positiivinen
- **kiihtyvyys on negatiivinen**
- **nopeus pienenee**
- **liike on tasaisesti kiihtyvää.**

c) Janna ajaa skootterilla vakionopeudella 36 km/h. Alamäessä skootterin nopeus kasvaa 4,0 sekunnin ajan jokaisen sekunnin aikana 1,5 m/s. Skootterin nopeus mäen alaosassa on

- 42 km/h
- 16 m/s
- **58 km/h**

Kommentti: Nopeus on $v = \frac{36}{3,6} \text{ m/s} + 4 \cdot 1,5 \text{ m/s} = 16 \text{ m/s} \approx 58 \text{ km/h}$.

- ei mikään edellä mainituista.

4-4.

nopeus kasvaa	$a > 0$
putoamiskiihtyvyys	g
tasaisesti kiihtyvän liikkeen nopeus	$v = at$
nopeuden muutos on vakio	tasaisesti kiihtyvä liike
suoraviivaisessa liikkeessä olevan kappaleen nopeus ja kiihtyvyys ovat vastakkaissuuntaiset	nopeus pienenee

4-5.

- Kiihtyvässä liikkeessä t, x -kuvaajana on piirros 3 ja t, v -kuvaajana piirros 1.
- Levossa olevan kappaleen paikkaa ajan funktiona esittää t, x -kuvaajana piirros 2.
- Radioaallon eteneminen on tasaista ja sen t, v -kuvaaja on piirros 2 ja piirros 1 t, x -kuvaajana.

4-6.

a) $v_1 = 130 \text{ km/h}$

Nopeuden muutos: $\Delta v = v_2 - v_1 = 0,0 \text{ m/s} - \frac{130}{3,6} \text{ m/s} = -36,1111 \text{ m/s}$.

Ajan muutos: $\Delta t = t_2 - t_1 = 0,14 \text{ s} - 0,0 \text{ s} = 0,14 \text{ s}$.

F1-auton kiihtyvyys on $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-36,1111 \text{ m/s}}{0,14 \text{ s}} = -257,936 \text{ m/s}^2 \approx -260 \text{ m/s}^2$.

Auton kiihtyvyys on putoamiskiihtyvyyteen verrattuna $\left| \frac{-257,936 \text{ m/s}^2}{9,81 \text{ m/s}^2} \right| \approx 26$ -kertainen.

4 Muuttuvan liikkeen matemaattinen mallintaminen

b) $v_0 = 55 \text{ km/h}$, $t = 2,5 \text{ s}$, $a = 1,7 \text{ m/s}^2$

Valitaan kiihdytyksen aloitushetkeksi $t = 0 \text{ s}$, jolloin kiihdytys päättyy hetkellä $2,5 \text{ s}$. Koska auton kiihtyvyys on vakio, nopeus kiihdytyksen jälkeen on

$$v = v_0 + at = \frac{55}{3,6} \text{ m/s} + 1,7 \text{ m/s}^2 \cdot 2,5 \text{ s} = 19,5278 \text{ m/s} \approx 70 \text{ km/h}.$$

4-7.

$$t = 10,0 \text{ s}, a = 4,0 \text{ m/s}^2$$

Moottorikelkan

a) loppunopeus on $v = at = 4,0 \text{ m/s}^2 \cdot 10,0 \text{ s} = 40 \text{ m/s}$

b) keskinopeus $v_k = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{0 \text{ m/s} + 40 \text{ m/s}}{2} = 20 \text{ m/s}$ ja

c) kulkema matka $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 4,0 \text{ m/s}^2 \cdot (10,0 \text{ s})^2 = 200 \text{ m}$.

4-8.

$$v_1 = 45 \text{ km/h}, v_2 = 0 \text{ km/h}, \Delta t = 4,0 \text{ s}, t_{\text{reaktio}} = 0,50 \text{ s}$$

a) Kiihtyvyys jarrutuksen aikana on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{0 \text{ km/h} - 45 \text{ km/h}}{4,0 \text{ s}} = \frac{-\frac{45}{3,6} \text{ m/s}}{4,0 \text{ s}} = -3,125 \text{ m/s}^2 \approx -3,1 \text{ m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on nopeuden suunnalle vastakkainen.

b) Valitaan skootterin paikan nollakohdaksi kohta, jossa jarrutus alkaa eli $x_0 = 0 \text{ m}$. Paikka kiihdytyksen päättyessä on silloin

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{45}{3,6} \text{ m/s} \cdot 4,0 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (-3,125 \text{ m/s}^2) \cdot (4,0 \text{ s})^2 = 25 \text{ m}.$$

Koska liike on suoraviivaista, 25 m on myös matka, jonka skootteri kulkee kiihdytyksen aikana.

c) Maijan reaktioaikana skootteri kulkee matkan

$$s = vt_{\text{reaktio}} = \frac{45}{3,6} \text{ m/s} \cdot 0,50 \text{ s} = 6,25 \text{ m}.$$

Näin ollen skootterin kulkema matka on $25 \text{ m} + 6,25 \text{ m} \approx 31 \text{ m}$.

4-9.

$$t = 7,8 \text{ s}$$

Tasaisen liikkeen nopeus v saadaan jarrutusmatkan

$$s = 420 \text{ m} - 330 \text{ m} - 55 \text{ m} = 35 \text{ m}$$

ja siihen kuluva ajan $t = 7,8 \text{ s}$ avulla.

Koska kiihtyvyys on jarrutettaessa vakio, ja vaunu pysähtyy lopuksi, keskinopeus jarrutuksen aikana

on $v_k = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{v_0 + 0}{2} = \frac{v_0}{2}$, jossa v_0 on nopeus jarrutuksen alkaessa ja myös tasaisen liikkeen aikana.

Saadaan yhtälö $s = v_k t$ eli $s = \frac{v_0}{2} t$, josta saadaan nopeudeksi tasaisen liikkeen aikana

$$v_0 = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 35 \text{ m}}{7,8 \text{ s}} \approx 9,0 \text{ m/s}.$$

4 Muuttuvan liikkeen matemaattinen mallintaminen

4-10.

- a) Koska hissin kiihtyvyys on vakio, ja hissi lähtee levosta ($v_0 = 0 \text{ m/s}$), hissin keskinopeus ensimmäisen 5,0 m matkalla on $v_k = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{v}{2}$, jossa v on tällä matkalla saavutettu loppunopeus ja myös hissin nopeus tasaisen liikkeen aikana.

$$\text{Ensimmäisen 5,0 m matkalla hissin keskinopeus on } v_k = \frac{s}{t} = \frac{5,0 \text{ m}}{2,5 \text{ s}} = 2,0 \text{ m/s}.$$

Hissin loppunopeus ensimmäisen osuuden jälkeen eli hissin nopeus tasaisen liikkeen aikana on $v = 2v_k = 2 \cdot 2,0 \text{ m/s} = 4,0 \text{ m/s}$.

- b) Hissi kulkee 19 kerrosväliä eli matkan $19 \cdot 2,8 \text{ m} = 53,2 \text{ m}$. Jarrutusmatka on $53,2 \text{ m} - 5,0 \text{ m} - 44,0 \text{ m} = 4,2 \text{ m}$ ja tähän kuluva aika on

$$t = \frac{s}{v_k} = \frac{4,2 \text{ m}}{\frac{4,0 \text{ m/s} + 0,0 \text{ m/s}}{2}} = 2,1 \text{ s}.$$

$$\text{Koska hissi kulkee 44,0 m vakionopeudella, tähän kuluu aikaa } t = \frac{s}{v} = \frac{44,0 \text{ m}}{4,0 \text{ m/s}} = 11 \text{ s}.$$

Koko matkaan kuluva aika on $2,5 \text{ s} + 2,1 \text{ s} + 11 \text{ s} \approx 16 \text{ s}$.

4-11.

$$v_0 = 8,0 \text{ m/s}, s = 5,0 \text{ m}$$

Ratkaistaan aika, joka kuluu hissin pysähtymiseen. Koska liike on tasaisesti hidastuvaa, yhtälöstä

$$v = v_0 + at \text{ pysähtymisaika on } t = \frac{v - v_0}{a} = -\frac{v_0}{a}. \text{ Tässä ajassa hissi kulkee matkan } s \text{ eli}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = v_0 \cdot \left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \cdot \left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2a}.$$

$$\text{Hissin kiihtyvyys saadaan yhtälöstä } s = -\frac{v_0^2}{2a}, \text{ josta } a = -\frac{v_0^2}{2s} = -\frac{(8,0 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 5,0 \text{ m}} = -6,4 \text{ m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on alas (kun hissin liikkeen suunta ylös on positiivinen).

4-12.

$$a = 1,1 \text{ m/s}^2, v = 155 \text{ km/h}$$

Yhtälöstä $v = at$ kiihdytykseen ja myös jarrutukseen kuluva aika on

$$t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{155}{3,6} \text{ m/s}}{1,1 \text{ m/s}^2} \approx 39,1414 \text{ s},$$

$$\text{eli kaikkiaan } 2 \cdot 39,1414 = 78,2828 \text{ s} = 1,3047 \text{ min}.$$

Kiihdytysmatka on

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,1 \text{ m/s}^2 \cdot (39,1414 \text{ s})^2 \approx 842,627 \text{ m}.$$

Koska jarrutettaessa kiihtyvyyden suuruus (itseisarvo) on sama kuin kiihdytettäessä, jarrutusmatka on yhtä pitkä eli 842,627 m. Näin ollen kiihdytys- ja jarrutusmatka on $2 \cdot 842,627 \text{ m} = 1685,25 \text{ m} = 1,68525 \text{ km}$.

Huippunopeudella voidaan ajaa matka $145 \text{ km} - 1,68525 \text{ km} = 143,315 \text{ km}$. Tähän kuluu aikaa

$$t = \frac{s}{v} = \frac{143,315 \text{ km}}{155 \text{ km/h}} \approx 0,92461 \text{ h} = 55,4768 \text{ min}.$$

Lyhin aika on $55,4768 \text{ min} + 1,3047 \text{ min} \approx 57 \text{ min}$.

4 Muuttuvan liikkeen matemaattinen mallintaminen

4-13.

$$x = 1,70 \text{ m}, v_k = 1,9 \text{ m/s}$$

- a) Koska kuula on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, kuulan keskinopeus saadaan yhtälöstä $v_k = \frac{v_0 + v}{2}$.

Koska kuula lähtee levosta, on $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ja keskinopeuden yhtälö saadaan muotoon $v_k = \frac{v}{2}$. Kuulan loppunopeudeksi saadaan $v = 2v_k = 2 \cdot 1,9 \text{ m/s} = 3,8 \text{ m/s}$.

- b) Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen nopeuden yhtälö on $v = v_0 + at$. Koska alkunopeus $v_0 = 0 \text{ m/s}$, loppunopeus on $v = at$, josta saadaan kiihtyvyys $a = \frac{v}{t}$. Jotta kiihtyvyys voidaan laskea, on tiedettävä liikkeen kesto eli aika t .

$$\text{Yhtälöstä } x = v_k t \text{ saadaan aika } t = \frac{x}{v_k} = \frac{1,70 \text{ m}}{1,9 \text{ m/s}} \approx 0,894737 \text{ s}.$$

$$\text{Kiihtyvyys on } a = \frac{v}{t} = \frac{3,8 \text{ m/s}}{0,894737 \text{ s}} \approx 4,2 \text{ m/s}^2.$$

4-14.

$$v_0 = 22 \text{ m/s}, a = 5,4 \text{ m/s}^2, s = 25 \text{ m}$$

Laskijan kulkema matka on $s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ eli $\frac{1}{2} at^2 + v_0 t - s = 0$. Ratkaistaan yhtälö toisen asteen ratkaisukaavaa käyttäen tai matematiikkaohjelmistolla ja huomioidaan alkuarvot $a = 5,4 \text{ m/s}^2$, $v_0 = 22 \text{ m/s}$ ja $s = 25 \text{ m}$:

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot (-s)}}{2 \cdot \frac{1}{2} a} = \frac{-22 \text{ m/s} \pm \sqrt{(22 \text{ m/s})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5,4 \text{ m/s}^2) \cdot (-25 \text{ m})}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5,4 \text{ m/s}^2)}$$

Yhtälön ratkaisut ovat $t_1 \approx 1,01094 \text{ s}$ tai $t_2 \approx -9,15909 \text{ s}$. Ajan negatiivinen arvo ei käy, joten kysytty aika on $1,0 \text{ s}$.

Ratkaisu GeoGebralla:

1 Ratkaise $\left(s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, t \right)$

$\rightarrow \left\{ t = \frac{-\sqrt{2 a s + v_0^2} - v_0}{a}, t = \frac{\sqrt{2 a s + v_0^2} - v_0}{a} \right\}$

2 Sijoita $\left(\text{Ratkaise} \left(s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, t \right), \{v_0 = 22, a = 5.4, s = 25\} \right)$

$\approx \{t = -9.16, t = 1.01\}$

4 Muuttuvan liikkeen matemaattinen mallintaminen

4-15.

$$v = 50,0 \text{ km/h}, a = 1,2 \text{ m/s}^2, \Delta t = 2,0 \text{ s}$$

Yhtälöstä $v = at$ auton A kiihdyttämiseen kuluva aika on $t = \frac{v}{a} = \frac{50,0}{3,6} \frac{\text{m/s}}{1,2 \text{ m/s}^2} = 11,5741 \text{ s}$. Tässä ajassa

$$\text{auto A kulkee matkan } s_A = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \text{ m/s}^2 \cdot (11,5741 \text{ s})^2 = 80,3759 \text{ m}.$$

$$\text{Auto B kulkee samassa ajassa matkan } s_B = vt = \frac{50}{3,6} \text{ m/s} \cdot 11,5741 \text{ s} = 160,7514 \text{ m}.$$

$$\text{Autojen väliin jäävä } 2,0 \text{ sekunnin turvaväli tarkoittaa matkaa } s = vt = \frac{50}{3,6} \text{ m/s} \cdot 2,0 \text{ s} \approx 27,7778 \text{ m}.$$

Näin ollen auton B etäisyys risteyksestä tulee olla vähintään $160,7514 \text{ m} + 27,7778 \text{ m} - 80,3759 \text{ m} \approx 110 \text{ m}$.

4-16.

$$v = 82 \text{ km/h}, a = 250 \text{ m/s}^2$$

Matka, jonka ilmatyynyn on joustettava, saadaan yhtälöstä $s = \frac{1}{2} at^2$, jossa a on nuken

maksimikiihtyvyys. Yhtälöstä $v = at$ saadaan aika $t = \frac{v}{a}$, joka sijoitetaan yhtälöön $s = \frac{1}{2} at^2$:

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{v}{a} \right)^2 = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(\frac{82}{3,6} \text{ m/s} \right)^2}{2 \cdot 250 \text{ m/s}^2} \approx 1,03765 \text{ m}.$$

Kun auton etuosa lyhenee törmäyksessä 65 cm, ilmatyynyn on joustettava vähintään $1,03765 \text{ m} - 0,65 \text{ m} = 39 \text{ cm}$.

4-17.

- Metrojunan suurin nopeus on 36 m/s.
- Junan kiihdytysaika on 45 s.
- Junan jarrutusaika on 30 s.
- Junan liike on tasaista 30 s.
- Junan keskikiihtyvyys pysäkiltä lähdettäessä on

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{36,0 \text{ m/s} - 0,0 \text{ m/s}}{45,0 \text{ s} - 0,0 \text{ s}} = \frac{36,0 \text{ m/s}}{45,0 \text{ s}} = 0,80 \text{ m/s}^2.$$

ja jarrutettaessa ennen seuraavaa pysäkkiä

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0,0 \text{ m/s} - 36 \text{ m/s}}{105,0 \text{ s} - 75,0 \text{ s}} = \frac{-36 \text{ m/s}}{30,0 \text{ s}} = -1,2 \text{ m/s}^2. \text{ Kiihtyvyyden suunta jarrutettaessa on}$$

nopeuden suunnalle vastakkainen.

- Metroasemien välinen etäisyys saadaan fysikaalisena pinta-alana

$$s = \frac{\Delta t_1 v}{2} + \Delta t_2 v + \frac{\Delta t_3 v}{2}$$

$$= \frac{45,0 \text{ s} \cdot 36,0 \text{ m/s}}{2} + (75,0 \text{ s} - 45,0 \text{ s}) \cdot 36,0 \text{ m/s} + \frac{(105,0 \text{ s} - 75,0 \text{ s}) \cdot 36,0 \text{ m/s}}{2} \approx 2,4 \text{ km}.$$

4 Muuttuvan liikkeen matemaattinen mallintaminen

4-18.

$$a = 1,2 \text{ m/s}^2, v = 45 \text{ km/h}, s = 450 \text{ m}, t = 9,5 \text{ s}$$

$$\text{Kiihtyvyyden yhtälöstä } v = at \text{ alkukiihdytykseen kuluva aika on } t_1 = \frac{v}{a} = \frac{45}{1,2} \frac{\text{m/s}}{\text{m/s}^2} = 10,4167 \text{ s}.$$

$$\text{Tässä ajassa vaunu kulkee matkan } s_1 = \frac{1}{2} at_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \text{ m/s}^2 \cdot (10,4167 \text{ s})^2 = 65,1046 \text{ m}.$$

Ennen pysäkkiä P2 vaunu jarruttaa tasaisesti, joten vaunun kiihtyvyys on

$$a_2 = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 \text{ m/s} - \frac{45}{3,6} \text{ m/s}}{9,5 \text{ s}} = -1,31579 \text{ m/s}^2.$$

Jarrutuksen aikana vaunun kulkema matka on

$$s_2 = \frac{1}{2} |a_2| t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,31579 \text{ m/s}^2 \cdot (9,5 \text{ s})^2 = 59,3750 \text{ m}.$$

Tasaisen liikkeen aikana vaunu kulkee matkan $s = 450 \text{ m} - 65,1046 \text{ m} - 59,3750 \text{ m} = 325,520 \text{ m}$.

$$\text{Tasaiseen liikkeeseen kuluu aikaa } \frac{325,520 \text{ m}}{\frac{45}{3,6} \text{ m/s}} = 26,0416 \text{ s}.$$

Pysäkkien väliin kuluva kokonaisaika on $10,4167 \text{ s} + 26,0416 \text{ s} + 9,5 \text{ s} \approx 46 \text{ s}$.

Huomaa: Jos numeeristen laskujen välivaiheissa käyttää kaikkia laskimen (tai matematiikkaohjelmiston) desimaaleja, välitulosten arvot poikkeavat hieman ratkaisun arvoista. Vastaus on kuitenkin sama.

4-19.

$$v_0 = 17 \text{ m/s}, a = -9,81 \text{ m/s}^2,$$

Valitaan suunta ylös positiiviseksi.

a) Pallon nopeus

i. hetkellä $t = 1,0 \text{ s}$ on

$$v = v_0 + at = 17 \text{ m/s} + (-9,81 \text{ m/s}^2) \cdot 1,0 \text{ s} = 7,2 \text{ m/s}, \text{ ja}$$

ii. hetkellä $t = 2,0 \text{ s}$

$$v = v_0 + at = 17 \text{ m/s} + (-9,81 \text{ m/s}^2) \cdot 2,0 \text{ s} = -2,6 \text{ m/s}.$$

Koska nopeus on negatiivinen, pallo putoaa alaspäin.

b) Kun pallon paikkaa heiton suunnassa merkitään x :llä, paikka ajan funktiona on $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$.

Valitaan ajan nollakohdaksi se hetki, jona pallo irtaoo Kallen kädestä, ja paikaksi tuolla hetkellä $x_0 = 0,0 \text{ m}$.

Tehtävänä on määrittää hetki t , jolloin pallon paikka on $x = 8,0 \text{ m}$.

$$\text{Paikan yhtälö } x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \text{ on silloin } \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + 0,0 \text{ m} = 8,0 \text{ m eli}$$

$$\frac{1}{2} at^2 + v_0 t - 8,0 \text{ m} = 0.$$

4 Muuttuvan liikkeen matemaattinen mallintaminen

Käytä yhtälön ratkaisuun matematiikkasovellusta tai ratkaise yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa käyttäen:

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot (-8,0 \text{ m})}}{2 \cdot \frac{1}{2} a}$$

$$= \frac{-17 \text{ m/s} \pm \sqrt{(17 \text{ m/s})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-9,81 \text{ m/s}^2) \cdot (-8,0 \text{ m})}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-9,81 \text{ m/s}^2)}.$$

Ratkaisuja on kaksi, $t_1 \approx 0,56 \text{ s}$ ja $t_2 \approx 2,9 \text{ s}$. Ensimmäinen on hetki, jolloin pallo ohittaa korkeuden 8,0 m ylös menessään, ja toinen on hetki, jolloin pallo ohittaa saman kohdan alas tullessaan.

Ratkaisu GeoGebralla:

1	$\text{Ratkaise} \left(x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, t \right)$ $\approx \left\{ t = \frac{-v_0 - \sqrt{-2 a x_0 + 2 a x + v_0^2}}{a}, t = \frac{-v_0 + \sqrt{-2 a x_0 + 2 a x + v_0^2}}{a} \right\}$
2	$\text{Sijoi} \left(\text{Ratkaise} \left(x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, t \right), \{x = 8, x_0 = 0, v_0 = 17, a = -9.81\} \right)$ $\approx \{t = 2.9, t = 0.56\}$

Pallo on 0,56 s:n ja 2,9 s:n kuluttua heitosta korkeudella 8,0 s.