

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

Tehtävien ratkaisut

Tehtävät 1–4 ovat automaattisesti tarkistettavia tehtäviä ja ne ovat digikirjassa.

10-1.

Täydennä.

Jos yhdistettävät voimat ovat ***kohtisuorassa*** toisiaan vastaan, voimien ***yhteisvaikutuksen*** suuruus lasketaan Pythagoraan lauseen avulla. Jos kappaleeseen kohdistuvat voimat ovat $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ja $\vec{F}_3$ ja voimien vektorisumma on nollavektori eli $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$, kappale on tasapainossa ***etenemisen*** suhteen.

Kun tarkastellaan ***vinon*** voiman vaikutusta kappaleeseen, voima jaetaan usein koordinaattiakselien suuntaisiin ***komponentteihin***. Yleensä x -akseli valitaan ***vaakatason*** tai kaltevan tason suuntaiseksi.

10-2.

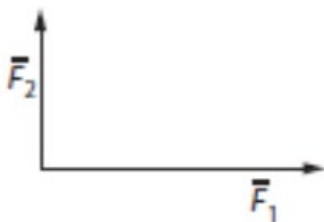
Oikein/väärin väittämät

- Voimien yhteisvaikutus saadaan voimavektoreiden summana. ***Kyllä//Ei***
- Kulman viereisen kateetin pituuden suhdetta hypotenuusan pituuteen kutsutaan kulman siniksi. ***Kyllä//Ei***
Kommentti: Kulman viereisen kateetin pituuden suhdetta hypotenuusan pituuteen kutsutaan kulman kosiniksi.
- Kulman vastaisen kateetin pituuden suhdetta viereisen kateetin pituuteen kutsutaan kulman tangentiksi. ***Kyllä//Ei***
- Kun kappaleeseen vaikuttavat kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa voimaa, joiden suuruudet ovat 3 N ja 4 N, voimien yhteisvaikutuksen suuruus on 5 N. ***Kyllä//Ei***
- Kun kappale on tasapainossa, siihen kohdistuva kokonaisvoima on nollavektori. ***Kyllä//Ei***

10-3.

Monivalintatehtävä

a)

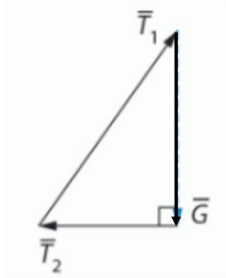


Yllä olevassa kuvassa on kappaleeseen vaikuttavat voimat. Mikä väitteistä pitävät paikkansa?

- Kokonaisvoiman suuruus lasketaan Pythagoraan lauseen avulla.**
- Kokonaisvoiman suunta on vinosti ylös ja oikealle.**
- Voimien vaikutuksesta kappale joutuu kiihtyvään liikkeeseen.**

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

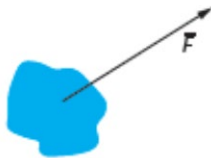
b)



Yllä olevassa kuvassa on kappaleeseen vaikuttavien kolmen voiman vektorisumma. Kuvan tilanteessa

- **kappale on paikallaan tai tasaisessa liikkeessä**
- kappale on kiihtyvässä liikkeessä
- **voimien suuruuksien laskemisessa voi käyttää Pythagoraan lausetta**
- **voimien suuruuksien laskemisessa voi käyttää sini-, kosini- tai tangenttifunktiota.**

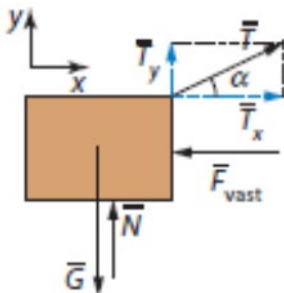
c)



Yllä olevaan kuvaan on merkitty kappaleeseen vaikuttava voima. Mitkä väitteistä pitävät paikkansa?

- **Kuvan kappale voi olla kiihtyvässä liikkeessä.**
- **Jos voiman ja vaakasuunnan välistä kulmaa merkitään α :lla, on $F_x = F \cos \alpha$.**
- Jos voiman ja vaakasuunnan välistä kulmaa merkitään α :lla, on $F_x = F \sin \alpha$.
- Jos voiman ja vaakasuunnan välistä kulmaa merkitään α :lla, on $F_y = F \cos \alpha$.

d)

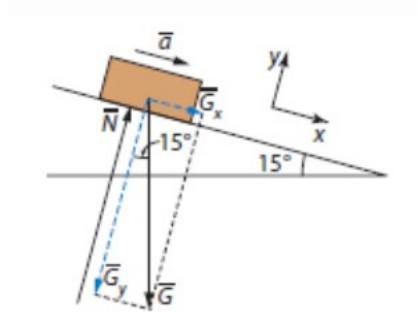


Yllä olevan kuvan kappale liikkuu vakionopeudella vaakasuoralla alustalla. Mitkä väitteistä pitävät paikkansa?

- Tukivoima $\bar{N}$ on piirretty liian lyhyeksi, koska sen pitäisi olla yhtä pitkä kuin voima $\bar{G}$.
- **Vektori $\bar{T}_x$ on piirretty yhtä pitkäksi kuin vektori $\bar{F}_{\text{vast}}$, koska kappale liikkuu vakionopeudella.**
- **Voimavektori $\bar{G}$ sekä voimavektoreiden $\bar{N}$ ja $\bar{T}_y$ summa ovat yhtä pitkät.**
- **Vetävän voiman pystysuora komponentti pienentää tarvittavan tukivoiman suuruutta. Siksi tukivoima ei ole yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuva paino.**

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

e)



Mitkä yllä olevaan kuvaan liittyvistä väitteistä pitävät paikkansa?

- Mitä jyrkempi taso on, sitä lyhyempi on vektori $\vec{G}_x$.
- Mitä jyrkempi taso on, sitä pidempi on vektori $\vec{G}_x$.
- Mitä jyrkempi taso on, sitä lyhyempi on vektori $\vec{G}_y$.
- Mitä jyrkempi taso on, sitä pidempi on vektori $\vec{G}_y$.
- Tason jyrkkyys ei vaikuta vektorin $\vec{G}$ komponenttien suuruuteen.

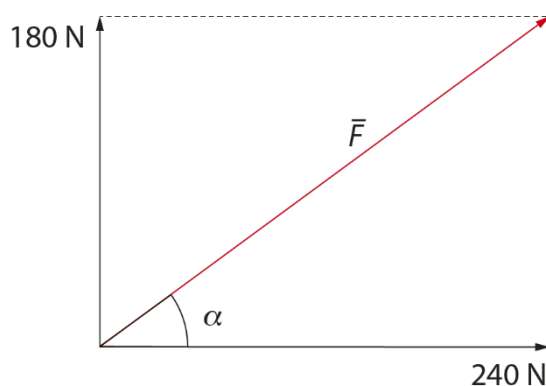
10-4.

voimien yhteisvaikutus	vektorisumma
tukivoima	aina kohtisuorassa tukipintaa vastaan
tasapainoehto	$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$
Pythagoraan lause	suorakulmainen kolmio
sinilause	vinokulmainen kolmio
paino	kohtisuorassa vaakatasoa vastaan

10-5.

$$m = 98 \text{ kg}$$

- a) Piirretään kokonaisvoima $\vec{F}$ ja valitaan kulma α .



Kokonaisvoiman $\vec{F}$ suuruus on $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(180 \text{ N})^2 + (240 \text{ N})^2} = 300 \text{ N}$.

Kulman α tangentti on $\tan \alpha = \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = \left(\frac{180 \text{ N}}{240 \text{ N}} \right)$ eli kulma $\alpha \approx 37^\circ$.

Kokonaisvoima osoittaa vaakasuunnasta vinosti oikealle ylös 37° :n kulmassa.

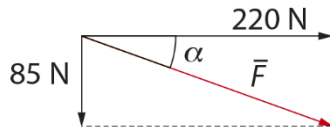
10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

Newtonin II lain mukaan kiihtyvyyden suuruus on

$$a = \frac{F}{m} = \frac{300 \text{ N}}{98 \text{ kg}} \approx 3,1 \text{ m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on sama kuin kokonaisvoiman suunta eli vaakasuunnasta vinosti oikealle ylös 37° :n kulmassa.

- b) Piirretään kokonaisvoima $\vec{F}$ ja valitaan kulma α .



Kokonaisvoiman $\vec{F}$ suuruus on $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(220 \text{ N})^2 + (85 \text{ N})^2} = 235,850 \text{ N} \approx 240 \text{ N}$.

Kulman α tangentti on $\tan \alpha = \left(\frac{F_2}{F_1} \right) = \left(\frac{85 \text{ N}}{220 \text{ N}} \right)$ eli $\alpha \approx 21^\circ$.

Kokonaisvoimavektori osoittaa vaakasuunnasta vinosti oikealle alas 21° :n kulmassa.

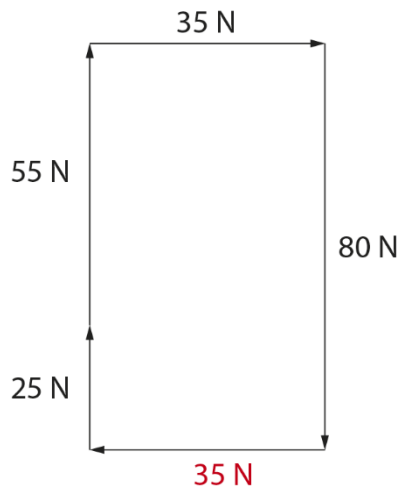
Newtonin II lain mukaan kiihtyvyyden suuruus on

$$a = \frac{F}{m} = \frac{235,850 \text{ N}}{98 \text{ kg}} \approx 2,4 \text{ m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on sama kuin kokonaisvoiman suunta eli vaakasuunnasta vinosti oikealle alas 21° :n kulmassa.

10-6.

Kun kappale on tasapainossa, voimat summautuvat nolllaksi eli voimavektoreista muodostuu suljettu kuvio. Viidennen voiman on oltava 35 N vasemmalle.

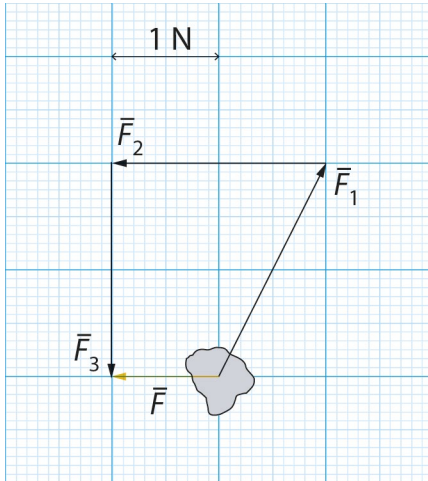


10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

10-7.

$$m = 16,5 \text{ g}$$

- a) Muodostetaan vektorisumma piirtämällä voimavektorit peräkkäin ja yhdistämällä alkupiste viimeisen vektorin kärkeen.



Koska yksi ruutu vastaa yhden newtonin suuruista voimaa, kokonaisvoiman $\vec{F}$ suuruus on 1 N. Kokonaisvoiman suunta on vasemmalle.

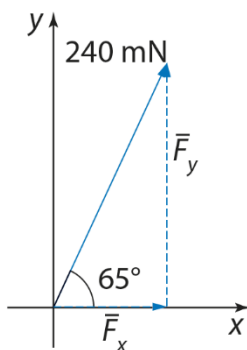
- b) Newtonin II lain mukaan kiihtyvyyden suuruus on

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1 \text{ N}}{0,0167 \text{ kg}} \approx 60 \text{ m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on sama kuin kokonaisvoiman suunta eli vasemmalle.

10-8.

a)



Kulmalle 65° pätee

$$\cos 65^\circ = \frac{F_x}{240 \text{ mN}}, \text{ josta saadaan voiman vaakasuuntaisen komponentin suuruus}$$

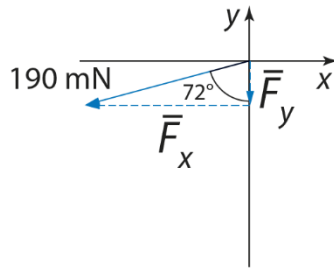
$$F_x = \cos 65^\circ \cdot 240 \text{ mN} \approx 100 \text{ mN} \text{ ja}$$

$$\sin 65^\circ = \frac{F_y}{240 \text{ mN}}, \text{ josta saadaan voiman pystysuuntaisen komponentin suuruus}$$

$$F_y = \sin 65^\circ \cdot 240 \text{ mN} \approx 220 \text{ mN}.$$

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

b)



Kulmalle 72° pätee

$\sin 72^\circ = \frac{F_x}{190 \text{ mN}}$, josta saadaan voiman vaakasuuntaisen komponentin suuruus

$$F_x = \sin 72^\circ \cdot 190 \text{ mN} \approx 180 \text{ mN} \text{ ja}$$

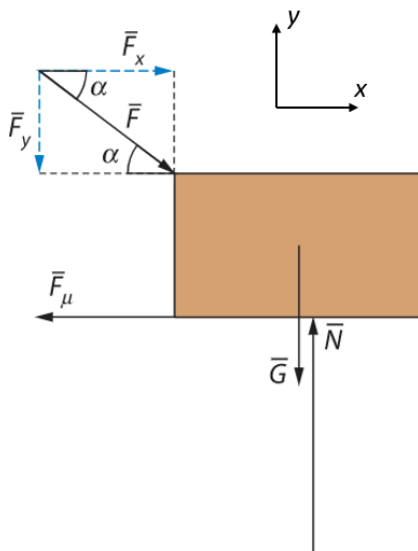
$\cos 72^\circ = \frac{F_y}{190 \text{ mN}}$, josta saadaan voiman pystysuuntaisen komponentin suuruus

$$F_y = \cos 72^\circ \cdot 190 \text{ mN} \approx 59 \text{ mN}.$$

10-9.

$$F = 265 \text{ N}, \alpha = 32^\circ$$

- a) Laatikoon kohdistuvat voimat ovat työntävä voima $\vec{F}$, liukukitka $\vec{F}_\mu$, paino $\vec{G}$ ja alustan tukivoima $\vec{N}$. Piirretään voimakuvio. Merkitään kuvaan x,y -koordinaatisto ja jaetaan työntävä voima $\vec{F}$ koordinaattiakselien suuntaisiin komponentteihin.



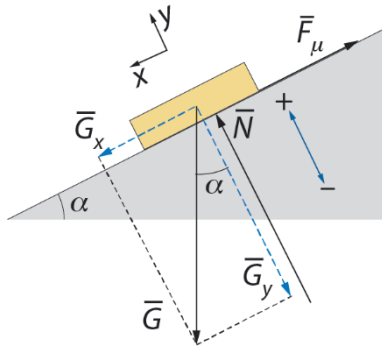
- b) Voiman $\vec{F}$ komponenttien suuruudet ovat
 $F_x = F \cos \alpha = 265 \text{ N} \cdot \cos 32^\circ \approx 220 \text{ N}$ ja
 $F_y = F \sin \alpha = 265 \text{ N} \cdot \sin 32^\circ \approx 140 \text{ N}.$
- c) Koska laatikko liikkuu vakionopeudella, Newtonin II lain mukaan liukukitka on yhtä suuri kuin työntävän voiman vaakasuora komponentti, mutta vastakkaisuuntainen. Liukukitkan suuruus on $F_\mu = 220 \text{ N}$ ja suunta kuvassa vasemmalle.

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

10-10.

$$\alpha = 18^\circ, m = 0,325 \text{ kg}, g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Levyyn kohdistuvat voimat ovat liukukitka $\vec{F}_\mu$, paino $\vec{G}$ ja alustan tukivoima $\vec{N}$. Piirretään voimakuvio. Merkitään kuvaan x,y -koordinaatisto ja jaetaan paino $\vec{G}$ koordinaattiakselien suuntaisiin komponentteihin.



- a) Koska levy liikuu vakionopeudella, Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_\mu = \vec{0}$. Kun tason suunta alas on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $G_x - F_\mu = 0$ eli $G \sin \alpha - F_\mu = 0$.

Liukukitkan suuruus on

$$F_\mu = G \sin \alpha = mg \sin \alpha \\ = 0,325 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 18^\circ = 0,985223 \text{ N} \approx 0,99 \text{ N}.$$

- b) Koska kitkakerroin saadaan yhtälöstä $F_\mu = \mu N$, ennen kitkakertoimen laskemista on selvitettävä tukivoiman $\vec{N}$ suuruus.

Newtonin II lain mukaan kaltevaa tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa on $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli $\vec{N} + \vec{G}_y = \vec{0}$. Kun suunta tasosta kohtisuorasti ylös valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $N - G_y = 0$.

Tukivoiman suuruus on

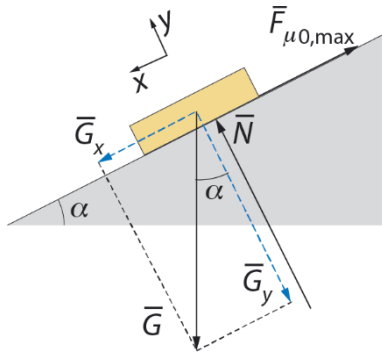
$$N = G_y = G \cos \alpha = mg \cos \alpha \\ = 0,325 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 18^\circ \approx 3,03221 \text{ N}.$$

$$\text{Kitkakertoimeksi saadaan } \mu = \frac{F_\mu}{N} = \frac{0,985223 \text{ N}}{3,03221 \text{ N}} \approx 0,32.$$

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

10-11.

Kun kirja on paikallaan, siihen kohdistuvat voimat ovat paino $\vec{G}$, pinnan tukivoima $\vec{N}$ ja lepokitka $\vec{F}_{\mu 0}$. Piirretään voimakuvio. Valitaan positiiviseksi suunnaksi tason suunta alas ja tasoa vastaan kohtisuora suunta ylös. Jaetaan paino komponentteihin $\vec{G}_x$ ja $\vec{G}_y$.



Tutkimuksen mukaan kirja lähtee liikkeelle, kun kaltevuuskulma on $\alpha \approx 16^\circ$.

Tarkastellaan tilannetta ensin tason suunnassa. Juuri ennen liikkeellelähtöä lepokitka on suurimmillaan eli $\vec{F}_{\mu 0} = \vec{F}_{\mu 0, \max}$. Koska kirja on vielä paikallaan, Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$, eli $\vec{G}_x + \vec{F}_{\mu 0, \max} = \vec{0}$.

Kun tason suunta alas on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

$$G_x - F_{\mu 0, \max} = 0 \text{ eli } G \sin \alpha - F_{\mu 0, \max} = 0.$$

Suurimman lepokitkan suuruus on $F_{\mu 0, \max} = G \sin \alpha = mg \sin \alpha$.

Koska lepokitkakerroin μ_0 saadaan yhtälöstä $F_{\mu 0, \max} = \mu_0 N$, ennen kitkakertoimen laskemista on selvitettävä tukivoiman suuruus N .

Tarkastellaan tilannetta tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa.

Kirja ei liiku, joten Newtonin lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli $\vec{N} + \vec{G}_y = \vec{0}$. Kun suunta tasosta kohtisuorasti ylös valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $N - G_y = 0$.

Tukivoiman suuruus on

$$N = G_y = G \cos \alpha = mg \cos \alpha.$$

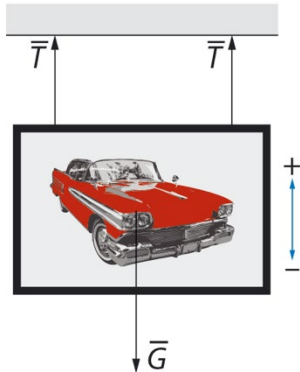
$$\text{Lepokitkakerroin on } \mu_0 = \frac{F_{\mu 0, \max}}{N} = \frac{mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha} = \frac{\sin 16^\circ}{\cos 16^\circ} = \tan 16^\circ \approx 0,29.$$

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

10-12.

Tauluihin kohdistuvat voimat ovat paino $\vec{G}$ ja lankojen jännitysvoimat $\vec{T}$.

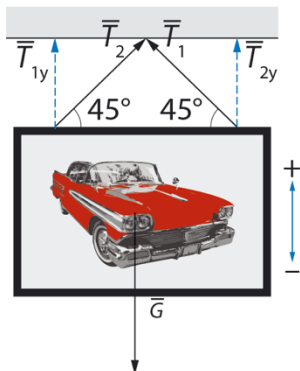
Vasemmanpuoleinen taulu:



Koska taulu pysyy seinällä, Newtonin II lain mukaan on voimassa ehto $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli $\vec{T} + \vec{T} + \vec{G} = \vec{0}$. Sovitaan suunta ylös positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $2T - G = 0$ saadaan langan jännitysvoiman suuruudeksi

$$T = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{6,3 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{2} \approx 31 \text{ N}.$$

Oikeanpuoleinen taulu:



Koska taulu pysyy seinällä, Newtonin II lain mukaan on voimassa ehto $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli $\vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} + \vec{G} = \vec{0}$ ja symmetriasta johtuen $|\vec{T}_{1y}| + |\vec{T}_{2y}| = T_y$. Sovitaan suunta ylös positiiviseksi.

Skalaariyhtälö on $2T_y - G = 0$ eli $2 \cdot T \cos \alpha - mg = 0$, josta langan jännitysvoiman suuruudeksi saadaan

$$T = \frac{mg}{2 \cos \alpha} = \frac{6,3 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{2 \cdot \cos 45^\circ} \approx 44 \text{ N}.$$

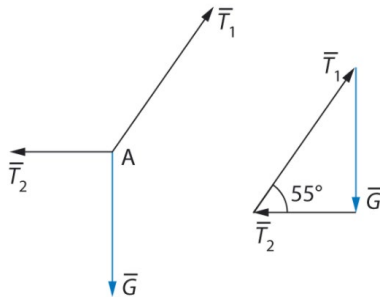
Jännitysvoimat ovat suuremmat oikeanpuoleisessa taulussa.

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

10-13.

$$\alpha = 55^\circ, m = 7,5 \text{ kg}$$

Nailonsiiman ja lampun johdon liitoskohtaan A vaikuttaa kolme voimaa: lamppuun kohdistuva paino $\vec{G}$, sähköjohdon jännitysvoima $\vec{T}_1$ sekä nailonsiiman jännitysvoima $\vec{T}_2$.



Liitoskohtaan vaikuttava kokonaisvoima on Newtonin II lain mukaan nolla, koska voimien vektorisummana muodostuu nollavektori eli $\Sigma \vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = \vec{0}$.

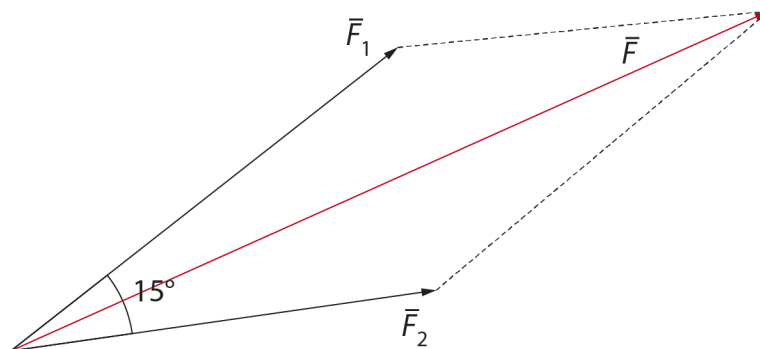
Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan yhtälö $\tan 55^\circ = \frac{G}{T_2} = \frac{mg}{T_2}$, josta saadaan nailonsiiman jännitysvoiman suuruudeksi

$$T_2 = \frac{mg}{\tan 55^\circ} = \frac{7,5 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{\tan 55^\circ} \approx 52 \text{ N}.$$

Se on suurempi kuin nailonsiiman suurin vetolujuus 40 N. Siima ei siis kestä.

10-14.

Piirretään kuva tilanteesta:



Graafinen ratkaisu:

Päättää mittakaava, esimerkiksi 1 cm vastaa 50 newtonia: tällöin 350 N:n voimavektorin pituus on 7,0 cm ja 250 N:n voimavektorin pituus 5,0 cm.

Piirrä voimavektorit oikeisiin pituuksiinsa ja niiden väliseksi kulmaksi 15 astetta.

Täydennä kuvio suunnikkaaksi. Kokonaisvoima on suunnikkaan lävistäjä.

Mittaa lävistäjän pituus ja muuta se vastaamaan newtoneja.

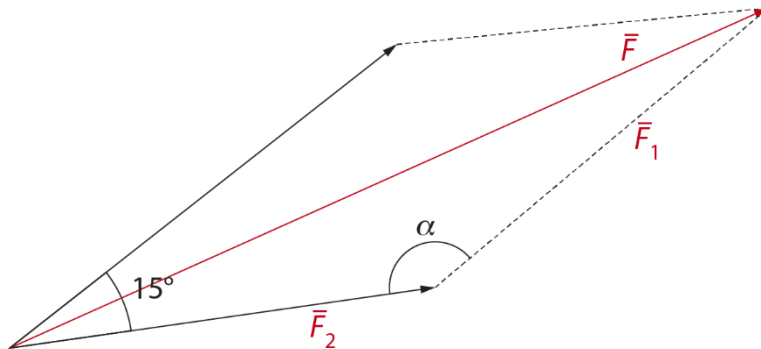
Kokonaisvoiman suuruus on 600 N.

Ratkaisu laskemalla:

$$F_1 = 350 \text{ N ja } F_2 = 250 \text{ N}.$$

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

Sovelletaan kosinilauseetta kolmioon, jonka sivujen pituudet ovat voimien suuruudet F_1 , F_2 ja kokonaisvoiman suuruus F .



Suunnikkaan kulmien summa on 360° . Suunnikkaan terävä kulma on 15° . Tylppä kulma on tällöin

$$\alpha = \frac{360^\circ - 2 \cdot 15^\circ}{2} = 165^\circ. \text{ Kosinilauseen mukaan}$$

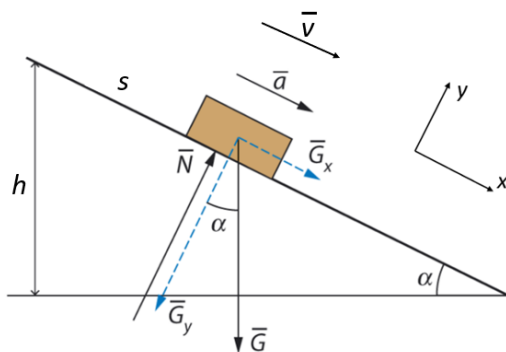
$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \alpha, \text{ josta kokonaisvoiman suuruus on}$$

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \alpha} \\ = \sqrt{(350 \text{ N})^2 + (250 \text{ N})^2 - 2 \cdot 350 \text{ N} \cdot 250 \text{ N} \cdot \cos 165^\circ} \approx 600 \text{ N}.$$

10-15.

$$h = 17 \text{ m}, s = 39 \text{ m}, m = 42 \text{ kg}$$

Kelkkaan kohdistuvat voimat ovat paino $\vec{G}$ ja alustan tukivoima $\vec{N}$. Piirretään voimakuvio. Merkitään kuvaan xy -koordinaatisto ja jaetaan paino $\vec{G}$ koordinaattiakselien suuntaisiin komponentteihin.



a) Rinteen kaltevuuskulman sinille pätee $\sin \alpha = \frac{h}{s} = \frac{17 \text{ m}}{39 \text{ m}} = \frac{17}{39}.$

Painon rinteen suuntaisen komponentin suuruus on

$$G_x = G \sin \alpha = mg \sin \alpha = 42 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{17}{39} \approx 180 \text{ N}.$$

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

- b) Koska kitka on hyvin pieni, sitä ei oteta huomioon. Newtonin II lain mukaan tason suunnassa on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ eli $\vec{G}_x = m\vec{a}$, jossa $\vec{a}$ on kelkan tason suuntainen kiihtyvyys. Liikkeen suunta tasoa pitkin alas on positiivinen, joten saadaan skalaariyhtälö $G_x = ma$. Kelkan kiihtyvyyden suuruus on

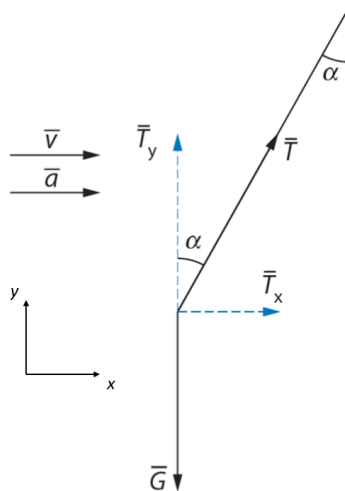
$$a = \frac{G_x}{m} = \frac{G \sin \alpha}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha = 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 25,8424^\circ \approx 4,27615 \text{ m/s}^2.$$

Yhtälöistä $v = at$ ja $s = \frac{1}{2}at^2$ kelkan nopeudeksi rinteän alaosassa saadaan

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 4,27615 \text{ m/s}^2 \cdot 39 \text{ m}} \approx 18 \text{ m/s}.$$

10-16.

Avainnippuun kohdistuvat voimat ovat langan jännitysvoima $\vec{T}$ ja avainnippuun kohdistuva paino $\vec{G}$. Piirretään voimakuvio.



Koska avainnippu on likimain levossa junan suhteen, sen ja junan kiihtyvyydet ovat likimain samoja. Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ ja liikkeen suunnassa on $\vec{T}_x = m\vec{a}$. Sovitaan liikkeen suunta

positiiviseksi, jolloin saadaan $T_x = ma$ eli $T \sin \alpha = ma$. Avainnippuun kiihtyvyys on $a = \frac{T \sin \alpha}{m}$.

Kiihtyvyyden laskemiseksi on vielä selvitettävä langan jännitysvoima $\vec{T}$.

Liikettä vastaan kohtisuorassa suunnassa avainnippuun liikeyhtälö on

$\vec{T}_y + \vec{G} = \vec{0}$. Valitaan suunta ylös positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö

$T_y - G = 0$ eli $T \cos \alpha - G = 0$.

Langan jännitysvoima on $T = \frac{G}{\cos \alpha} = \frac{mg}{\cos \alpha}$. Sijoitetaan tämä avainnippuun kiihtyvyyden yhtälöön,

jolloin kiihtyvyys on

$$a = \frac{T \sin \alpha}{m} = \frac{\frac{mg}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha}{m} = g \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = g \cdot \tan \alpha$$

$$= 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \tan 15^\circ \approx 2,6 \text{ m/s}^2.$$

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

Tapa 2.

Kirjoitetaan x - ja y -suuntaiset skalaariyhtälöt muotoon

$T \sin \alpha = ma$ ja $T \cos \alpha = mg$ ja jaetaan yhtälöt puolittain:

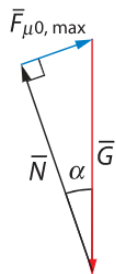
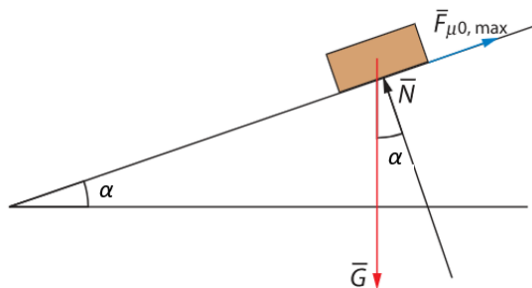
$$\frac{T \sin \alpha}{T \cos \alpha} = \frac{ma}{mg} \text{ eli } \tan \alpha = \frac{a}{g}.$$

Avainnippun kiihtyvyys on $a = g \cdot \tan \alpha = 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \tan 15^\circ \approx 2,6 \text{ m/s}^2$.

10-17.

$$\mu_0 = 0,10, h = 200 \text{ m}$$

Tarkastellaan tilannetta, jossa junan pyörät ovat lähtemäisillään liukumaan kiskoilla, mutta ovat kuitenkin vielä paikallaan. Junaan vaikuttavat voimat ovat paino $\vec{G}$, kiskojen tukivoima $\vec{N}$ ja (suurin) lepokitka $\vec{F}_{\mu 0, \max}$.



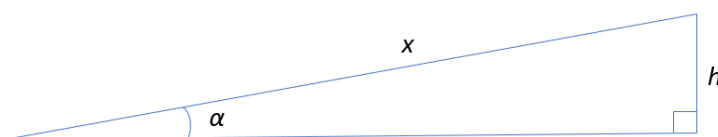
Juna on paikallaan, joten $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ja voimien $\vec{G}$, $\vec{N}$ ja $\vec{F}_{\mu 0, \max}$ vektorisummasta muodostuu kolmio. Koska tukivoima ja lepokitka ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kolmio on suorakulmainen.

Käytetään suorakulmaisen kolmion trigonometriaa, jolloin saadaan

$$\tan \alpha = \frac{F_{\mu 0, \max}}{N} = \frac{\mu_0 N}{N} = \mu_0.$$

Sijoitetaan lepokitkakerroin yhtälöön $\tan \alpha = \mu_0$. Tällöin saadaan

$\tan \alpha = 0,10$, josta kaltevuuskulma on $\alpha = 5,71059^\circ \approx 5,7^\circ$. Paikallaan oleva juna lähtisi siis liukumaan alamäkeen tätä suuremmalla kaltevuuskulman arvolla.



10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

Merkitään reitin pituutta x . Oletetaan, että kaltevuuskulma on koko nousun ajan suurin mahdollinen siten, että juna ei lähde liukumaan raiteilla.

Yhtälöstä $\sin \alpha = \frac{h}{x}$ saadaan reitin pituudeksi

$$x = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{200 \text{ m}}{\sin 5,71059^\circ} \approx 2000 \text{ m} = 2 \text{ km}.$$

Reitin tulee olla pituudeltaan vähintään kaksi kilometriä.

10-18.

$$m = 425 \text{ kg}, \alpha = 35^\circ, \mu_0 = 0,52$$

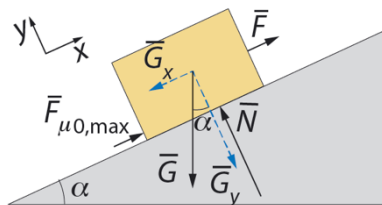
Laatikkoon kohdistetaan lastaussillan suuntainen voima $\vec{F}$. Vastakkaiseen suuntaan vaikuttaa painovoiman lastaussillan suuntainen komponentti G_x . Tehtävänä on laskea, kuinka suuri voima $\vec{F}$ voi suurimmillaan ja pienimmillään olla, jotta laatikko ei lähde liikkeelle. Jos voiman $\vec{F}$ minimiarvo alittuu, laatikko alkaa liikkua alamäkeen. Jos voiman $\vec{F}$ maksimiarvo ylitetään, laatikko alkaa liikkua ylämäkeen.

Lepokitka vastustaa laatikon liukumaan lähtöä. Kun $F < G_x$, lepokitka vaikuttaa samaan suuntaan kuin $\vec{F}$. Kun $G_x < F$, lepokitka vaikuttaa samaan suuntaan kuin G_x .

Näitä kahta tilannetta tarkastelemalla saadaan voimalle $\vec{F}$ suurin ja pienin arvo.

$F < G_x$:

Piirretään laatikon voimakuvio, kun laatikko on juuri lähtemäisillään liikkeelle, mutta on kuitenkin vielä paikallaan. Vetävän voiman $\vec{F}$ suuruus on tällöin pienin mahdollinen. Muut laatikkoon vaikuttavat voimat ovat paino $\vec{G}$, pinnan tukivoima $\vec{N}$ ja (suurin) lepokitka $\vec{F}_{\mu 0, \max}$. Voimien suunnat ovat kuvan mukaisesti. Tukivoiman ja painon välinen kulma α on yhtä suuri kuin pöydän kaltevuuskulma.



Määritetään suurimman lepokitkan $\vec{F}_{\mu 0, \max}$ suuruus tarkastelemalla tilannetta tasoa vastaan

kohtisuorassa suunnassa. Koska laatikko on paikallaan, Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli $\vec{G}_y + \vec{N} = \vec{0}$. Kun tasoa vastaan kohtisuora suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $-G_y + N = 0$ eli $-mg \cos \alpha + N = 0$, josta $N = mg \cos \alpha$.

Suurimman lepokitkan suuruus on $F_{\mu 0, \max} = \mu_0 N = \mu_0 mg \cos \alpha$.

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

Määritetään pienimmän vetävän voiman $\vec{F}$ suuruus tarkastelemalla tilannetta lastaussillan suuntaisesti. Laatikko on kyseisessä suunnassa paikallaan, joten Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli

$\vec{F} + \vec{F}_{\mu 0, \max} + \vec{G}_x = \vec{0}$. Kun vetävän voiman $\vec{F}$ suunta on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

$F + F_{\mu 0, \max} - G_x = 0$, josta

$$F = G_x - F_{\mu 0, \max}$$

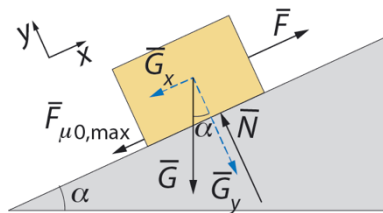
$$= mg \sin \alpha - \mu_0 mg \cos \alpha$$

$$= mg(\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha)$$

$$= 425 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (\sin 35^\circ - 0,52 \cdot \cos 35^\circ) = 615,454 \text{ N} \approx 620 \text{ N}.$$

$F > G_x$:

Piirretään laatikon voimakuvio, kun laatikko on juuri lähtemäisillään liikkeelle, mutta on kuitenkin vielä paikallaan. Ero aiempaan tilanteeseen on, että vetävän voiman $\vec{F}$ suuruus on nyt suurin mahdollinen ja lepokitkan $\vec{F}_{\mu 0, \max}$ suunta on vaihtunut vastakkaiseksi.



Tarkastellaan tilannetta lastaussillan suunnassa. Laatikko on paikallaan, joten Newtonin II lain mukaan on

$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli $\vec{F} + \vec{F}_{\mu 0, \max} + \vec{G}_x = \vec{0}$.

Kun vetävän voiman $\vec{F}$ suunta on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

$F - F_{\mu 0, \max} - G_x = 0$, josta suurimmaksi vetäväksi voimaksi saadaan

$$F = G_x + F_{\mu 0, \max}$$

$$= mg \sin \alpha + \mu_0 mg \cos \alpha$$

$$= mg(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)$$

$$= 425 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (\sin 35^\circ + 0,52 \cdot \cos 35^\circ) = 4167,31 \text{ N} \approx 4200 \text{ N}.$$

Voiman pienin mahdollinen arvo on 620 N ja suurin 4200 N.

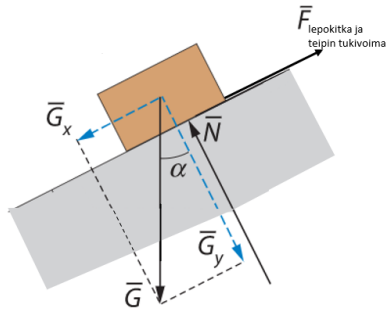
10-19.

Videolla punnus on asetettu digitaalivaa'alle. Punnus on teipattu kiinni siten, että se pysyy vaa'an suhteen paikallaan, kun vaakaa kallistetaan. Vaakatasossa vaa'an ilmoittama lukema on suurin (50,1 g).

Kun vaakaa kallistetaan, lukema pienenee.

Vaaka mittaa voimaa, jonka punnus kohdistaa vaakaan. Voiman suuruus on Newtonin III lain mukaan yhtä suuri kuin vaa'an punnukseen kohdistaman tukivoiman suuruus. Riittää siis tarkastella tukivoiman suuruuden riippuvuutta kallistuksen jyrkkyydestä.

10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit



Tukivoima $\vec{N}$ on aina pintaa vastaan kohtisuorassa. Koska punnus pysyy vaa'an suhteen paikallaan, punnukseen täytyy pintaa vastaan kohtisuorassa suunnassa vaikuttaa toinenkin voima, joka on tukivoiman kanssa yhtä suuri mutta vastakkaissuuntainen. Tämä voima on punnukseen kohdistuvan painon vaa'an pintaan nähden kohtisuora komponentti $\vec{G}_y$. (Kyseessä ei ole varsinainen voima, vaan voiman $\vec{G}$ komponentti.)

Aluksi, kun kulma $\alpha = 0^\circ$, $\vec{G}_y = \vec{G}$ ja tukivoima $\vec{N}$ on suurimmillaan. Kun vaakaa kallistetaan, G_y pienenee ja näin ollen tarvittavan tukivoiman suuruus N pienenee. Yhä pienempi tukivoima riittää tukemaan punnusta. Tämä havaitaan vaa'an lukeman pienenemisenä.