

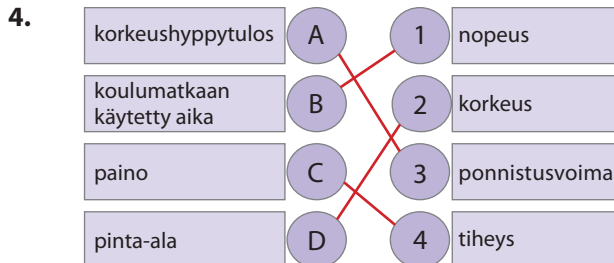
1.

Funktio

1. esim.
- a) Ruokaostosten hinta riippuu niiden määrästä.
 - b) Hypyn näyttävyys riippuu harjoittelun määrästä.
 - c) Viestin kirjoittamiseen kuluva aika riippuu viestin merkkimäärästä.
 - d) Vaatetelineen vähimmäispituus riippuu esillä olevien vaatteiden määrästä.

2. esim.
- Aika riippuu nopeudesta.
 - Hinta riippuu lukumäärästä.
 - Pinta-ala riippuu pituudesta.
 - Paino riippuu tilavuudesta.
 - Matka riippuu ajasta.
 - Pituus riippuu lämpötilasta.

3. a) tomaattien kilohinnasta
b) Mitä korkeampi kilohinta on, sitä vähemmän tomaatteja saa.



5. esim.
- a) huoneiden lämpötilasta, lämmitysmuodosta
 - b) moottorin kuutiotilavuudesta, ajotavasta
 - c) päällystysmateriaalista, pinta-alasta
 - d) laatikon koosta, hiekan tiheydestä
6. esim.
- a) täyden ämpärin paino, hiekkakakun suuruus
 - b) arvosana, tehdyn työn määrä
 - c) verhojen hinta, 100 €:lla saatavan laudan määrä
 - d) harrastukset, juoksulenkin pituus

7.

Funktio- merkintä	Kirjain, jolla funktioita on merkitty	Kirjain, jolla muuttujaa on merkitty
$f(x) = 3x - 2$	f	x
$g(a) = a^2 + 4a$	g	a
$h(s) = 9s$	h	s

8. esimerkiksi $h(b) = 2b + 1$

9. a) $2 \text{ kg} \cdot 3 \text{ €/kg} = 6 \text{ €}$

b) $10 \text{ kg} \cdot 3 \text{ €/kg} = 30 \text{ €}$

c) $x \text{ kg} \cdot 3 \text{ €/kg} = 3x \text{ €}$

10. a) A: $p = 4s$

b) D: $A = s^2$

11. a) Syötetty luku kerrotaan kolmella.

b) Syötettyyn lukuun lisätään kaksi.

12. a) $1 \rightarrow \text{🐡} \rightarrow 1 = 2 \cdot 1 - 1$

$2 \rightarrow \text{🐡} \rightarrow 3 = 2 \cdot 2 - 1$

$3 \rightarrow \text{🐡} \rightarrow 5 = 2 \cdot 3 - 1$

$5 \rightarrow \text{🐡} \rightarrow 9 = 2 \cdot 5 - 1$

$x \rightarrow \text{🐡} \rightarrow y = 2 \cdot x - 1$

Vastaus: $y = 2x - 1$

b) $1 \rightarrow \text{🐡} \rightarrow 1 = 1^2$

$2 \rightarrow \text{🐡} \rightarrow 4 = 2^2$

$3 \rightarrow \text{🐡} \rightarrow 9 = 3^2$

$5 \rightarrow \text{🐡} \rightarrow 25 = 5^2$

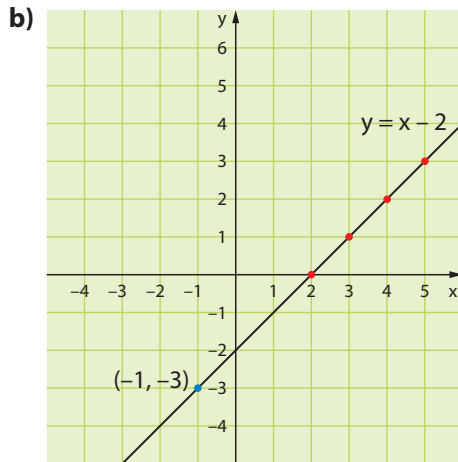
$x \rightarrow \text{🐡} \rightarrow y = x^2$

Vastaus: $y = x^2$

13. a)

x	2	3	4	5
y	0	1	2	3

Vastaus: $y = x - 2$



esimerkiksi:


Pisteen $(-1, -3)$ koordinaatit


noudattavat sääntöä


$y = x - 2$, koska $-3 = -1 - 2$.


Vastaus: noudattavat


14. a)

1 →  → $5 = 2 \cdot 1 + 3$

2 →  → $7 = 2 \cdot 2 + 3$


4 →  → $11 = 2 \cdot 4 + 3$


6 →  → $15 = 2 \cdot 6 + 3$


x →  → $y = 2 \cdot x + 3$


Vastaus: $y = 2x + 3$


b)

1 →  → $1 = -3 \cdot 1 + 4$

2 →  → $-2 = -3 \cdot 2 + 4$

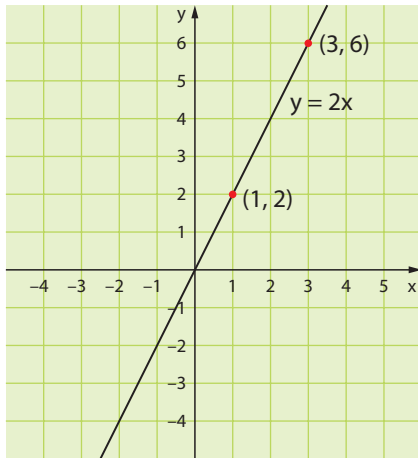
3 →  → $-5 = -3 \cdot 3 + 4$

4 →  → $-8 = -3 \cdot 4 + 4$

x →  → $y = -3 \cdot x + 4$

Vastaus: $y = -3x + 4$

15.



Vastaus: y-koordinaatti saadaan kertomalla x-koordinaatti kahdella eli $y = 2x$.

2.

Funktion arvo

1. $x \rightarrow y = x + 3$
- a) $1 \rightarrow 4 = 1 + 3$
- b) $3 \rightarrow 6 = 3 + 3$
- c) $-2 \rightarrow 1 = -2 + 3$

Vastaus: 4

Vastaus: 6

Vastaus: 1

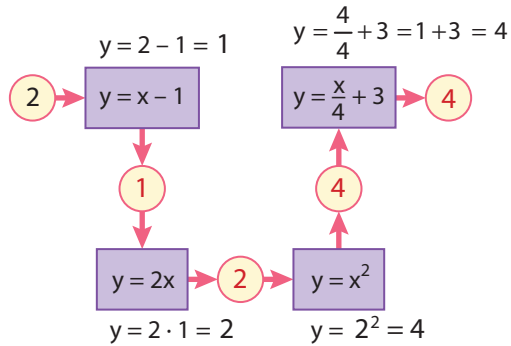
2. a)
- $f(3) = 5$
- ↑ ↑
- muuttujan x arvo funktion arvo

b) $g(-4) = 8$

3. a) $y = x + 5 = 3 + 5 = 8$
- b) $y = -x + 2 = -5 + 2 = -3$
- c) $f(x) = 4x - 3$
 $f(2) = 4 \cdot 2 - 3 = 8 - 3 = 5$
- d) $g(x) = 5x + 1$
 $g(3) = 5 \cdot 3 + 1 = 15 + 1 = 16$

4. $g(x) = \frac{x}{2} - 3$
- a) $g(2) = \frac{2}{2} - 3 = 1 - 3 = -2$
- b) $g(4) = \frac{4}{2} - 3 = 2 - 3 = -1$
- c) $g(10) = \frac{10}{2} - 3 = 5 - 3 = 2$

5.



6. a) $f(x) = 4$ kun $x = 1$ sillä $3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$
b) $f(x) = 1$ kun $x = 0$ sillä $3 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$
c) $f(x) = -2$ kun $x = -1$ sillä $3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$

7. $f(x) = 2x + 1$
a) $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$
b) $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$
c) $f(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 10 + 1 = 11$

8. $h(x) = -2x$
a) $h(1) = -2 \cdot 1 = -2$
b) $h(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$
c) $h\left(1\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot 1\frac{1}{2} = -3$

9. $f(x) = -x^2$
a) $f(2) = -2^2 = -4$
b) $f(-2) = -(-2)^2 = -4$
c) $f(0,3) = -0,3^2 = -0,09$

10. $f(x) = 12x$
 $f(2,5 \text{ cm}) = 12 \cdot 2,5 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$

11. $f(x) = \frac{6}{x}$
a) $f(2) = \frac{6}{2} = 3$
b) $f(-3) = \frac{6}{-3} = -2$
c) $f(0,6) = \frac{6}{0,6} = 10$

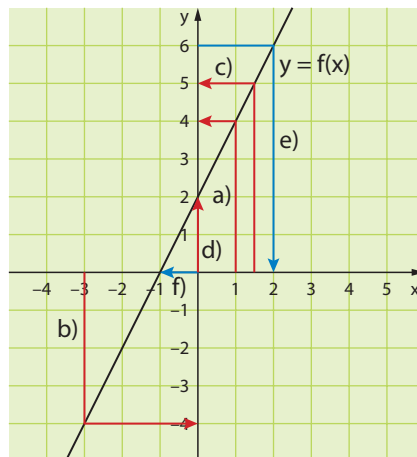
12. $h(x) = x^2 - 2x + 3$
- a) $h(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$
 - b) $h(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$
 - c) $h(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 3 = 9 - 6 + 3 = 6$

13. $f(x) = -x^2 + x$
- a) $f(1) = -1^2 + 1 = -1 + 1 = 0$
 - b) $f(-2) = -(-2)^2 + (-2) = -4 - 2 = -6$
 - c) $f(0,5) = -0,5^2 + 0,5 = -0,25 + 0,5 = 0,25$

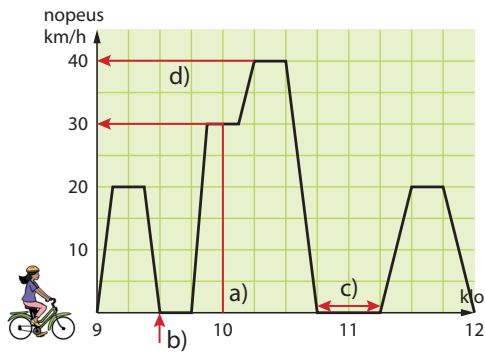
14. $f(x) = 5x^2$
- $f(3,0 \text{ cm}) = 5 \cdot (3,0 \text{ cm})^2 = 5 \cdot 9,0 \text{ cm}^2 = 45 \text{ cm}^2$

15. $f(x) = x - 6$
- a) $x - 6 = 4$
 $x = 4 + 6$
 $x = 10$
 - b) $x - 6 = 0$
 $x = 0 + 6$
 $x = 6$
 - c) $x - 6 = -2$
 $x = -2 + 6$
 $x = 4$

16. a) $f(1) = 4$
 b) $f(-3) = -4$
 c) $f(1,5) = 5$
 d) $f(0) = 2$
 e) $f(x) = 6$, kun $x = 2$
 f) $f(x) = 0$, kun $x = -1$



17. a) 30 km/h
 b) klo 9.30
 c) 30 min
 d) 40 km/h



18. $f(x) = 2x + 3$

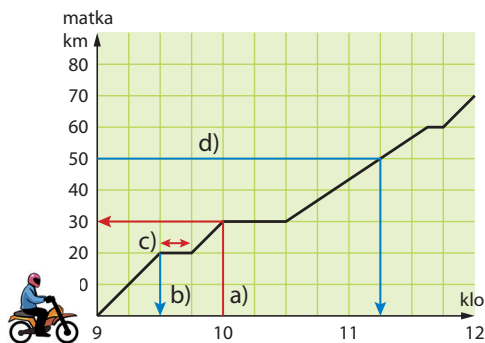
a) $2x + 3 = 7$
 $2x = 7 - 3$
 $2x = 4$ $| : 2$
 $x = 2$

b) $2x + 3 = -1$
 $2x = -1 - 3$
 $2x = -4$ $| : 2$
 $x = -2$

c) $2x + 3 = 0$
 $2x = -3$ $| : 2$
 $x = -1,5$

19. $f(x) = g(x)$
 $x - 4 = -x + 2$
 $x + x = 2 + 4$
 $2x = 6$ $| : 2$
 $x = 3$

20. a) 30 km
 b) klo 9.30
 c) 15 min
 d) klo 11.15



21. $f(x) = x^2$

a) $x^2 = 1$ $|\sqrt{\quad}$
 $x = \pm 1$

b) $x^2 = \frac{1}{4}$ $|\sqrt{\quad}$
 $x = \pm \frac{1}{2}$

c) $x^2 = 0$ $|\sqrt{\quad}$
 $x = 0$

22. $f(x) = g(x)$

$$3x - 6 = -2x + 4$$

$$3x + 2x = 4 + 6$$

$$5x = 10 \quad | :5$$

$$x = 2$$

3.

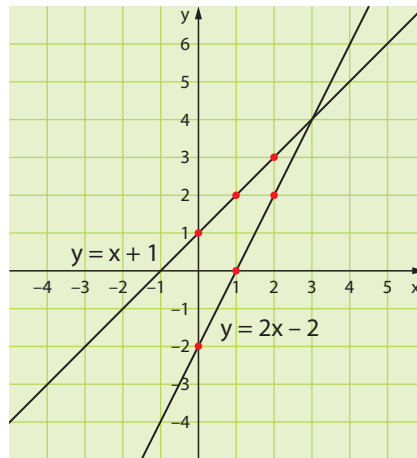
Suoran piirtäminen

1. a), c) ja d) ovat ensimmäistä astetta.
b)-kohdassa x:n eksponentti on 2
2. a ja d, koska kuvaajat ovat suoria.
3. a) $y = x + 1$

x	y
0	1
1	2
2	3

b) $y = 2x - 2$

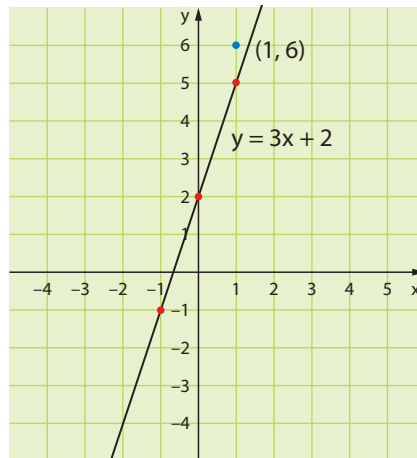
x	y
0	-2
1	0
2	2



4. a) $y = 3x + 2$

x	y
-1	-1
0	2
1	5

- b) Piste (1, 6) ei ole suoralla.
- c) $3 \cdot 2 + 2 = 8$
Piste (2, 8) on suoralla.



5. a) $y = x - 4$

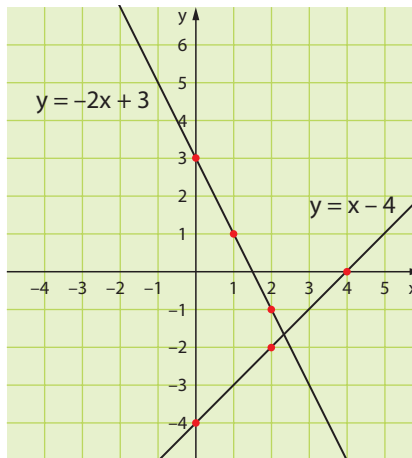
x	y
0	-4
2	-2
4	0

Vastaus: (0, -4)

b) $y = -2x + 3$

x	y
0	3
1	1
2	-1

Vastaus: (0, 3)



6. a) $y = 4x$

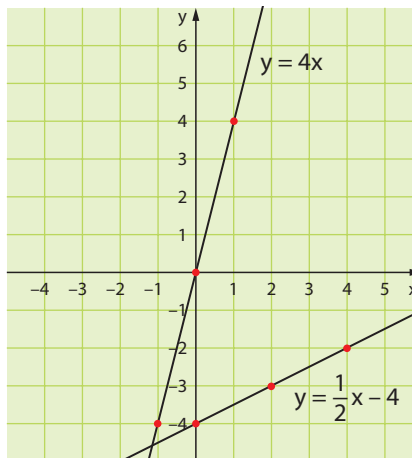
x	y
-1	-4
0	0
1	4

Vastaus: (0, 0)

b) $y = \frac{1}{2}x - 4$

x	y
0	-4
2	-3
4	-2

Vastaus: (0, -4)

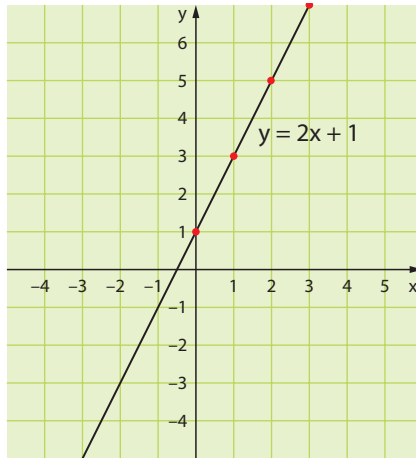


7. $y = 6x - 4$
 $y = 6 \cdot 1 - 4 = 6 - 4 = 2$

Vastaus: Suora $y = 6x - 4$ kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta.

8. a) $y = 2x + 1$
 b)

x	y
0	1
1	3
2	5
3	7



9. a) $y = -3x + 4$

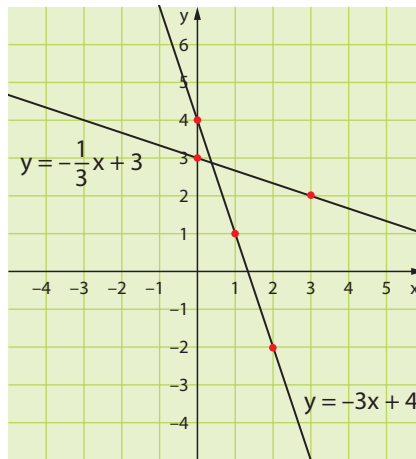
x	y
0	4
1	1
2	-2

Vastaus: $(0, 4)$

b) $y = -\frac{1}{3}x + 3$

x	y
0	3
3	2
6	1

Vastaus: $(0, 3)$



10. $y = -\frac{2}{5}x + 2$

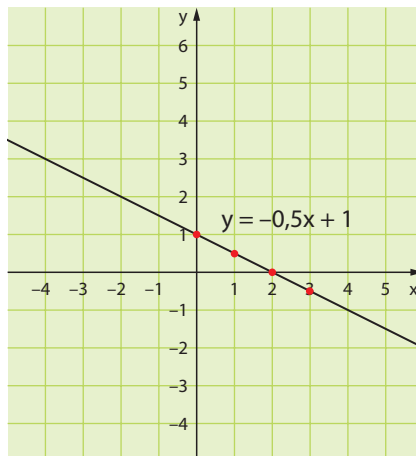
$$y = -\frac{2}{5} \cdot 5 + 2 = -2 + 2 = 0$$

Vastaus: Suora $y = -\frac{2}{5}x + 2$ kulkee pisteen $(5, 0)$ kautta.

11. a) $y = -0,5x + 1$

b)

x	y
0	1
1	0,5
2	0
3	-0,5



12. Suoran yhtälö on $y = kx + b$.

k on kulmakerroin, b on vakiotermi.

a) $k = 4, b = 3$

b) $k = -3, b = 4$

c) $k = -1, b = -1$

d) $k = 2, b = -3$

e) $k = 2, b = 0$

f) $k = -1, b = 0$

13. a) a ja c

b) b, d ja e

14. a) $k = 3 > 0$, nouseva

b) $k = -9 < 0$, laskeva

c) $k = -1 < 0$, laskeva

d) $k = 1 > 0$, nouseva

15. a) $y = 3x + 3$

b) $y = -9x + 3$

16. a) $(0, -3)$
 b) $(0, 4)$
 c) $(0, 0)$
 d) $(0, 9)$

17. yhdensuuntaisia, kun yhtälöillä sama kulmakerroin:

Vastaus: a ja e, b ja f

leikkaavat y-akselin samassa pisteessä, kun yhtälöillä sama vakiotermi:

Vastaus: a ja c, d ja f

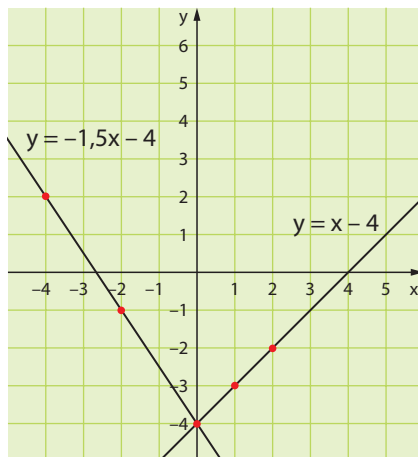
18. a) yksi; erilainen kulmakerroin
 b) yksi; erilainen kulmakerroin
 c) ei yhtään; yhdensuuntaiset eri suorat
 d) ei yhtään; yhdensuuntaiset eri suorat
 e) yksi; erilainen kulmakerroin

19. a) $y = x - 4$

x	y
0	-4
1	-3
2	-2

- b) $y = -1,5x - 4$

x	y
0	-4
-2	-1
-4	2

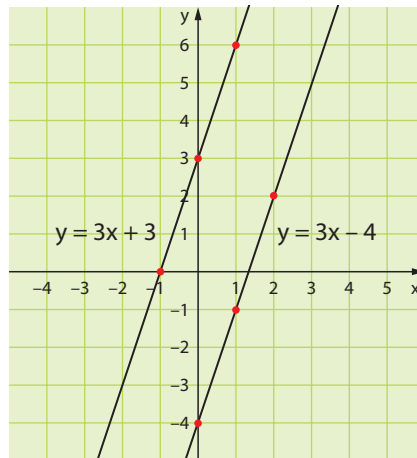


20. a) $y = 3x - 4$

x	y
0	-4
1	-1
2	2

b) $y = 3x + 3$

x	y
0	3
1	6
-1	0

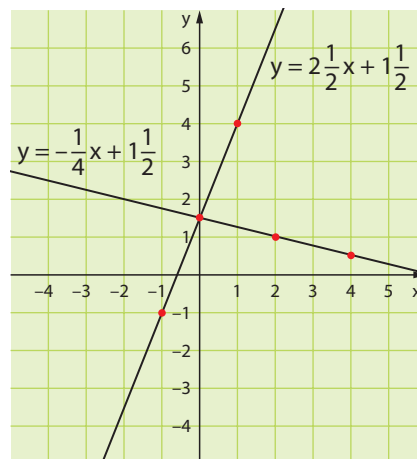


21. a) $y = -\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}$

x	y
0	1,5
2	1
4	0,5

b) $y = 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

x	y
0	1,5
1	4
-1	-1

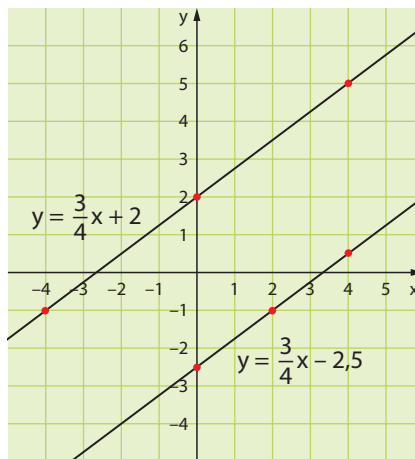


22. a) $y = \frac{3}{4}x + 2$

x	y
0	2
4	5
-4	-1

b) $y = \frac{3}{4}x - 2,5$

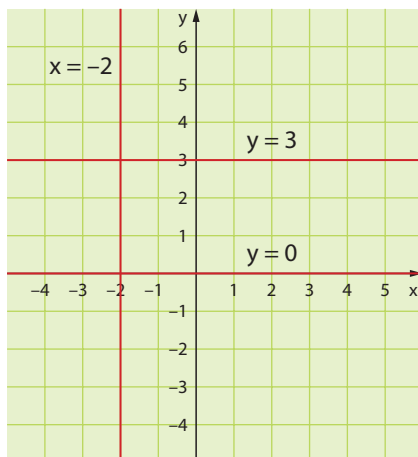
x	y
0	-2,5
2	-1
4	0,5



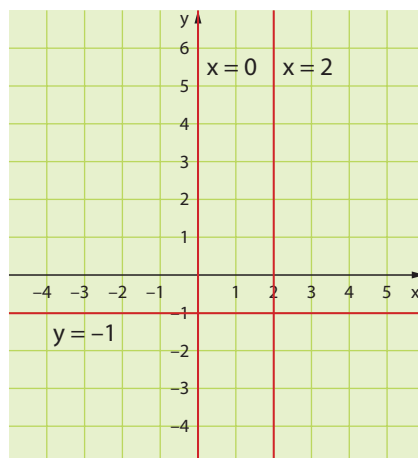
4.

Akselien suuntaiset suorat

1. a) $y = 3$, vaakasuora
b) $x = -2$, pystysuora
c) $y = 0$, vaakasuora



2. a) $x = 2$, pystysuora
b) $y = -1$, vaakasuora
c) $x = 0$, pystysuora



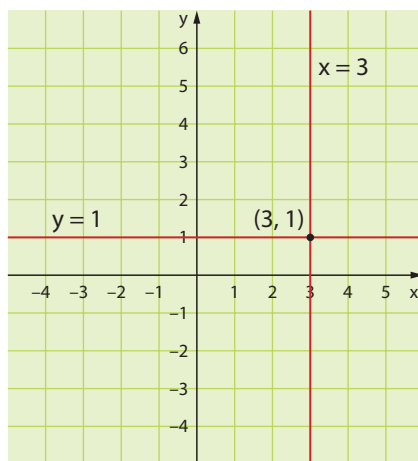
3. a) $y = 0$
b) $x = 0$

4. a) $x = 6$
b) $y = 4$
c) $x = -1$
d) $y = -5$

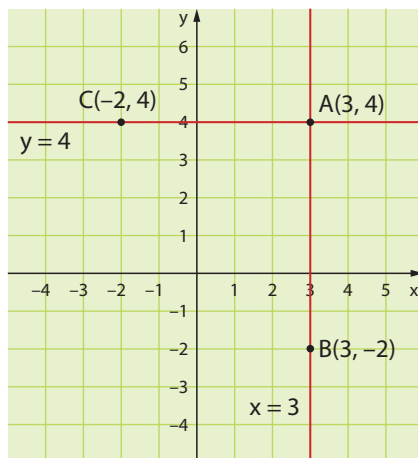
5.

Suora	Nouseva	Laskeva	x-akselin suuntainen	y-akselin suuntainen
$y = 8x - 7$	×			
$y = 8$			×	
$y = -8x$		×		
$x = -8$				×
$y = -7$			×	
$y = x$	×			

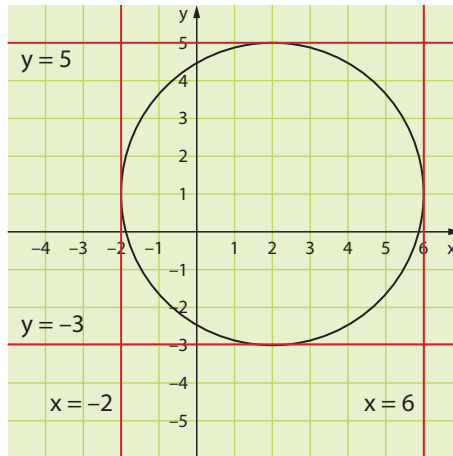
6. a) $y = 1$
b) $x = 3$



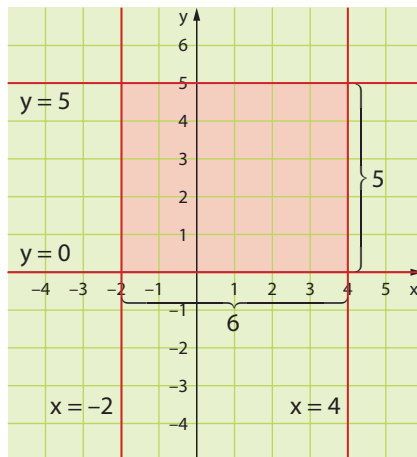
7. a) $x = 3$
b) $y = 4$



8. a) $y = 5$ ja $y = -3$
 b) $x = -2$ ja $x = 6$

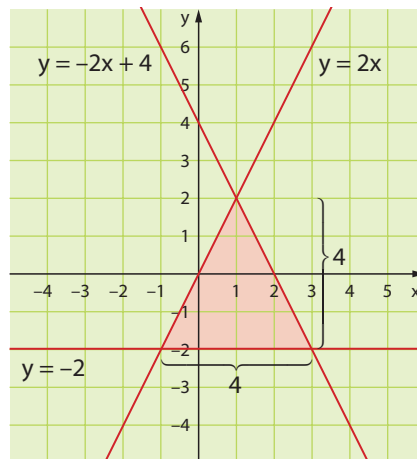


9.



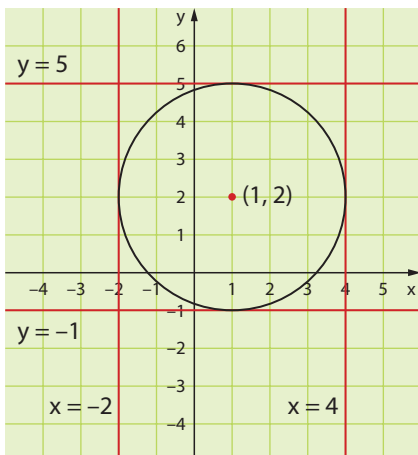
$6 \cdot 5 = 30$
 Vastaus: 30

10.



$A = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$
 Vastaus: 8

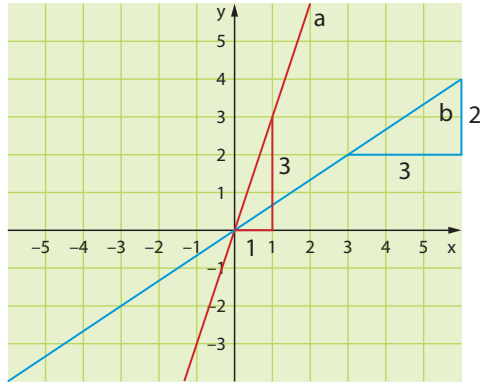
11. a) $y = 5$ ja $y = -1$
b) $x = -2$ ja $x = 4$



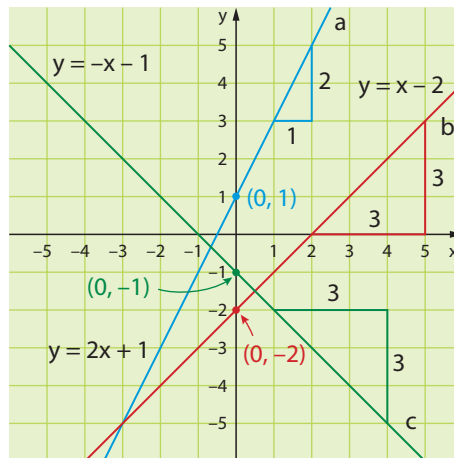
5.

Suoran yhtälön määrittäminen

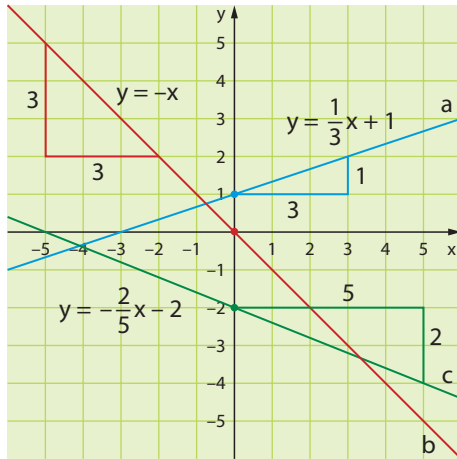
1. a) $k = \frac{3}{1} = 3$
 b) $k = \frac{2}{3}$



2. a) $k = \frac{2}{1} = 2$
 (0, 1)
 b) $k = \frac{3}{3} = 1$
 (0, -2)
 c) $k = -\frac{3}{3} = -1$
 (0, -1)



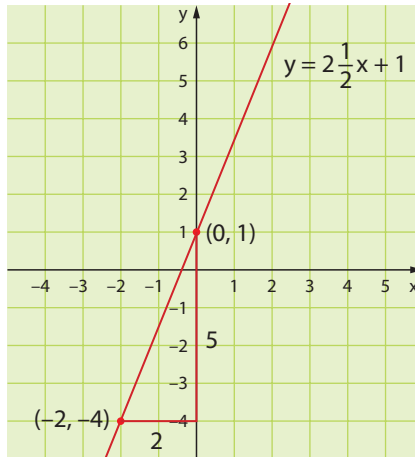
3.



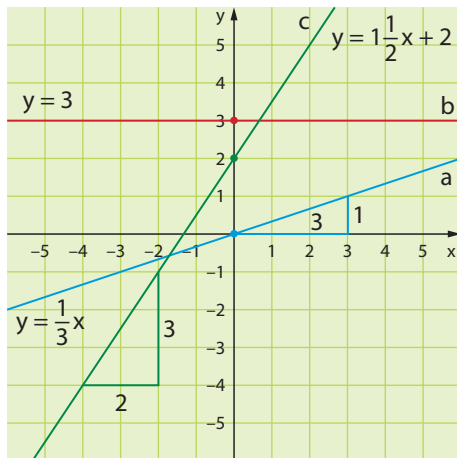
- | | | | |
|------------------|-------------------------|----------|----------------------------------|
| a) | $k = \frac{1}{3}$ | $b = 1$ | Vastaus: $y = \frac{1}{3}x + 1$ |
| b) laskeva suora | $k = -\frac{3}{3} = -1$ | $b = 0$ | Vastaus: $y = -x$ |
| c) laskeva suora | $k = -\frac{2}{5}$ | $b = -2$ | Vastaus: $y = -\frac{2}{5}x - 2$ |

4.

- a) $k = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$
 b) $b = 1$
 c) $y = 2\frac{1}{2}x + 1$



5.



a) $k = \frac{1}{3}$ $b = 0$

Vastaus: $y = \frac{1}{3}x$

b) vaakasuora

Vastaus: $y = 3$

c) $k = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ $b = 2$

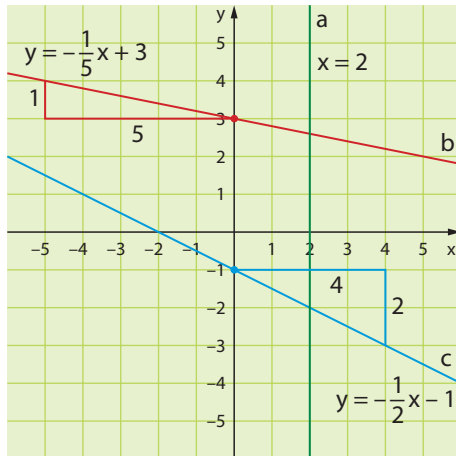
Vastaus: $y = 1\frac{1}{2}x + 2$

6. origon kautta kulkeva suora $\rightarrow b = 0$
 $y = kx$

Piste (1, 3) on suoran piste. $\rightarrow 3 = k \cdot 1$
 $3 = k$

Vastaus: $k = 3$

7.



a) pystysuora

Vastaus: $x = 2$

b) laskeva suora

$$k = -\frac{1}{5}$$

b = 3

Vastaus: $y = -\frac{1}{5}x + 3$

c) laskeva suora

$$k = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

b = -1

Vastaus: $y = -\frac{1}{2}x - 1$ 8. a) $k = 3, b = 2$ Vastaus: $y = 3x + 2$ b) $k = -5, b = -3$ Vastaus: $y = -5x - 3$ 9. s: suoran $y = 3x + 4$ suuntainen $\rightarrow k = 3$
kulkee pisteen $(0, 0)$ kautta $\rightarrow b = 0$ Vastaus: $y = 3x$ k: suoran $y = 3x + 4$ suuntainen $\rightarrow k = 3$
kulkee pisteen $(0, -4)$ kautta $\rightarrow b = -4$ Vastaus: $y = 3x - 4$ 10. $(1, 2) \rightarrow y$ saa arvon 2 x :n arvolla 1, kulmakerroin $k = 2$
Sijoitetaan arvot suoran yhtälöön $y = kx + b$.a) $2 = 2 \cdot 1 + b$

$$2 = 2 + b$$

$$2 - 2 = b$$

$$0 = b$$

Vastaus: $b = 0$ c) $k = 2$ ja $b = 0$ Vastaus: $y = 2x$

11. Suora on annetun suoran suuntainen. $\rightarrow k = \frac{2}{3}$

Kulkee pisteen $(-2, 5)$ kautta $\rightarrow y$ saa arvon 5 x :n arvolla -2 .

Sijoitetaan arvot suoran yhtälöön $y = kx + b$.

$$5 = -2 \cdot \frac{2}{3} + b$$

$$5 = -\frac{4}{3} + b \quad | \cdot 3$$

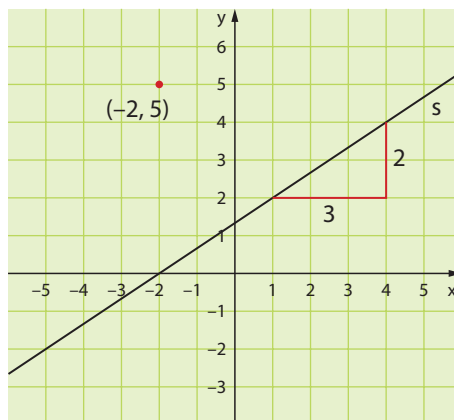
$$15 = -4 + 3b$$

$$15 + 4 = 3b$$

$$19 = 3b \quad | :3$$

$$b = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$$

$$\text{Vastaus: } y = \frac{2}{3}x + 6\frac{1}{3}$$



12. suoran $y = -0,5x + 4$ suuntainen $\rightarrow k = -0,5$

kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta $\rightarrow b = 1$

Vastaus: $y = -0,5x + 1$

13. suoran $y = 2x$ suuntainen $\rightarrow k = 2$

kulkee pisteen $(0, 5)$ kautta $\rightarrow b = 5$

Vastaus: $y = 2x + 5$

14. a: suoran $y = 2x + 3$ suuntainen $\rightarrow k = 2$

kulkee pisteen $(0, 6)$ kautta $\rightarrow b = 6$

Vastaus: $y = 2x + 6$

- c: suoran $y = 2x + 3$ suuntainen $\rightarrow k = 2$

kulkee pisteen $(0, -3)$ kautta $\rightarrow b = -3$

Vastaus: $y = 2x - 3$

- 15.** kulmakerroin $k = -2$
Kulkee pisteen $(2, -3)$ kautta $\rightarrow y$ saa arvon -3 x :n arvolla 2 .
Sijoitetaan arvot suoran yhtälöön $y = kx + b$.

$$-3 = -2 \cdot 2 + b$$

$$-3 = -4 + b$$

$$4 - 3 = b$$

$$1 = b$$

Suoran yhtälö on $y = -2x + 1$.

Sijoitetaan pisteen $(-2, 5)$ x -koordinaatti yhtälöön.

$$y = -2 \cdot (-2) + 1$$

$$y = 4 + 1$$

$$y = 5$$

Vastaus: Piste $(-2, 5)$ on kyseisellä suoralla.

- 16. a)** $k = 3, b = 1$ Vastaus: $y = 3x + 1$

b) kulmakerroin $k = 3$

Suoran piste $(-1, -6)$ $\rightarrow y$ saa arvon -6 x :n arvolla -1 .

Sijoitetaan arvot suoran yhtälöön $y = kx + b$.

$$-6 = 3 \cdot (-1) + b$$

$$-6 = -3 + b$$

$$-6 + 3 = b$$

$$-3 = b$$

Vastaus: $y = 3x - 3$

- 17.** suoran $y = -\frac{3}{5}x - 1$ suuntainen $\rightarrow k = -\frac{3}{5}$

Kulkee pisteen $(-4, 1)$ kautta $\rightarrow y$ saa arvon 1 x :n arvolla -4 .

Sijoitetaan arvot suoran yhtälöön $y = kx + b$.

$$1 = -\frac{3}{5} \cdot (-4) + b$$

$$1 = \frac{12}{5} + b \quad | \cdot 5$$

$$5 = 12 + 5b$$

$$5 - 12 = 5b$$

$$-7 = 5b \quad | : 5$$

$$-\frac{7}{5} = b$$

$$b = -1\frac{2}{5}$$

Vastaus: $y = -\frac{3}{5}x - 1\frac{2}{5}$

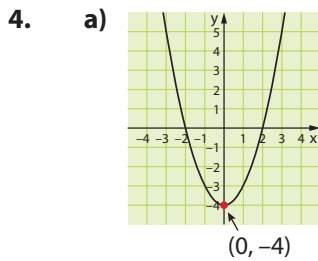
6.

Paraabeli

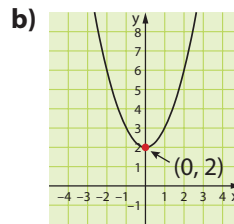
1.
 - a) x :n eksponentti on 3. → käyrä
 - b) x :n eksponentti on 1. → suora
 - c) x :n eksponentti on 2. → käyrä
 - d) x :n eksponentti on 1. → suora

2. x :n eksponentin pitää olla 2.
Vastaus: B, D ja G

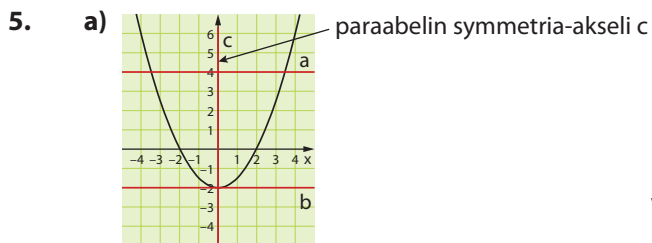
3.
 - a) $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$
 - b) $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$
 - c) $f(3) = 2 \cdot 3^2 + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 18 + 1 = 19$
 - d) $f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 18 + 1 = 19$



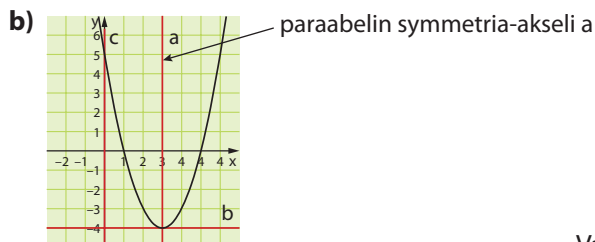
Vastaus: (0, -4)



Vastaus: (0, 2)



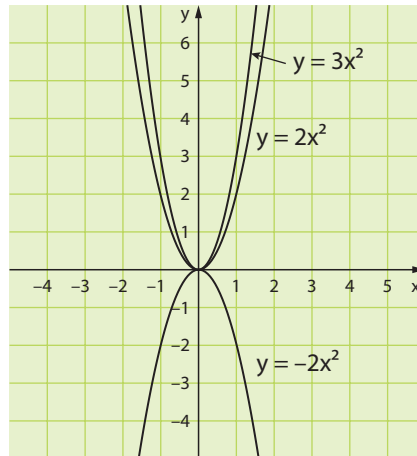
Vastaus: c



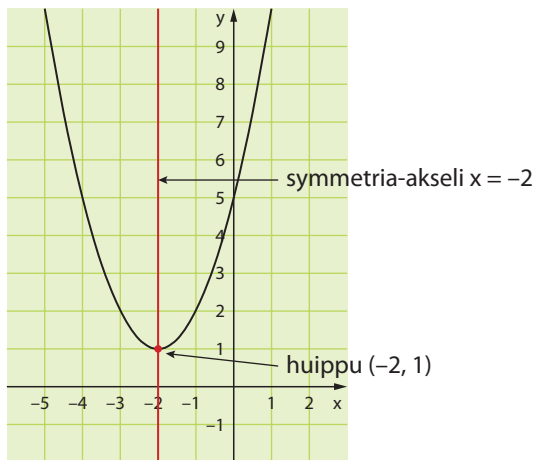
Vastaus: a

6. a) b) c)

- d) negatiivinen kerroin
→ huippu on ylhäällä
pienempi kertoimen itseisarvo
→ leveämpi paraabeli



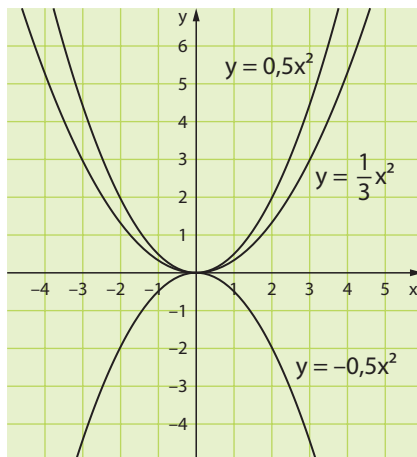
7.



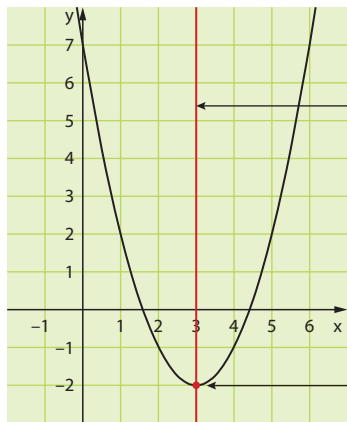
a) (-2, 1)

b) $x = -2$

8. a) b) c)



9. a) b)



Symmetria-akseli $x = 3$
on paraabelin akseli.

huipun koordinaatit $(3, -2)$

a) $(3, -2)$

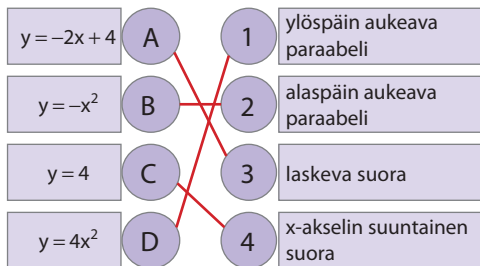
b) $x = 3$

10. a) kerroin $14 > 0 \rightarrow$ ylöspäin

b) kerroin $-8 < 0 \rightarrow$ alaspäin

c) kerroin $7 > 0 \rightarrow$ ylöspäin

11.



12. a) B

x^2 -termin kertoimen itseisarvo on suurin. $|7| = 7$

b) D

x^2 -termin kertoimen itseisarvo on pienin. $|0,5| = 0,5$

c) A ja C

x^2 -termien kertoimien itseisarvot ovat samat. $|2| = |-2| = 2$

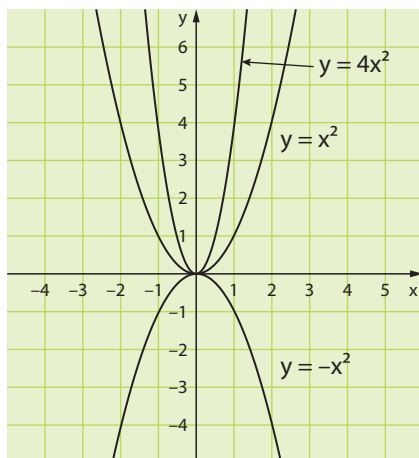
13. Paraabelin $y = ax^2 + c$ huippu on pisteessä $(0, c)$.

a) $(0, -6)$

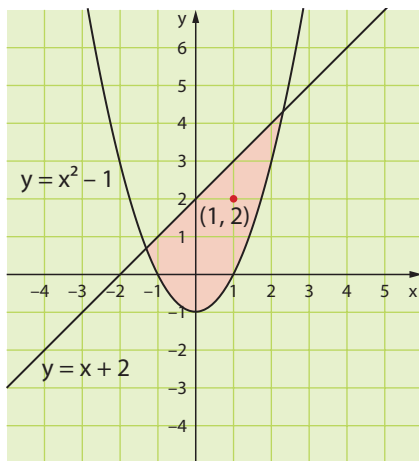
b) $(0, 2)$

c) $(0, 0)$

14. a) b) c)

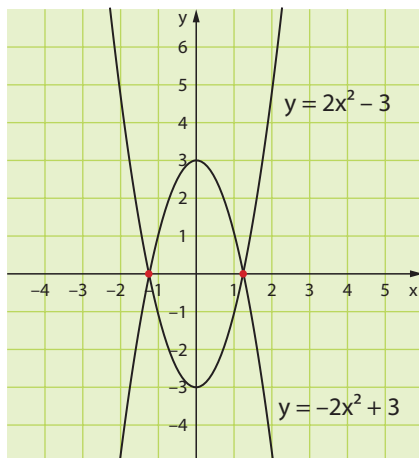


15. a)



b) on

16. a) b)



c) $(1, 2; 0)$ ja $(-1, 2; 0)$

17. $y = ax^2 + c$

huippu pisteessä $(0, -1) \rightarrow c = -1$

Paraabeli kulkee pisteen $(4, 3)$ kautta. $\rightarrow 3 = a \cdot 4^2 - 1$

$$3 = 16a - 1$$

$$16a = 3 + 1$$

$$16a = 4$$

| : 16

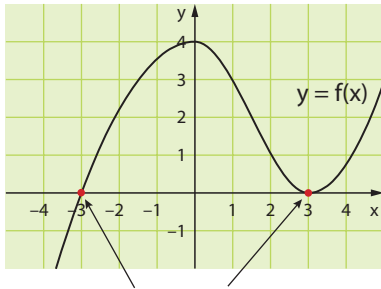
$$a = \frac{1}{4}$$

Vastaus: $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

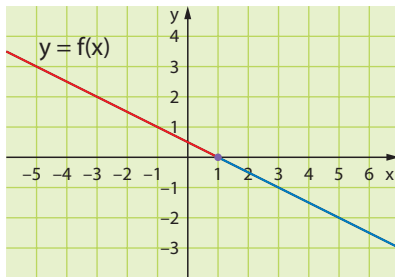
7.

Funktion ominaisuuksia

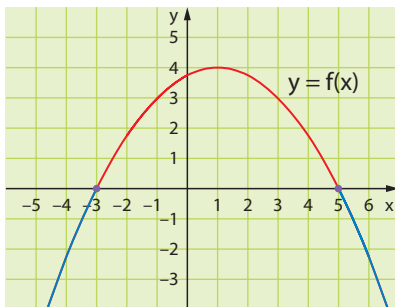
1.

Vastaus: $x = -3$ ja $x = 3$

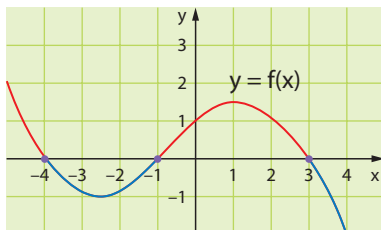
2.

a) $x = 1$ b) $x < 1$ c) $x > 1$

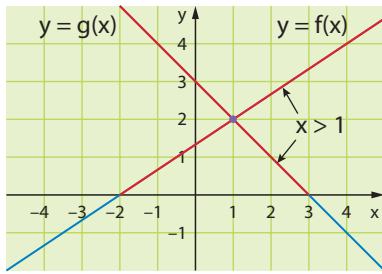
3.

a) $x = -3$ tai $x = 5$ b) $-3 < x < 5$ c) $x < -3$ tai $x > 5$

4.

a) $x = -4, x = -1$ tai $x = 3$ b) $x < -4$ tai $-1 < x < 3$ c) $-4 < x < -1$ tai $x > 3$

5.



- a) $x > -2$
- b) $x > 3$
- c) $x = 1$
- d) $x > 1$

6.

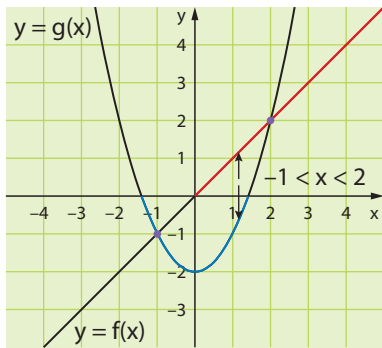
a) $y = x - 5 = 0$
 $x = 5$

Vastaus: $x = 5$

b) $y = 4x + 8 = 0$
 $4x = -8 \quad | :4$
 $x = -2$

Vastaus: $x = -2$

7.



- a) $x > 0$
- b) $-1,5 < x < 1,5$
- c) $x = -1$ tai $x = 2$
- d) $-1 < x < 2$

8.

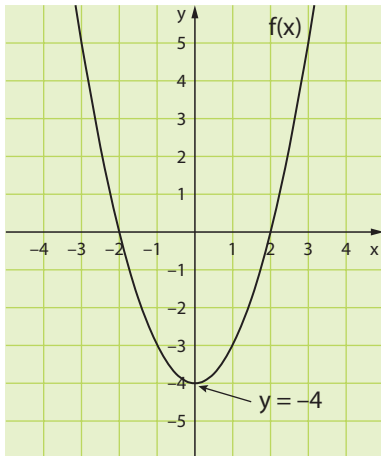
a) $y = -2x - 6 = 0$
 $-2x = 6 \quad | :(-2)$
 $x = -3$

Vastaus: $x = -3$

b) $y = x^2 - 9 = 0$
 $x^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$
 $x = \pm 3$

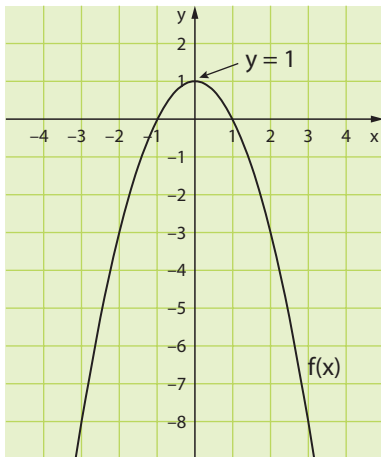
Vastaus: $x = \pm 3$

9.



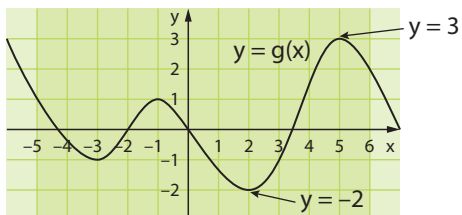
Vastaus: $y = -4$

10.



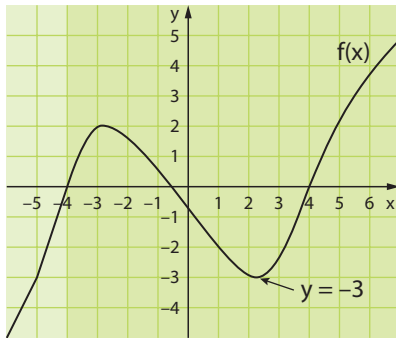
- a) $y = 1$
- b) ei ole

11.



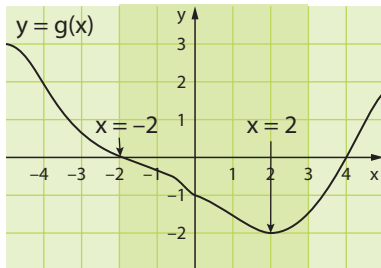
Vastaus: Suurin arvo on 3 ja pienin arvo -2 .

12.



Vastaus: Suurinta arvoa ei ole ja pienin arvo on -3 .

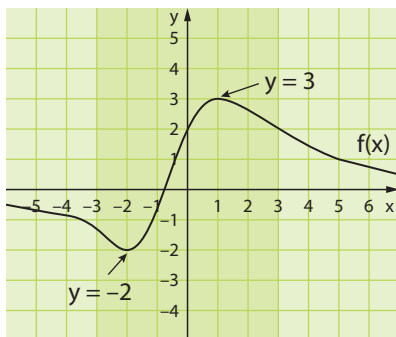
13.



a) Vastaus: suurin arvo x :n arvolla -2 ja pienin arvo x :n arvolla 2

b) Vastaus: suurinta arvoa ei ole ja pienin arvo x :n arvolla 2

14.

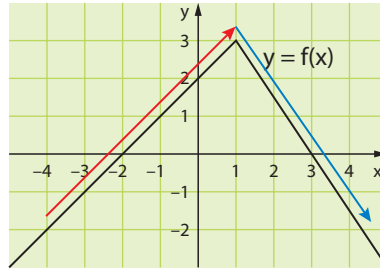


Vastaus: Suurin arvo on 3 ja pienin arvo -2 .

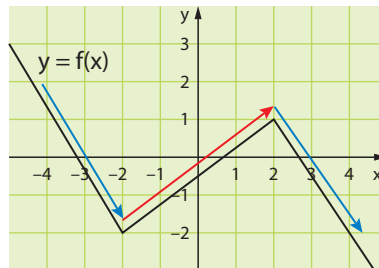
8.

Kasvava ja vähenevä funktio

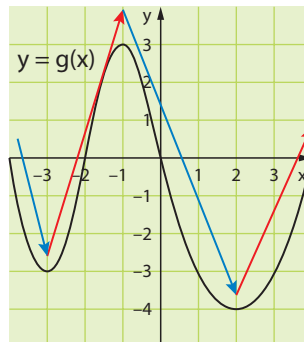
1. a) $x \leq 1$
b) $x \geq 1$



2. a) $-2 \leq x \leq 2$
b) $x \leq -2$ tai $x \geq 2$

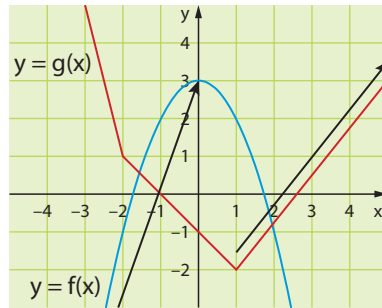


3. a) $-3 \leq x \leq -1$ tai $x \geq 2$
b) $x \leq -3$ tai $-1 \leq x \leq 2$



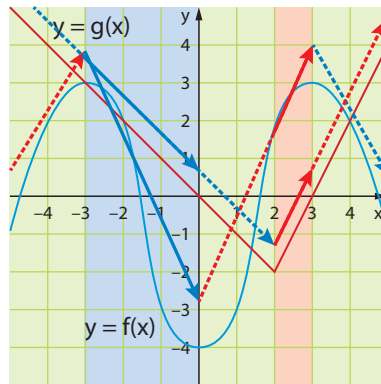
4. a) Funktion $f(x) = 3x - 4$ kuvaaja on nouseva suora, koska kulmakerroin on positiivinen.
Vastaus: kaikilla x :n arvoilla
- b) Funktion $g(x) = x^2 + 2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on pisteessä $(0, 2)$.
Vastaus: $x \geq 0$

5. a) $x \leq 0$
 b) $x \geq 1$



6. a) Funktion $f(x) = -\frac{3}{5}x + 0,7$ kuvaaja on laskeva suora,
 koska kulmakerroin on negatiivinen.
 Vastaus: ei millään x :n arvolla
 b) Funktion $g(x) = 0,5x^2 - 1,5$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli,
 jonka huippu on pisteessä $(0; -1,5)$.
 Vastaus: $x \geq 0$

7. a) $2 \leq x \leq 3$
 b) $-3 \leq x \leq 0$



9.

Kertaus

1.

$$g(a) = 3a - 6$$

↑ ↙ ↘
funktio muuttuja

a) Muuttuja on **a**.

b) Funktio on **g**.

2.

$$f(2) = 5$$

↑ ↙ ↘
muuttujan arvo funktion arvo

a) Muuttujan arvo on **2**.

b) Funktion arvo on **5**.

3.

a) Syötetyn luvun arvoon lisätään viisi.

b) Syötetyn luvun arvo kerrotaan kymmenellä.

4.

$$f(x) = 3x + 2$$

a) $f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 3 + 2 = 5$

b) $f(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 9 + 2 = 11$

c) $f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2$

5.

a) $x + 4 = 7$

$$x = 7 - 4$$

$$x = 3$$

b) $x + 4 = 10$

$$x = 10 - 4$$

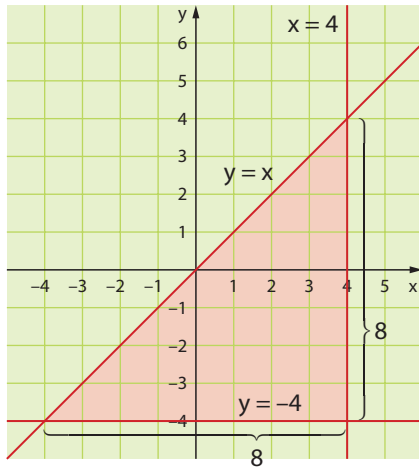
$$x = 6$$

c) $x + 4 = 3$

$$x = 3 - 4$$

$$x = -1$$

6.



$$A = \frac{8 \cdot 8}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

Vastaus: 32

7. Sijoitetaan $x = 3$ ja $y = 6$ yhtälöön $y = 12x - 30$:

$$6 = 12 \cdot 3 - 30$$

$$6 = 36 - 30$$

$$6 = 6 \quad \text{tosi}$$

Vastaus: kulkee

8. $k = 4$

kulkee pisteen $(0, -2)$ kautta, joten $b = -2$

Vastaus: $y = 4x - 2$

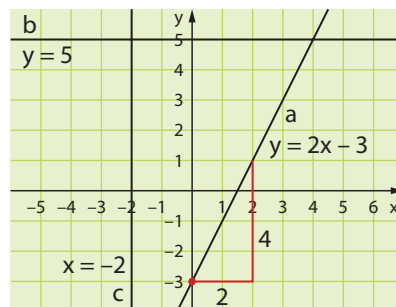
9. a: $k = \frac{4}{2} = 2$

$$b = -5$$

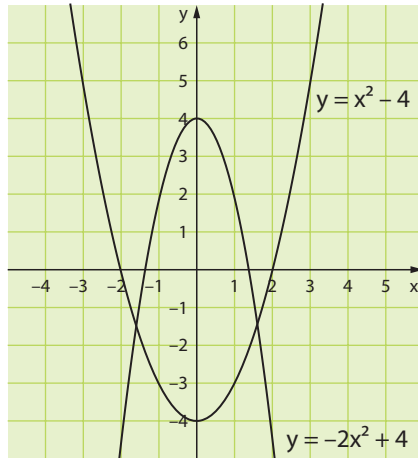
$$y = 2x - 3$$

b: $y = 5$

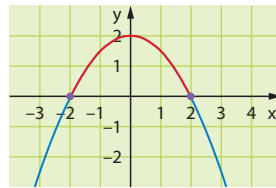
c: $x = -2$



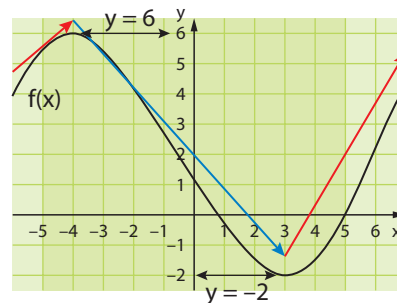
10. a) $y = x^2 - 4$
 b) $y = x^2 - 4$



11. a) $x = -2$ tai $x = 2$
 b) $-2 < x < 2$
 c) $x < -2$ tai $x > 2$



12. a) 6
 b) -2
 c) $x \leq -4$ tai $x \geq 3$
 d) $-4 \leq x \leq 3$



13. $h(n) = 5n - 8$
 ↑ ↙ ↘
 funktio muuttuja
 a) Muuttuja on n .
 b) Funktio on h .

14. $f(-4) = 12$
 ↑ ↘
 muuttujan arvo funktion arvo
 a) Muuttuja on -4 .
 b) Funktion arvo on 12 .

15. a)

$$1 \rightarrow \text{fish} \rightarrow 8 = 2 \cdot 1 + 6$$

$$2 \rightarrow \text{fish} \rightarrow 10 = 2 \cdot 2 + 6$$

$$3 \rightarrow \text{fish} \rightarrow 12 = 2 \cdot 3 + 6$$

$$5 \rightarrow \text{fish} \rightarrow 16 = 2 \cdot 4 + 6$$

$$x \rightarrow \text{fish} \rightarrow y = 2x + 6$$

Vastaus: $y = 2x + 6$

b)

$$1 \rightarrow \text{fish} \rightarrow 2 = 1^2 + 1$$

$$2 \rightarrow \text{fish} \rightarrow 5 = 2^2 + 1$$

$$3 \rightarrow \text{fish} \rightarrow 10 = 3^2 + 1$$

$$5 \rightarrow \text{fish} \rightarrow 26 = 5^2 + 1$$

$$x \rightarrow \text{fish} \rightarrow y = x^2 + 1$$

Vastaus: $y = x^2 + 1$

16. $f(x) = -3x + 2$

a) $f(1) = -3 \cdot 1 + 2 = -3 + 2 = -1$

b) $f(-3) = -3 \cdot (-3) + 2 = 9 + 2 = 11$

c) $f(0) = -3 \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2$

17. $f(x) = 2x - 8$

a) $2x - 8 = 0$

$$2x = 8 \quad | :2$$

$$x = 4$$

b) $2x - 8 = 10$

$$2x = 10 + 8$$

$$2x = 18 \quad | :2$$

$$x = 9$$

c) $2x - 8 = 3$

$$2x = 3 + 8$$

$$2x = 11 \quad | :2$$

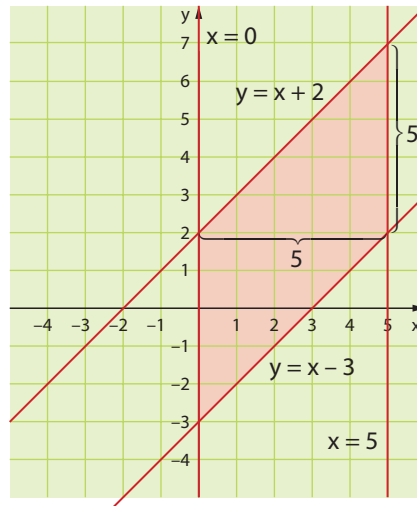
$$x = 5,5$$

18. a) $f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 1 + 3 = 4$

b) $f(2) - g(3) = 2^2 - 3 \cdot 2 - [3^2 - 2 \cdot 3 + 1]$
 $= 4 - 6 - [9 - 6 + 1]$
 $= 4 - 6 - 4 = -6$

c) $x^2 - 3x = x^2 - 2x + 1$
 $x^2 - x^2 - 3x + 2x = 1$
 $-x = 1 \quad | :(-1)$
 $x = -1$

19. $A = 5 \cdot 5 = 25$
Vastaus: 25



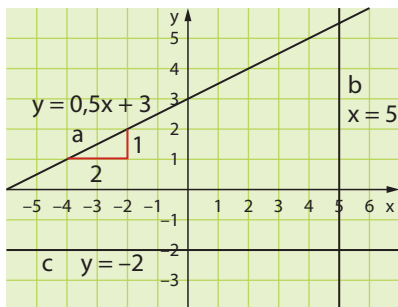
20. Sijoitetaan $x = -3$ ja $y = 6$ yhtälöön $y = -12x - 30$.
 $6 = -12 \cdot (-3) - 30$
 $6 = 36 - 30$
 $6 = 6$ tosi

Vastaus: kulkee

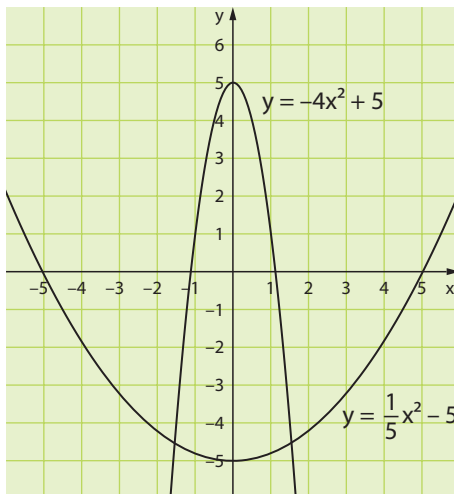
21. $k = 0,7$
Sijoitetaan $k = 0,7$, $x = 5$ ja $y = 3$ yhtälöön $y = kx + b$.
 $3 = 0,7 \cdot 5 + b$
 $3 = 3,5 + b$
 $-b = 3,5 - 3$
 $-b = 0,5 \quad | :(-1)$
 $b = -0,5$

Vastaus: $y = 0,7x - 0,5$

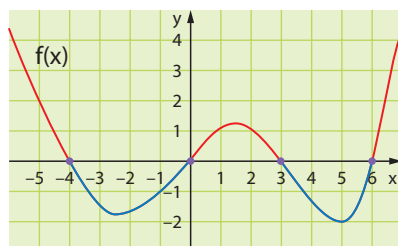
22. a: $k = \frac{1}{2} = 0,5$
 $b = 3$
 $y = 0,5x + 3$
 b: $x = 5$
 c: $y = -2$



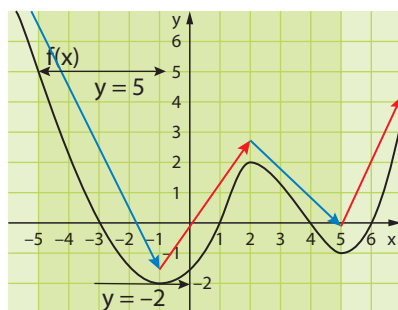
23. a) $y = \frac{1}{5}x^2 - 5$
 b) $y = \frac{1}{5}x^2 - 5$



24. a) $x = -4, x = 0,$
 $x = 3$ tai $x = 6$
 b) $x < -4,$
 $0 < x < 3$ tai $x > 6$
 c) $-4 < x < 0$ tai
 $3 < x < 6$



25. a) 5
 b) -2
 c) $-1 \leq x \leq 2$ tai
 $x \geq 5$
 d) $x \leq -1$ tai
 $2 \leq x \leq 5$

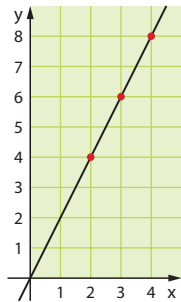


10.

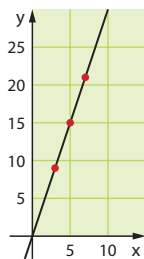
Verrannollisuus koordinaatistossa

1. $f(x)$

2. a) ovat



b) ovat



3. a) $k = \frac{1}{3}$

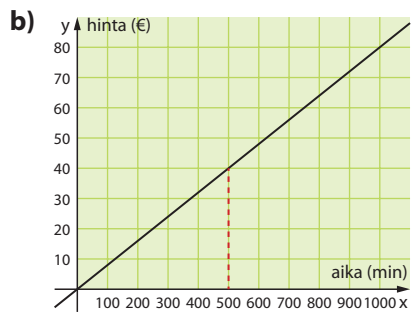
b) $y = \frac{1}{3}x$

4. a) nopeus = $\frac{\text{matka}}{\text{aika}} = \frac{240 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 80 \text{ km/h}$

b) 200 km

c) $\frac{440 \text{ km}}{80 \text{ km/h}} = 5,5 \text{ h}$

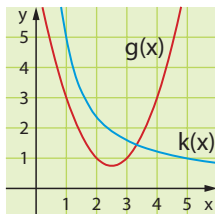
5. a) $y = 0,08x$



c) 500 min

6. $\rho = \frac{m}{V} = \frac{70 \text{ g}}{9 \text{ cm}^3} \approx 7,8 \text{ g/cm}^3$

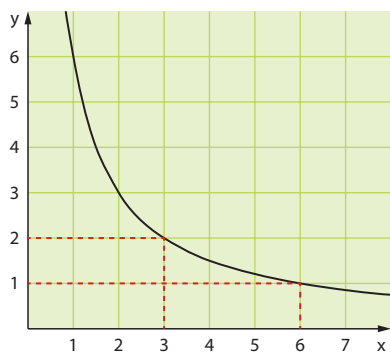
7. $k(x)$



8. a) $y = 2$

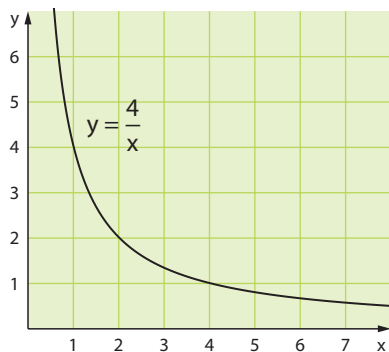
b) $x = 6$

c) $6 \cdot 1 = 6$



9. a) suoraan
 b) kääntäen
 c) ei kumpaakaan
 d) kääntäen
 e) kääntäen
 f) ei kumpaakaan

10. $xy = 4$ eli $y = \frac{4}{x}$



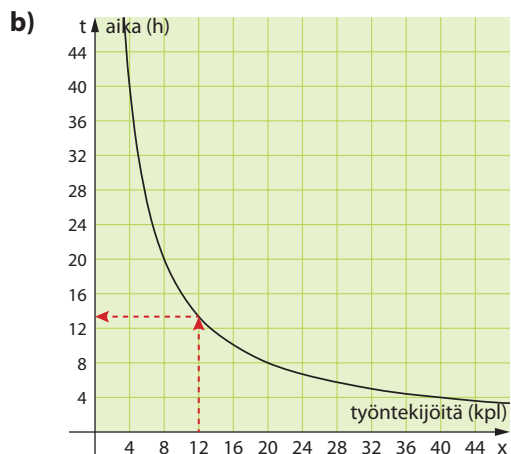
11. a) $s = vt$ $s = 40 \text{ km/h} \cdot 2 \text{ h} = 80 \text{ km}$

b) $v = \frac{80}{t}$

12. a) $A = 6 \text{ m} \cdot 40 \text{ m} = 240 \text{ m}^2$

b) $h = \frac{240}{a}$

13. a) $t = \frac{160}{x}$



c) $t \approx 13 \text{ h}$

11.

Kahden muuttujan yhtälö

1. a) $2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$
 $4 - 3 = 1$
 $1 = 1$ tosi

Vastaus: toteutuu

b) $-2 + 2 \cdot 1 = 0$
 $-2 + 2 = 0$
 $0 = 0$ tosi

Vastaus: toteutuu

2. $2x - y = 4$
A(2, 3)
 $2 \cdot 2 - 3 = 4$
 $4 - 3 = 4$
 $1 = 4$ epätosi

B(-1, 6)
 $2 \cdot (-1) - 6 = 4$
 $-2 - 6 = 4$
 $-8 = 4$ epätosi

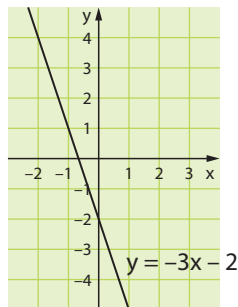
C(0, -4)
 $2 \cdot 0 - (-4) = 4$
 $0 + 4 = 4$
 $4 = 4$ tosi

D(2, 0)
 $2 \cdot 2 - 0 = 4$
 $4 = 4$ tosi

Vastaus: C ja D

3. $x + 2y = 15$

4. $3x + y = -2$
 $y = -3x - 2$



5. a) $x + y = 32$

b) $\frac{x}{y} = 11$

6. $2x + y = 4$

$2x = 4 - y \quad | :2$

$x = \frac{4 - y}{2}$

a) $x = \frac{4 - 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$

b) $x = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

c) $x = \frac{4 - 4}{2} = \frac{0}{2} = 0$

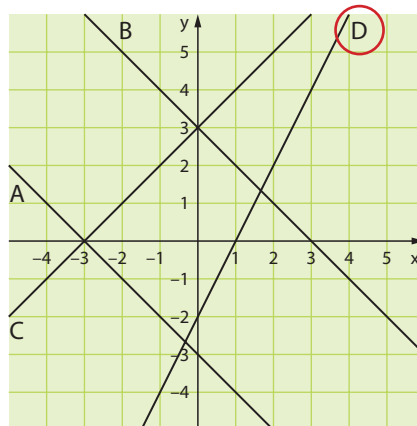
7. a) $x = y + 8$

b) $x + 22 = y$

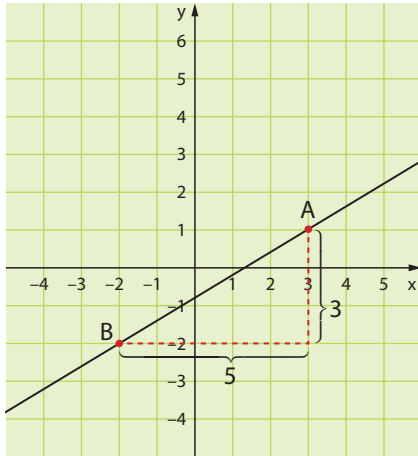
8. $2x - y = 2$

$y = 2x - 2$

Vastaus: D



9.



Suoran kulmakerroin on $\frac{3}{5}$, joten suoran yhtälö on muotoa $y = \frac{3}{5}x + b$.

Ratkaistaan vakiotermi b sijoittamalla yhtälöön esim. pisteen A koordinaatit $x = 3$ ja $y = 1$.

$$1 = \frac{3}{5} \cdot 3 + b$$

$$1 = \frac{9}{5} + b$$

$$b = 1 - \frac{9}{5} = 1 - 1\frac{4}{5} = -\frac{4}{5}$$

Suoran yhtälö on siis $y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$.

10. x on tuolin hinta ja y pöydän hinta.
 $4x + y = 700$

12. Yhtälöpari

1. $x = 1$ ja $y = 2$

a) $y = 5x - 3$
 $2 = 5 \cdot 1 - 3$
 $2 = 5 - 3$
 $2 = 2$ tosi

Vastaus: toteuttaa

b) $y = -2x + 4$
 $2 = -2 \cdot 1 + 4$
 $2 = -2 + 4$
 $2 = 2$ tosi

Vastaus: toteuttaa

c) $\begin{cases} y = 5x - 3 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

Vastaus: toteuttaa

2. a) $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{ll} 1 = 3 \cdot 1 - 2 & 1 = 1 + 1 \\ 1 = 3 - 2 & 1 = 2 \text{ epätosi} \\ 1 = 1 \text{ tosi} & \end{array}$$

Vastaus: ei

b) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x \end{cases}$

$$\begin{array}{ll} 1 = 2 \cdot 1 - 1 & 1 = 1 \text{ tosi} \\ 1 = 2 - 1 & \\ 1 = 1 \text{ tosi} & \end{array}$$

Vastaus: on

$$3. \quad \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x = y \\ 4x = 4 \\ x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{array}{ll} \text{C, koska} & \\ 1 = 2 \cdot 3 - 5 & 1 = 3 \cdot 3 - 8 \\ 1 = 6 - 5 & 1 = 9 - 8 \\ 1 = 1 \text{ tosi} & 1 = 1 \text{ tosi} \end{array}$$

$$5. \quad \begin{cases} 2x = y \\ x + y = 6 \end{cases}, \text{ josta } 3x = 6$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$6. \quad 2x = x + 3, \text{ josta } x = 3 \text{ ja } y = 6$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{array}{l} 2x - 3 \cdot 3 = 1 \\ 2x - 9 = 1 \\ 2x = 10 \quad | :2 \\ x = 5 \end{array}$$

$$\text{Vastaus: } x = 5$$

$$8. \quad \begin{array}{l} \text{esimerkiksi} \\ \begin{cases} 3 - (-1) = 4 \\ 2 \cdot 3 - (-1) = 7 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

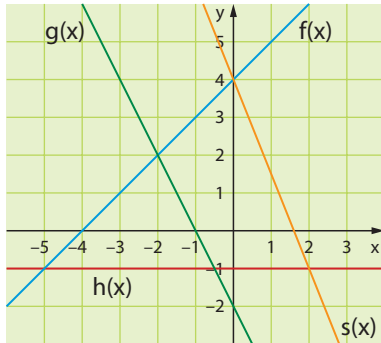
$$9. \quad \begin{cases} y = x \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$x = 2x - 1, \text{ josta } x = 1 \text{ ja } y = 1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

13. Graafinen ratkaiseminen

1.



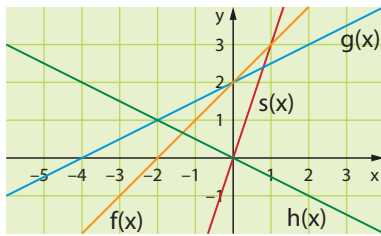
a) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

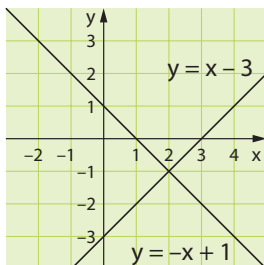
2.



a) $\begin{cases} y = f(x) \\ y = s(x) \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

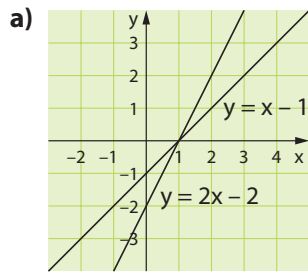
3.



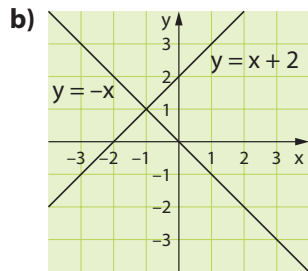
Suorien $y = x - 3$ ja $y = -x + 1$ leikkauspiste on $(2, -1)$.

Vastaus: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

4.

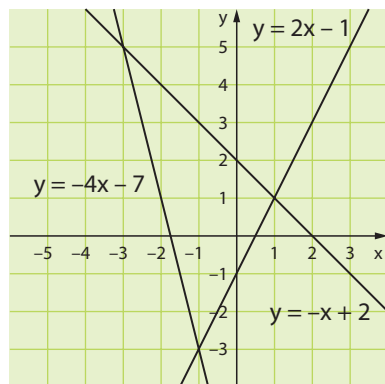


Vastaus: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$



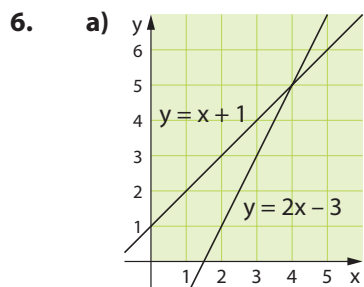
Vastaus: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

5.

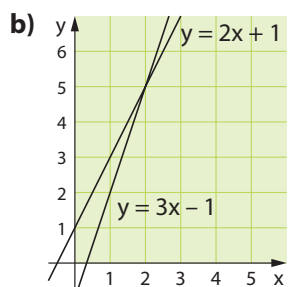


a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

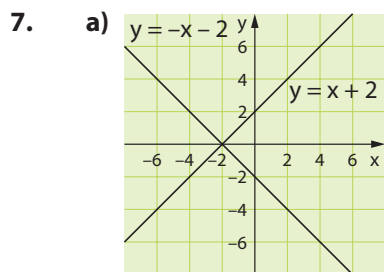
b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$



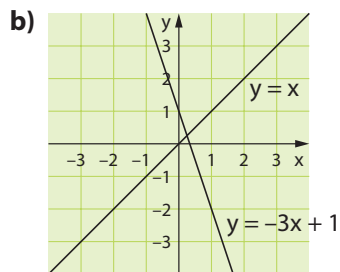
Vastaus: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$



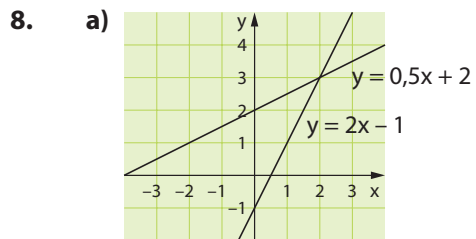
Vastaus: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$



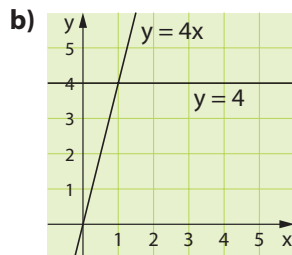
Vastaus: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$



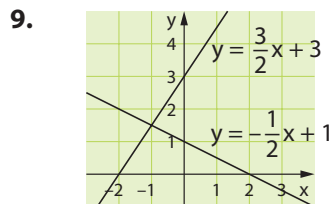
Vastaus: $\begin{cases} x = 0,3 \\ y = 0,3 \end{cases}$



Vastaus: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$



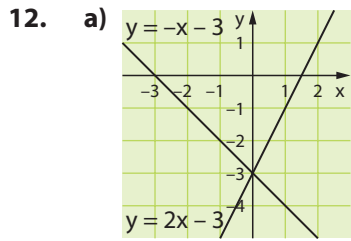
Vastaus: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$



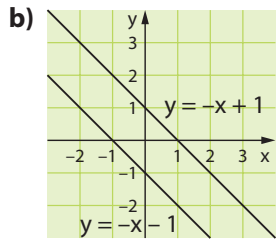
Vastaus: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1,5 \end{cases}$

10. a) yksi ratkaisu
b) ei yhtään ratkaisua

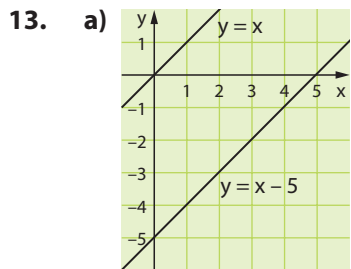
11. a) yksi ratkaisu ($k_1 \neq k_2$)
b) ei yhtään ratkaisua ($k_1 = k_2$ ja $b_1 \neq b_2$)
c) äärettömän monta ratkaisua (suorat ovat samat)
d) yksi ratkaisu ($k_1 \neq k_2$)



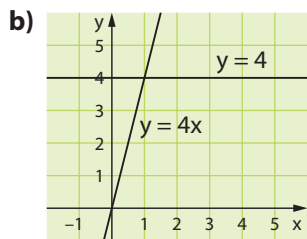
Vastaus: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$



Vastaus: ei ratkaisua



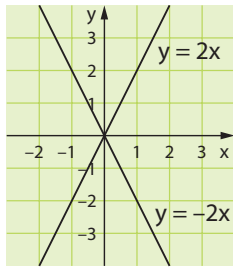
Vastaus: ei ratkaisua



Vastaus: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

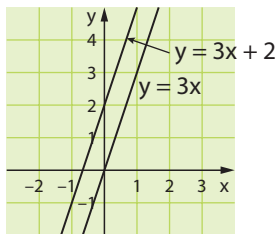
14.

a)



Vastaus:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

b)



Vastaus: ei ratkaisua

15. a) äärettömän monta; samat suorat

b) yksi ratkaisu; eri kulmakerroin, suorat leikkaavat toisensa

16. a) ei yhtään ratkaisua; suorat yhdensuuntaiset

b) ei yhtään ratkaisua; suorat yhdensuuntaiset

17. a) esim.
$$\begin{cases} y = x \\ y = x + 1 \end{cases}$$

b) esim.
$$\begin{cases} y = x \\ y = x \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

a) ei yhtään ratkaisua; $a = -2$ ja $b \neq 1$

b) äärettömän monta ratkaisua; $a = -2$ ja $b = 1$

c) täsmälleen yksi ratkaisu; $a \neq -2$

19. Yhtälöparilla $\begin{cases} y = (3b + 4)x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$ on äärettömän monta ratkaisua,

$$\text{kun } 3b + 4 = -2$$

$$3b = -2 - 4$$

$$3b = -6 \quad | :3$$

$$b = -2$$

Vastaus: $b = -2$

14.

Algerallinen ratkaiseminen

1. a)
$$\begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$
$$2 \cdot 2 + y = 3$$
$$y = 3 - 4$$
$$y = -1$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = 2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$
$$x - 3 \cdot 2 = 1$$
$$x = 1 + 6$$
$$x = 7$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$$

2. a)
$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \end{cases}$$
$$x = -x + 2$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$
$$y = 1$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\quad \quad \quad | : 2$
sijoitus yhtälöön $y = x$

2. b)
$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

$$x - 2 = -x + 4$$

$$x + x = 4 + 2$$

$$2x = 6 \quad | : 2$$

$$x = 3 \quad \text{sijoitus yhtälöön } y = x - 2$$

$$y = 3 - 2$$

$$y = 1$$
Vastaus:
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

3. a)
$$\begin{cases} x = 3y \\ x - y = 18 \end{cases}$$

$$3y - y = 18$$

$$2y = 18 \quad | : 2$$

$$y = 9 \quad \text{sijoitus yhtälöön } x = 3y$$

$$x = 3 \cdot 9$$

$$x = 27$$
Vastaus:
$$\begin{cases} x = 27 \\ y = 9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = y + 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$y + 3 + 2y = 6$$

$$3y = 6 - 3$$

$$3y = 3 \quad | : 3$$

$$y = 1 \quad \text{sijoitus yhtälöön } x = y + 3$$

$$x = 1 + 3$$

$$x = 4$$
Vastaus:
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

4. a)
$$\begin{cases} x = 3y + 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$3y + 1 - 2y = 2$$

$$y = 2 - 1$$

$$y = 1 \quad \text{sijoitus yhtälöön } x = 3y + 1$$

$$x = 3 \cdot 1 + 1$$

$$x = 4$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x = y + 2 \end{cases}$$

$$2(y + 2) - 3y = 1$$

$$2y + 4 - 3y = 1$$

$$-y = 1 - 4$$

$$-y = -3 \quad | :(-1)$$

$$y = 3 \quad \text{sijoitus yhtälöön } x = y + 2$$

$$x = 3 + 2$$

$$x = 5$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x = 4 + 2 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$y = 6 + 3$$

$$y = 9$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \end{cases}$$

6. a)
$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 12 \end{cases}$$

$$2y + y = 12$$

$$3y = 12 \quad | : 3$$

$$y = 4$$

sijoitus yhtälöön $x = 2y$

$$x = 2 \cdot 4$$

$$x = 8$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$x = 2x + 1$$

$$x - 2x = 1$$

$$-x = 1$$

$$x = -1$$

sijoitus yhtälöön $y = x$

$$y = -1$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

7. a)
$$\begin{cases} y = 2x \\ y + 1 = x + 2 \end{cases}$$

$$2x + 1 = x + 2$$

$$2x - x = 2 - 1$$

$$x = 1$$

sijoitus yhtälöön $y = 2x$

$$y = 2 \cdot 1$$

$$y = 2$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$7. \quad \text{b)} \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$y + 1 + 3y = 9$$

$$4y = 9 - 1$$

$$4y = 8$$

$$y = 2$$

| : 4
sijoitus yhtälöön $x = y + 1$

$$x = 2 + 1$$

$$x = 3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} x = 2y \\ x + y = 24 \end{cases}$$

$$2y + y = 24$$

$$3y = 24$$

$$y = 8$$

| : 3
sijoitus yhtälöön $x = 2y$

$$x = 2 \cdot 8$$

$$x = 16$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 16 \\ y = 8 \end{cases}$$

9. a)
$$\begin{cases} y = x - 3 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$2x - (x - 3) = 5$$

$$2x - x + 3 = 5$$

$$x = 5 - 3$$

$$x = 2 \quad \text{sijoitus yhtälöön } y = x - 3$$

$$y = 2 - 3$$

$$y = -1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ x = y - 2 \end{cases}$$

$$4(y - 2) + 2y = 1$$

$$4y - 8 + 2y = 1$$

$$6y = 1 + 8$$

$$6y = 9$$

$$y = 1,5$$

| :6

sijoitus yhtälöön $x = y - 2$

$$x = 1,5 - 2$$

$$x = -0,5$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -0,5 \\ y = 1,5 \end{cases}$$

$$10. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} x + y = 2x - 3 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - x - 3 \\ 3x = 4y \end{cases}$$

$$y = x - 3$$

sijoitus yhtälöön $3x = 4y$

$$3x = 4(x - 3)$$

$$3x = 4x - 12$$

$$3x - 4x = 12$$

$$-x = -12$$

$$x = 12$$

sijoitus yhtälöön $y = x - 3$

$$y = 12 - 3$$

$$y = 9$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 7x - 4y = -5 \\ 2y = x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - 4y = -5 \\ x = 2y - 5 \end{cases}$$

$$7(2y - 5) - 4y = -5$$

$$14y - 35 - 4y = -5$$

$$10y = -5 + 35$$

$$10y = 30 \quad | : 10$$

$$y = 3$$

sijoitus yhtälöön $x = 2y - 5$

$$x = 2 \cdot 3 - 5$$

$$x = 1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

11. a)
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x & = & 6 \\ x & = & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : 2 \\ \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3 + y & = & 4 \\ y & = & 1 \end{array}$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ -2x + 5y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 7y & = & 7 \\ y & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : 7 \\ \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x + 2 \cdot 1 & = & 2 \\ 2x & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

12. a)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 4x & = & 4 \\ x & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : 4 \\ \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot 1 + 2y & = & 1 \\ 3 + 2y & = & 1 \\ 2y & = & -2 \\ y & = & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : 2 \end{array}$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$12. \quad \text{b)} \quad \begin{cases} -2x - 5y = 6 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$$

$$2x = 4 \quad | :2$$

$$x = 2 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$4 \cdot 2 + 5y = -2$$

$$5y = -2 - 8$$

$$5y = -10 \quad | :5$$

$$y = -2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$13. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} x - y = 7 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} -x + y = -7 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

$$2x = 2 \quad | :2$$

$$x = 1 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$1 - y = 7$$

$$-y = 6$$

$$y = -6$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$13. \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -x + 3y = 7 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3x = -3 \\ x = -1 \end{array} \quad | : 3$$

sijoitus alempaan yhtälöön

$$-(-1) + 3y = 7$$

$$1 + 3y = 7$$

$$3y = 6 \quad | : 3$$

$$y = 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$14. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ -2x + y = 2 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3x = 6 \\ x = 2 \end{array} \quad | : 3$$

sijoitus ylempään yhtälöön

$$2 + y = 8$$

$$y = 6$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 6x = 12 \\ x = 2 \end{array} \quad | : 6$$

sijoitus ylempään yhtälöön

$$2 - y = 1$$

$$-y = -1$$

$$y = 1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$15. \quad a) \quad \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - y = 11 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 6x - 2y = 22 \end{cases}$$

$$7x = 28 \quad | : 7$$

$x = 4$ sijoitus ylempään yhtälöön

$$4 + 2y = 6$$

$$2y = 2 \quad | : 2$$

$$y = 1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -4x - 3y = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | \cdot 3 \\ | \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} 9x + 6y = 3 \\ -8x - 6y = 2 \end{cases}$$

$$x = 5 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$9 \cdot 5 + 6y = 3$$

$$45 + 6y = 3$$

$$6y = -42 \quad | : 6$$

$$y = -7$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 5 \\ y = -7 \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} -x - y = -6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$x = 2 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$2 + y = 6$$

$$y = 4$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$17. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \quad \left| \cdot 3 \right.$$

$$\begin{cases} -3x + 3y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$y = 4 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$3x - 2 \cdot 4 = 1$$

$$3x = 9 \quad \left| : 3 \right.$$

$$x = 3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \left| \cdot 2 \right. \\ \left| \cdot 3 \right. \end{array}$$

$$\begin{cases} 4x - 6y = -2 \\ 9x + 6y = 15 \end{cases}$$

$$13x = 13 \quad \left| : 13 \right.$$

$$x = 1 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$3 \cdot 1 + 2y = 5$$

$$3 + 2y = 5$$

$$2y = 2 \quad \left| : 2 \right.$$

$$y = 1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3y = 2x + 6 \\ 2y = 2x + 2 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} 3y = 2x + 6 \\ -2y = -2x - 2 \end{cases}$$

$$y = 4 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$2 \cdot 4 = 2x + 2$$

$$8 = 2x + 2$$

$$2x = 6 \quad | : 2$$

$$x = 3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$19. \text{ a) } \begin{cases} 4x + 2y = 28 \\ y - x = 7 \end{cases} \quad | \cdot 4$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 28 \\ -4x + 4y = 28 \end{cases}$$

$$6y = 56 \quad | : 6$$

$$y = \frac{56}{6} = \frac{28}{3} \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$\frac{28}{3} - x = 7$$

$$x = \frac{28}{3} - 7 = \frac{28}{3} - \frac{21}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \\ y = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$19. \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -6x + 2y = 10 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -12x + 4y = 20 \end{cases}$$

$$-10x = 20 \quad | : -10$$

$$x = -2 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$-6 \cdot (-2) + 2y = 10$$

$$12 + 2y = 10$$

$$2y = -2 \quad | : 2$$

$$y = -1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$20. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 3x - 4y = 13 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} 8x + 4y = 20 \\ 3x - 4y = 13 \end{cases}$$

$$11x = 33 \quad | : 11$$

$$x = 3 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$8 \cdot 3 + 4y = 20$$

$$24 + 4y = 20$$

$$4y = -4 \quad | : 4$$

$$y = -1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$20. \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 6x - 5y - 10 = 0 & | \cdot 2 \\ 4x - 3y - 10 = 0 & | \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x - 10y = 20 \\ -12x + 9y = -30 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} -y = -10 \\ y = 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : (-1) \\ \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{array}$$

$$6x - 5 \cdot 10 - 10 = 0$$

$$6x = 50 + 10$$

$$6x = 60 \quad | : 6$$

$$x = 10$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$21. \quad \text{Kun } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \text{ niin}$$

$$\begin{cases} a + 2b = -1 \\ -a - 4b = 3 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} 2a + 4b = -2 \\ -a - 4b = 3 \end{cases}$$

$$a = 1 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$1 + 2b = -1$$

$$2b = -2 \quad | : 2$$

$$b = -1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

22. a)
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 3 \end{cases}$$
$$x + 3 = 10$$
$$x = 7$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = 5 \\ x - 4 = y \end{cases}$$
$$5 - 4 = y$$
$$y = 1$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

23. a)
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 7 - x \end{cases}$$
$$x + 7 - x = 7$$

$$7 = 7 \text{ identtisesti tosi}$$

Vastaus: Yhtälöparin ratkaisuna ovat suoran $y = -x + 7$ pisteet.

b)
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 2 - x \end{cases}$$
$$x + 2 - x = 7$$

$$2 = 7 \text{ identtisesti epätosi}$$

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

24. a)
$$\begin{cases} 4x + y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$4x + (-1) = 3$$

$$4x - 1 = 3$$

$$4x = 4 \quad | :4$$

$$x = 1$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ y = 3x \end{cases}$$

$$x + 3x = 20$$

$$4x = 20 \quad | :4$$

$$x = 5 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$y = 3 \cdot 5$$

$$y = 15$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 15 \end{cases}$$

25. a)
$$\begin{cases} x - 2y = 4 & | \cdot (-1) \\ x - 2y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y = -4 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$$

$$0 = 3 \quad \text{identtisesti epätosi}$$

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

b)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 & | :2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad \text{Yhtälöparin suorat ovat samoja.}$$

$$2x + y = 3 \Rightarrow y = -2x + 3$$

Vastaus: Yhtälöparin ratkaisut ovat kaikki suoran $y = -2x + 3$ pisteet.

$$26. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -6x + 4y = 4 \end{cases} \quad | : 2$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -3x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$0 = 6 \quad \text{identtisesti epätosi}$$

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x + 4y = 0 \\ 5x + 16y = 40 \end{cases} \quad | \cdot (-4)$$

$$\begin{cases} -4x - 16y = 0 \\ 5x + 16y = 40 \end{cases}$$

$$x = 40 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$40 + 4y = 0$$

$$4y = -40 \quad | : 4$$

$$y = -10$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 40 \\ y = -10 \end{cases}$$

$$27. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$$6x = 6 \quad | : 6$$

$$x = 1 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$3 \cdot 1 + y = 3$$

$$3 + y = 3$$

$$y = 0$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$27. \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 5x - y = 3 \\ 5x = 15 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} -5x + y = -3 \\ 5x + 0 = 15 \end{cases}$$

$$y = 12$$

$$5x = 15 \quad | : 5$$

$$x = 3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 12 \end{cases}$$

$$28. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} -x + 2y = 7 \\ -x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2x \quad = 10 \\ x = -5 \end{array} \quad | : (-2)$$

sijoitus ylempään yhtälöön

$$\begin{array}{r} -(-5) + 2y = 7 \\ 5 + 2y = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2y = 2 \\ y = 1 \end{array} \quad | : 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x = 2y \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$-(2y) + 2y = 1$$

$$-2y + 2y = 1$$

$$0 = 1 \quad \text{identtisesti epätosi}$$

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

29. a)
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 3 + x \end{cases}$$

$$x + 3 + x = 7$$

$$2x = 4 \quad | : 2$$

$$x = 2 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$y = 3 + 2$$

$$y = 5$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ y = 2 - 2x \end{cases}$$

$$2x + 2 - 2x = 20$$

$$0 = 18 \quad \text{identtisesti epätosi}$$

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

30. a)
$$\begin{cases} 2x - y = -1 & | \cdot 2 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$0 = 0 \quad \text{identtisesti tosi}$$

$$2x - y = -1 \Rightarrow y = 2x + 1$$

Vastaus: Yhtälöparin ratkaisuna ovat kaikki suoran $y = 2x + 1$ pisteet.

b)
$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$$

$$7x = 14 \quad | : 7$$

$$x = 2 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$5 \cdot 2 + 3y = 1$$

$$10 + 3y = 1$$

$$3y = -9 \quad | : 3$$

$$y = -3$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$31. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} 5x + 8y = 24 & | \cdot 3 \\ 7x - 6y = -18 & | \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x + 24y = 72 \\ 28x - 24y = -72 \end{cases}$$

$$43x = 0 \quad | :43$$

$x = 0$ sijoitus ylempään yhtälöön

$$8y = 24 \quad | :8$$

$y = 3$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 4x - 7y - 40 = 0 \\ 2x + 3y + 6 = 0 & | \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 7y = 40 \\ -4x - 6y = 12 \end{cases}$$

$$-13y = 52 \quad | :(-13)$$

$y = -4$ sijoitus alempaan yhtälöön

$$2x + 3(-4) + 6 = 0$$

$$2x - 12 + 6 = 0$$

$$2x = 6 \quad | :2$$

$x = 3$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

32. a) Yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua, kun yhtälöt ovat samat.

$$\begin{cases} 4x + 6y + 5 = 0 \\ -4x - 6y - a = 0 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} 4x + 6y + 5 = 0 \\ 4x + 6y + a = 0 \end{cases}$$

Vastaus: $a = 5$

b) Yhtälöparilla ei ole ratkaisua, kun suorat ovat yhdensuuntaiset ja niillä on eri vakiotermi.

$$\begin{cases} 4x + 6y + 5 = 0 \\ 4x + 6y + a = 0 \end{cases}$$

Vastaus: $a \neq 5$

33. $y = ax + b$ ja kulkee pisteiden $(1, 1)$ ja $(4, 7)$ kautta

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 7 = 4a + b \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} -1 = -a - b \\ 7 = 4a + b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 6 &= 3a \\ a &= 2 \end{aligned}$$

$| : 3$
sijoitus ylempään yhtälöön

$$1 = 2 + b$$

$$b = 1 - 2$$

$$b = -1$$

Vastaus: Suoran yhtälö on $y = 2x - 1$.

15. Sovelluksia

1.
$$\begin{cases} x + y = 123 \\ x - y = 11 \end{cases}$$
$$\begin{array}{rcl} 2x & = & 134 \\ x & = & 67 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : 2 \\ \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} 67 + y & = & 123 \\ y & = & 123 - 67 \\ y & = & 56 \end{array}$$

Vastaus: $x = 67$ ja $y = 56$

2. Tuun rahat on x ja Monan rahat on y .

$$\begin{cases} x + y = 88 \\ x = 3y \end{cases}$$
$$\begin{array}{rcl} 3y + y & = & 88 \\ 4y & = & 88 \\ y & = & 22 \end{array} \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$
$$\begin{array}{rcl} x & = & 3 \cdot 22 \\ x & = & 66 \end{array}$$

Vastaus: Tualla on 66 € ja Monalla 22 €.

3. x on poikien lukumäärä ja y tyttöjen lukumäärä.

$$\begin{cases} x + y = 112 \\ y - x = 8 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + y = 112 \\ -x + y = 8 \end{cases}$$
$$\begin{array}{rcl} 2y & = & 120 \\ y & = & 60 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : 2 \\ \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} x + 60 & = & 112 \\ x & = & 112 - 60 \\ x & = & 52 \end{array}$$

Vastaus: Tyttöjä on 60.

4. Takarattaan hampaat on x ja eturattaan hampaat y .

$$\begin{cases} x + y = 59 \\ x - y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x & = & 84 \\ x & = & 42 \end{array} \quad \left| : 2 \right. \\ \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$\begin{array}{r} 42 + y = 59 \\ y = 59 - 42 \\ y = 17 \end{array}$$

Vastaus: Eturattaassa on 17 ja takarattaassa 42 hammasta.

5. Eetun ikä on x ja Samun ikä y .

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x & = & 32 \\ x & = & 16 \end{array} \quad \left| : 2 \right. \\ \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$\begin{array}{r} 16 + y = 28 \\ y = 12 \end{array}$$

Vastaus: Eetu 16 v ja Samu 12 v

Toinen yhtälö voi olla myös $y - x = 4$, jolloin vastaukseksi tulee Samu 16 v ja Eetu 12 v.

6.
$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 600 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 3y + y & = & 600 \\ 4y & = & 600 \\ y & = & 150 \end{array} \quad \left| : 4 \right. \\ \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$x = 3 \cdot 150$$

$$x = 450$$

Vastaus: x on 450 g ja y on 150 g.

7. Miljan tarrat on x ja Joonan tarrat y .

$$\begin{cases} x + y = 75 \\ x = y + 15 \end{cases}$$

$$y + 15 + y = 75$$

$$2y = 60 \quad | : 2$$

$$y = 30 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$x = 30 + 15$$

$$x = 45$$

Vastaus: Miljalla on 45 ja Joonalla 30 tarraa.

8. Pallon massa on x ja kuution massa y .

$$\begin{cases} 2x + 20 = 3y + x \\ x + y + 40 = x + 2y + 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - x - 3y = -20 \\ x + y - x - 2y = 20 - 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = -20 \\ -y = -20 \end{cases}$$

$$-y = -20 \quad | \cdot (-1)$$

$$y = 20 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$x - 3 \cdot 20 = -20$$

$$x - 60 = -20$$

$$x = 40$$

Vastaus: Pallo on 40,0 g ja kuutio on 20,0 g.

9. Kuution massa x ja pallon massa y .

$$\begin{cases} x + y = 520 \\ y = 3x \end{cases}$$

$$x + 3x = 520$$

$$4x = 520 \quad | : 4$$

$$x = 130 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$y = 3 \cdot 130$$

$$y = 390$$

Vastaus: Pallo on 390 kg ja kuutio on 130 kg.

10. A-mallin hinta on x ja B-mallin hinta on y.

$$\begin{cases} 9x + 5y = 9925 & | \cdot 2 \\ 6x + 8y = 11260 & | \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x + 10y = 19850 \\ -18x - 24y = -33780 \end{cases}$$

$$-14y = -13930 \quad | : (-14)$$

$$y = 995 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$18x + 10 \cdot 995 = 19850$$

$$8x = 19850 - 9950$$

$$18x = 9900 \quad | : 18$$

$$x = 550$$

Vastaus: A 550 € ja B 995 €

11.
$$\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x + y = 54 \end{cases}$$

$$3x = 60 \quad | : 3$$

$$x = 20 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$2 \cdot 20 + y = 54$$

$$40 + y = 54$$

$$y = 14$$

Vastaus: Luvut ovat 20 ja 14.

12. Luku on muotoa xy.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$2x = 18$$

$$x = 9 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$9 + y = 12$$

$$y = 12 - 9$$

$$y = 3$$

Vastaus: Luku on 93.

13. Undulaatteja on x ja marsuja y .

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases} \quad | \cdot (-2)$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = -36 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases}$$

$$2y = 20 \quad | : 2$$

$$y = 10 \quad \text{sijoitetaan ylempään yhtälöön}$$

$$x + 10 = 18$$

$$x = 8$$

Vastaus: 8 undulaattia ja 10 marsua

14. Kanta on x ja korkeus y .

$$\begin{cases} x = y + 8 \\ 2x + 2y = 96 \end{cases}$$

$$2(y + 8) + 2y = 96$$

$$2y + 16 + 2y = 96$$

$$4y = 80 \quad | : 4$$

$$y = 20 \quad \text{sijoitetaan ylempään yhtälöön}$$

$$x = 20 + 8$$

$$x = 28$$

Vastaus: kanta 28 cm ja korkeus 20 cm

15. Punaisia palloja on x ja sinisiä palloja y kpl.

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$2x = 48 \quad | : 2$$

$$x = 24 \quad \text{sijoitetaan ylempään yhtälöön}$$

$$24 + y = 42$$

$$y = 42 - 24$$

$$y = 18$$

Vastaus: 24 punaista ja 18 sinistä

16. Ellan ikä on x ja Meten ikä y .

$$\begin{cases} x + y = 48 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$2y + y = 48$$

$$3y = 48$$

$$y = 16$$

sijoitus alempaan yhtälöön

$$x = 2 \cdot 16$$

$$x = 32$$

Vastaus: Ella 32 v ja Mette 16 v

17. Keltainen auto on x kg ja punainen auto on y kg (massat).

$$\begin{cases} 2x + y = 2800 & | \cdot (-1) \\ 2x + 2y = 4000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - y = -2800 \\ 2x + 2y = 4000 \end{cases}$$

$$y = 1200$$

sijoitus ylempään yhtälöön

$$2x + 1200 = 2800$$

$$2x = 2800 - 1200$$

$$2x = 1600 \quad | : 2$$

$$x = 800$$

Vastaus: keltainen 800 kg ja punainen 1200 kg

18. Banaani on x ja appelsiini y .

$$\begin{cases} 3x = 2y + 270 \\ x + 3y = 270 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 2y + 270 \\ x = -3y + 270 \end{cases}$$

$$3(-3y + 270) = 2y + 270$$

$$-9y + 810 = 2y + 270$$

$$-11y = 270 - 810$$

$$-11y = -540$$

$$| : (-11)$$

$$y \approx 49,09$$

sijoitus alempaan yhtälöön

$$x + 3 \cdot 49,09 = 270$$

$$x + 147,27 = 270$$

$$x = 122,73$$

Vastaus: banaani on 123 g ja appelsiini 49 g

19. Berliininmunkkeja on x kpl ja munkkirinkilöitä y kpl.

$$\begin{cases} x + y = 85 & | \cdot (-1) \\ 1,5x + y = 103 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y = -85 \\ 1,5x + y = 103 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 0,5x & = & 18 \\ x & = & 36 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 36 + y & = & 85 \\ y & = & 85 - 36 \\ y & = & 49 \end{array}$$

Vastaus: 36 berliininmunkkia ja 49 munkkirinkilää

20. Tyttöjä on x ja poikia y kpl.

$$\begin{cases} x + y = 27 & | \cdot (-16) \\ 45x + 16y = 867 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16x - 16y = -432 \\ 45x + 16y = 867 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 29x & = & 435 \\ x & = & 15 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : 29 \\ \text{sijoitetaan ylempään yhtälöön} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 15 + y & = & 27 \\ y & = & 27 - 15 \\ y & = & 12 \end{array}$$

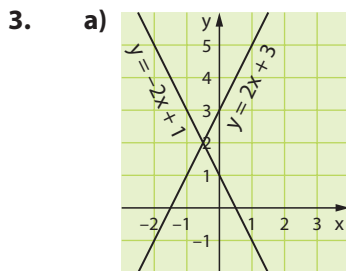
Vastaus: 15 tyttöä ja 12 poikaa

16. Kertaus

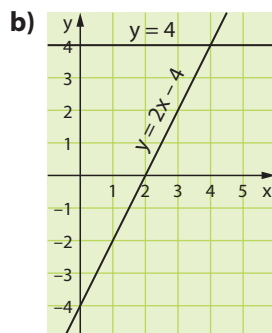
1. Suoraan verrannollisuus: $y = kx$
Kääntäen verrannollisuus: $y = \frac{k}{x}$

- a) suoraan
b) kääntäen
c) ei kumpaakaan

2. $x - y = 5$
Ratkaistaan yhtälö y :n suhteen: $y = x - 5$.
Vastaus: esim. (5, 0), (6, 1) ja (7, 2)

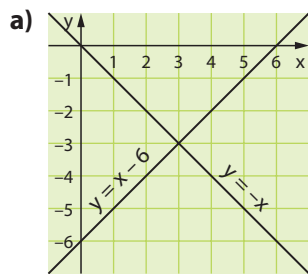


Vastaus: $\begin{cases} x = -0,5 \\ y = 2 \end{cases}$

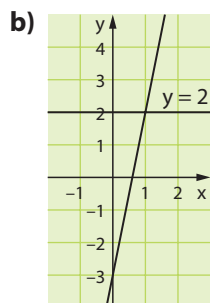


Vastaus: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$

4.



Vastaus: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$



Vastaus: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

5.

a) $\begin{cases} x = y + 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

$$y + 1 + y = 5$$

$$2y + 1 = 5$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

$\quad \quad \quad | : 2$
sijoitus ylempään yhtälöön

$$x = 2 + 1$$

$$x = 3$$

Vastaus: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 2y \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$2y - y = 3$$

$$y = 3 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$x = 2 \cdot 3$$

$$x = 6$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$6. \quad \text{a) } \begin{cases} 2x + y = 9 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

$$2y = 10 \quad | : 2$$

$$y = 5 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$2x + 5 = 9$$

$$2x = 9 - 5$$

$$2x = 4 \quad | : 2$$

$$x = 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -5x + y = 20 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$4y = 20 \quad | : 4$$

$$y = 5 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$5x + 3 \cdot 5 = 0$$

$$5x + 15 = 0$$

$$5x = -15 \quad | : 5$$

$$x = -3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$7. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} x - y = 5 \\ -x + y = -5 \end{cases}$$

$$0 = 0 \quad \text{identtisesti tosi}$$

Vastaus: Yhtälöparin ratkaisuna ovat kaikki suoran $y = x - 5$ pisteet.

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ -6x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$0 = 2 \quad \text{identtisesti epätosi}$$

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisuja.

8. Tiian rahat on x ja Katariinan rahat y .

$$\begin{cases} x + y = 135 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$2y + y = 135$$

$$3y = 135 \quad | : 3$$

$$y = 45$$

Vastaus: Tiialla on 90 € ja Katariinalla 45 €.

9. Punaisia autoja on x ja sinisiä autoja y kpl.

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x = y + 4 \end{cases}$$

$$y + 4 + y = 36$$

$$2y = 36 - 4$$

$$2y = 32 \quad | : 2$$

$$y = 16 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$x = 16 + 4$$

$$x = 20$$

Vastaus: Punaisia autoja on 20 ja sinisiä on 16 kpl.

10. lina pituus on x ja Anun pituus on y .

$$\begin{cases} x + y = 310 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x & = & 320 & | : 2 \\ x & = & 160 & \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 160 + y = 310 \\ y = 310 - 160 \\ y = 150 \end{array}$$

Vastaus: lina on 160 cm ja Anu 150 cm pitkä.

11. Aapon rahat on x ja Aleksin rahat y .

$$\begin{cases} y - x = 10 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x - x & = & 10 \\ x & = & 10 & \text{sijoitus alempaan yhtälöön} \end{array}$$

$$y = 2 \cdot 10$$

$$y = 20$$

Vastaus: Aapolla on 10 € ja Aleksilla 20 €.

12.
$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 75 \end{cases}$$

$$2y + y = 75$$

$$3y = 75$$

$$y = 25$$

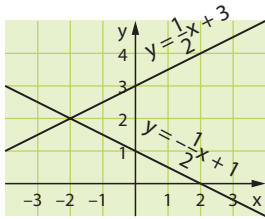
$$\begin{array}{r} | : 3 \\ \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{array}$$

$$x = 2 \cdot 25$$

$$x = 50$$

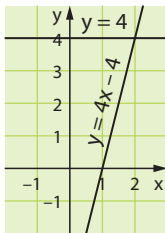
Vastaus: $x = 50$ g ja $y = 25$ g

13. a)



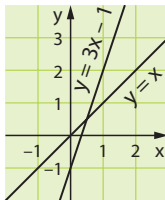
$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

b)



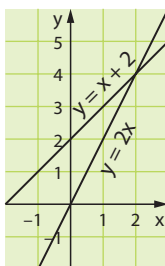
$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

14. a) $y - x = 0$
 $y = x$



$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 0,5 \end{cases}$$

b)



$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$15. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} y = x + 3 \\ y = 5x - 5 \end{cases}$$

$$x + 3 = 5x - 5$$

$$x - 5x = -5 - 3$$

$$-4x = -8 \quad | : (-4)$$

$$x = 2 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$y = 2 + 3$$

$$y = 5$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x + y = 7 & | \cdot 3 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 21 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$7x = 21 \quad | : 7$$

$$x = 3 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$3 + y = 7$$

$$y = 4$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$16. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} -x + y = 4 & | \cdot 3 \\ 3x + 3y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 3y = 12 \\ 3x + 3y = -6 \end{cases}$$

$$6y = 6 \quad | : 6$$

$$y = 1 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$3x + 3 \cdot 1 = -6$$

$$3x = -6 - 3$$

$$3x = -9 \quad | : 3$$

$$x = -3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases} \quad | \cdot 3$$

$$\begin{cases} 3x - 6y = -9 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 5x = -5 \\ x = -1 \end{array} \quad | : 5$$

sijoitus alempaan yhtälöön

$$2 \cdot (-1) + 6y = 4$$

$$-2 + 6y = 4$$

$$6y = 6 \quad | : 6$$

$$y = 1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$17. \text{ a) } \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$y = -1$$

sijoitus ylempään yhtälöön

$$x - 2(-1) = -3$$

$$x + 2 = -3$$

$$x = -5$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 4x - y - 3 = 0 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 8x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 9x = 9 \\ x = 1 \end{array} \quad | : 9$$

sijoitus ylempään yhtälöön

$$1 + 2y = 3$$

$$2y = 2$$

$$y = 1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$18. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} 8x - 4y + 12 = 0 & | \cdot (-3) \\ 5x - 3y + 9 = 0 & | \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -24x + 12y - 36 = 0 \\ 20x - 12y + 36 = 0 \end{cases}$$

$$-4x \quad \quad \quad = 0 \quad | :(-4)$$

$x = 0$ sijoitus ylempään yhtälöön

$$-4y + 12 = 0$$

$$4y = 12 \quad | :4$$

$$y = 3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 5x + 4y - 8 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 & | \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 4y - 8 = 0 \\ 12x - 4y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$17x \quad \quad \quad = 0 \quad | :17$$

$x = 0$ sijoitus ylempään yhtälöön

$$4y = 8 \quad | :4$$

$$y = 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

19. a) Ratkaisuja on äärettömän monta, kun yhtälöt ovat samoja.

$$\begin{cases} y = 2kx + 4 \\ y = -6x - b \end{cases}$$

$$2k = -6 \quad -b = 4$$

$$k = -3 \quad b = -4$$

Vastaus: $k = -3$ ja $b = -4$

b) Ei yhtään ratkaisua, kun suorat ovat yhdensuuntaisia ja eri suoria.

$$k = -3 \quad -b \neq 4$$

$$b \neq -4$$

Vastaus: $k = -3$ ja $b \neq -4$

c) Ratkaisuna on lukupari (1, 2).

$$\begin{cases} 2 = 2k + 4 \\ 2 = -6 - b \end{cases}$$

$$2k = 2 - 4$$

$$2k = -2 \quad | : 2$$

$$k = -1$$

$$b = -6 - 2$$

$$b = -8$$

Vastaus: $k = -1$ ja $b = -8$

20.
$$\begin{cases} 2a + b = 26 \\ 2b - a = 17 \end{cases} \quad | \cdot 4$$

$$\begin{cases} 2a + b = 26 \\ -2a + 4b = 34 \end{cases}$$

$$5b = 60 \quad | : 5$$

$$b = 12$$

sijoitus ylempään yhtälöön

$$2a + 12 = 26$$

$$2a = 14 \quad | : 2$$

$$a = 7$$

Vastaus:
$$\begin{cases} a = 7 \\ b = 12 \end{cases}$$

21. Penkkejä on x ja oppilaita on y .

$$\begin{cases} y - 10x = 20 \\ y - 11(x - 1) = 7 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} y - 10x = 20 \\ -y + 11x - 11 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 10x = 20 \\ -y + 11x = 4 \end{cases}$$

$$x = 24$$

sijoitus ylempään yhtälöön

$$y - 240 = 20$$

$$y = 260$$

Vastaus: Penkkejä on 24 ja oppilaita 260.

22. Aaron vasemman käden rahat on x ja oikean käden y .

$$\begin{cases} y - 17 = x + 17 \\ 2(x - 17) = y + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 17 = x + 17 \\ 2x - 34 = y + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 34 \\ -y + 2x = 51 \end{cases}$$

$$x = 85 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$y - 17 = 85 + 17$$

$$y = 119$$

Vastaus: Rahaa on vasemmassa kädessä 85 €
ja oikeassa kädessä 119 €.

23. Suurempi luku on x ja pienempi y .

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ \frac{x}{8} = \frac{y}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ 3x = 8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 15 & | \cdot (-3) \\ 3x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 3y = -45 \\ 3x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -5y &= -45 & | : (-5) \\ y &= 9 & \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{aligned}$$

$$x - 9 = 15$$

$$x = 24$$

Vastaus: 24 ja 9

24. a) $y = kx$. Kun $y = 12$ ja $x = 4$, niin

$$k = \frac{y}{x} = \frac{12}{4} = 3$$

Kun $x = 3$, on

$$y = kx$$

$$y = 3 \cdot 3$$

$$y = 9$$

Vastaus: $y = 9$

b) $y = \frac{k}{x}$. Kun $y = 12$ ja $x = 4$, niin

$$k = xy = 4 \cdot 12 = 48$$

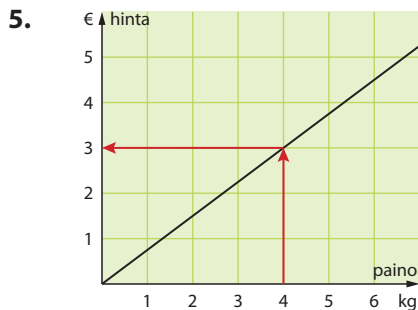
Kun $x = 3$, on

$$y = \frac{k}{x} = \frac{48}{3} = 16$$






Vastaus: $y = 16$

Lisätehtäviä






- esimerkiksi matkan pituudesta, kulkuvälineestä, säästä
- $20 \text{ €} : 2,50 \text{ €/kg} = 8 \text{ kg}$
 - $5 \text{ kg} \cdot 2,50 \text{ €/kg} = 12,50 \text{ €}$
- esimerkiksi bensiinin hinta, matkan pituus, mopon kulutus
- Voitosta varsinaisella pelaajalla saa kolme pistettä.
Jatkoaikavoitosta ja voittomaalivoitosta saa kaksi pistettä.
Jatkoikatappiosta ja voittomaalitappiosta saa yhden pisteen.
Tappiosta varsinaisella pelaajalla saa nolla pistettä.
 - Voitosta saa kolme pistettä.
Tasapelistä saa yhden pisteen.
Tappiosta saa nolla pistettä.








- Perunapussin kilohinta on $0,75 \text{ €}$.
 - hinta = paino $\cdot 0,75 \text{ €/kg}$
- perunoiden hinta $1,40 \text{ €} : 2 \text{ kg} = 0,70 \text{ €/kg}$
 $3,50 \text{ €} : 5 \text{ kg} = 0,70 \text{ €/kg}$
Vastaus: $y = 0,7x$
 - $y = 3x$
 - $y = x : 5,94573$
 - $y = 5,94573 \cdot x$






9. a) 1 →  → -4
2 →  → -3
3 →  → -2
5 →  → 0
x →  → y






Luvusta vähennetään viisi.






- b) 1 →  → -1
2 →  → -2
3 →  → -3
5 →  → -5
x →  → y






Luku muutetaan vastaluvukseen.






10. a) 1 →  → 1
2 →  → 0
3 →  → -1
5 →  → -3
x →  → $y = -x + 2$

- b) 1 →  → 4
2 →  → 6
3 →  → 8
5 →  → 12
x →  → $y = 2x + 2$



11. a) 1 →  → 7
 2 →  → 8
 4 →  → 10
 8 →  → 14
 x →  → $y = x + 6$

b) 1 →  → 4
 2 →  → 8
 4 →  → 16
 6 →  → 24
 x →  → $y = 4x$

12. a) 1 →  → 0
 2 →  → 7
 3 →  → 14
 5 →  → 28
 x →  → $y = 7x - 7$

b) 1 →  → 2
 2 →  → 1
 4 →  → -1
 10 →  → -7
 x →  → $y = -x + 3$

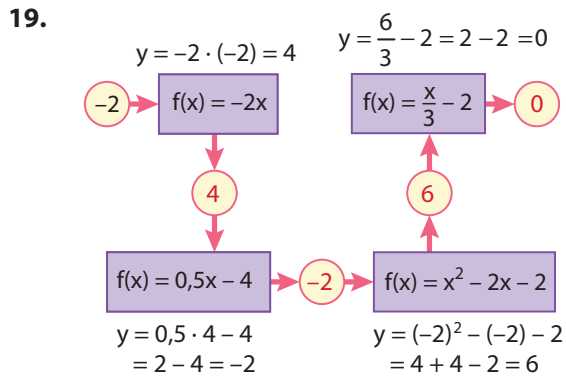
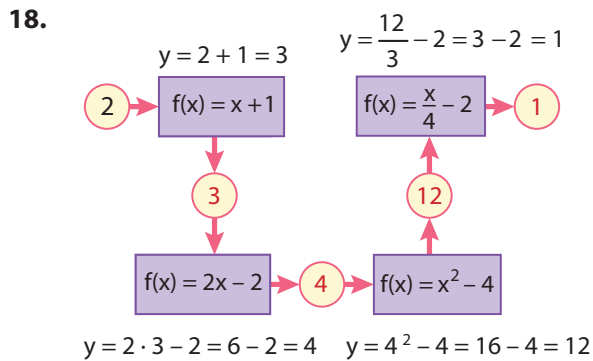
13. y:n arvo saadaan lisäämällä x:n vastalukuun luku 2.
 Vastaus: $y = -x + 2$

14. $f(4) = 10$
 a) Muuttujan arvo on 4. 
 b) Funktion arvo on 10. 

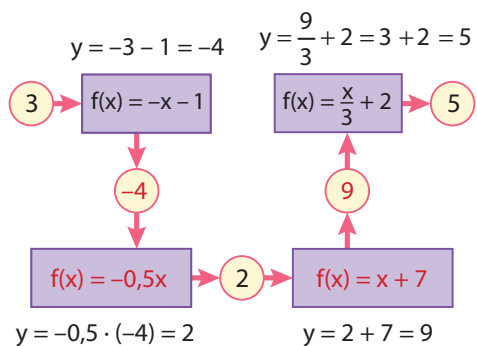
15. $f(x) = 2x + 9$
 a) $f(0) = 2 \cdot 0 + 9 = 9$
 b) $f(2) = 2 \cdot 2 + 9 = 4 + 9 = 13$
 c) $f(4) = 2 \cdot 4 + 9 = 8 + 9 = 17$

16. $f(x) = -5x + 6$
 a) $f(1) = -5 \cdot 1 + 6 = -5 + 6 = 1$
 b) $f(4) = -5 \cdot 4 + 6 = -20 + 6 = -14$
 c) $f(-2) = -5 \cdot (-2) + 6 = 10 + 6 = 16$

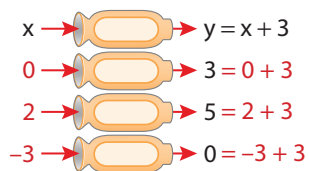
17. $f(x) = -x^2 + 5$
 a) $f(0) = -0^2 + 5 = 5$
 b) $f(2) = -2^2 + 5 = -4 + 5 = 1$
 c) $f(4) = -4^2 + 5 = -16 + 5 = -11$



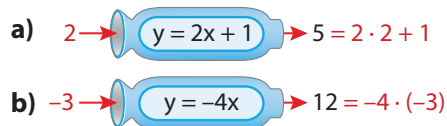
20.



21.



22.



23.

a) $f(x) = 2x + 2 = 4$
 $2x = 4 - 2$
 $2x = 2 \quad | :2$
 $x = 1$

b) $f(x) = 2x + 2 = -2$
 $2x = -2 - 2$
 $2x = -4 \quad | :2$
 $x = -2$

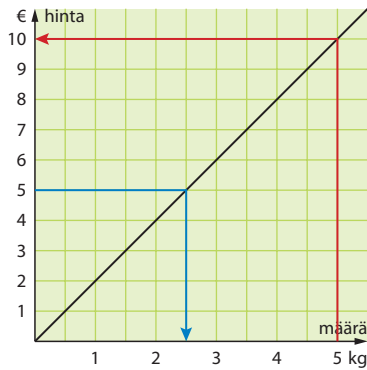
c) $f(x) = 2x + 2 = 0$
 $2x = -2$
 $2x = -2 \quad | :2$
 $x = -1$

24. a) $f(x) = x^2 - 1 = 3$
 $x^2 = 3 + 1$
 $x^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$
 $x = \pm 2$

b) $f(x) = x^2 - 1 = -1$
 $x^2 = -1 + 1$
 $x^2 = 0 \quad | \sqrt{\quad}$
 $x = 0$

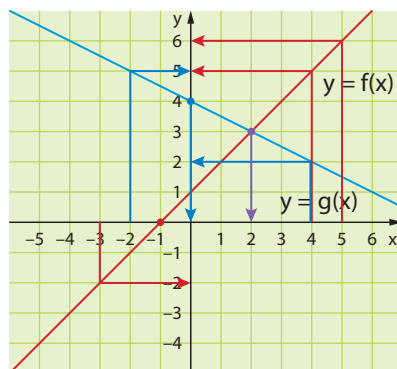
c) $f(x) = x^2 - 1 = 0$
 $x^2 = +1 \quad | \sqrt{\quad}$
 $x = \pm 1$

25. a) 10 €
 b) 2,5 kg
 c) $10 \text{ €} : 5 \text{ kg} = 2 \text{ €/kg}$



26. $f(x) = 2x$ $g(x) = x^2$
 a) $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$ $g(2) = 2^2 = 4$ \rightarrow yhtä suuret
 b) $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$ $g(-2) = (-2)^2 = 4$ $\rightarrow g(x) = x^2$
 c) $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$ $g(0) = 0^2 = 0$ \rightarrow yhtä suuret

27. a) $x = -1$
 b) $x = 0$
 c) $x = 2$
 d) $f(5) = 6$
 e) $f(-3) = -2$
 f) $g(4) = 2$
 g) $g(-2) = 5$



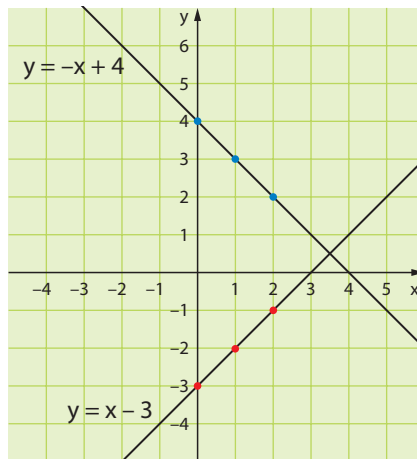
28. $y = kx - 2$
 Sijoitetaan $x = 3$ ja $y = -8$:
 $-8 = k \cdot 3 - 2$
 $-8 + 2 = 3k$
 $-6 = 3k \quad | :3$
 $k = -2$
 Vastaus: $k = -2, y = -2x - 2$

29. a) $y = x - 3$

x	y
0	-3
1	-2
2	-1

- b) $y = -x + 4$

x	y
0	4
1	3
2	2



30. $y = 2x$

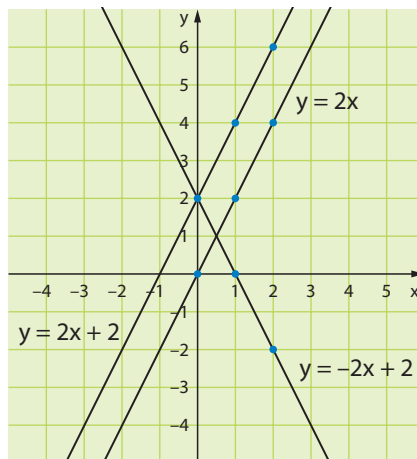
x	y
0	0
1	2
2	4

$y = 2x + 2$

x	y
0	2
1	4
2	6

$y = -2x + 2$

x	y
0	2
1	0
2	-2

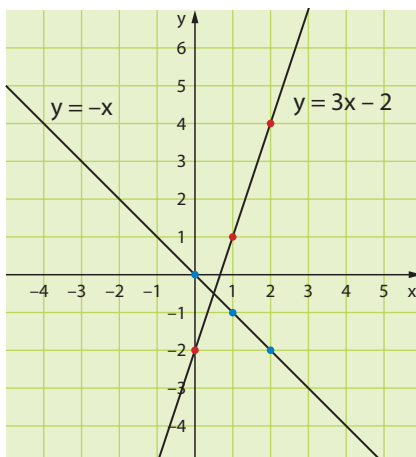


31. a) $y = 3x - 2$

x	y
0	-2
1	1
2	4

b) $y = -x$

x	y
0	0
1	-1
2	-2

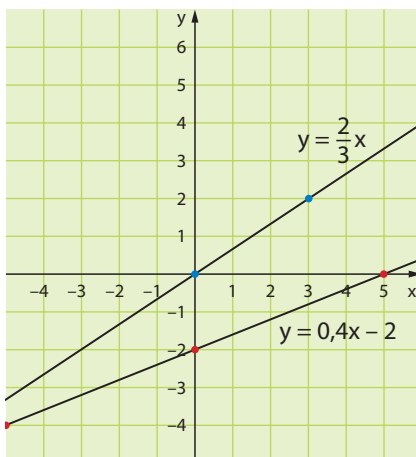


32. a) $y = 0,4x - 2$

x	y
-5	-4
0	-2
5	0

b) $y = \frac{2}{3}x$

x	y
0	0
3	2
6	4



33. $y = 2x + b$

Sijoitetaan $x = 2$ ja $y = 3$:

$$3 = 2 \cdot 2 + b$$

$$3 = 4 + b$$

$$3 - 4 = b$$

$$-1 = b$$

Vastaus: $b = -1$

34.

Suora	Kulma- kerroin	Vakio- termi	Nouseva vai laskeva
$y = 2x - 7$	2	-7	nouseva
$y = -3x + 4$	-3	4	laskeva
$y = -x + 5$	-1	5	laskeva
$y = \frac{2}{3}x - 6$	$\frac{2}{3}$	-6	nouseva

35. a) kulmakerroin -2 ; laskeva
 b) kulmakerroin 1 ; nouseva

36. a) vakiotermi -1 ; $(0, -1)$
 b) vakiotermi 0 ; $(0, 0)$

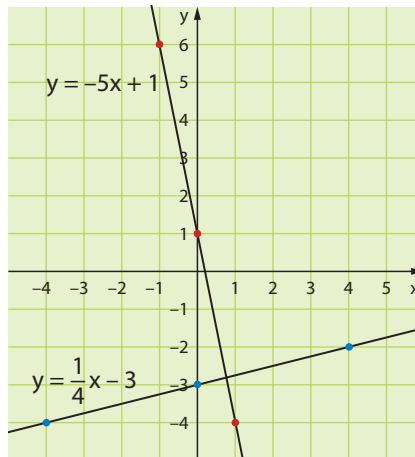
37. Kulkee pisteen $(0, 5)$ kautta, joten vakiotermi on 5 .
 x :n kerroin = kulmakerroin = -3
 Vastaus: $y = -3x + 5$

38. a) $y = -5x + 1$

x	y
-1	6
0	1
1	-4

- b) $y = \frac{1}{4}x - 3$

x	y
-4	-4
0	-3
4	-2

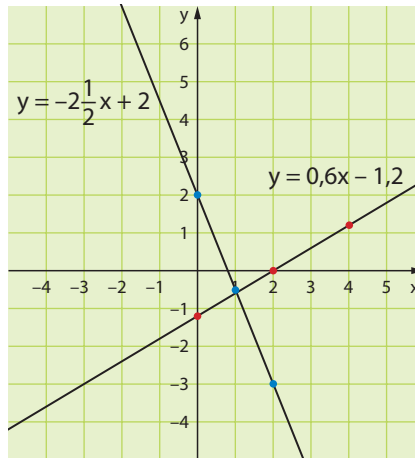


39. a) $y = -2\frac{1}{2}x + 2$

x	y
0	2
1	-0,5
2	-3

b) $y = 0,6x - 1,2$

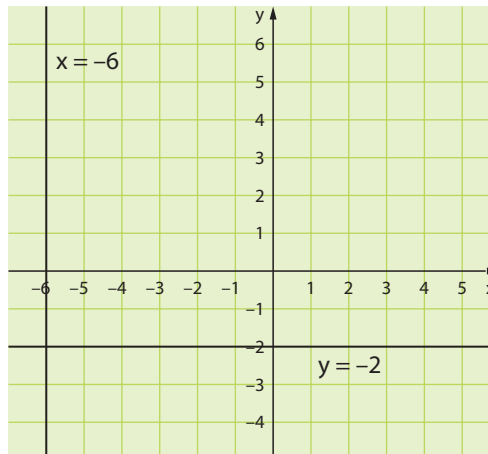
x	y
0	-1,2
2	0
4	1,2



40. n: vaakasuora, y saa arvon 1; $y = 1$
 s: pystysuora, x saa arvon 4; $x = 4$
 t: vaakasuora, y saa arvon -4 ; $y = -4$

41. a) $x = -6$
 x saa ainoastaan arvon -6 .
 \rightarrow pystysuora

- b) $y = -2$
 y saa arvon -2 kaikilla x:n arvoilla.
 \rightarrow vaakasuora



42. x saa ainoastaan arvon -5 ja y ainoastaan arvon 3.
 Vastaus: $(-5, 3)$

- 43.** a) Vaakasuora, y saa ainoastaan arvon 4.
Vastaus: $y = 4$
b) Pystysuora, x saa ainoastaan arvon -2 .
Vastaus: $x = -2$

- 44.** suoran $y = 5$ suuntainen \rightarrow vaakasuora
pisteen $(0, 2)$ kautta $\rightarrow y$ saa arvon 2
Vastaus: $y = 2$

- 45.** suoran $x = 3$ suuntainen \rightarrow pystysuora
origon kautta $\rightarrow x$ saa arvon 0
Vastaus: $x = 0$

- 46.** Sijoitetaan $x = -3$ ja $y = 5$ yhtälöön $y = kx + 5$.

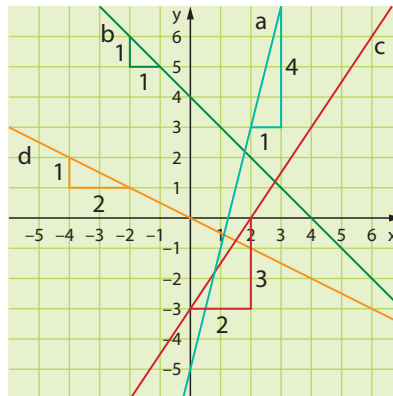
$$5 = k \cdot (-3) + 5$$

$$5 - 5 = -3k$$

$$0 = -3k \quad | :(-3)$$

$$k = 0$$

- 47.** a: $k = \frac{4}{1} = 4$
 b: $k = -\frac{1}{1} = -1$, laskeva
 c: $k = \frac{3}{2} = 1,5$
 d: $k = -\frac{1}{2} = -0,5$, laskeva



48. a: $k = \frac{1}{1} = 1, b = -4$

$$y = x - 4$$

b: $k = -\frac{3}{1} = -3, b = -3$

$$y = -3x - 3$$

c: $k = \frac{2}{3}, b = 0$

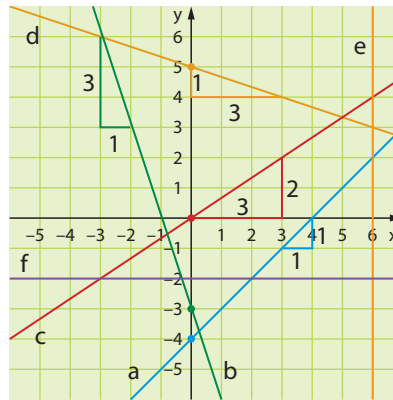
$$y = \frac{2}{3}x$$

d: $k = -\frac{1}{3}, b = 5$

$$y = -\frac{1}{3}x + 5$$

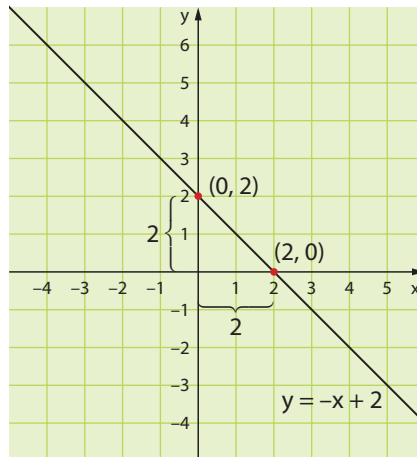
e: pystysuora, x saa arvon 6; $x = 6$

f: vaakasuora, y saa arvon -2; $y = -2$



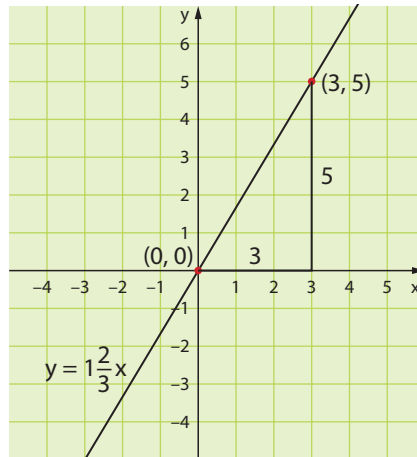
49. $k = -\frac{2}{2} = -1, b = 2$

$$y = -x + 2$$



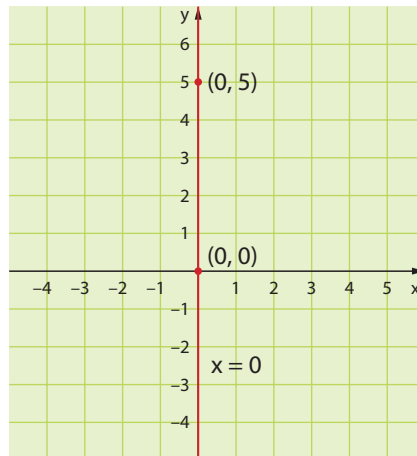
50. $k = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$, $b = 0$

$$y = 1\frac{2}{3}x$$



51. pystysuora, x saa arvon 0

Vastaus: $x = 0$



52. $4x - y + 17 = 0$

$$-y = -4x - 17 \quad | \cdot (-1)$$

$$y = 4x + 17$$

Vakiotermi on 17, joten suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 17)$.

Vastaus: $(0, 17)$

53. Suorat ovat yhdensuuntaiset, joten kaikilla on sama kulmakerroin $k = -0,4$.

s: Leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 0)$. $b = 0$

Vastaus: $y = -0,4x$

k: Leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 2)$. $b = 2$

Vastaus: $y = -0,4x + 2$

54. Kulmakerroin on sama kuin suoralla $y = 0,5x + 5$, joten $k = 0,5$.

Kulkee pisteen $(0, 2)$ kautta. $b = 2$

Vastaus: $y = 0,5x + 2$

55. Kulmakerroin $k = 1$, joten $y = x + b$.

Sijoitetaan yhtälöön $x = 1$ ja $y = 1$:

$$1 = 1 + b$$

$$1 - 1 = b$$

$$b = 0$$

Vastaus: $b = 0$

56. Kulmakerroin $k = 2$, joten $y = 2x + b$.

Sijoitetaan yhtälöön $x = 4$ ja $y = 2$:

$$2 = 2 \cdot 4 + b$$

$$2 = 8 + b$$

$$2 - 8 = b$$

$$-6 = b$$

Vastaus: $y = 2x - 6$

57. Yhdensuuntainen suoran $y = 3x - 2$ kanssa, joten $k = 3$.

Sijoitetaan x :n arvo 1 ja y :n arvo 5 yhtälöön $y = 3x + b$:

$$5 = 3 \cdot 1 + b$$

$$5 = 3 + b$$

$$5 - 3 = b$$

$$2 = b$$

Vastaus: $y = 3x + 2$

58. Sijoitetaan x :n arvo 4 ja y :n arvo 3 yhtälöön $y = 0,5x + b$:

$$3 = 0,5 \cdot 4 + b$$

$$3 = 2 + b$$

$$3 - 2 = b$$

$$b = 1$$

Vastaus: $b = 1$

59. Sijoitetaan x :n arvo -2 ja y :n arvo a yhtälöön $y = 2x + 2$:

$$a = 2 \cdot (-2) + 2$$

$$a = -2$$

Sijoitetaan x :n arvo b ja y :n arvo 4 yhtälöön $y = 2x + 2$:

$$4 = 2b + 2$$

$$2 = 2b \quad | \cdot (-1)$$

$$b = 1$$

Vastaus: $a = -2$ ja $b = 1$

60. $3 \cdot k = -1 \quad | :3$

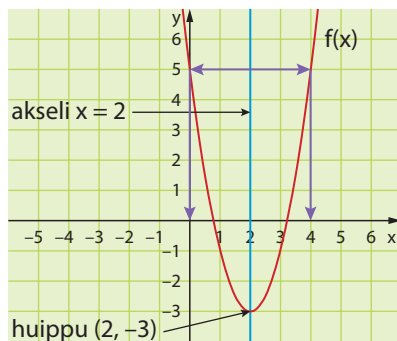
$$k = -\frac{1}{3}, \text{ vakiotermi } b = 4$$

Vastaus: $y = -\frac{1}{3}x + 4$

61.

$y = 8x^2$		$y = -8x^2$	
x	y	x	y
2	32	2	-32
-2	32	-2	-32

62. a) $(2, -3)$
b) $x = 2$
c) $x = 0$ ja $x = 4$



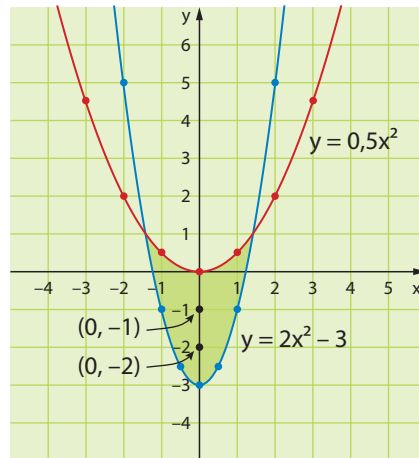
63. a) b)

$$y = 0,5x^2$$

x	y
0	0
±1	0,5
±2	2
±3	4,5

$$y = 2x^2 - 3$$

x	y
0	-3
±0,5	-2,5
±1	-1
±2	5



c) esimerkiksi

(0, -2) ja (0, -1)

64. Kokeillaan, toteuttavatko pisteen x- ja y-koordinaattien arvot annetun yhtälön $y = x^2 - 3$.

a) $0^2 - 3 = -3 \neq 3$, ei kulje

b) $3^2 - 3 = 6 \neq 9$, ei kulje

c) $9^2 - 3 = 78 \neq 3$, ei kulje

65. Kokeillaan, toteuttavatko pisteen x- ja y-koordinaattien arvot annetun yhtälön $y = 0,7x^2$.

a) $0,7 \cdot 5^2 = 0,7 \cdot 25 = 17,5 \neq 7$; ei kulje

b) $0,7 \cdot 10^2 = 0,7 \cdot 100 = 70$; kulkee

66. Tarkastellaan x^2 :n kerrointa:

positiivinen \rightarrow ylöspäin aukeava

negatiivinen \rightarrow alaspäin aukeava

itseisarvoltaan suuri \rightarrow kapea paraabeli

itseisarvoltaan pieni \rightarrow leveä paraabeli

1: $y = 6x^2 - 3$ ylöspäin aukeava ja kapea \rightarrow D

2: $y = -6x^2 - 3$ alaspäin aukeava ja kapea \rightarrow A

3: $y = 0,2x^2 - 3$ ylöspäin aukeava ja leveä \rightarrow B

4: $y = -0,2x^2 - 3$ alaspäin aukeava ja leveydeltään edellisten välimaastossa \rightarrow C

67. a) $-24 < 0 \rightarrow$ alaspäin aukeava

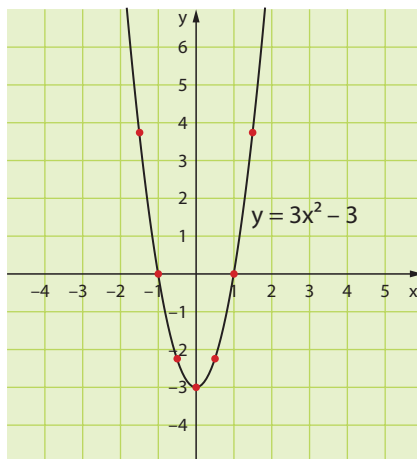
b) $40 > 0 \rightarrow$ ylöspäin aukeava

c) $-0,8 < 0 \rightarrow$ alaspäin aukeava

- 68.** Paraabelit ovat muotoa $y = ax^2 + c$.
- a) Vakiotermit $c = -9$, eli huippu on $(0, -9)$.
 $a = 15 > 0$, eli paraabeli aukeaa ylöspäin.
 - b) Vakiotermit $c = 12$, eli huippu on $(0, 12)$.
 $a = -0,6 < 0$, eli paraabeli aukeaa alaspäin.
 - c) Vakiotermit $c = -5$, eli huippu on $(0, -5)$.
 $a = \frac{1}{7} > 0$, eli paraabeli aukeaa ylöspäin.
- 69.** Paraabelit ovat muotoa $y = ax^2 + c$, joten kaikkien akseli on y-akseli eli $x = 0$.
- a) Vakiotermit $c = 0$, eli huippu on $(0, 0)$.
 $a = -5 < 0$, eli paraabeli aukeaa alaspäin.
 - b) Vakiotermit $c = 3$, eli huippu on $(0, 3)$.
 $a = 6 > 0$, eli paraabeli aukeaa ylöspäin.
 - c) Vakiotermit $c = -8$, eli huippu on $(0, -8)$.
 $a = 1 > 0$, eli paraabeli aukeaa ylöspäin.

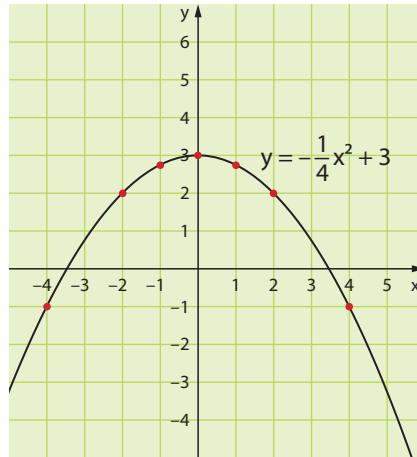
70. $y = 3x^2 - 3$

x	y
0	-3
$\pm 0,5$	-2,25
± 1	0
$\pm 1,5$	3,75



71. $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$

x	y
0	3
± 1	2,75
± 2	2
± 4	-1



72. Akseli on y-akseli, kun paraabeli on muotoa $y = ax^2 + c$.

Huippu on pisteessä $(0, 2)$, joten $c = 2$.

Sijoitetaan annetun pisteen $(-1, 0)$ x- ja y-koordinaatit yhtälöön $y = ax^2 + 2$:

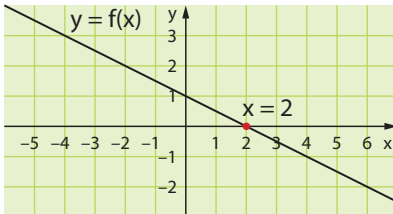
$$0 = a \cdot (-1)^2 + 2$$

$$0 = a + 2$$

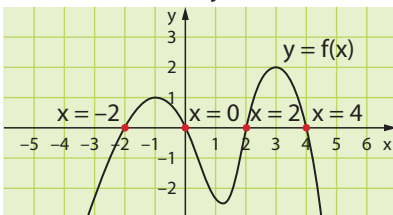
$$a = -2$$

Vastaus: $y = -2x^2 + 2$

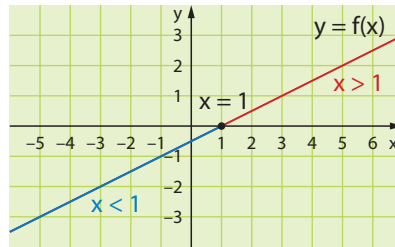
73. $x = 2$



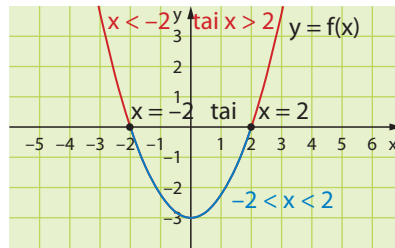
74. $x = -2, x = 0, x = 2$ ja $x = 4$



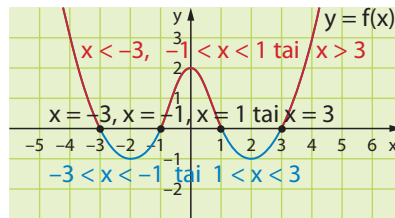
75. a) $x = 1$
 b) $x > 1$
 c) $x < 1$



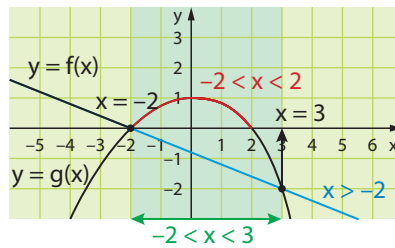
76. a) $x = -2$ tai $x = 2$
 b) $x < -2$ tai $x > 2$
 c) $-2 < x < 2$



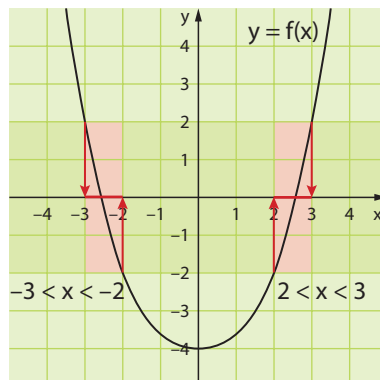
77. a) $x = -3, x = -1, x = 1$ tai $x = 3$
 b) $-3 < x < -1$ tai $1 < x < 3$
 c) $x < -3, -1 < x < 1$ tai $x > 3$



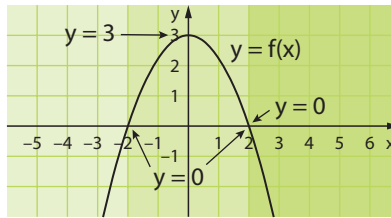
78. a) $x > -2$
 b) $-2 < x < 2$
 c) $x = -2$ tai $x = 3$
 d) $-2 < x < 3$



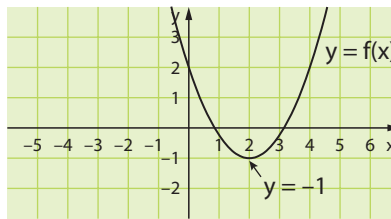
79. $|f(x)| < 2$
 $-2 < f(x) < 2$
 $-3 < x < -2$ tai $2 < x < 3$



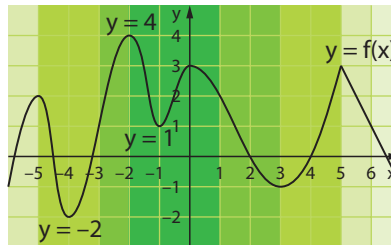
80. a) 3
 b) 0
 c) Ei ole, koska siirryttäessä oikealle tai vasemmalle funktion arvo pienenee rajattomasti.
 d) 0



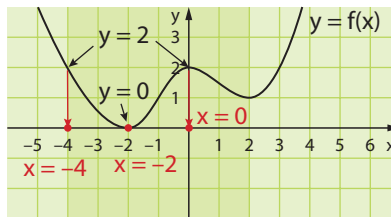
81. a) Suurinta arvoa ei ole, koska siirryttäessä oikealle tai vasemmalle funktion arvo kasvaa rajattomasti. Pienin arvo on $y = -1$.
 b) $x = 2$



82. a) 4
 b) -2
 c) 4
 d) 1

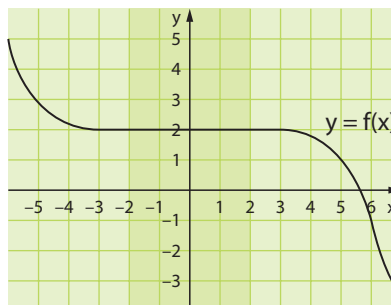


83. a) Suurin arvo on 2. Pienin arvo on 0.
 b) Suurin arvo 2, kun $x = 0$ tai $x = -4$. Pienin arvo 0, kun $x = -2$.



84. $x^2 \geq 0$, joten $2x^2 \geq 0$. Pienin arvo, kun $2x^2 = 0$ eli kun $x = 0$, ja $f(0) = 0 - 5 = -5$. Vastaus: Funktion pienin arvo on -5 .

85. a) Koko tarkasteluvälillä funktio saa arvon 2, joten sekä suurin että pienin arvo on 2.
 b) Suurin ja pienin arvo 2 saadaan kaikilla tarkasteluvälin arvoilla x .
 c) Funktiolla ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.



86. a) $3x^2 \geq 0$ ja $3 \cdot 0^2 = 0$, joten funktion $f(x) = 3x^2 - 2$ pienin arvo on -2 .

Vastaus: -2

- b) Ylöspäin aukeava paraabeli, joten suurin arvo välillä

$-2 \leq x \leq 3$ saadaan joko x :n arvolla -2 tai 3 .

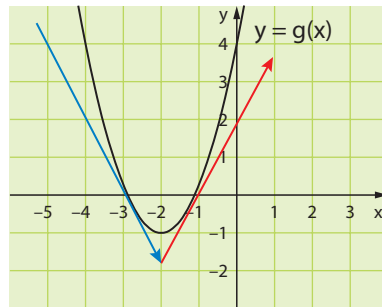
$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$f(3) = 3 \cdot 3^2 - 2 = 27 - 2 = 25$$

Vastaus: Funktion suurin arvo on 25 .

87. a) $x \geq -2$

- b) $x \leq -2$



88. a) Nouseva suora, kasvaa kaikilla x :n arvoilla.

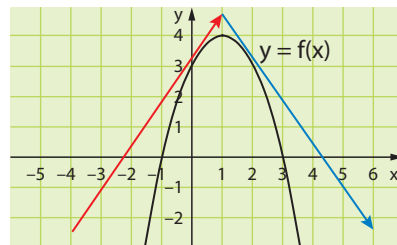
- b) Laskeva suora, ei kasva millään x :n arvolla.

- c) Ylöspäin aukeava paraabeli, joka on muotoa $y = ax^2 + c$, kasvaa, kun $x \geq 0$.

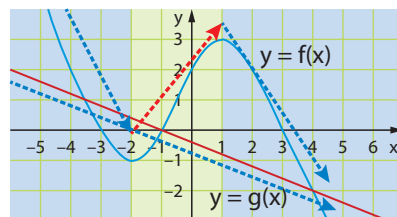
- d) Alaspäin aukeava paraabeli, joka on muotoa $y = ax^2 + c$, kasvaa, kun $x \leq 0$.

89. a) $x \leq 1$

- b) $x \geq 1$



90. $x \leq -2$ ja $x \geq 1$



91. a) $x = -7, x = -1,$
 $x = 4$ ja $x = 7$

b) $x < -7,$
 $-1 < x < 4$
 tai $x > 7$

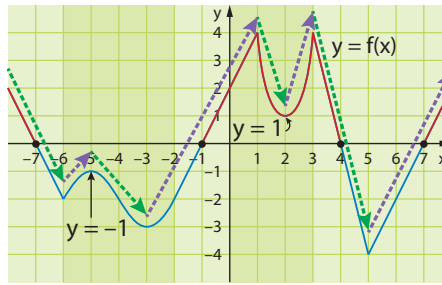
c) $-7 < x < -1$
 tai $4 < x < 7$

d) $-6 \leq x \leq -5,$
 $-3 \leq x \leq 1,$
 $2 \leq x \leq 3$ tai $x \geq 5$

e) $x \leq -6, -5 \leq x \leq -3, 1 \leq x \leq 2$ tai $3 \leq x \leq 5$

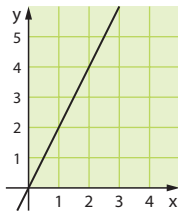
f) -1

g) 1

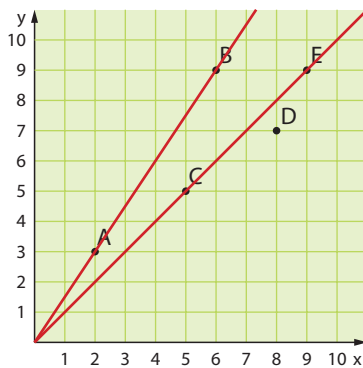


92.

Suure x	Suure y
2	4
4	8
5	10



93.



Origin kautta kulkeva suora.

Vastaus: A ja B tai C ja E

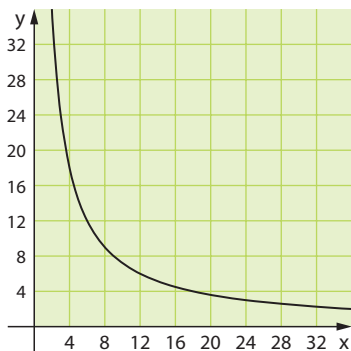
94. a) $x = 6$ ja $y = 120$
 b) $y = 180$ ja $x = 9$
 c) $k = \frac{y}{x} = \frac{120}{6} = 20$

95. a) $m = 30 \text{ g}$
 b) $V = 7,5 \text{ cm}^3$
 c) tiheys: $\frac{30 \text{ g}}{5,0 \text{ cm}^3} = 6,0 \text{ g/cm}^3$

96. a) nopeus: $\frac{150 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 50 \text{ km/h}$
 b) $s = 50t$
 c) $s = (50 \cdot 8) \text{ km} = 400 \text{ km}$

97.

Suure x	Suure y
3	24
4	18
6	12



98. a) $v = 15 \text{ m/s}$
 b) $t = 4 \text{ s}$
 c) $s = vt = 30 \text{ m/s} \cdot 4 \text{ s} = 120 \text{ m}$

99. $s = v \cdot t$
 Kun matka (s) on vakio, niin nopeus (v) ja aika (t).

$$100. \quad x \cdot y = 36 \quad | :x$$

$$y = \frac{36}{x}$$

$$101. \quad \frac{a \cdot h}{2} = 128 \quad | \cdot 2$$

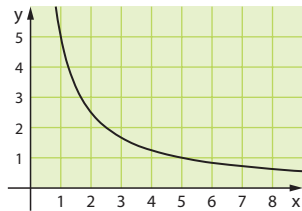
$$ah = 256 \quad | :h$$

$$a = \frac{256}{h}$$

$$102. \text{ a) } y = \frac{x}{5}$$



$$\text{b) } y = \frac{5}{x}$$



$$103. \quad 3x + 2y = 5$$

$$\text{a) } 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$5 = 5 \quad \text{tosi}$$

$$\text{b) } 3 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$7 = 5 \quad \text{epätosi}$$

Vastaus: **a)** toteutuu **b)** ei toteudu

104. a) $2x + y = 22$

b) $2 \cdot 8 + 1 \cdot 6 = 22$
 $16 + 6 = 22$
 $22 = 22$ tosi

Vastaus: toteutuu

105. a) $3(x - y) = 9$

b) $3(12 - 9) = 9$
 $3 \cdot 3 = 9$
 $9 = 9$ tosi

Vastaus: toteutuu

106. a) $x + y = 25$

b) $4x + 2y = 90$

c) $20 + 5 = 25$
 $25 = 25$ tosi
 $4 \cdot 20 + 2 \cdot 5 = 90$
 $90 = 90$ tosi

Vastaus: toteutuvat

107. a) $x = 5$ ja $y = 11$

$y = 2x + 1$
 $11 = 2 \cdot 5 + 1$
 $11 = 11$ tosi

Vastaus: toteuttaa

b) $y = 3x - 4$
 $11 = 3 \cdot 5 - 4$
 $11 = 11$ tosi

Vastaus: toteuttaa

c) toteuttaa

108. $x = 10$ ja $y = 3$

$$2x - 4y = 8$$

$$2 \cdot 10 - 4 \cdot 3 = 8$$

$$20 - 12 = 8$$

$$8 = 8 \quad \text{tosi}$$

Vastaus: C

$$-x + y = -7$$

$$-10 + 3 = -7$$

$$-7 = -7 \quad \text{tosi}$$

109. $x = 3$ ja $y = -1$

$$3 + (-1) = 2$$

ja

$$3 - (-1) = 4$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

110. $x = 2$

$$\begin{cases} y = 2a - 3 \\ y = 4 + 1 \end{cases}$$

$$y = 5;$$

$$5 = 2a - 3$$

$$2a = 8$$

$$a = 4$$

| :2

Vastaus: $y = 5$ ja $a = 4$

111. a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

$$y = x + \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{4}{6} \quad \text{tosi}$$

Vastaus: on

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{tosi}$$

111. b) $2x - 3y = -1$

$$2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{2}{3} = -1$$

$$\frac{2}{2} - \frac{6}{3} = -1$$

$$1 - 2 = -1 \quad \text{tosi}$$

$4x + 9y = 8$

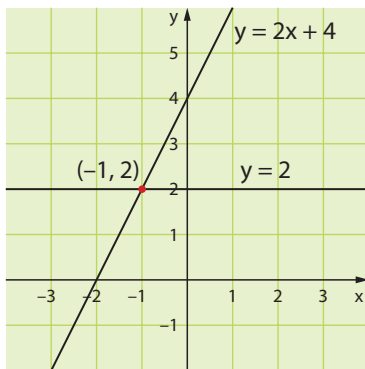
$$4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{2}{3} = 8$$

$$\frac{4}{2} + \frac{18}{3} = 8$$

$$2 + 6 = 8 \quad \text{tosi}$$

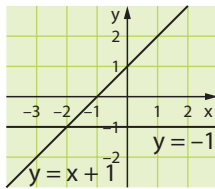
Vastaus: on

112.



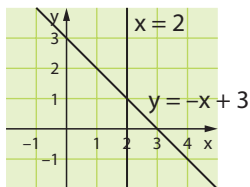
Vastaus: a), b) ja c) toteuttaa

113. a)

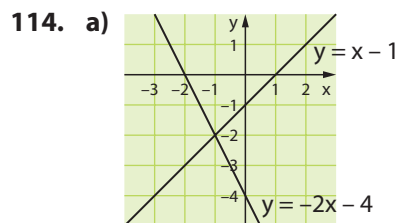


$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

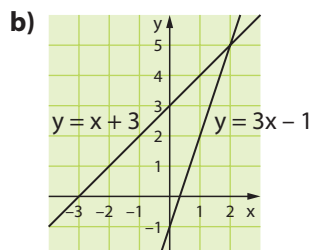
b)



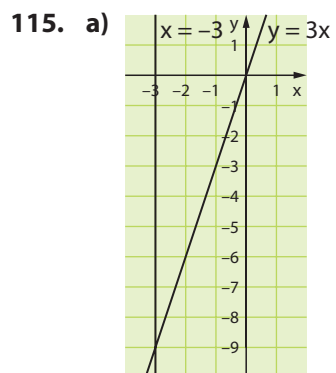
$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$



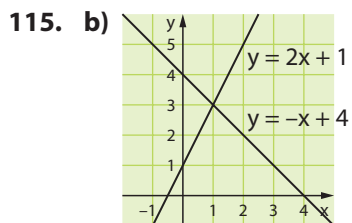
Vastaus: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$



Vastaus: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$



Vastaus: $\begin{cases} x = -3 \\ y = -9 \end{cases}$



Vastaus: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

116. a) $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

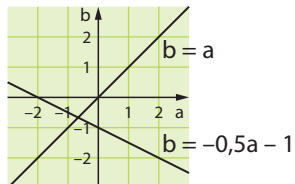
117. $\begin{cases} ax + 2by + 6 = 0 \\ bx - 2ay + 3b = 0 \end{cases}$ (piste 3, 3) $\Rightarrow x = 3$ ja $y = 3$

$$\begin{cases} 3a + 6b + 6 = 0 \\ 3b - 6a + 3b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + 6b = -6 & | :6 \\ -6a + 6b = 0 & | :6 \end{cases}$$

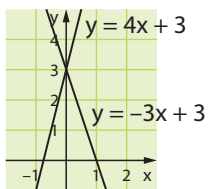
$$\begin{cases} 0,5a + b = -1 \\ -a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -0,5a - 1 \\ b = a \end{cases}$$



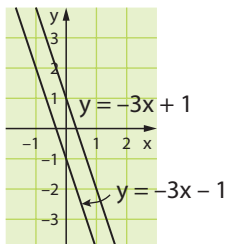
Vastaus: $\begin{cases} a = -0,7 \\ b = -0,7 \end{cases}$

118. a)



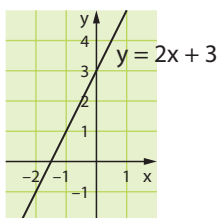
Vastaus: yksi

b)



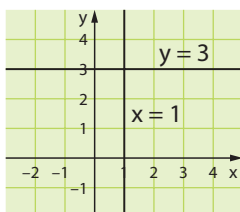
Vastaus: ei yhtään

c)



Vastaus: äärettömän monta

d)



Vastaus: yksi

119. a) yhdensuuntaiset, mutta eri suorat Vastaus: ei yhtään

b) yhdensuuntaiset, mutta eri suorat Vastaus: ei yhtään

$$\text{c) } \begin{cases} 14x + y = 7 \\ y + 7 = -14x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -14x + 7 \\ y = -14x - 7 \end{cases}$$

yhdensuuntaiset, mutta eri suorat Vastaus: ei yhtään

$$\text{d) } \begin{cases} 14x + y - 2 = 0 \\ y - 14x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -14x + 2 \\ y = 14x - 2 \end{cases}$$

erisuuntaiset suorat Vastaus: yksi

120. Ei yhtään ratkaisua \Rightarrow yhdensuuntaiset suorat

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

121.
$$\begin{cases} y = bx + 3 \\ y = -5x + 3 \end{cases}$$

a) Suorilla on yhteinen piste (0, 3).

Vastaus: ei millään b:n arvolla

b) Oltava sama suora.

Vastaus: $b = -5$

c) Oltava eri kulmakertoimet.

Vastaus: $b \neq -5$

$$122. \begin{cases} y - kx = 5 \\ 2y - 3x = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = kx + 5 \\ 2y = 3x + b \end{cases} \quad | : 2$$

$$\begin{cases} y = kx + 5 \\ y = 1,5x + 0,5b \end{cases}$$

a) Oltava sama suora.

Vastaus: $k = 1,5$ ja $b = 10$

$$b) \begin{cases} 4 = 2k + 5 \\ 4 = 1,5 \cdot 2 + 0,5b \end{cases}$$

$$2k = 4 - 5$$

$$2k = -1 \quad | : 2$$

$$k = -0,5$$

$$4 = 3 + 0,5b$$

$$0,5b = 1 \quad | \cdot 2$$

$$b = 2$$

Vastaus: $k = -0,5$ ja $b = 2$

$$123. a) \begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -4x + 5 \end{cases}$$

$$2x + 4 = -4x + 5$$

$$6x = 1 \quad | : 6$$

$$x = \frac{1}{6}$$

Sijoitetaan ylempään yhtälöön.

$$y = 2 \cdot \frac{1}{6} + 4$$

$$y = \frac{1}{3} + 4 = 4\frac{1}{3}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = 4\frac{1}{3} \end{cases}$$

123. b)
$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -x - 3 \end{cases}$$

$$2x + 6 = -x - 3$$

$$2x + x = -3 - 6$$

$$3x = -9 \quad | : 3$$

$$x = -3 \quad \text{Sijoitetaan alempaan yhtälöön.}$$

$$y = -(-3) - 3$$

$$y = 3 - 3$$

$$y = 0$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

124. a)
$$\begin{cases} 7x - 12y = 13 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$7x - 12 \cdot 3 = 13$$

$$7x = 13 + 36$$

$$7x = 49 \quad | : 7$$

$$x = 7$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases} \quad \text{Sijoitetaan tähän yhtälöön.}$$

$$4x - (-3x + 5) = 2$$

$$4x + 3x - 5 = 2$$

$$7x = 7 \quad | : 7$$

$$x = 1 \quad \text{Sijoitetaan alempaan yhtälöön.}$$

$$y = -3 + 5$$

$$y = 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$125. \text{ a) } \begin{cases} x - 12y = 22 \\ y = x \end{cases}$$

$$x - 12x = 22$$

$$-11x = 22$$

$$x = -2$$

$$| : (-11)$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$y = -2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y = 4x \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

$$3x + 2 \cdot 4x = 11$$

$$3x + 8x = 11$$

$$11x = 11$$

$$x = 1$$

Sijoitetaan ylempään yhtälöön.

$$y = 4$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$126. \text{ a) } \begin{cases} x = 3y \\ y = x + 8 \end{cases}$$

$$y = 3y + 8$$

$$-2y = 8$$

$$y = -4$$

$$| : (-2)$$

Sijoitetaan ylempään yhtälöön.

$$x = 3 \cdot (-4)$$

$$x = -12$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -12 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$126. \text{ b) } \begin{cases} 2x + y = 14 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$2x + x + 2 = 14$$

$$3x = 12 \quad | : 3$$

$$x = 4$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$y = 4 + 2$$

$$y = 6$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$127. \text{ a) } \begin{cases} 5x - y + 2 = 0 \\ 2x + 4y - 8 = 0 \end{cases} \quad | : 2$$

$$\begin{cases} y = 5x + 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$x + 2(5x + 2) = 4$$

$$x + 10x + 4 = 4$$

$$11x = 0$$

$$x = 0$$

Sijoitetaan ylempään yhtälöön.

$$y = 0 + 2$$

$$y = 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$127. \text{ b) } \begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

$$3x - 4(-2x + 4) = -1$$

$$3x + 8x - 16 = -1$$

$$11x = 15 \quad | : 11$$

$$x = 1\frac{4}{11} \quad \text{Sijoitetaan alempaan yhtälöön.}$$

$$2\frac{8}{11} + y = 4$$

$$y = 4 - 2\frac{8}{11}$$

$$y = 1\frac{3}{11}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1\frac{4}{11} \\ y = 1\frac{3}{11} \end{cases}$$

$$128. \begin{cases} ax + by - 3 = 0 \\ 4x - 2ay + b = 0 \end{cases} \quad \text{piste } (1, 1) \Rightarrow x = 1 \text{ ja } y = 1$$

$$\begin{cases} a + b - 3 = 0 \\ 4 - 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b + 3 \\ 4 - 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$4 - 2(-b + 3) + b = 0$$

$$4 + 2b - 6 + b = 0$$

$$3b = 2 \quad | : 3$$

$$b = \frac{2}{3} \quad \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön.}$$

$$a = -\frac{2}{3} + 3$$

$$a = 2\frac{1}{3}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} a = 2\frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$129. \text{ a) } \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 8x &= 16 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$| : 8$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$6 + 2y = 12$$

$$2y = 6$$

$$y = 3$$

$$| : 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -x + 3y = 6 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$4y = 12$$

$$y = 3$$

$$| : 4$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$x + 3 = 6$$

$$x = 3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$130. \text{ a) } \begin{cases} 5x - 2y = 20 \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$| \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 20 \\ -4x + 2y = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 20 \\ -4x + 2y = -12 \end{cases}$$

$$x = 8$$

Sijoitetaan ylempään yhtälöön.

$$40 - 2y = 20$$

$$-2y = -20$$

$$y = 10$$

$$| : (-2)$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 8 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$130. \text{ b) } \begin{cases} -6x - 3y = 9 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \quad | \cdot 3$$

$$\begin{cases} -6x - 3y = 9 \\ 6x + 12y = 9 \end{cases}$$

$$9y = 18 \quad | : 9$$

$$y = 2$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$2x + 8 = 3$$

$$2x = -5 \quad | : 2$$

$$x = -2,5$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -2,5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$131. \text{ a) } \begin{cases} 8x + 3y = -13 \\ -3x + 2y = 8 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ | \cdot (-3) \end{array}$$

$$\begin{cases} 16x + 6y = -26 \\ 9x - 6y = -24 \end{cases}$$

$$25x = -50 \quad | : 25$$

$$x = -2$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$-3(-2) + 2y = 8$$

$$6 + 2y = 8$$

$$2y = 2 \quad | : 2$$

$$y = 1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 4y = 14 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | \cdot 5 \\ | \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{cases} 10x - 20y = 70 \\ -10x + 6y = 0 \end{cases}$$

$$-14y = 70 \quad | : (-14)$$

$$y = -5$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$5x + 15 = 0$$

$$5x = -15 \quad | : 5$$

$$x = -3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$132. \text{ a) } \begin{cases} x + y = 1 & | \cdot (-1) \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y = -1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$x = 2$$

Sijoitetaan ylempään yhtälöön.

$$2 + y = 1$$

$$y = -1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 6x + 8y = 0 \\ 4x + 2y = 0 & | \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 8y = 0 \\ -16x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -10x = 0 \\ x = 0 \end{array} \quad | : (-10)$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$0 + 2y = 0$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$133. \text{ a) } \begin{cases} -3x + 10y = 2 & | \cdot 4 \\ 4x + 9y = 42 & | \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12x + 40y = 8 \\ 12x + 27y = 126 \end{cases}$$

$$67y = 134 \quad | : 67$$

$y = 2$ Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$4x + 18 = 42$$

$$4x = 24 \quad | : 4$$

$$x = 6$$

Vastaus: (6, 2)

$$133. \text{ b) } \begin{cases} 3x - 8y = 42 & | \cdot (-7) \\ 7x + 3y = 33 & | \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -21x + 56y = -294 \\ 21x + 9y = 99 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 65y &= -195 & | : 65 \\ y &= -3 & \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 24 &= 42 \\ 3x &= 18 & | : 3 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Vastaus: $(6, -3)$

$$134. \text{ a) } \begin{cases} x = 2y \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2y + 2y &= 8 \\ 4y &= 8 & | : 4 \\ y &= 2 & \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + 3(-x + 1) &= 9 \\ x - 3x + 3 &= 9 \\ -2x &= 6 & | : (-2) \\ x &= -3 & \text{Sijoitus ylempään yhtälöön.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3 + y &= 1 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$135. \text{ a) } \begin{cases} -x - y = 1 \\ x - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -6y = -12 \\ y = 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} : (-6) \\ \text{Sijoitetaan alempaan yhtälöön.} \end{array} \right.$$

$$x - 10 = -13$$

$$x = -3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x - 2y = -6 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = -6 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

$$4x - 2(2x + 3) = -6$$

$$4x - 4x - 6 = -6$$

$$0 = 0 \quad \text{identtisesti tosi}$$

Vastaus: Ratkaisuna ovat kaikki suoran $y = 2x + 3$ pisteet.

$$136. \text{ a) } \begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön.} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} -2x - 6y = -20 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$$

$$y = -12 \quad \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön.}$$

$$x + 3(-12) = 10$$

$$x = 10 + 36$$

$$x = 46$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 46 \\ y = -12 \end{cases}$$

$$136. \text{ b) } \begin{cases} 7x + 3y = 12 & | \cdot 4 \\ 3x + 4y = 16 & | \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 28x + 12y = 48 \\ -9x - 12y = -48 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 19x & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array} \quad | : 19$$

Sijoitetaan ylempään yhtälöön.

$$\begin{array}{rcl} 3y & = & 12 \\ y & = & 4 \end{array} \quad | : 3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$137. \text{ a) } \begin{cases} 2x + 7y = 8 & | \cdot (-1) \\ 2x = -7y + 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 7y = -8 \\ 2x + 7y = 22 \end{cases}$$

$$0 = 14 \quad \text{identtisesti epätosi}$$

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

$$\text{b) } \begin{cases} 4x - 3y = 13 & | \cdot 7 \\ 3x + 7y = 19 & | \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 28x - 21y = 91 \\ 9x + 21y = 57 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 37x & = & 148 \\ x & = & 4 \end{array} \quad | : 37$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$\begin{array}{rcl} 12 + 7y & = & 19 \\ 7y & = & 7 \\ y & = & 1 \end{array} \quad | : 7$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$138. \begin{cases} 3x - y = 4 \\ bx + (a + 1)y = 5 \end{cases}$$

Jos $a + 1 = 0$, niin yhtälöt ovat $3x - y = 4$ ja $bx = 5$ eli $y = 3x - 4$ ja $bx = 5$.

Jos $b = 0$, jälkimmäinen yhtälö on identtisesti epätosi ($0 = 5$),

ja jos $b \neq 0$, jälkimmäinen yhtälö esittää pystysuoraa suoraa ($x = 5/b$).

Kummassakaan tapauksessa yhtälöparilla ei ole äärettömän montaa ratkaisua.

Tarkastellaan seuraavaksi tapaus $a + 1 \neq 0$.

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ (a + 1)y = -bx + 5 \quad | : (a + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = \frac{-b}{a + 1}x + \frac{5}{a + 1} \end{cases}$$

Kun kulmakertoimet ovat samat ja vakiotermit ovat samat,

kyseessä on sama suora ja yhtälöparilla on äärettömästi ratkaisuja.

$$\begin{cases} \frac{-b}{a + 1} = 3 \\ \frac{5}{a + 1} = -4 \end{cases}$$

Ratkaistaan verrannot kertomalla ristiin. Saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} -b = 3a + 3 \\ 5 = -4a - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = 3a + 3 \\ 4a = -9 \quad | : 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -3a - 3 \\ a = -2\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$b = -3\left(-2\frac{1}{4}\right) - 3 = 6\frac{3}{4} - 3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} a = -2\frac{1}{4} \\ b = 3\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$139. \begin{cases} 2x = y + 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = y + 3 \\ x = -y + 3 \end{cases}$$

$$2(-y + 3) = y + 3$$

$$-2y + 6 = y + 3$$

$$-2y - y = 3 - 6$$

$$-3y = -3$$

$$y = 1$$

| : (-3)

Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$x + 1 = 3$$

$$x = 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \text{ kg} \\ y = 1 \text{ kg} \end{cases}$$

140. Marjaanan pituus on x ja Elisan pituus y . Marjaana on pidempi.

$$\begin{cases} x + y = 290 \\ x - y = 20 \end{cases}$$

$$2x = 310$$

$$x = 155$$

| : 2

Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$155 + y = 290$$

$$y = 290 - 155$$

$$y = 135$$

Vastaus: Marjaana on 155 cm ja Elisa 135 cm.

$$141. \begin{cases} 4x + 2y = 40 \\ 2x + 6y = 60 \end{cases} \quad | \cdot (-2)$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 40 \\ -4x - 12y = -120 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -10y = -80 \\ y = 8 \end{array} \quad | : (-10)$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$2x + 48 = 60$$

$$2x = 12 \quad | : 2$$

$$x = 6$$

Vastaus: Sinisen sivut 8 cm ja 12 cm ja oranssin 6 cm ja 24 cm.

142. Kuparin tiheys on x ja sinkin tiheys y .

$$\begin{cases} 1,2x + 0,88y = 17 & | \cdot (-700) \\ 0,7x + 0,52y = 10 & | \cdot 1200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -840x - 616y = -11\,900 \\ 840x + 624y = 12\,000 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 8y = 100 \\ y = 12,5 \end{array} \quad | : 12$$

Sijoitetaan ylempään yhtälöön.

$$1,2x + 0,88 \cdot 12,5 = 17$$

$$1,2x + 11 = 17$$

$$1,2x = 6 \quad | : 1,2$$

$$x = 5$$

Vastaus: tiheydet: kupari $5,0 \text{ kg/dm}^3$ ja sinkki $12,5 \text{ kg/dm}^3$
 Nämä eivät vastaa kovin hyvin aineiden todellisia tiheyksiä, joten tiheyksiä ei kannata todellisuudessa määrittää näin.

$$143. \begin{cases} x_L = 80t & \text{(Leevin etäisyys Leevin kodista)} \\ x_K = 820 - 60t & \text{(Katariinan etäisyys Leevin kodista)} \end{cases}$$

Leevi ja Katariina kohtaavat, kun $x_L = x_K$.

$$\begin{array}{rcl} 80t = 820 - 60t & & \\ 140t = 820 & | : 140 & \\ t \approx 5,857 & & \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön.} \end{array}$$

$$x = 80 \cdot 5,857 \approx 470$$

Leevi ja Katariina kohtaavat, kun lähdöstä on kulunut n. 6 minuuttia.

He ovat silloin noin 470 metrin päässä Leevin kodista.

Vastaus: 6 minuuttia ja 470 m

$$144. \begin{cases} x + y = 25 \\ 2x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 25 - y \\ 2x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 2(25 - y) = 3y & & \\ 50 - 2y = 3y & & \\ 5y = 50 & | : 5 & \\ y = 10 & & \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + 10 = 25 \\ x = 15 \end{array}$$

Vastaus: Luvut ovat 15 ja 10.

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{145.} \quad \begin{cases} 2x + y = 22 \\ 3x + y = 27 \end{cases} \quad | \cdot (-1) \\
 \\
 \begin{cases} -2x - y = -22 \\ 3x + y = 27 \end{cases} \\
 x = 5 \quad \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön.} \\
 \\
 10 + y = 22 \\
 y = 12
 \end{array}$$

Vastaus: Luvut ovat 5 ja 12.

146. Maijun auton hinta on x ja Millan auton hinta y .

$$\begin{array}{l}
 \begin{cases} x - y = 2500 \\ x + y = 50\,500 \end{cases} \\
 2x = 53\,000 \quad | : 2 \\
 x = 26\,500 \quad \text{Sijoitetaan alempaan yhtälöön.} \\
 \\
 26\,500 + y = 50\,500 \\
 y = 24\,000
 \end{array}$$

Vastaus: Maijun auto 26 500 € ja Millan auto 24 000 €.

147. Lapsia x ja aikuisia y .

$$\begin{array}{l}
 \begin{cases} x + y = 60 \\ 7x + 12y = 540 \end{cases} \quad | \cdot (-7) \\
 \\
 \begin{cases} -7x - 7y = -420 \\ 7x + 12y = 540 \end{cases} \\
 5y = 120 \quad | : 5 \\
 y = 24 \quad \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön.} \\
 \\
 x + 24 = 60 \\
 x = 36
 \end{array}$$

Vastaus: 36 lasta ja 24 aikuista

$$148. \begin{cases} x - y = 10 \\ \frac{x + y}{2} = 25 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

$$2x = 60 \quad | : 2$$

$$x = 30$$

Sijoitetaan ylempään yhtälöön.

$$30 - y = 10$$

$$-y = -20$$

$$y = 20$$

Vastaus: Luvut ovat 30 ja 20.

149. Veetin ikä nyt on x ja Urhon ikä y .

$$\begin{cases} x - 3 = 4(y - 3) \\ x + 3 = 3(y + 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 = 4y - 12 \\ x + 3 = 3y + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y = -9 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} -x + 4y = 9 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$y = 15$$

Sijoitetaan yhtälöön $x - 3y = 6$.

$$x - 45 = 6$$

$$x = 51$$

Vastaus: Veeti 51 v ja Urho 15 v

150. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{8}{6} \\ \frac{4}{6} = \frac{y}{6-x} \end{cases}$$

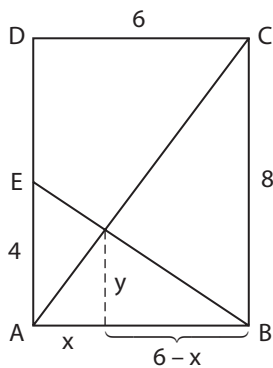
$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = -\frac{2}{3}x + 4 \end{cases}$$

$$\frac{4}{3}x = -\frac{2}{3}x + 4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2\frac{2}{3} \end{cases}$$



151.
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ (100x + 10y + 3) + (100y + 30 + x) = 785 \end{cases}$$

$$x \quad y \quad 3$$

$$y \quad 3 \quad x$$

$$\begin{cases} x + y = 7 & | \cdot (-101) \\ 101x + 110y = 752 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -101x - 101y = -707 \\ 101x + 110y = 752 \end{cases}$$

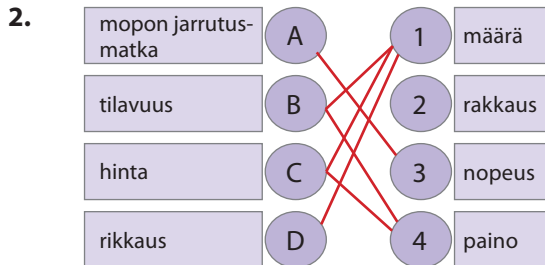
$$\begin{aligned} 9y &= 45 & | :9 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

$$x = 7 - y = 7 - 5 = 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Kotitehtäviä

1. esimerkiksi puheajasta, sopimuksesta, maasta



(Rikkaus riippuu rahan ym. varallisuuden määrästä.

Lisätieto: suhteellisuusteorian mukaan tilavuus riippuu nopeudesta.)

3. a) $2,00 \text{ €} : 6,80 \text{ €/kg} \approx 294 \text{ g}$
b) $0,250 \text{ kg} \cdot 6,80 \text{ €/kg} = 1,70 \text{ €}$

4. a)
-
- 2 → 1
4 → 2
6 → 3
8 → 4
x → $y = x : 2$

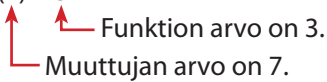
- b)
-
- 2 → -1
4 → 0
6 → 1
8 → 2
x → $y = x : 2 - 2$

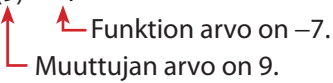
5. $h(a)$
↑ muuttujakirjain
↑ funktio

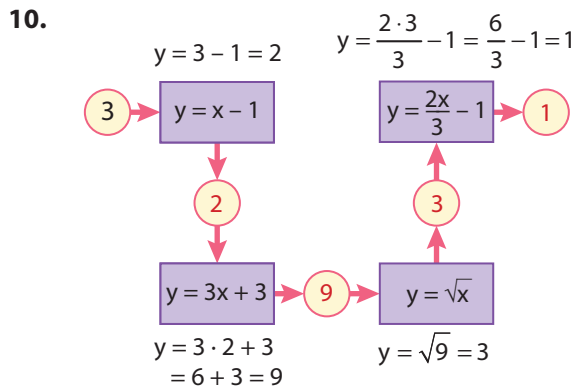
6. $y = 2x$

7. $y = 2,5 \cdot x$
 x on mitta ilmoitettuna tuumina.
 y on mitta ilmoitettuna senttimetreinä.

8. $f(x) = x + 9$
 a) $f(0) = 0 + 9 = 9$
 b) $f(2) = 2 + 9 = 11$
 c) $f(-4) = -4 + 9 = 5$

9. a) $f(7) = 3$

 Funktion arvo on 3.
 Muuttujan arvo on 7.

- b) $g(9) = -7$

 Funktion arvo on -7 .
 Muuttujan arvo on 9.

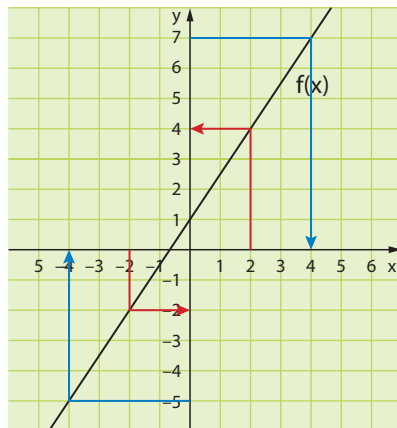


11. $f(x) = 3x$
 a) $f(2) = 3 \cdot 2 = 6$
 b) $f(0) = 3 \cdot 0 = 0$
 c) $f(-1) = 3 \cdot (-1) = -3$

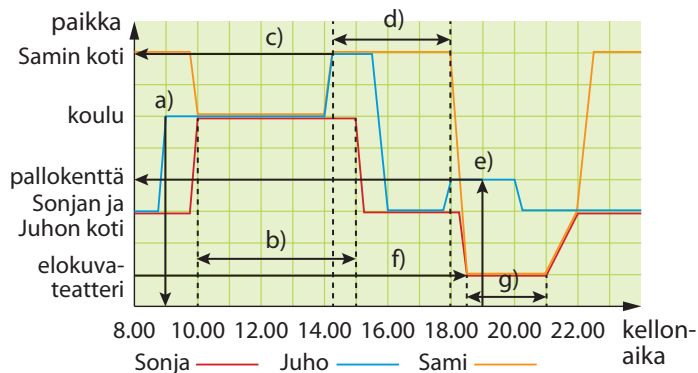
12. $p(a) = 4a$
 a) $p(1 \text{ cm}) = 4 \cdot 1 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$
 b) $p(5 \text{ m}) = 4 \cdot 5 \text{ m} = 20 \text{ m}$

13. a) $-x + 4 = 4$
 $-x = 4 - 4$
 $-x = 0$ $|\cdot (-1)$
 $x = 0$
- b) $-x + 4 = 0$
 $-x = -4$
 $-x = -4$ $|\cdot (-1)$
 $x = 4$
- c) $-x + 4 = -3$
 $-x = -3 - 4$
 $-x = -7$ $|\cdot (-1)$
 $x = 7$

14. a) $f(2) = 4$
b) $f(-2) = -2$
c) $f(0) = 1$
d) $x = -4$
e) $x = 4$



15. a) 9.00
 b) koulussa 10.00 – 15.00 Vastaus: 5 tuntia
 c) Samin kotiin
 d) kotona 14.15 – 18.00 Vastaus: 3 h 45 min
 e) pallokentällä
 f) Sonja ja Sami
 g) elokuva 18.30 – 21.00 Vastaus: 2 h 30 min



16. $f(x) = g(x)$
 $2x = x + 2$
 $2x - x = 2$
 $x = 2$

17. $f(x) = g(x)$
 $x^2 + x = x + 4$
 $x^2 + x - x = 4$
 $x^2 = 4$ $|\sqrt{\quad}$
 $x = \pm 2$

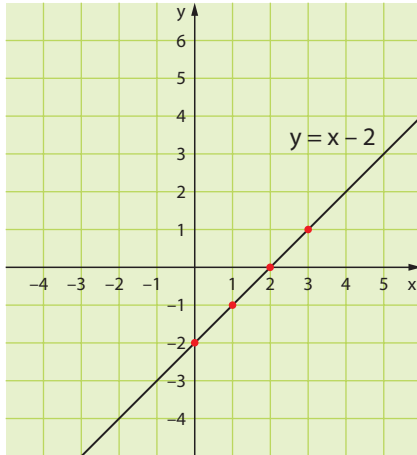
18. a) On. Muuttujan korkein eksponentti on 1.
 b) Ei. Muuttujan korkein eksponentti on 2.
 c) On. Muuttujan korkein eksponentti on 1.
 d) On. Muuttujan korkein eksponentti on 1.

19. a)

x	0	1	2	3
y	-2	-1	0	1
	$=0-2$	$=1-2$	$=2-2$	$=3-2$

$$y = x - 2$$

b)



20. a) $y = x - 5$

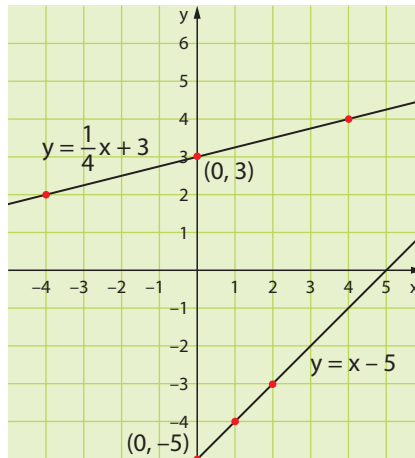
x	y
0	-5
1	-4
2	-3

leikkauspiste $(0, -5)$

b) $y = \frac{1}{4}x + 3$

x	y
0	3
-4	2
4	4

leikkauspiste $(0, 3)$



21.

Suora	Kulma-kerroin	Vakio-termi	Nouseva vai laskeva
$y = x + 9$	1	9	nouseva
$y = -x + 7$	-1	7	laskeva
$y = -2x - 1$	-2	-1	laskeva
$y = \frac{4}{7}x - \frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{2}$	nouseva

22. a) $(0, -3)$; vakiotermi -3
 b) $(0, 4)$; vakiotermi 4
 c) $(0, 0)$; vakiotermi puuttuu eli on 0
 d) $(0, 9)$; vakiotermi 9

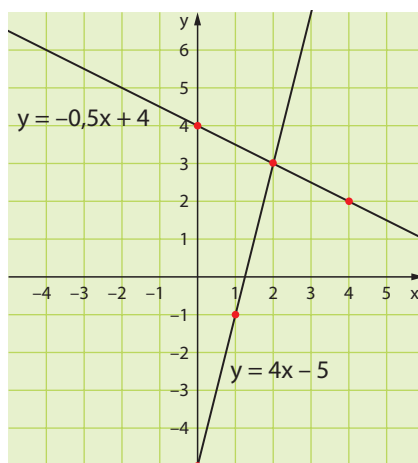
23. Nouseva suora nousee vasemmalta oikealle siirryttäessä.
 Vastaus: onki

24. a) $y = 4x - 5$

x	y
0	-5
1	-1
2	3

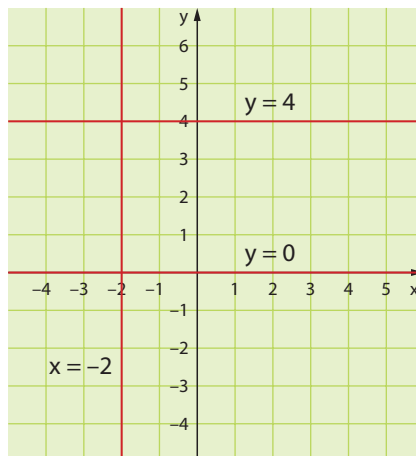
- b) $y = -0,5x + 4$

x	y
0	4
2	3
4	2

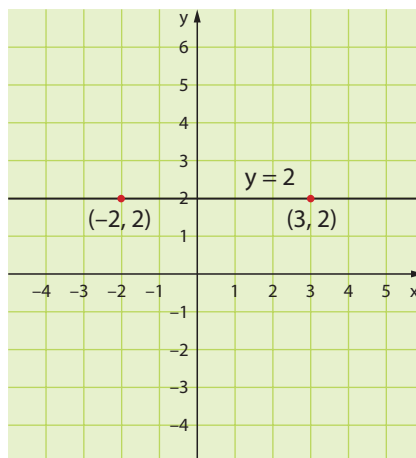


25. k: $y = -3$ vaakasuora, y saa arvon -3
 m: $y = 3$ vaakasuora, y saa arvon 3
 n: $x = 2$ pystysuora, x saa arvon 2

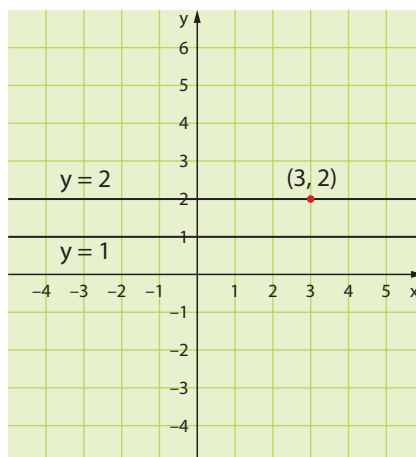
26. a) $y = 4$ kaikilla x :n arvoilla
b) $y = 0$ kaikilla x :n arvoilla
c) y saa kaikki arvot x :n arvolla -2 .



27. a)
b) $y = 2$



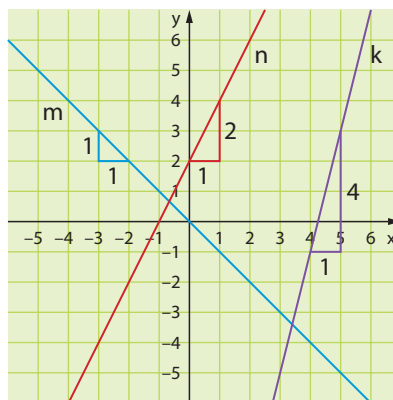
28. a)
b) $y = 2$



29. k: $k = \frac{4}{1} = 4$

m: laskeva suora, $k = -\frac{1}{1} = -1$

n: $k = \frac{2}{1} = 2$



30. r: laskeva suora, $k = -\frac{2}{1} = -2$

leikkaa y-akselin (0, 3)

Vastaus: $y = -2x + 3$

s: $k = \frac{1}{3}$

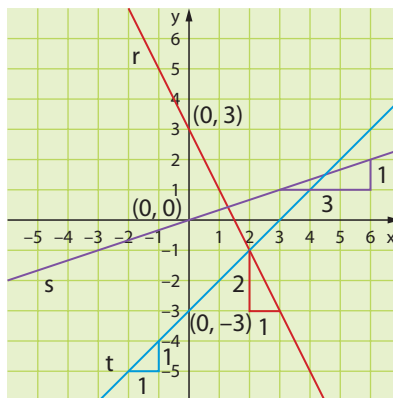
leikkaa y-akselin pisteessä (0, 0)

Vastaus: $y = \frac{1}{3}x$

t: $k = \frac{1}{1} = 1$

leikkaa y-akselin pisteessä (0, -3)

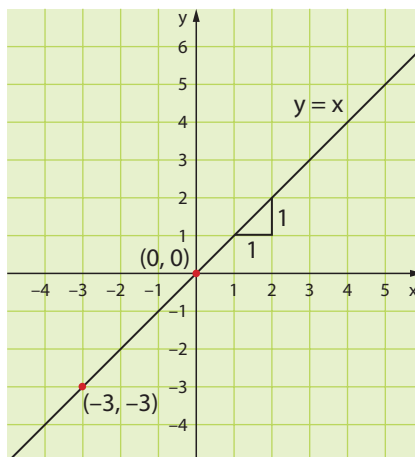
Vastaus: $y = x - 3$



31. $k = \frac{1}{1} = 1$

leikkaa y-akselin pisteessä (0, 0)

Vastaus: $y = x$



32. (0, 3); vakiotermin on 3.

$$k = 1$$

$$\text{Vastaus: } y = x + 3$$

33. (0, -5); vakiotermin on -5.

Kulmakerroin sama kuin suoralla $y = 8x + 7$; $k = 8$.

$$\text{Vastaus: } y = 8x - 5$$

34. kulmakerroin sama kuin suoralla $y = 4x - 1$; $k = 4$

Sijoitetaan pisteen (1, 6) koordinaatit yhtälöön $y = 4x + b$:

$$6 = 4 \cdot 1 + b$$

$$6 = 4 + b$$

$$6 - 4 = b$$

$$b = 2$$

$$\text{Vastaus: } y = 4x + 2$$

35. kulmakerroin sama kuin suoralla $y = \frac{2}{3}x$; $k = \frac{2}{3}$

Sijoitetaan pisteen (3, 5) koordinaatit yhtälöön $y = \frac{2}{3}x + b$:

$$5 = \frac{2}{3} \cdot 3 + b$$

$$5 = 2 + b$$

$$5 - 2 = b$$

$$b = 3$$

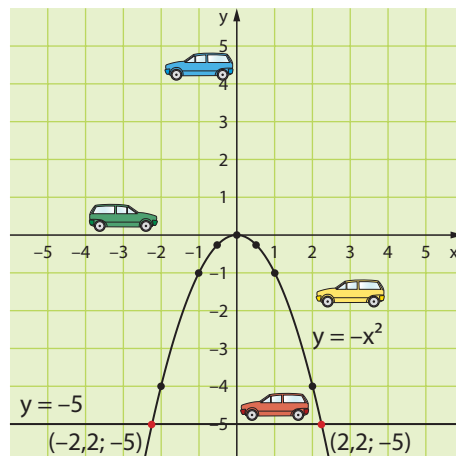
$$\text{Vastaus: } y = \frac{2}{3}x + 3$$

36. a) punainen auto

b) $y = -x^2$

x	y
0	0
$\pm 0,5$	-0,25
± 1	1
± 2	4

c) $(-2, 2; -5)$ ja $(2, 2; -5)$

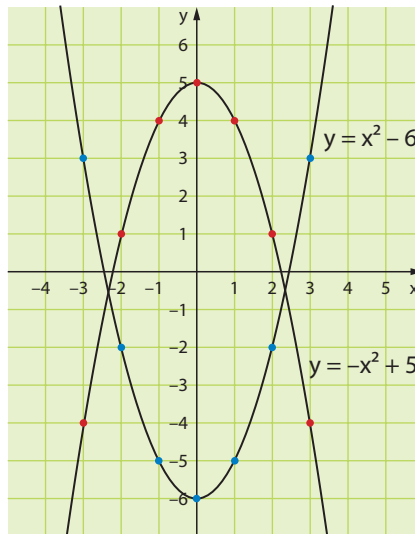


37. $y = x^2 - 6$

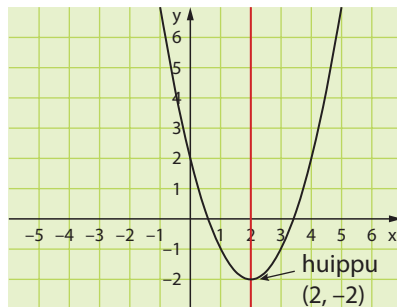
x	y
0	0
± 1	-5
± 2	-2
± 3	3

$y = -x^2 + 5$

x	y
0	0
± 1	4
± 2	1
± 3	-4

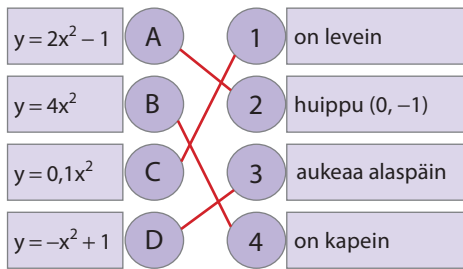


38. a) $(2, -2)$
b) $x = 2$



39. a) c; alaspäin aukeava, huippu $(0, 4)$
b) a; ylöspäin aukeava, huippu $(0, -3)$
c) b; ylöspäin aukeava, huippu $(0, 0)$

40.

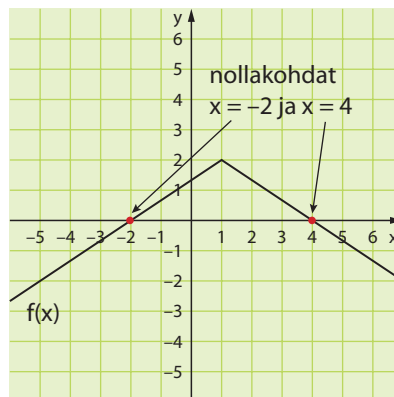


- 1: pienin x^2 -termin kertoimen itseisarvo
 2: vakiotermi -1
 3: negatiivinen x^2 -termin kerroin
 4: suurin x^2 -termin kertoimen itseisarvo

41. ylöspäin aukeava eli x^2 -termi on positiivinen yhtä leveä kuin paraabeli $y = x^2$ eli x^2 -termin kerroin on 1 huippu pisteessä $(0, 2)$ eli vakiotermi on 2
 Vastaus: $y = x^2 + 2$

42. huippu pisteessä $(0, 2)$ eli vakiotermi on 2
 Sijoitetaan pisteen $(1, 3)$ koordinaatit yhtälöön $y = ax^2 + 2$:
- $$3 = a \cdot 1^2 + 2$$
- $$3 = a + 2$$
- $$3 - 2 = a$$
- $$a = 1$$
- Vastaus: $y = x^2 + 2$

43. $x = -2$ ja $x = 4$



44. a) $x - 7 = 0$

$x = 7$

b) $x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$

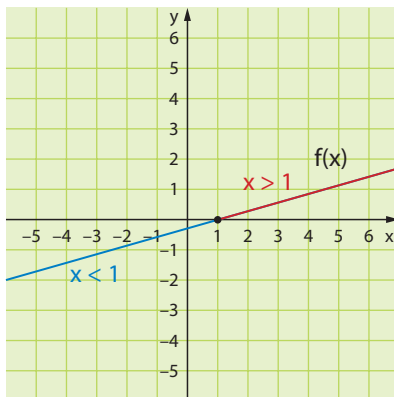
$x = \pm 4$

$|\sqrt{\quad}$

45. a) $x = 1$

b) $x > 1$

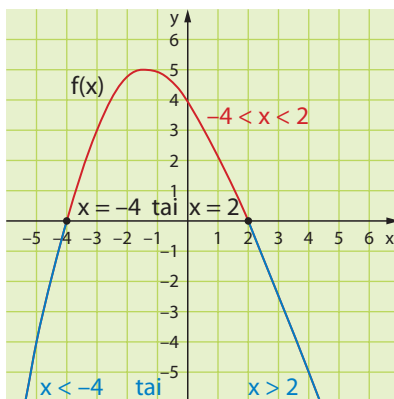
c) $x < 1$



46. a) $x = -4$ tai $x = 2$

b) $-4 < x < 2$

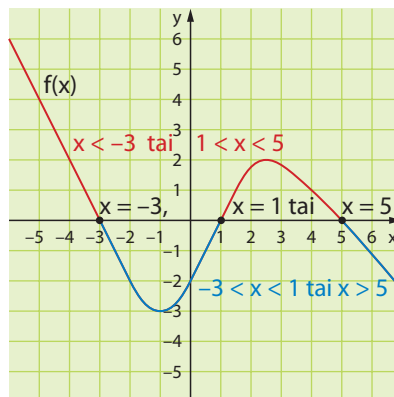
c) $x < -4$ tai $x > 2$



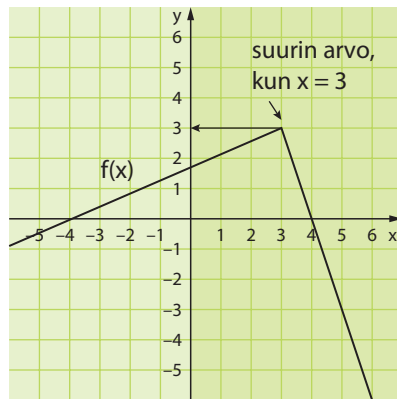
47. a) $x = -3, x = 1$ tai $x = 5$

b) $x < -3$ tai $1 < x < 5$

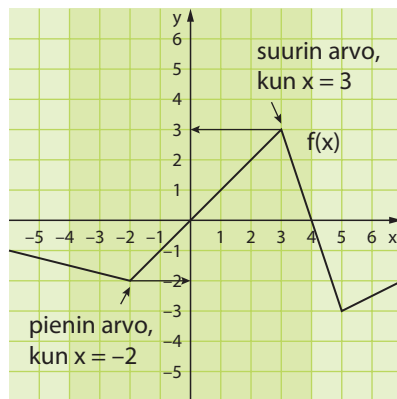
c) $-3 < x < 1$ tai $x > 5$



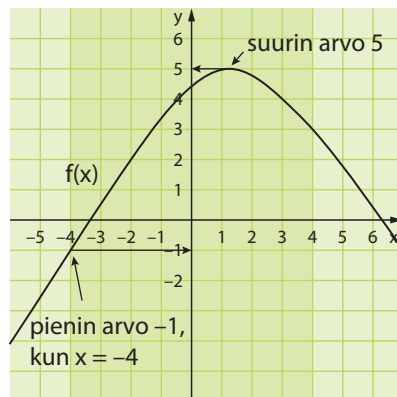
48. 3



49. a) 3
b) -2



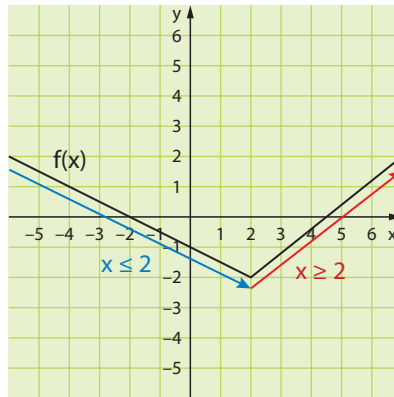
50. a) Suurin arvo on 5.
Pienin arvo on -1.
b) $x = -4$



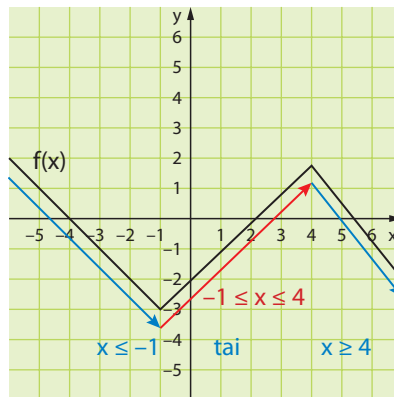
51. $-x^2 \leq 0$, joten $-x^2 + 2 \leq 2$ kaikilla x , ja $f(0) = -0^2 + 2 = 2$.
Vastaus: 2

52. $f(x) = x^2 - 2$ on ylöspäin aukeava paraabeli, joten pienin arvo on paraabelin huipun y -arvo -2 .
Suurin arvo saadaan x :n arvolla -2 tai 3 .
 $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$
 $f(3) = 3^2 - 2 = 7$
Vastaus: Pienin arvo on -2 ja suurin arvo on 7 .

53. a) $x \geq 2$
b) $x \leq 2$

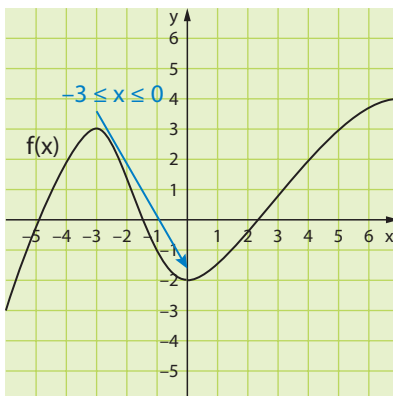


54. a) $-1 \leq x \leq 4$
b) $x \leq -1$ tai $x \geq 4$

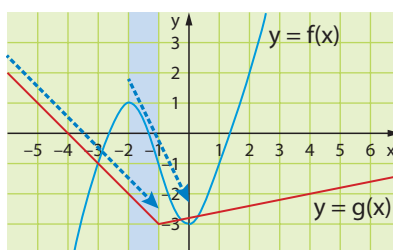


55. a) nouseva suora
Vastaus: kasvaa kaikilla x :n arvoilla
b) ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on pisteessä $(0, -11)$
funktio kasvaa, kun $x \geq 0$
Vastaus: $x \geq 0$

56. $-3 \leq x \leq 0$



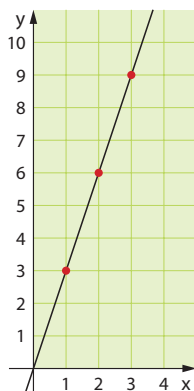
57. $f(x)$ vähenevä
välillä $-2 \leq x \leq 0$
 $g(x)$ vähenevä, kun $x \leq -1$
molemmat väheneviä
välillä $-2 \leq x \leq -1$
Vastaus: $-2 \leq x \leq -1$



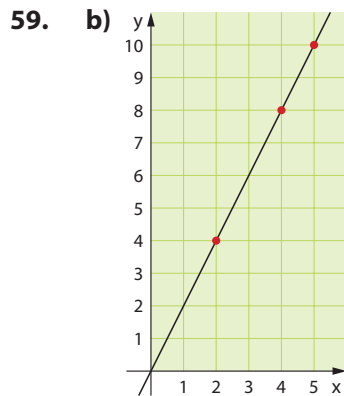
58.

Suure A	Suure B
1,0	2,5
3,0	7,5
4,0	10,0

59. a)

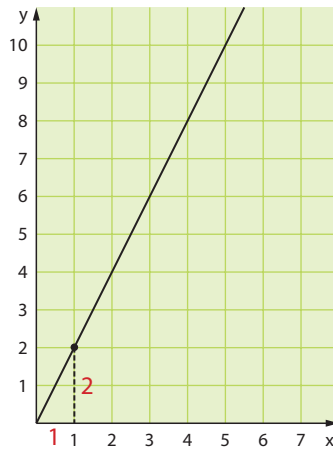


Vastaus: Suureet ovat suoraan verrannollisia.

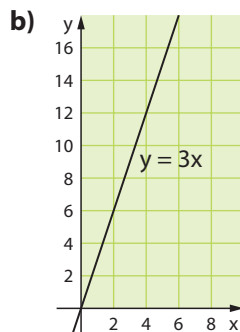


Vastaus: Suureet ovat suoraan verrannollisia.

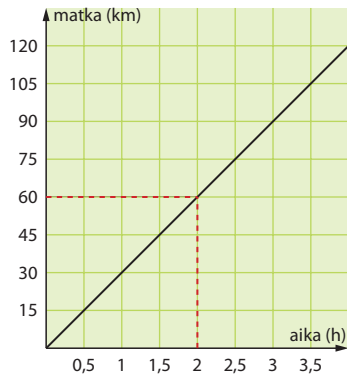
60. a) $k = \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = 2$
 b) $y = 2x$



61. a) kulutus x (m^3) ja hinta y (€)
 $75 \text{ €} : 25 \text{ m}^3 = 3 \text{ €/m}^3$
 Vastaus: $y = 3x$



62.

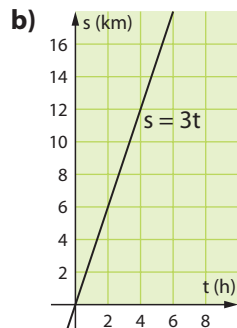


a) nopeus $v = \frac{60}{2} \text{ km/h} = 30 \text{ km/h}$

b) matka $s = 30 \text{ km/h} \cdot 5 \text{ h} = 150 \text{ km}$

63. a) matka s ja aika t

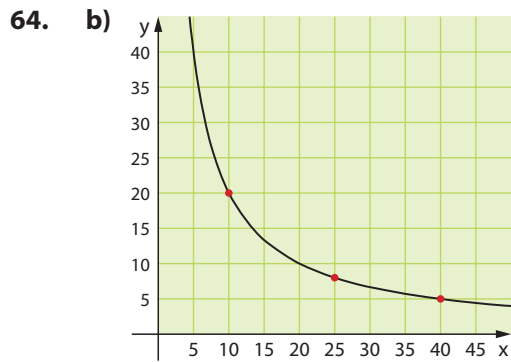
Vastaus: $s = 3t$



64. a)

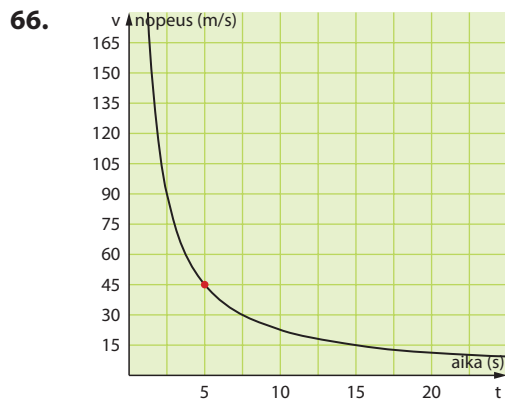


Vastaus: Suuret ovat kääntäen verrannollisia.



Vastaus: Suureet ovat kääntäen verrannollisia.

- 65. a)** $y = 2$
b) $x = 4$
c) $k = xy = 4 \cdot 3 = 12$
 Vastaus: $y = \frac{12}{x}$



- a)** $s = vt = 5 \text{ s} \cdot 45 \text{ m/s} = 225 \text{ m}$
b) $v = \frac{225}{t}$

67. $xy = 280$

Vastaus: $y = \frac{280}{x}$

68. A ja B suoraan verrannollisia; $A = k_1 B$

B ja C kääntäen verrannollisia; $B = \frac{k_2}{C}$

sijoitus yhtälöön $A = k_1 C$

$$A = \frac{k_1 \cdot k_2}{C}$$

Vastaus: A ja C ovat kääntäen verrannollisia.

69. $5x - 4y = 8$

a) $5 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 8$
 $20 - 12 = 8$

Vastaus: toteutuu

b) $5 \cdot 0 - 4 \cdot (-2) = 8$
 $8 = 8$

Vastaus: toteutuu

c) $5 \cdot 2 - 4 \cdot 0 = 8$
 $10 = 8$ epätosi

Vastaus: ei toteudu

70. a) $A(1, 1)$, koska $2 \cdot 1 + 1 = 3$

$B(-1, 5)$, koska $2 \cdot (-1) + 5 = 3$

Vastaus: A ja B

b) ei mitkään

c) $D(-2, 4)$, koska $-2 + 2 \cdot 4 = 6$

Vastaus: D

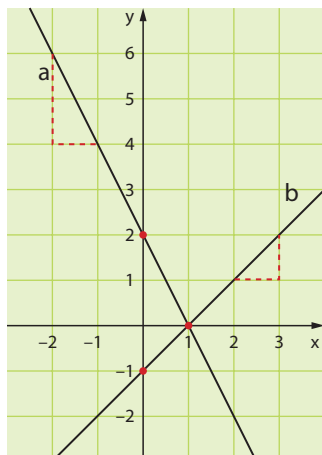
71. a) $3x + y = 85$

b) $3 \cdot 20 + 25 = 85$
 $85 = 85$

Vastaus: toteutuu

c) on; kaikki suoran $y = -3x + 85$ pisteet
esim. $x = 25$ cm ja $y = 10$ cm

72. a) $y = -2x + 2$
 b) $y = x - 1$
 b) $(1, 0)$



73. Sijoitetaan yhtälöihin $x = 2$ ja $y = -3$.

a) $y = 5x - 13$
 $-3 = 5 \cdot 2 - 13$
 $-3 = 10 - 13$
 $-3 = -3$ tosi

Vastaus: toteuttaa

b) $y = -2x + 1$
 $-3 = -2 \cdot 2 + 1$
 $-3 = -4 + 1$
 $-3 = -3$ tosi

Vastaus: toteuttaa

c) toteuttaa

74. $C(2, 0)$

$$2 \cdot 2 + 6 \cdot 0 = 4$$

$$4 = 4$$

$$-4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = -8$$

$$-8 = -8$$

75. a) $\begin{cases} x + 3y = 100 \\ x + y = 60 \end{cases}$

b) $x = 40$ ja $y = 20$

$$40 + 3 \cdot 20 = 100$$

$$40 + 20 = 60$$

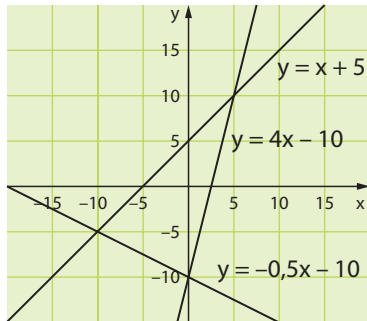
$$76. \begin{cases} y = ax - 2 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x = 2$ ja $y = 1$ yhtälöön $y = ax - 2$.

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot 2 - 2 \\ 1 &= 2a - 2 \\ -2a &= -3 && | :(-2) \\ a &= 1,5 \end{aligned}$$

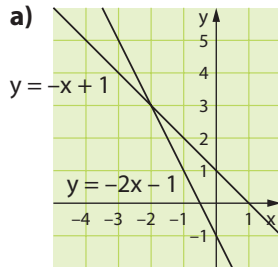
Vastaus: $a = 1,5$

77.

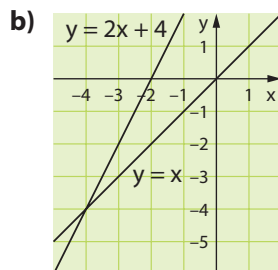


Vastaus: a) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -10 \\ y = -5 \end{cases}$

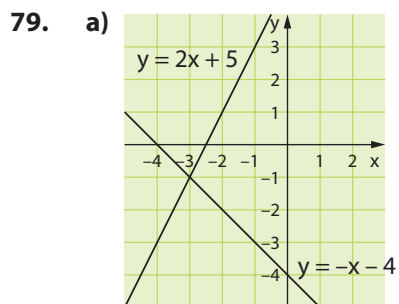
78.



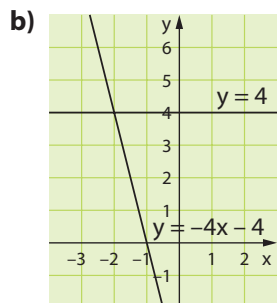
Vastaus: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$



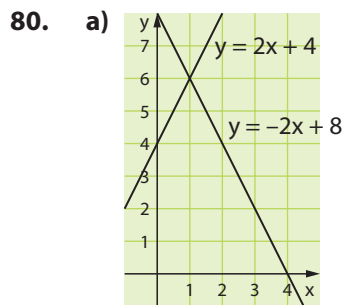
Vastaus: $\begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases}$



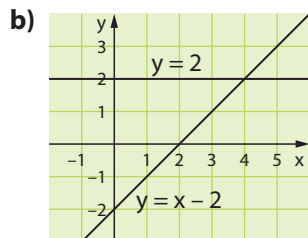
Vastaus: $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$



Vastaus: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$



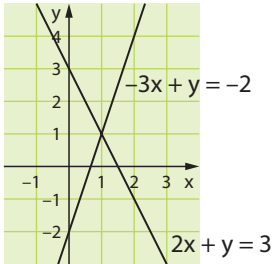
Vastaus: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$



Vastaus: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

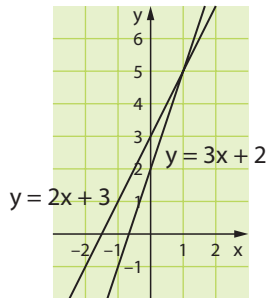
$$81. \begin{cases} -3x + y = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$



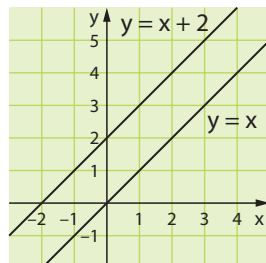
Vastaus: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

82. a)



Vastaus: Yhtälöparilla on yksi ratkaisu.

b)



Vastaus: Yhtälöparilla ei ole yhtään ratkaisua.

83. a) $k_1 = k_2 = 32$
 $b_1 \neq b_2$

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

b) $k_1 \neq k_2$
 $b_1 = b_2$

Vastaus: Yhtälöparilla on yksi ratkaisu.

84. a)
$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ y = -3x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 12 \\ y = -3x + 6 \end{cases}$$

$k_1 = k_2$ ja $b_1 \neq b_2$

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

b)
$$\begin{cases} y = 12 \\ y = 12x + 5 \end{cases}$$

$k_1 \neq k_2$

Vastaus: Yhtälöparilla on yksi ratkaisu.

85. Ei ratkaisua: $k_1 = k_2$ ja $b_1 \neq b_2$

Vastaus: esim.
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

86. Ratkaisuja on äärettömän monta, mikäli yhtälöt ovat samat.

$$\begin{cases} ax + 2y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} ax + 2y = 4 \\ 6x + 2y = 4 \end{cases}$$

Vastaus: $a = 6$

$$\begin{aligned}
 87. \quad \text{a)} \quad & \begin{cases} x = 2 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \\
 & 3 \cdot 2 + 2y = 4 \\
 & 6 + 2y = 4 \\
 & 2y = -2 \\
 & y = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \begin{cases} y = -2 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \\
 & x + 3 \cdot (-2) = 9 \\
 & x - 6 = 9 \\
 & x = 15
 \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 15 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 88. \quad \text{a)} \quad & \begin{cases} 4x + y = 17 \\ x + y = 5 \end{cases} \\
 & \begin{cases} 4x + y = 17 \\ y = 5 - x \end{cases} \\
 & 4x + (5 - x) = 17 \\
 & 4x + 5 - x = 17 \\
 & 3x = 12 \quad | : 3 \\
 & x = 4
 \end{aligned}$$

sijoitus yhtälöön $y = 5 - x$

$$y = 5 - 4$$

$$y = 1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases} \\
 & \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = 1 - x \end{cases} \\
 & x + 2(1 - x) = 5 \\
 & x + 2 - 2x = 5 \\
 & -x = 3 \\
 & x = -3
 \end{aligned}$$

sijoitus yhtälöön $y = 1 - x$

$$y = 1 - (-3)$$

$$y = 4$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$89. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} x - y = -6 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -6 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

$$x - (2 - x) = -6$$

$$x - 2 + x = -6$$

$$2x = -4 \quad | : 2$$

$$x = -2 \quad \text{sijoitus yhtälöön } y = 2 - x$$

$$y = 2 - (-2)$$

$$y = 4$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ y - x = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 8 + x \end{cases}$$

$$x + (8 + x) = 0$$

$$2x = -8 \quad | : 2$$

$$x = -4 \quad \text{sijoitus yhtälöön } y = 8 + x$$

$$y = 8 + (-4)$$

$$y = 4$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$90. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} x + 6y = 10 \\ 2x + 3y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 - 6y \\ 2x + 3y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$2(10 - 6y) + 3y + 7 = 0$$

$$20 - 12y + 3y + 7 = 0$$

$$27 - 9y = 0$$

$$-9y = -27 \quad | : (-9)$$

$$y = 3 \quad \text{sijoitus yhtälöön } x = 10 - 6y$$

$$x = 10 - 6 \cdot 3$$

$$x = -8$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -8 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$90. \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 3x + 10y - 22 = 0 \\ 7x = -y - 38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 10y - 22 = 0 \\ y = -7x - 38 \end{cases}$$

$$3x + 10(-7x - 38) - 22 = 0$$

$$3x - 70x - 380 - 22 = 0$$

$$-67x = 402$$

$$x = -6$$

$$| : (-67)$$

sijoitus yhtälöön $y = -7x - 38$

$$y = -7 \cdot (-6) - 38$$

$$y = 4$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -6 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$91. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} 6x - 5y = 5 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$9x = 18$$

$$x = 2$$

$$| : 9$$

sijoitus alempaan yhtälöön

$$6 + 5y = 13$$

$$5y = 13 - 6$$

$$5y = 7$$

$$| : 5$$

$$y = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 7x + 3y = -1 \\ -7x - y = 5 \end{cases}$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

sijoitus ylempään yhtälöön

$$7x + 3 \cdot 2 = -1$$

$$7x = -1 - 6$$

$$7x = -7$$

$$x = -1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$91. \quad c) \quad \begin{cases} 8x + 4y = -16 \\ 3x + 4y = 9 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} 8x + 4y = -16 \\ -3x - 4y = -9 \end{cases}$$

$$5x = -25 \quad | : 5$$

$$x = -5 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$3 \cdot (-5) + 4y = 9$$

$$4y = 9 + 15$$

$$4y = 24 \quad | : 4$$

$$y = 6$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -5 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$92. \quad a) \quad \begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 7x + 6y = 10 \end{cases} \quad | \cdot 3$$

$$\begin{cases} 9x - 6y = -42 \\ 7x + 6y = 10 \end{cases}$$

$$16x = -32 \quad | : 16$$

$$x = -2 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$-14 + 6y = 10$$

$$6y = 24 \quad | : 6$$

$$y = 4$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$92. \quad \text{b)} \quad \begin{cases} -3x + 7y = 1 & | \cdot 2 \\ 6x + y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x + 14y = 2 \\ 6x + y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 15y &= 15 & | : 15 \\ y &= 1 & \text{sijoitus alempaan yhtälöön} \end{aligned}$$

$$6x + 1 = 13$$

$$6x = 12 \quad | : 6$$

$$x = 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$93. \quad \begin{cases} x - 7y + 6 = 0 & | \cdot (-3) \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 21y - 18 = 0 \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$25y - 25 = 0$$

$$\begin{aligned} 25y &= 25 & | : 25 \\ y &= 1 & \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{aligned}$$

$$x - 7 + 6 = 0$$

$$x = 1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

94. Sijoitetaan yhtälöpariin $x = 3$ ja $y = 1$.

$$\begin{cases} (a+1)3 + b = 3 \\ 3a - 2b = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + 3 + b = 3 & | \cdot (-1) \\ 3a - 2b = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a - b = 0 \\ 3a - 2b = -6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3b &= -6 & | : (-3) \\ b &= 2 \end{aligned} \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$3a - 4 = -6$$

$$3a = -2 \quad | : 3$$

$$a = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Vastaus: } a = -\frac{2}{3} \text{ ja } b = 2$$

95. a)
$$\begin{cases} y = x + 5 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

$$x + 5 = 3x - 1$$

$$2x = 6 \quad | : 2$$

$$x = 3 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$y = 3 + 5$$

$$y = 8$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 8 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 2x = -3y - 6 \end{cases}$$

$$-3y - 6 + 3y = -3$$

$$0 = 3 \quad \text{identtisesti epätosi}$$

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

$$96. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} 2x + y = -2 \\ 5x + 4y = 4 \end{cases} \quad | \cdot (-4)$$

$$\begin{cases} -8x - 4y = 8 \\ 5x + 4y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -3x = 12 \\ x = -4 \end{array} \quad | : (-3)$$

sijoitus alempaan yhtälöön

$$-20 + 4y = 4$$

$$4y = 24 \quad | : 4$$

$$y = 6$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 3y = 2x \\ 2x = y + 4 \end{cases}$$

$$3y = y + 4$$

$$2y = 4 \quad | : 2$$

$$y = 2$$

sijoitus alempaan yhtälöön

$$2x = 6 \quad | : 2$$

$$x = 3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$97. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} 5x - y = 3 \\ 5x = 15 \end{cases}$$

$$15 - y = 3$$

$$-y = -12$$

$$y = 12$$

$$5x = 15 \quad | : 5$$

$$x = 3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 12 \end{cases}$$

$$97. \quad \text{b)} \quad \begin{cases} x + 4y = 9 & | \cdot (-3) \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 12y = -27 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -17y &= -34 & | : (-17) \\ y &= 2 & \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{aligned}$$

$$x + 4 \cdot 2 = 9$$

$$x = 1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$98. \quad \text{a)} \quad \begin{cases} 4x + 6y = 5 \\ 2x + 3y = 7 & | \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 6y = 5 \\ -4x - 6y = -14 \end{cases}$$

$$0 = -9 \quad \text{identtisesti epätosi}$$

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x - 5y = -16 & | \cdot 2 \\ -2x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 10y = -32 \\ -2x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -7y &= -21 & | : (-7) \\ y &= 3 & \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{aligned}$$

$$x - 15 = -16$$

$$x = -1$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

99. a)
$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$x - (x - 4) + 2 = 0$$

$$x - x + 4 + 2 = 0$$

$$6 = 0 \quad \text{identtisesti epätosi}$$

Vastaus: Yhtälöparilla ei ratkaisua.

b)
$$\begin{cases} -2x + 4,5y = 10 & | \cdot 6 \\ -3x + 2,5y = 6,5 & | \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12x + 27y = 60 \\ 12x - 10y = -26 \end{cases}$$

$$17y = 34 \quad | : 17$$

$$y = 2 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$-2x + 9 = 10$$

$$-2x = 1 \quad | : (-2)$$

$$x = -0,5$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = -0,5 \\ y = 2 \end{cases}$$

100.
$$\begin{cases} y = ax - 2 \\ y = -3x + b \end{cases}$$

Leikkauspisteitä ei ole, kun suorat ovat yhdensuuntaiset mutta eri suorat.

Vastaus: $a = -3$ ja $b \neq -2$

101. Pallon massa on x ja kuution massa y .

$$\begin{cases} 2x + y = 3,5 \\ x + 2y = 4,0 \end{cases} \quad | \cdot (-2)$$

$$\begin{cases} -4x - 2y = -7,0 \\ x + 2y = 4,0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -3x = -3,0 \\ x = 1,0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : (-3) \\ \text{sijoitus alempaan yhtälöön} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,0 + 2y = 4,0 \\ 2y = 3,0 \\ y = 1,5 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : 2 \end{array}$$

Vastaus: pallo 1,0 kg ja kuutio 1,5 kg

102. Auran kortit on x ja Ilpon kortit y .

$$\begin{cases} x + y = 232 \\ x - y = 64 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x = 296 \\ x = 148 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : 2 \\ \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 148 + y = 232 \\ y = 84 \end{array}$$

Vastaus: Auralla on 148 ja Ilpolla 84 korttia.

103. Aleksin koulumatka on x ja Tepon matka y .

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x = 13 \\ x = 6,5 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : 2 \\ \text{sijoitetaan ylempään yhtälöön} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6,5 + y = 12 \\ y = 12 - 6,5 \\ y = 5,5 \end{array}$$

Vastaus: Aleksin matka on 6,5 km ja Tepon matka 5,5 km.

104. Maitolitrin hinta on x ja piirakan hinta y .

$$\begin{cases} 4x + 2y = 9,20 \\ 2x + 6y = 10,60 \end{cases} \quad | \cdot (-2)$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 9,20 \\ -4x - 12y = -21,20 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -10y &= -12 & | : (-10) \\ y &= 1,2 & \text{sijoitus ylempään yhtälöön} \end{aligned}$$

$$4x + 2,4 = 9,2$$

$$4x = 9,2 - 2,4$$

$$4x = 6,8 \quad | : 4$$

$$x = 1,7$$

Vastaus: maito 1,70 € ja piirakka 1,20 €

105.
$$\begin{cases} 2x + 2y = 56 \\ x + 2y = 44 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 56 \\ -x - 2y = -44 \end{cases}$$

$$x = 12 \quad \text{sijoitetaan alempaan yhtälöön}$$

$$12 + 2y = 44$$

$$2y = 32 \quad | : 2$$

$$y = 16$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 12 \text{ cm} \\ y = 16 \text{ cm} \end{cases}$$

$$106. \begin{cases} x = 3y \\ 3x - 16 = y \end{cases}$$

$$3 \cdot 3y - 16 = y$$

$$9y - y = 16$$

$$8y = 16 \quad | : 8$$

$$y = 2 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$x = 3 \cdot 2$$

$$x = 6$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

107. Mintun rahat on x ja Santun rahat y .

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 35 \end{cases}$$

$$2x = 38 \quad | : 2$$

$$x = 19 \quad \text{sijoitus alempaan yhtälöön}$$

$$19 + y = 35$$

$$y = 16$$

Vastaus: Mintulla on 19 € ja Santulla 16 €.

108. Taran lehdet on x ja Veran lehdet y .

$$\begin{cases} x - 1 = y + 1 \\ 2(y - 1) = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2y - 2 = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$y = 5 \quad \text{sijoitus ylempään yhtälöön}$$

$$x - 5 = 2$$

$$x = 7$$

Vastaus: Taralla oli 7 lehteä.

109. 8 Gb:n soittimen hinta on x ja 16 Gb:n soittimen hinta y.

$$\begin{cases} 22x + 9y = 5320 \\ 20 \cdot 0,9x + 18 \cdot 0,8y = 5760 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22x + 9y = 5320 & | \cdot (-8) \\ 18x + 14,4y = 5760 & | \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -176x - 72y = -42\,560 \\ 90x + 72y = 28\,800 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -86x \quad = -13\,760 \quad | : (-86) \\ x = 160 \quad \text{sijoitetaan ylempään yhtälöön} \end{array}$$

$$22 \cdot 160 + 9y = 5320$$

$$9y = 5320 - 3520$$

$$9y = 1800 \quad | : 9$$

$$y = 200$$

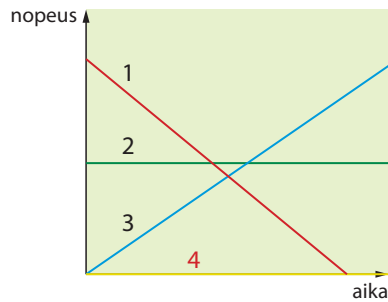
Vastaus: 8 Gb:n soittimen hinta 160 € ja 16 Gb:n soittimen hinta 200 €

Joustotehtäviä

1. Kuvaajatutkimuksia

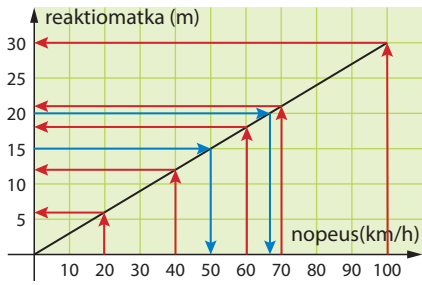
1. A $\leftarrow \rightarrow$ 3 Matka kasvaa suoraviivaisesti ajan kuluessa.
B $\leftarrow \rightarrow$ 1 Matka ei kasva, vaikka aika kuluu.
C $\leftarrow \rightarrow$ 2 Matka kasvaa aluksi nopeammin ja lopussa hitaammin.
D $\leftarrow \rightarrow$ 4 Matka kasvaa ajan kuluessa koko ajan nopeammin.

2. A $\leftarrow \rightarrow$ 2 Nopeus ei muutu ajan kuluessa.
B $\leftarrow \rightarrow$ 4 Nopeus on koko ajan nolla.
C $\leftarrow \rightarrow$ 1 Nopeus vähenee ajan kuluessa.
D $\leftarrow \rightarrow$ 3 Nopeus kasvaa ajan kuluessa.



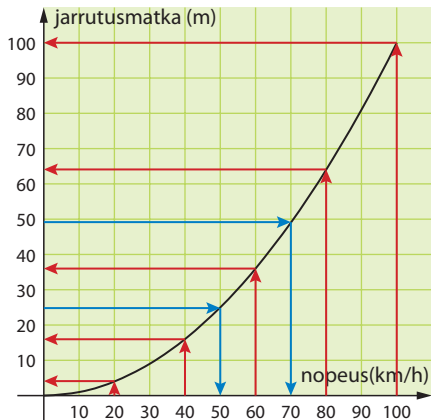
3. A $\leftarrow \rightarrow$ 2 Etäisyys vasemmasta seinästä ensin vähenee nopeasti ja sitten kasvaa nopeasti.
B $\leftarrow \rightarrow$ 4 Etäisyys vasemmasta seinästä kasvaa aluksi hitaasti ja sitten nopeasti.
C $\leftarrow \rightarrow$ 1 Etäisyys vasemmasta seinästä ensin kasvaa nopeasti ja sitten pienenee nopeasti.
D $\leftarrow \rightarrow$ 3 Etäisyys vasemmasta seinästä ensin pienenee hitaasti ja sitten nopeasti.
4. a) 3 Pallo on kiihtyvässä liikkeessä ja sen nopeus muuttuu koko ajan, joten aika–matka-kuvaaja ei voi olla suora.
b) 2 Kiihtyvä liike aiheuttaa nopeuden tasaisen kasvun ajan kuluessa.
c) b-kuvasta nähdään, että törmäys seinään tapahtuu ajanhetkellä 5,5 s, jolloin nopeus on 3 m/s.
Vastaus: 3 m/s

5.



Nopeus (km/h)	Reaktiomatka (m)
20	6
40	12
50	15
60	18
67	20
70	21
100	30

6.



Nopeus (km/h)	Jarrutusmatka (m)
20	4
40	16
50	25
60	36
70	50
80	64
100	100

7. a) $\frac{3}{10} \cdot 40 + \left(\frac{40}{10}\right)^2 = 28$

Vastaus: 28 m

b) $\frac{3}{10} \cdot 50 + \left(\frac{50}{10}\right)^2 = 40$

Vastaus: 40 m

c) $\frac{3}{10} \cdot 80 + \left(\frac{80}{10}\right)^2 = 88$

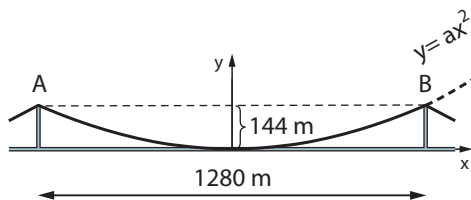
Vastaus: 88 m

d) $\frac{3}{10} \cdot 100 + \left(\frac{100}{10}\right)^2 = 130$

Vastaus: 130 m

2. Sillat ja paraabelit

1.



a) $1280 \text{ m} : 2 = 640 \text{ m}$

Vastaus: A(-640, 144) ja B(640, 144)

b) Sijoitetaan pisteen (640, 144) koordinaattien arvot yhtälöön $y = ax^2$:

$$144 = a640^2$$

$$144 = 409\,600a \quad | : 409\,600$$

$$0,00035 \approx a$$

Vastaus: $y = 0,00035x^2$

2. Sijoitetaan x:n arvo $124 : 2 = 62$ ja y:n arvo $y = 14$ yhtälöön $y = ax^2$:

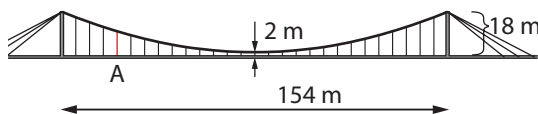
$$14 = a62^2$$

$$14 = 3844a \quad | : 3844$$

$$0,0036 \approx a$$

Vastaus: $y = 0,0036x^2$

3.



Siltaparaabelin yhtälö:

Sijoitetaan x:n arvoksi $154 : 2 = 77$ ja y:n arvoksi $18 - 2 = 16$:

$$y = ax^2$$

$$16 = a77^2$$

$$16 = 5929a \quad | : 5929$$

$$0,0027 \approx a$$

$$y = 0,0027x^2$$

Vaijerien väli on $154 \text{ m} : 28 = 5,5 \text{ m}$.

Vaijerin A paikka on $10 \cdot 5,5 \text{ m} = 55 \text{ m}$.

Vaijerin A yläpään y-koordinaatti $y = 0,0027 \cdot 55^2 \approx 8,2$.

Vaijerin pituus on $8,2 \text{ m} + 2 \text{ m} \approx 10 \text{ m}$.

Vastaus: 10 m

4. Paraabeli aukeaa alaspäin. Kaaren oikeassa alanurkassa $y = -69$.
Ratkaistaan oikean alanurkan x-koordinaatti.

$$-69 = -\frac{1}{90} \cdot x^2 \quad | \cdot (-90)$$

$$6210 = x^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$78,8 \approx x$$

$$\text{jänneväli} = 2 \cdot 78,8 \text{ m} = 157,6 \text{ m}$$

Vastaus: 158 m

5. a) Siltaparaabelin yhtälö:

Sijoitetaan x:n arvoksi $85 : 2 = 42,5$ ja y:n arvoksi -14 :

$$y = ax^2$$

$$-14 = a42,5^2$$

$$-14 \approx 1806a \quad | : 1806$$

$$-0,00775 \approx a$$

$$y = -0,00775x^2 \quad (\text{alaspäin aukeava paraabeli})$$

b) A: $y = -0,00775x^2$

$$y = -0,00775 \cdot (13 \text{ m})^2 \approx 1,3 \text{ m}$$

B: $y = -0,00775x^2$

$$y = -0,00775 \cdot (22 \text{ m})^2 \approx 3,8 \text{ m}$$

C: $y = -0,00775x^2$

$$y = -0,00775 \cdot (33 \text{ m})^2 \approx 8,4 \text{ m}$$

6. Sijoitetaan x:n arvoksi $80 : 2 = 40$ ja y:n arvoksi -12 :

$$y = ax^2$$

$$-12 = a40^2$$

$$-12 = 1600a \quad | : 1600$$

$$-0,0075 = a$$

Alaspäin aukeava paraabeli.

$$\text{Vastaus: } y = -0,0075x^2$$

7. A-2, B-1, C-4, D-3

3. Yhtälöryhmä

$$1. \quad \begin{cases} x = 3 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x - 2y + 5z = -4 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x = 3$ yhtälöihin (2) ja (3):

$$\begin{cases} 3 + y - 2z = 1 \\ 6 - 2y + 5z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2z = -2 & | \cdot 2 \\ -2y + 5z = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - 4z = -4 \\ -2y + 5z = -10 \\ z = -14 \end{cases}$$

Sijoitetaan yhtälöön $y - 2z = -2$.

$$\begin{aligned} y - 2 \cdot (-14) &= -2 \\ y + 28 &= -2 \\ y &= -30 \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = -30 \\ z = -14 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ 2x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

Sijoitetaan $z = 1$ yhtälöihin (2) ja (3).

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 3 \\ 2x - 2y + 3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$3x = 8 \quad | :3$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

Sijoitetaan $x = 2\frac{2}{3}$ yhtälöön $2x - 2y = 4$.

$$2 \cdot 2\frac{2}{3} - 2y = 4$$

$$-2y = 4 - 5\frac{1}{3}$$

$$-2y = -2y = -1\frac{1}{3} \quad | :(-2)$$

$$y = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 2\frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 4y - z = 4 \\ -2x + 3y + z = 6 \end{cases}$$

Sijoitetaan yhtälöstä (1) saatava $x = y$ yhtälöihin (2) ja (3).

$$\begin{cases} 3y - 4y - z = 4 \\ -2y + 3y + z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y - z = 4 \\ y + z = 6 \end{cases}$$

$$0 = 10 \quad \text{epätosi}$$

Vastaus: Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

$$4. \quad \begin{cases} 3x + 5y - z = 9 \\ -x - 9y - z = -9 \\ 2x + 2y - z = 3 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

Yhtälöt (1) ja (2)

$$\begin{cases} 3x + 5y - z = 9 \\ x + 9y + z = 9 \end{cases}$$

$$4x + 14y = 18$$

Yhtälöt (2) ja (3)

$$\begin{cases} x + 9y + z = 9 \\ 2x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

$$3x + 11y = 12$$

$$\begin{cases} 4x + 14y = 18 \\ 3x + 11y = 12 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | \cdot (-3) \\ | \cdot 4 \end{array}$$

$$\begin{cases} -12x - 42y = -54 \\ 12x + 44y = 48 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 2y = -6 \\ y = -3 \end{array} \quad | : 2$$

Sijoitetaan yhtälöön $4x + 14y = 18$.

$$4x + 14 \cdot (-3) = 18$$

$$4x = 18 + 42$$

$$4x = 60 \quad | : 4$$

$$x = 15 \quad \text{Sijoitetaan yhtälöön (1).}$$

$$3 \cdot 15 + 5 \cdot (-3) - z = 9$$

$$45 - 15 - z = 9$$

$$-z = -21$$

$$z = 21$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 15 \\ y = -3 \\ z = 21 \end{cases}$$

5. Sijoitetaan yhtälöön vuorollaan $(0, 3)$, $(2, 5)$ ja $(3, 12)$.

$$\begin{cases} 3 = c \\ 5 = 4a + 2b + c \\ 12 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

Koska $c = 3$, kahdesta alemmasta yhtälöstä saadaan

$$\begin{cases} 4a + 2b = 2 & | \cdot (-3) \\ 9a + 3b = 9 & | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12a - 6b = -6 \\ 18a + 6b = 18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 6a \\ \quad = 12 \\ \quad a = 2 \end{array}$$

$$| : 6$$

Sijoitetaan yhtälöön $4a + 2b = 2$.

$$8 + 2b = 2$$

$$2b = -6$$

$$b = -3$$

$$| : 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 3 \end{cases}$$

6. Liinan rahat on x , Siinan rahat y ja Riinan rahat z .

$$\begin{cases} x + y + z = 3000 \\ x = 2y \\ z = x - 150 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x = 2y$ alimpaan yhtälöön.

$$z = 2y - 150$$

Sijoitetaan tämä yhtälö ja $x = 2y$ yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} 2y + y + 2y - 150 &= 3000 \\ 5y &= 3150 \quad | :5 \\ y &= 630 \end{aligned}$$

$$x = 2 \cdot 630$$

$$x = 1260$$

$$z = 2 \cdot 630 - 150$$

$$z = 1110$$

Vastaus: Liinalla on 1260 €, Siinalla 630 € ja Riinalla 1110 €.

$$7. \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ -6x + 4y - 2z = -14 \end{cases}$$

Yhtälöt (1) ja (2):

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 3x - 2y + z = 7 \end{cases}$$

$$4x \quad + 4z = 12 \quad | : 4$$

$$x + z = 3$$

$$z = 3 - x$$

Yhtälöstä (3) tulee luvulla -2 jakamalla yhtälö (2).
Sijoittamalla $z = 3 - x$ yhtälöön (2) saadaan

$$3x - 2y + 3 - x = 7$$

$$2x - 2y = 4 \quad | : 2$$

$$x - y = 2$$

$$y = x - 2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x - 2 \\ z = 3 - x \end{cases}$$

VAAKATEHTÄVIÄ

1. a) Korvataan alemman vaa'an vasen puoli $y + 4$:llä ja sitten otetaan molemmilta puolilta 4 kg pois, jolloin saadaan $y = 3$ kg ja $x = 4$ kg.
Vastaus: $x = 4$ kg ja $y = 3$ kg
- b) Lasketaan vaakojen puolet puolittain yhteen.
 $2x + y + 1$ kg = $y + 9$ kg, vähennetään $y + 1$ kg pois.
Saadaan $2x = 8$ kg, josta $x = 4$ kg ja $y = 1$ kg.
Vastaus: $x = 4$ kg ja $y = 1$ kg
- c) Puolitetaan ylemmän vaa'an puolet, jolloin saadaan $x + y = 5$ kg. Korvataan alemman vaa'an $x + y$ 5 kg:lla. Poistetaan molemmilta puolilta 5 kg, jolloin saadaan $y = 2$ kg ja $x = 3$ kg.
Vastaus: $x = 3$ kg ja $y = 2$ kg