HARJOITUSKOE

H1. **a)** Täydennetään taulukko.

tulos	frekvenssi	summafrekvenssi	suhteellinen frekvenssi	suhteellinen summafrekvenssi
0–4	5	5	$\frac{5}{20}^{(5} = \frac{1}{4} = 25\ \%$	25 %
5–9	8	5 + 8 = 13	$\frac{8}{20}^{(4} = \frac{2}{5} = 40\ \%$	$\frac{13}{20} = 65\ \%$
10–14	4	13 + 4 = 17	$\frac{4}{20}^{(4} = \frac{1}{5} = 20\ \%$	$\frac{17}{20} = 85\ \%$
15–19	2	17 + 2 = 19	$\frac{2}{20}^{(2} = \frac{1}{10} = 10\ \%$	$\frac{19}{20} = 95\ \%$
20–24	1	19 + 1 = 20	$\frac{1}{20} = 5\ \%$	100 %

Vastaus:

tulos	frekvenssi	summafrekvenssi	suhteellinen frekvenssi	suhteellinen summafrekvenssi
0–4	5	5	25 %	25 %
5–9	8	13	40 %	65 %
10–14	4	17	20 %	85 %
15–19	2	19	10 %	95 %
20–24	1	20	5 %	100 %

b) Alle 10 leukaa vetäneet kuuluvat kahteen ensimmäiseen luokkaan, joiden osuus nähdään luokan 5–9 suhteellisen summafrekvenssin arvosta 65 %.

Vastaus: 65 %

c) Ainakin 5 mutta alle 20 leukaa vetäneet kuuluvat toiseen, kolmanteen ja neljänteen luokkaan, joiden yhteenlasketut suhteelliset frekvenssit ovat 40 % + 20 % + 10 % = 70 %.

Vastaus: 70 %

H2. **a)** Elokuvia on yhteensä $2 + 3 = 5$. Ensimmäiselle elokuvalle on 5 vaihtoehtoa, toiselle 4 ja niin edelleen.
Tuloperiaatteen mukaan järjestysten määrä on $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Ira voi katsoa elokuvat 120:ssä eri järjestyksessä.

Vastaus: 120 järjestyksessä

b) Jos komediat katsotaan ensin, ensimmäiselle elokuvalle on 2 vaihtoehtoa ja toiselle 1. Kolmas elokuva on jännityselokuva, ja sille on 3 vaihtoehtoa. Neljännelle on 2 ja viimeiselle 1 vaihtoehto.
Tuloperiaatteen mukaan järjestysten määrä on $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.

Ira voi katsoa elokuvat 12:ssä eri järjestyksessä.

Vastaus: 12 järjestyksessä

c) Ensimmäiselle elokuvalle on 5 vaihtoehtoa ja toiselle 4. Kahden elokuvan jonojen määrä on siis $5 \cdot 4 = 20$. Kaksi elokuvaa voi kuitenkin olla kummassa tahansa järjestyksessä, joten kahden elokuvan jonojen määrässä on laskettu jokainen elokuvapari kahteen kertaan.
Elokuvapareja on siis $\frac{20}{2} = 10$.

Vaihtoehtoisesti viidestä elokuvasta kaksi voidaan valita $\binom{5}{2} = 10$ eri tavalla.

Ira voi valita elokuvat 10:llä eri tavalla.

Vastaus: 10 tavalla

H3. Järjestetään aineistot suuruusjärjestykseen.

A 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4
B 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 5, 6
C 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5

Aineiston A moodi on Mo = 1, joten aineisto A ja tunnusluku II kuuluvat yhteen.

Aineiston B mediaani on lukujen 2 ja 4 keskiarvo eli $\mathrm{Md} = \frac{2+4}{2} = 3$.
Siis aineisto B ja tunnusluku III kuuluvat yhteen.

Aineiston C keskiarvo on $\bar{x} = \frac{1+1+2+2+2+3+4+5}{8} = \frac{20}{8}^{(4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$,
joten aineisto C ja tunnusluku I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: III ja C: I

H4. **a)** Sovelletaan geometrista todennäköisyyttä ja käytetään mittana sektorin keskuskulmaa.

Haittasektoreiden yhteenlaskettu keskuskulma on 8 · 15° = 120°
Koko ympyrän keskuskulma on 360°.

Pelaaja osuu haitta sektoriin todennäköisyydellä
$P(\text{osuu haittasektoriin}) = \frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$.

Pelaaja saa jatkaa kierrosta, jos hän ei osu haitta sektoriin, joka on osumisen vastatapahtuma.

$$\begin{aligned} P(\text{saa jatkaa kierrosta}) &= 1 - P(\text{osuu haittasektoriin}) \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}666... \approx 0{,}67 \end{aligned}$$

Vastaus: $\frac{2}{3} = 0{,}67$

b) Kertolaskusäännön mukaan pelaaja saa jatkaa pyörittämistä kolmesti, jos 1. pyöräytys ei osu haittasektoriin ja 2. pyöräytys ei osu haittasektoriin. 3. pyöräytys tulee, kunhan 2 ensimmäistä eivät keskeytä vuoroa.

Käytetään a-kohdan todennäköisyyttä apuna.
P(saa jatkaa pyörittämistä kolmesti)
= P(saa jatkaa)^2
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}=0,4444...\approx 0,44$$

Todennäköisyys sille, että pyörittämistä saa jatkaa kolmesti, on $\frac{4}{9}\approx 0,44$.

Vastaus: $\frac{4}{9}\approx 0,44$

c) Erikoiskierroksella ainakin yksi pyöräytys osuu haittasektoriin, jos pyöräytyksistä osuu haittasektoriin 1, 2 tai 3. Tapahtuman vastatapahtuma on ”ei yksikään osu haittasektoriin”.

Lasketaan todennäköisyys vastatapahtuman ja a-kohdan avulla.
P(yksikään pyöräytys ei osu haittasektoriin)
= P(1. ei osu ja 2. ei osu ja 3. ei osu)
= P(pyöräytys ei osu haittasektoriin)^3
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

P(ainakin yksi pyöräytys osuu haittasektoriin)
= 1 – P(yksikään pyöräytys ei osu haittasektoriin)
$$=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}=0,703\approx 0,70$$

Todennäköisyys sille, että ainakin yksi pyöräytys osuu haittasektoriin, on $\frac{19}{27}\approx 0,70$.

Vastaus: $\frac{19}{27}\approx 0,70$.

H5. Lasketaan kunkin henkilön todennäköisyys saada lyhyt tikku.

$P(\text{Ada saa lyhyen tikun}) = \dfrac{1}{4}$

Elin saa lyhyen tikun, jos Ada vetää ensin jonkin kolmesta pitkästä tikusta ja sen jälkeen Elin vetää kolmesta jäljellä olevasta tikusta ainoan lyhyen.

$$\begin{aligned}
&P(\text{Elin saa lyhyen tikun})\\
&= P(\text{Ada saa pitkän ja Elin lyhyen tikun})\\
&= P(\text{Ada saa pitkän}) \cdot P(\text{Elin saa lyhyen})\\
&= \frac{{}^{1}\cancel{3}}{4} \cdot \frac{1}{{}_{1}\cancel{3}}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Joona saa lyhyen tikun, jos Ada vetää ensin jonkin kolmesta pitkästä tikusta, ja sen jälkeen Elin kolmesta jäljellä olevasta tikusta jommankumman pitkän, ja sen jälkeen Joona vetää kahdesta jäljellä olevasta tikusta ainoan lyhyen.

$$\begin{aligned}
&P(\text{Joona saa lyhyen tikun})\\
&= P(\text{Ada ja Elin saavat pitkän ja Joona lyhyen tikun})\\
&= P(\text{Ada saa pitkän}) \cdot P(\text{Elin saa pitkän}) \cdot P(\text{Joona saa lyhyen})\\
&= \frac{{}^{1}\cancel{3}}{4} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}_{1}\cancel{3}} \cdot \frac{1}{{}_{1}\cancel{2}}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Kasper saa lyhyen tikun, jos Ada vetää ensin jonkin kolmesta pitkästä tikusta, ja sen jälkeen Elin kolmesta jäljellä olevasta tikusta jommankumman pitkän, ja sen jälkeen Joona vetää kahdesta jäljellä olevasta tikusta ainoan pitkän, ja sen jälkeen Kasper vetää jäljellä olevan tikun.

$$\begin{aligned}
&P(\text{Kasper saa lyhyen tikun})\\
&= P(\text{kolme muuta saavat pitkän ja Kasper lyhyen})\\
&= P(\text{Ada saa pitkän}) \cdot P(\text{Elin saa pitkän})\\
&\quad \cdot P(\text{Joona saa pitkän}) \cdot P(\text{Kasper saa lyhyen})\\
&= \frac{{}^{1}\cancel{3}}{4} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}_{1}\cancel{3}} \cdot \frac{1}{{}_{1}\cancel{2}} \cdot \frac{1}{1}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Vastaus: Kaikilla on yhtä suuri todennäköisyys.

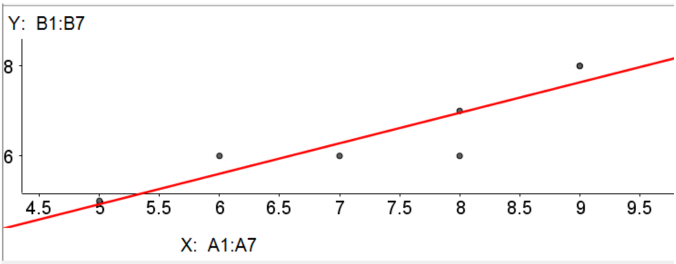
H6. **a)** Analysoidaan aineisto.

Tuomarin A antamien arvosanojen keskiarvo on 7,428… ≈ 7,4 ja tuomarin B antamien arvosanojen keskiarvo 6,571… ≈ 6,6.

Vastaus: A: $\overline{x}$ ≈ 7,4 ja B: $\overline{x}$ ≈ 6,6

KeskiarvoX	7.4285714286
KeskiarvoY	6.5714285714
Sx	1.511857892
Sy	1.133893419
r	0.9027777778
ρ	0.9337145191
Sxx	13.7142857143
VarianssiY	7.7142857143
Sxy	9.2857142857

b) Suoran yhtälö saadaan ohjelman avulla.



$y = 0.6770833333\,x + 1.5416666667$

Ohjelma antaa suoran yhtälöksi y = 0,6770…x + 1,5416… ja korrelaatiokertoimeksi r = 0,902… ≈ 0,90.

Vastaus: y = 0,68x + 1,54; r ≈ 0,90

c) Määritetään tuomarin B luultavasti antama arvosana ohjelman avulla.

$y = 0.6770833333\,x + 1.5416666667$

Tarkka arvo: x = 10 y = 8.3125

Kun tuomari A antaa arvosanan 10, antaa tuomari B mallin mukaan arvosanan 8,3125 ≈ 8.

Vastaus: arvosanan 8

H7. **a)** P(asepalveluksen suorittaja sairastuu)

$$=\frac{5}{30\ 000}=0{,}000166...\approx 0{,}00017\ =0{,}017\ \%$$

Satunnainen asepalveluksen suorittaja sairastuu aivokalvontulehdukseen todennäköisyydellä 0,017 %.

Vastaus: 0,017 %

b) P(muu kuin asepalveluksen suorittaja sairastuu)

$$=\frac{50-5}{5\ 500\ 000-30\ 000}$$

$$=\frac{45}{5\ 470\ 000}$$

$$=0{,}000\ 008\ 226...$$

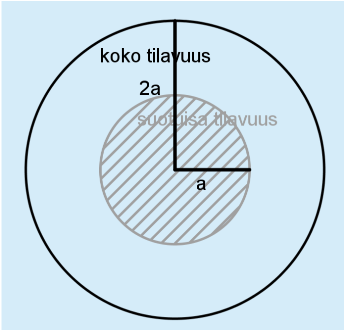
Lasketaan, kuinka moninkertainen asepalveluksen suorittajan sairastumisriski on tähän verrattuna.

$$\frac{0{,}000\,166...}{0{,}000\ 008\ 226...}=20{,}259...$$

Asepalveluksen suorittajan sairastumisriski on muuhun väestöön nähden 20,259… ≈ 20-kertainen.

Vastaus: n. 20-kertainen

H8. Kyseessä on geometrinen todennäköisyys, jossa mittana on tilavuus. Piste on lähempänä pallon pintaa kuin sen keskipistettä, jos piste ei ole pallon sisällä olevan samankeskisen pienemmän pallon sisällä.
Merkitään pienemmän pallon sädettä kirjaimella a.
Tällöin ison pallon säde on $2a$.



Koko pallon tilavuus on

$$\frac{4\pi\cdot(2a)^3}{3}=\frac{4\pi\cdot 2^3a^3}{3}=\frac{4\pi\cdot 8a^3}{3}=\frac{32\pi a^3}{3}.$$

Sisällä olevan pienemmän pallon tilavuus on $\frac{4\pi a^3}{3}$.

Lasketaan suotuisa tilavuus eli ison ja pienen pallon tilavuuksien erotus.

$$\frac{32\pi a^3}{3}-\frac{4\pi a^3}{3}=\frac{28\pi a^3}{3}$$

Kysytty todennäköisyys on
P(piste on lähempänä pallon pintaa kuin keskipistettä)

$$=\frac{\frac{28\pi a^3}{3}}{\frac{32\pi r^3}{3}}$$

$$=\frac{28\pi r^3}{3}:\frac{32\pi r^3}{3}$$

$$=\frac{28\pi r^3}{3}\cdot\frac{3}{32\pi r^3}$$

$$=\frac{28^{(4}}{32}$$

$$=\frac{7}{8}$$

$$=0{,}875$$

$$\approx 0{,}88.$$

Piste on lähempänä pallon pintaa kuin keskipistettä todennäköisyydellä $\frac{7}{8}\approx 0{,}88$.

Vastaus: $\frac{7}{8}\approx 0{,}88$