KERTAUS

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K1. Ensimmäiselle päivälle on 5 vaihtoehtoa, toiselle 4, kolmannelle 3 ja niin edelleen. Axel voi pitää paitoja $5! = 120$:ssä eri järjestyksessä.

Vastaus: 120:ssä eri järjestyksessä

K2. Ensimmäisessä vaiheessa on 5 vaihtoehtoa, toisessa vaiheessa 3 vaihtoehtoa ja kolmannessa vaiheessa 2 vaihtoehtoa.
Tuloperiaatteen mukaan puhelimen voi valita $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ vaihtoehdosta.

Vastaus: 30 vaihtoehdosta

K3. Yhdeksästä työntekijästä voidaan valita neljän työntekijän ryhmä $\binom{9}{4} = 126$:lla eri tavalla, joten 126 erilaista kokoonpanoa voi tulla valituksi.

Vastaus: 126 kokoonpanoa

K4. Kun joukkueet pelaavat toisiaan vastaan, ne muodostavat kahden alkion joukkoja. Viidestä alkiosta voidaan muodostaa kahden alkion joukko $\binom{5}{2} = 10$:llä eri tavalla.
Alkusarjassa pelataan siis 10 peliä.

Vastaus: 10 peliä

K5. Seitsemän nuken joukosta voidaan valita kolme $\binom{7}{3} = 35$:llä tavalla, ja

kahdeksasta nukesta voidaan valita viisi $\binom{8}{5} = 56$ eri tavalla.

Erilaisia nukkekokoonpanoja on yhteensä $35 \cdot 56 = 1960$.

Leikissä voi olla 1960 eri nukkekokoonpanoa.

Vastaus: 1960 nukkekokoonpanoa

K6. Matematiikan kirjat voidaan järjestää $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ eri tavalla. Vastaavasti psykologian kirjat voidaan järjestää $5!$ eri tavalla ja yhteiskuntaopin kirjat $2!$ eri tavalla. Lisäksi kolme oppiainetta voidaan järjestää $3!$ eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan on $4! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 3! = 34\,560$ eri tapaa järjestää kirjat.

Vastaus: 34 560 järjestystä

K7. **a)** Sanassa PERUNA on kuusi eri kirjainta, joten uuden sanan ensimmäinen kirjain voidaan valita kuudesta vaihtoehdosta, toinen viidestä vaihtoehdosta ja niin edelleen.

Erilaisia merkkijonoja voidaan muodostaa
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ kappaletta.

Vastaus: 720 merkkijonoa

b) Viidellä kirjaimella on 5! mahdollista järjestystä, mutta näistä osa on samoja, koska U esiintyy sanassa kahdesti. Luku 5! on siis jaettava luvulla, joka kertoo kuinka monessa järjestyksessä kaksi U-kirjainta voivat olla, eli luvulla 2!.

Erilaisia merkkijonoja voidaan siis muodostaa $\frac{5!}{2!} = 60$ kappaletta.

Vastaus: 60 merkkijonoa

K8. **a)** Viikossa on seitsemän päivää, joista viisi on arkipäiviä, joten

$P(\text{itsenäisyyspäivä on arkipäivänä}) = \frac{5}{7} = 0{,}714 \approx 0{,}71.$

Itsenäisyyspäivä on arkipäivänä todennäköisyydellä $\frac{5}{7} \approx 0{,}71$.

Vastaus: $\frac{5}{7} \approx 0{,}71$

b) Viikossa on seitsemän päivää ja viikonloppuna on kaksi päivää, joten

$P(\text{itsenäisyyspäivä on viikonloppuna}) = \frac{2}{7} = 0{,}285 \approx 0{,}29$

Itsenäisyyspäivä on viikonloppuna todennäköisyydellä $\frac{2}{7} \approx 0{,}29$.

Vastaus: $\frac{2}{7} \approx 0{,}29$

K9. Muodostetaan taulukko, jossa on kahden arpakuution silmälukujen summat.

		1. heiton silmäluku					
		1	2	3	4	5	6
2. heiton silmäluku	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Kahden arpakuution heitossa alkeistapauksia on 36 ja alkeistapauksia, joissa silmälukujen summa on 7 tai 8, on 11.

$P(\text{silmälukujen summa on 7 tai 8}) = \dfrac{11}{36} = 0{,}30555 = 30{,}55...\% \approx 31\ \%$

Silmälukujen summa on 7 tai 8 todennäköisyydellä 31 %.

Vastaus: 31 %

K10. Tilastossa on tutkittu yhteensä 39:ää lukiolaista. Lukiolaisia, joilla lemmikkinä on kissa tai lisko, on 8 + 1 = 9. Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{lemmikkinä kissa tai lisko}) = \dfrac{9}{39}^{(3} = \dfrac{3}{13} = 0{,}23076... \approx 0{,}23$

Lukiolaisella on lemmikkinä kissa tai lisko todennäköisyydellä 0,23.

Vastaus: $\dfrac{3}{13} \approx 0{,}23$

K11. Korttipakasta voidaan nostaa erilaisia viiden kortin joukkoja $\binom{52}{5}$ kappaletta.

Korttipakassa on 4 ässää, joten siellä on 52 − 4 = 48 muuta korttia. Erilaisia viiden kortin joukkoja, joissa ei ole ässää, eli joissa kortit on valittu muiden 48:n kortin joukosta, on $\binom{48}{5}$ kappaletta.

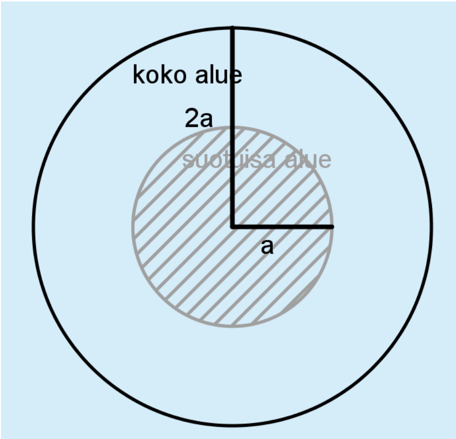
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{ei yhtään ässää}) = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0{,}658... \approx 0{,}66.$$

Todennäköisyys sille, ettei saada yhtään ässää, kun otetaan pakasta viisi korttia, on 0,66.

Vastaus: 0,66

K12. Merkitään suotuisan alueen sädettä kirjaimella a. Tällöin koko ympyrän säde on $2a$. Piirretään mallikuva.



Käytetään geometrisena mittana pinta-alaa.
Koko alueen pinta-ala on $\pi \cdot (2a)^2 = \pi \cdot 4a^2 = 4\,\pi a^2$
ja suotuisan alueen pinta-ala πa^2.

Kysytty todennäköisyys on
P(kivi osuu lähemmäksi ympyrän keskipistettä kuin sen kehää)
$$= \frac{\pi a^2}{4\pi a^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Kivi osuu lähemmäs ympyrän keskipistettä kuin sen kehää todennäköisyydellä $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Vastaus: $\frac{1}{4} = 0{,}25$

K13. Taskussa on aluksi $5 + 3 = 8$ kolikkoa, joista 5 on 50 sentin ja 3 kahden euron kolikoita.

Tapa 1:

Saadaan täsmälleen 2,50 euroa, jos ensimmäinen otettu kolikko on kahden euron kolikko ja toinen 50 sentin kolikko, tai toisin päin.

Jos ensimmäinen kolikko on 2 euron kolikko, niin taskussa on vielä jäljellä 7 kolikkoa, joista 5 on 50 sentin kolikoita. Tällöin todennäköisyys sille, että toisena otettu kolikko on 50 sentin kolikko, on $\frac{5}{7}$.

Jos ensimmäinen kolikko on 50 sentin kolikko, niin taskussa on vielä jäljellä 7 kolikkoa, joista 3 on 2 euron kolikoita. Tällöin todennäköisyys sille, että toisena otettu kolikko on 2 euron kolikko, on $\frac{3}{7}$.

P(täsmälleen 2,50 euroa)
$= P$(1. kolikko on 2 € ja toinen 50 snt)
$+ P$(1. kolikko on 50 snt ja toinen 2 €)
$= P$(1. kolikko on 2 €) · P(toisella 50 snt, kun 1. kolikko oli 2 €)
$+ P$(1. kolikko on 50 snt) · P(toisella 2 €, kun 1. kolikko oli 50 snt)

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}$$
$$= \frac{15}{28}$$
$$= 0{,}535...$$
$$\approx 0{,}54$$

Täsmälleen parkkimaksuun tarvittava 2,50 euroa saadaan todennäköisyydellä $\frac{15}{28} \approx 0{,}54$.

Tapa 2:

Saadaan täsmälleen 2,50 euroa, jos saadaan yksi kahden euron ja yksi 50 sentin kolikko.

Kahden euron kolikko voidaan valita kolmen samanlaisen kolikon joukosta $\binom{3}{1}$ tavalla.

50 sentin kolikko voidaan valita viiden samanlaisen kolikon joukosta $\binom{5}{1}$ tavalla.

Suotuisia kolikkoyhdistelmiä on tuloperiaatteen mukaan $\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{1}$ kappaletta.

Kaksi kolikkoa voidaan valita kahdeksan kolikon joukosta $\binom{8}{2}$ eri tavalla.

Kysytty todennäköisyys on $\dfrac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \dfrac{15}{28} = 0{,}535... \approx 0{,}54.$

Täsmälleen parkkimaksuun tarvittava 2,50 euroa saadaan todennäköisyydellä $\frac{15}{28} \approx 0{,}54$.

Vastaus: $\frac{15}{28} \approx 0{,}54$

K14. Kaikki valot toimivat, kun ensimmäinen valo toimii ja toinen valo toimii ja kolmas valo toimii ja niin edelleen.
Kysytty todennäköisyys on

P(kaikki valot toimivat)

$$= \underbrace{0{,}995 \cdot 0{,}995 \cdot \ldots \cdot 0{,}995}_{24\text{ kpl}}$$

$$= 0{,}995^{24}$$

$$= 0{,}88665\ldots$$

$$= 88{,}665\ldots\ \%$$

$$\approx 89\ \%$$

Todennäköisyys sille, että kaikki valot toimivat, on 89 %.

Vastaus: 89 %

K15. Viljami voittaa ainakin yhden pelin, jos hän voittaa yhden pelin, kaksi peliä tai kolme peliä. Tämän todennäköisyys on helpompi laskea vastatapahtuman ” Viljami ei voita yhtään peliä” avulla kuin suoraan.

Tilastollinen todennäköisyys, jolla Viljami voittaa yhden pelin on $\frac{4}{12}$.

Todennäköisyys, että Viljami ei voita yksittäistä peliä on $1-\frac{4}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

P(Viljami voittaa ainakin yhden pelin)

$= 1 - P$(Viljami ei voita yhtään peliä)

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27} = 0{,}703\ldots \approx 0{,}70$$

Todennäköisyys sille, että Viljami voittaa ainakin yhden pelin, on 0,70.

Vastaus: $\frac{19}{27} \approx 0{,}7$

K16. Merkitään lauman naaraiden määrää kirjaimella n.
Tällöin todennäköisyys sille, että ensimmäinen valittu yksilö on naaras, on $\frac{n}{25}$. Jos ensimmäinen valittu on naaras, niin seuraava valitaan 24 mangustin joukosta, jossa on $n - 1$ naarasta. Toinen mangusti on siis naaras todennäköisyydellä $\frac{n-1}{24}$. Muodostetaan todennäköisyyden avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä n.

$$\frac{n}{25}\cdot\frac{n-1}{24}=\frac{7}{20}$$
$$\frac{n(n-1)}{25\cdot 24}=\frac{7}{20}$$
$$\frac{n^2-n}{600}=\frac{7}{20}$$
$$20(n^2-n)=7\cdot 600$$
$$20n^2-20n=4200$$
$$20n^2-20n-4200=0 \qquad \|:20$$
$$n^2-n-210=0$$
$$n=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-210)}}{2\cdot 1}$$
$$n=\frac{1\pm\sqrt{1+840}}{2}$$
$$n=\frac{1\pm\sqrt{841}}{2}$$
$$n=\frac{1\pm 29}{2}$$
$$n=\frac{1+29}{2} \text{ tai } n=\frac{1-29}{2}$$
$$n=15 \text{ tai } n=-14$$

Yhtälön voi ratkaista myös ohjelmalla:

1 ratkaise$(n^2 - n - 210 = 0)$

$\rightarrow$ $\{n = -14, n = 15\}$

Lukumäärä ei voi olla negatiivinen, joten ryhmässä on 15 naarasta.

Vastaus: 15 naarasta

K17. **a)** Neljän henkilön toimikunta seitsemästä henkilöstä voidaan valita $\binom{7}{4} = 35$:llä tavalla.

Kaksi veljestä voidaan valita kahden veljeksen joukosta $\binom{2}{2}$ tavalla.

Loput kaksi henkilöä voidaan valita muiden viiden muun henkilön joukosta $\binom{5}{2}$ eri tavalla. Toimikunta, jossa molemmat veljekset ovat mukana, voidaan siis valita $\binom{2}{2} \cdot \binom{5}{2} = 10$ tavalla.

Kysytty todennäköisyys on
P(molemmat veljekset joutuvat toimikuntaan)

$$= \frac{10}{35}^{(5} = \frac{2}{7} = 0{,}285\ldots \approx 0{,}29.$$

Molemmat veljekset joutuvat toimikuntaan todennäköisyydellä 0,29.

Vastaus: $\frac{2}{7} \approx 0{,}27$

b) Yksi veli voidaan valita kahden veljen joukosta $\binom{2}{1}$ tavalla.

Loput kolme henkilöä voidaan valita viiden muun henkilön joukosta $\binom{5}{3}$ eri tavalla. Toimikunta, jossa on vain toinen veljeksistä, voidaan siis valita $\binom{2}{1} \cdot \binom{5}{3} = 20$ tavalla.

Kysytty todennäköisyys on
P(vain toinen veljeksistä joutuu toimikuntaan)

$$= \frac{20}{35}^{(5} = \frac{4}{7} = 0{,}571\ldots \approx 0{,}57.$$

Vain toinen veljeksistä joutuu toimikuntaan todennäköisyydellä 0,57.

Vastaus: $\frac{4}{7} \approx 0{,}57$

K18. **a)** Vapaa-aikaa vuorokaudesta on 6,3 tuntia eli

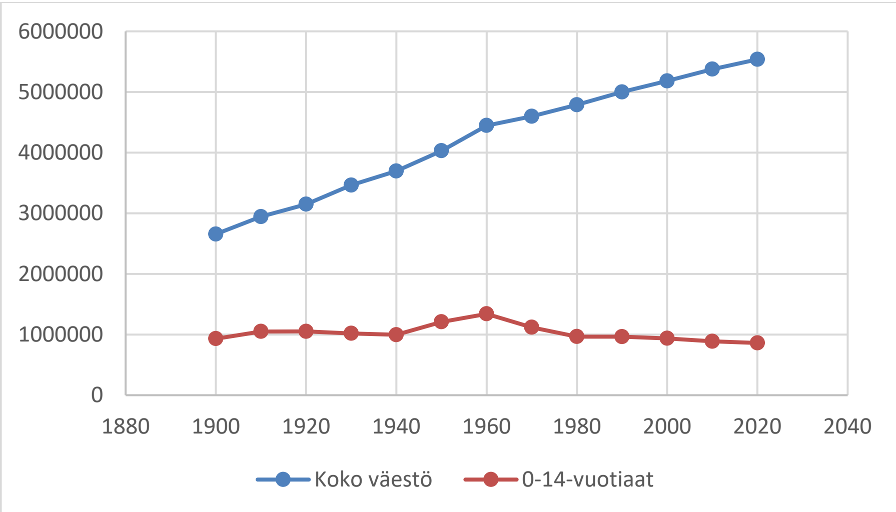
$$\frac{6,3\text{ h}}{24\text{ h}} = 0,2625 = 26,25\ \% \approx 26\ \%.$$

Vuorokaudesta on vapaa-aikaa 26 %.

Vastaus: 26 %

b) Ansiotyöhön käytettävä aika voi näyttää pieneltä. Aikaa pienentää se, että kaikki 10–64-vuotiaat eivät tee töitä, eikä töitä yleensä tehdä joka päivä.

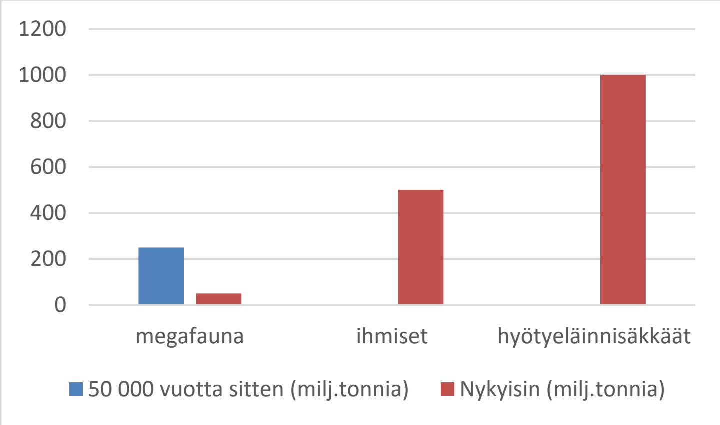
K19. Videossa https://vimeo.com/228962209/00d855a41b näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista taulukkolaskentaohjelmalla.



Viivakaavion perusteella väestön koko on kasvanut tasaisesti, samaan aikaan 0–14-vuotiaiden määrä on pysynyt likimain samana vaikkakin viimeisinä vuosina hieman laskenut. Tasainen nuorten määrä ja kasvava väestö tarkoittanee, että väestö elää vanhemmaksi.

Vastaus: Viivakaavion perusteella väestön koko on kasvanut tasaisesti, samaan aikaan 0–14-vuotiaiden määrä on pysynyt likimain samana vaikkakin viimeisinä vuosina hieman laskenut.

K20. Piirretään pylväskaavio taulukkolaskentaohjelmalla.



K21. Lasketaan suhteelliset frekvenssit, summafrekvenssit ja suhteelliset summafrekvenssit.

kruunien määrä	frekvenssi	suhteellinen frekvenssi	summafrekvenssi	suhteellinen summafrekvenssi
0	38	$\frac{38}{1000}=3{,}8\ \%$	38	3,8 %
1	144	$\frac{144}{1000}=14{,}4\ \%$	$38+144=182$	$\frac{182}{1000}=18{,}2\ \%$
2	342	$\frac{342}{1000}=34{,}2\ \%$	$182+342=524$	$\frac{524}{1000}=52{,}4\ \%$
3	287	$\frac{287}{1000}=28{,}7\ \%$	$524+287=811$	$\frac{811}{1000}=81{,}1\ \%$
4	164	$\frac{164}{1000}=16{,}4\ \%$	$811+164=975$	$\frac{975}{1000}=97{,}5\ \%$
5	25	$\frac{25}{1000}=2{,}5\ \%$	$975+25=1000$	100 %

Vastaus:

kruunien määrä	suhteellinen frekvenssi	summafrekvenssi	suhteellinen summafrekvenssi
0	3,8 %	38	3,8 %
1	14,4 %	182	18,2 %
2	34,2 %	524	52,4 %
3	28,7 %	811	81,1 %
4	16,4 %	975	97,5 %
5	2,5 %	1000	100,0 %

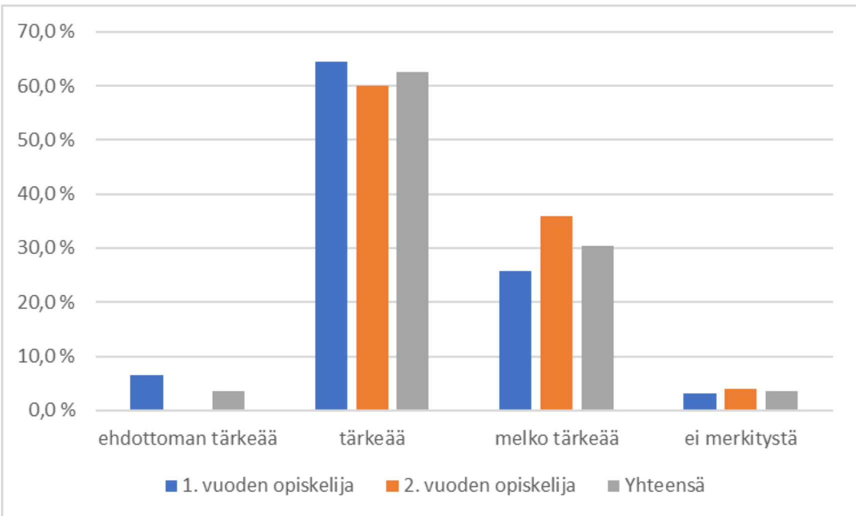
K22. Lasketaan ensin 1. ja 2. vuoden opiskelijoiden vastausten määrät yhteen. Lasketaan lisäksi, kuinka monta kutakin vastausta on yhteensä.

Vastaus	1. vuoden opiskelija	2. vuoden opiskelija	Yhteensä
ehdottoman tärkeää	2	0	2
tärkeää	20	15	35
melko tärkeää	8	9	17
ei merkitystä	1	1	2
yhteensä	31	25	56

Määritetään suhteelliset frekvenssit.

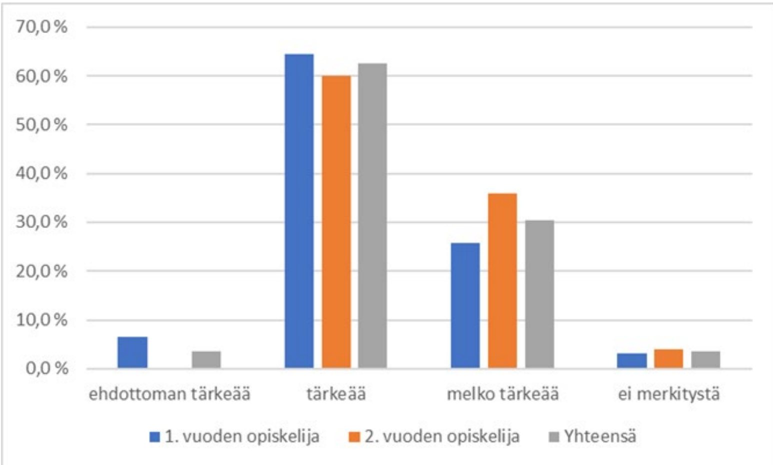
Vastaus	1. vuoden opiskelija	2. vuoden opiskelija	Yhteensä
ehdottoman tärkeää	$\frac{2}{31} \approx 6\,\%$	$\frac{0}{25} = 0\,\%$	$\frac{2}{56} \approx 4\,\%$
tärkeää	$\frac{20}{31} \approx 65\,\%$	$\frac{15}{25} = 60\,\%$	$\frac{35}{56} \approx 63\,\%$
melko tärkeää	$\frac{8}{31} \approx 26\,\%$	$\frac{9}{25} = 36\,\%$	$\frac{17}{56} \approx 30\,\%$
ei merkitystä	$\frac{1}{31} \approx 3\,\%$	$\frac{1}{25} = 4\,\%$	$\frac{2}{56} \approx 4\,\%$

Piirretään pylväskaavio taulukkolaskentaohjelmalla.



Vastaus:

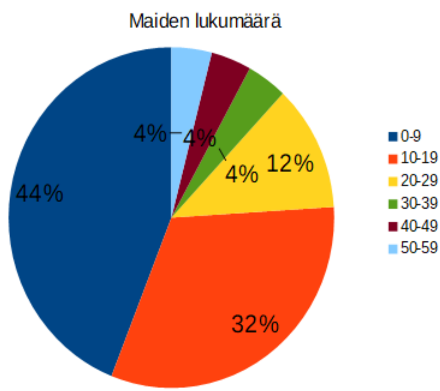
Vastaus	1. vuoden opiskelija	2. vuoden opiskelija	Yhteensä
ehdottoman tärkeää	6 %	0 %	4 %
tärkeää	65 %	60 %	63 %
melko tärkeää	26 %	36 %	30 %
ei merkitystä	3 %	4 %	4 %



K23. Videossa https://vimeo.com/228962418/7f9f8a96d4 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista taulukkolaskentaohjelmalla.

Vastaus:

Maiden lukumäärä	*f*
0–9	11
10–19	8
20–29	3
30–39	1
40–49	1
50–59	1



K24. Järjestetään arvosanat ja määritetään mediaani.
Jonin arvosanat olivat 5, 6, 6, 7, 9 ja 9. Koska arvosanat 6 ja 7 ovat molemmat keskimmäisiä, mediaani on niiden keskiarvo.
Siis Md = $\frac{6+7}{2}=6{,}5$.

Jirin arvosanat olivat 5, 6, 7, 7, 8 ja 8. Koska kaksi keskimmäistä arvosanaa ovat molemmat seiskoja, mediaani on Md = 7.

Jonin arvosanojen keskiarvo on
$$\overline{x}=\frac{5+6+6+7+9+9}{6}=\frac{42}{6}=7\,.$$

Jirin arvosanojen keskiarvo on
$$\overline{x}=\frac{5+6+7+7+8+8}{6}=\frac{41}{6}=6{,}833...\approx 6{,}8\,.$$

Vastaus: Joni: Md = 6,5, $\overline{x}=7$, Jiri: Md = 7, $\overline{x}\approx 6{,}8$

K25. Yhden maalin pelejä on eniten, joten moodi on Mo = 1.

Pelien lukumäärä on 5 + 19 + 17 + 17 + 16 + 5 + 3 = 82.

Maalien määrän keskiarvo on
$$\begin{aligned}\overline{x}&=\frac{5\cdot 0+19\cdot 1+17\cdot 2+17\cdot 3+16\cdot 4+5\cdot 5+3\cdot 6}{82}\\&=\frac{211}{82}\\&=2{,}573...\\&\approx 2{,}6.\end{aligned}$$

Vastaus: Mo = 1, $\overline{x}\approx 2{,}6$

K26. Videossa https://vimeo.com/228962531/833046e27b näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

n	80
Keskiarvo	75.25
σ	10.3386
s	10.4039
Σx	6020
Σx^2	461556
Min	53
Q1	67.5
Mediaani	75
Q3	82.5
Max	97

Vastaus: [53, 97], Md = 75, $Q_1 = 67{,}5$, $Q_3 = 82{,}5$, $\overline{x} \approx 75{,}3$, $s \approx 10{,}3$

K27. Videossa https://vimeo.com/228962628/ea1504b7ec näytetään, miten korrelaatiokerroin voidaan määrittää ohjelmalla.

KeskiarvoX	165.92
KeskiarvoY	164.44
Sx	4.96588
Sy	7.21156
r	0.49085
ρ	0.43039
Sxx	591.84
VarianssiY	1248.16
Sxy	421.88
R^2	0.24094
SSE	947.43221

Tyttären ja äidin pituuksilla on kohtalainen positiivinen korrelaatio. Tämä johtunee siitä, että pituus riippuu osittain perimästä, mutta ei pelkästään siitä. Lisäksi myös isän pituus vaikuttaa lapsen pituuteen.

Vastaus: $r \approx 0{,}49$