



Kuutio Y Opettajan materiaali

Kurssi 8

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti:
asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

ISBN 978-952-63-4497-3

Toimitus: Reena Linna
Ulkoasu: Liisa Holm, Printable / Pirkko Pihlaja
Taitto: Printable / Pirkko Pihlaja
Kuvitus: Marvegraf Oy / Marja Venäläinen, Tuuli Hypén

© Sanna Hassinen, Olli Latva, Jari-Pekka Makkonen, Aulis Tolvanen,
Maria Pirttimaa ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on opettajan opas,
joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Tämän teoksen tai sen osan
valokopiointi, skannaaminen tai
muu digitaalinen kopiointi tai käyttö
edellyttää oikeudenomistajan
luvan. Kopiosto ry myöntää teosten
osittaiseen kopiointiin lupia.
Tarkistakaa, mitkä valokopiointi- ja
digiluvat ovat kohdallanne voimassa.
Lisätietoja luvista www.kopiosto.fi

Teoksen tai sen osan muuntelu on
kielletty.



oppikirja, jossa on kaikki valmiina

Ajankäyttösuositus 45 min oppitunnit tunti/aukeama

8. FUNKTIO JA YHTÄLÖPARI

1. Funktio	8	2
2. Funktion arvo	12	2
3. Suoran piirtäminen	16	2
4. Akselien suuntaiset suorat	20	1
5. Suoran yhtälön määrittäminen	22	2
6. Paraabeli	26	2
7. Funktion ominaisuuksia	30	2
8. Kasvava ja vähenevä funktio	34	1
9. Kertaus	36	1
10. Verrannollisuus koordinaatistossa	38	2
11. Kahden muuttujan yhtälö	42	1
12. Yhtälöpari	44	1
13. Graafinen ratkaiseminen	46	2
14. Algebrallinen ratkaiseminen	50	3
15. Sovelluksia	56	2
16. Kertaus	60	1
	27	

Ajankäyttösuositus 75 min oppitunnit

8. FUNKTIO JA YHTÄLÖPARI

1. Funktio	8	1
2. Funktion arvo	12	1
3. Suoran piirtäminen	16	2
4. Akselien suuntaiset suorat	20	1
5. Suoran yhtälön määrittäminen	22	1
6. Paraabeli	26	1
7. Funktion ominaisuuksia	30	2
8. Kasvava ja vähenevä funktio	34	1
9. Kertaus	36	1
10. Verrannollisuus koordinaatistossa	38	1
11. Kahden muuttujan yhtälö	42	1
12. Yhtälöpari	44	2
13. Graafinen ratkaiseminen	46	1
14. Algebrallinen ratkaiseminen	50	2
15. Sovelluksia	56	1
16. Kertaus	60	1
	16	

JOUSTOTEHTÄVIÄ

1. Monomien jakolasku 174
2. Polynomien jakaminen monomilla 178
3. Neliöjuurilaskuja 182

Oppilaan kirjan rakenne

1. Funktio

Esimerkki 1

Arttu ajaa 240 km matkan moottoripyörällä.

- Jos hänen keskinopeutensa on 80 km/h, aikaa kuluu 3 tuntia.
- Jos Artun keskinopeus on 60 km/h, kuluu aikaa 4 tuntia.
- Polkupyörällä samaan matkaan kuluisi aikaa 12 tuntia, jos keskinopeus olisi 20 km/h.

Matkaan käytetty aika riippuu keskinopeudesta.

On paljon ilmiöitä, joissa jokin suure riippuu jollakin tavalla muista tekijöistä. Kahden suureen välistä säännönmukaista riippuvuutta kutsutaan matematiikassa **funktioiksi**.

FUNKTIO
Funktio kuvaa kahden suureen välistä riippuvuutta. Suuretta, joka **riippuu** toisesta suureesta **säännönmukaisesti**, sanotaan tämän jälkimmäisen suureen funktioksi.


Esimerkissä 1 matkaan käytetty **aika** on **nopeuden** funktio.

Esimerkki 2



Torikauppias myy perunoita hintaan 0,50 €/kg. 5 kg:n pussi maksaa siis 2,50 €, 10 kg:n pussi 5,00 € ja 20 kg:n pussi 10,00€.



Perunapussin hinta riippuu ostettujen perunoiden määrästä eli **hinta** on **määrän** funktio.

Erimerkkejä funktioista:
Neliön **pinta-ala** on sivun pituuden funktio.
Paino on **tiheyden** funktio.
Työstä maksettava **palkka** on **ajan** funktio.



- Keksi kuvasta jokin siihen liittyvä riippuvuus. Kerro lyhyesti, millainen tämä riippuvuus on.



- Valitse kuvasta kaksi sellaista suuretta, joiden välillä on riippuvuus. Etsi ainakin kolme paria. Samaa suuretta saa käyttää useammassa parissa.



- Tomilla on rahaa 5,00 €, joilla hän haluaa ostaa tomaatteja.
 - Mistä tekijästä Tomin saama tomaattimäärä on riippuvainen?
 - Selitä, millainen tämä riippuvuus on.
- Yhdistä suure sellaiseen suureeseen, josta se voi riippua. Kutakin suuretta saa käyttää vain yhden kerran.

korkeushyppytulokset	A	1	nopeus
koulumatkaan käytetty aika	B	2	korkeus
paino	C	3	ponnistusvoima
pinta-ala	D	4	tiheys
- Mistä tekijöistä on riippuu
 - talon lämmityskustannukset
 - auton bensininkulutus
 - lattianpinnan päällystämiskustannukset
 - hiekkalaatikon hiekan määrä?
 Keksi kaksi tekijää jokaiseen kohtaan.
- Mikä asia riippuu
 - ämpärin suuruudesta
 - ahkeruudesta
 - metrihinnasta
 - tarvittavasta ajasta?
 Keksi ainakin kaksi asiaa joka kohtaan.

Lisätehtävät s. 71
Kotitehtävät s. 86

Uusi asia ja siihen liittyvät harjoitukset esitetään aina yhdellä aukeamalla, joka muodostaa **oppitunti-kokonaisuuden**. Aukeaman vasemmalla puolella on teoria, jossa on neuvovia esimerkkejä. Oikealla puolella tuntiharjoitukset, joita oppilaat laskevat aloittaen yleensä yhteisistä tehtävistä ja eriytyen siten oman valintansa mukaan. Jos asia vaatii useamman kuin yhden tunnin harjoittelun, aukeamalla on vain harjoituksia.

Funktio, s. 8-9

- Mistä tekijöistä riippuu koulumatkaan käytetty aika?
- Mansikat maksavat 2,50 €/kg.
 - Kuinka paljon mansikoita saa 20 eurolla?
 - Kuinka paljon maksaa 5 kg mansikoita?
- Mitkä tekijät vaikuttavat Mitjan tekemän mopomatkan kustannuksiin?
- Miten sarjapellen pisteilmanne riippuu pelien lopputuloksista, kun peli on
 - jääkiekko
 - jalkapallo?
- Kuvaaja esittää perunapussin hinnan riippuvuutta pussin painosta. Esitä hinnan riippuvuus
 - sanoin
 - yhtälönä.

Funktio, s. 10-11

- 2 kg perunoita maksaa 1,40 € ja 5 kg perunoita maksaa 3,50 €. Merkitse perunoiden määrää x:llä ja esitä sääntönä perunoiden hinta y, kun ostetaan x kiloa perunoita.
- Esitä sääntö yhtälönä: y:n arvo on kolminkertainen x:n arvoon verrattuna.
- Vuoden 2002 alusta Suomessa siirryttiin käyttämään euroja markan sijasta. 1 € = 5,94573 mk. Kirjoita yhtälönä muunnoskaava, jolla
 - markat muutetaan euroiksi
 - eurot muutettiin markoiksi.
- Funktiokehone muuttaa sinne syötetyt luvut tietyn säännön mukaan. Esitä tämä sääntö sanoin.

a) 1 → -4	b) 1 → -1
2 → -3	2 → -2
3 → -2	3 → -3
4 → -1	4 → -4
5 → 0	5 → -5
x → y	x → y
- Etsi sääntö, jonka mukaan kone muuttaa lukuja. Esitä sääntö yhtälönä.

a) 1 → 1	b) 1 → 4
2 → 0	2 → 5
3 → -1	3 → 6
4 → -2	4 → 7
5 → -3	5 → 8
x → y	x → y
- Etsi sääntö, jonka mukaan funktiokehone muuttaa lukuja. Esitä sääntö yhtälönä.

a) 1 → 7	b) 1 → 4
2 → 8	2 → 8
3 → 10	3 → 16
4 → 14	4 → 24
8 → 14	8 → 24
x → y	x → y

L8
Lisätehtäviä

- Yksi tuuma on noin 2,5 cm. Muodosta yhtälö, jolla tuumamittat muutetaan senttimetreiksi.
- Muodosta parit, joiden välillä on riippuvuus.

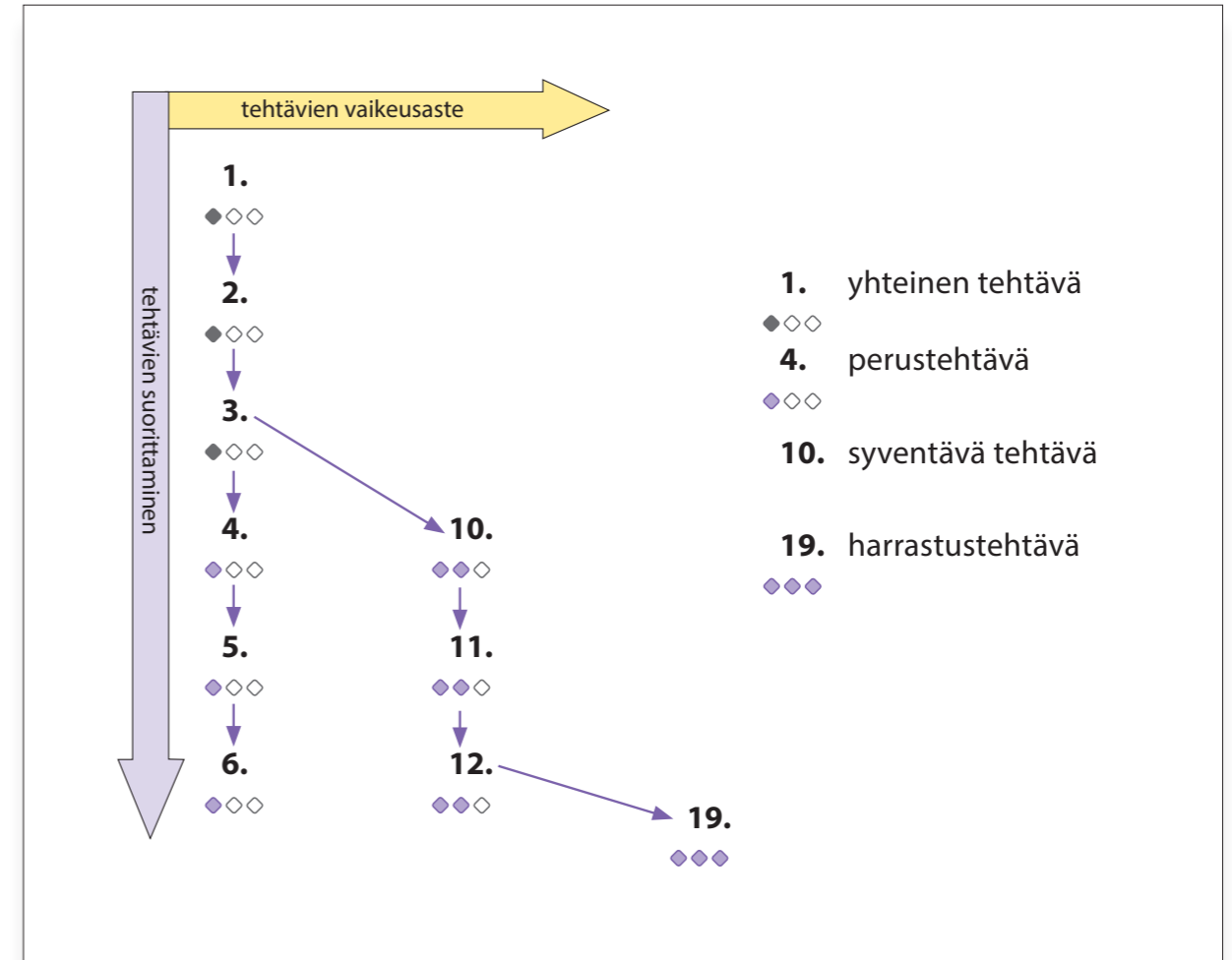
mopon jarrutus-	A	1	määrä
matka	B	2	rakkaus
tilavuus	C	3	nopeus
hinta	D	4	paino
- Irtokarkit maksavat 6,80 €/kg.
 - Kuinka paljon karkkia saa 2 eurolla?
 - Kuinka paljon maksaa 250 g karkkeja?
- Funktio arvo, s. 12-13
- Mikä merkinnässä $f(7) = 3$ on muuttujan arvo ja mikä funktion arvo?
- Esitä vastaavanlaisena merkintä "muuttujan arvolla 9 funktio g saa arvon -7".
- Sijoita edellisen funktion arvo seuraavan funktion muuttujan paikalle.

3) $y = x - 1$	$y = \frac{2x}{3} - 1$
$y = 3x + 3$	$y = \sqrt{x}$
- Funktion f arvo on kolme kertaa muuttujan x arvo. Muodosta funktio f(x) ja laske
 - f(2)
 - f(0)
 - f(-1).
- Neliön piiri p riippuu neliön sivun pituudesta a. Muodosta funktio p(a) ja laske
 - p(1 cm)
 - p(5 m).

Nopeammin eteneville on **lisätehtäviä**.

Valmiit **kotitehtävät** voi antaa sellaisenaan tai opettajan harkinnan mukaan.

Opetuksen eriyttäminen



Yhteiset tehtävät ovat perustehtäviä, joiden suorittaminen antaa asiaan liittyvät perusvalmiudet.

Harrastustehtävät ovat useimmiten erittäin vaativia. Ne on tarkoitettu **vapaaehtoisiksi** lisätehtäviksi matematiikkaa harrastaville oppilaille. Ne ovat kirjassa lisätehtävien yhteydessä.

Tehtävät alkavat useimmiten yhteisillä tehtävillä. Sen jälkeen **oppilaat itse eriyttävät itsensä** jatkaen joko edelleen perustehtäviä tai siirtyen vaikeampien syventävien tehtävien pariin. Kaikkia oman tasonsa tehtäviä ei tarvitse ehtiä tehdä. Ei ole tarkoitus, että jokainen lasku pitää ehtiä laskea.

Kirjan lopussa on **joustotehtäviä**, joita voidaan tehdä opettajan harkinnan mukaan. Osa joustosivuista on merkitty ryhmätölogolla. Merkintä on viitteellinen, tehtävät voi käsitellä myös yksilösuorituksena.

Alaspäin eriyttävä **OmaKuutio** on tarkoitettu oppilaille, joilla on vaikeuksia matematiikan oppimisessa. Ylöspäin eriyttämisen tarpeisiin vastaa **Kuutio Ekspertti** 7-9. Kuutio-sarjassa jokainen oppilas tekee itselleen riittävän vaativia tehtäviä, mutta kuitenkin niin, että hänellä on tiedot ja taidot suoritua niistä.

Opettajan materiaali

Tässä opettajan materiaalissa aukeaman vasemmalta puolelta löytyy aina oppilaan kirjan sivu. Teoriasivujen alla on opetuskertaan liittyvät materiaaliluettelot ja oikealla puolella on opetusvihjeet, tv-vinkit ja muuta tuntiin liittyvää tietoa. Tehtäväsivujen vierellä on vastaukset. Kaikkien tehtävien ratkaisut löytyvät opettajalle tarkoitetusta [Digiopetusmateriaalista](#), jossa on myös havaintovälineitä ja lisämateriaalia tunnin aiheeseen liittyen. Lisämateriaalin monisteista löytyy mm. ristikoita, ruudukkoita, päässälaskutrehtäviä sekä niiden vastaukset.

Opetuksen monipuolistaminen

Digiopetusmateriaalin monisteissa on [vaihtoehtoinen malli](#) tietyn teoriaosion opiskeliseksi [ryhmätyönä](#). Harjoitukset ovat samat, vain teoria opiskellaan ryhmässä yhdessä pohtien. Tällainen vaihtoehtoinen opetustapa on luvuissa 4. *Akselien suuntaiset suorat* sekä 13. *Graafinen ratkaiseminen*.

Digilisätehtävät

Oppilaalle tarkoitetut [Digilisätehtävät](#) sisältävät lisää vapaaehtoisia harjoitteita kirjan jokaiseen lukuun. Lisäksi siellä on itsearviointitestejä. Kirjan jokaisessa kurssissa on puolelta välissä ja lopussa kertaustehtäväosio itsenäiseen kertaukseen kotona ja koulussa. Sanoma Pron oppimisympäristössä on [Oppilaan aineistot](#), josta oppilaat pääsevät katsomaan sarjaan tehdyt opetusvideot ja kertaustehtävien ratkaisut.

Kokeet ja testit

Sanoma Pro -palvelussa on [Opettajan aineistot](#), jossa on valmiita mallikokeita jokaiseen kurssiin. Lisää valmiita kokeita ja materiaalia arvioinnin tueksi löytyy erillisestä [Tulostettavat kokeet](#) -tuotteesta. Siellä on iso joukko aihepiireittäin luokiteltuja koetehtäviä, joista voi rakentaa omia kokeita valmiin työkalun avulla. Tehtäviä on n. 50–60 kurssia kohden, ja kaikissa tehtävissä on valmis pisteytys. Samassa paikassa on myös tuntitestejä sekä tehtäviä alaspäin eriyttäviin Oma-kokeisiin.

Innostavia hetkiä matematiikan parissa

Tekijät

8.

Funktio ja yhtälöpari



Funktio kuvaa riippuvuutta. Sana funktio perustuu latinan verbiin fungi, 'tehdä, toimia, toimittaa!'

1. Funktio

Esimerkki 1

Arttu ajaa 240 km matkan moottoripyörällä.

- Jos hänen keskinopeutensa on 80 km/h, aikaa kuluu 3 tuntia.
- Jos Artun keskinopeus on 60 km/h, kuluu aikaa 4 tuntia.
- Polkupyörällä samaan matkaan kuluisi aikaa 12 tuntia, jos keskinopeus olisi 20 km/h.

Matkaan käytetty aika riippuu keskinopeudesta.

On paljon ilmiöitä, joissa jokin suure riippuu jollakin tavalla muista tekijöistä. Kahden suureen välistä säännönmukaista riippuvuutta kutsutaan matematiikassa **funktioksi**.



FUNKTIO

Funktio kuvaa kahden suureen välistä riippuvuutta. Suuretta, joka **riippuu** toisesta suureesta **säännönmukaisesti**, sanotaan tämän jälkimmäisen suureen funktioksi.

Esimerkissä 1 matkaan käytetty **aika** on **nopeuden** funktio.

Esimerkki 2

Torikauppias myy perunoita hintaan 0,50 €/kg. 5 kg:n pussi maksaa siis 2,50 €, 10 kg:n pussi 5,00 € ja 20 kg:n pussi 10,00€.

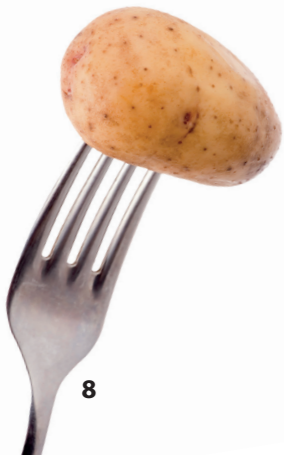
Perunapussin hinta riippuu ostettujen perunoiden määrästä eli **hinta** on **määrän** funktio.

Erimerkkejä funktioista:

Neliön **pinta-ala** on sivun pituuden funktio.

Paino on **tiheyden** funktio.

Työstä maksettava **palkka** on **ajan** funktio.



8

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Aloitustehtäviä

1. Funktio

Opetietoa

- ◆ Käsitettä funktio käytti ensimmäisenä sveitsiläinen matemaatikko ja fyysikko Leonhard Paul Euler (15.4.1707–18.9.1783)

Opetusvihjeitä

- ◆ Digiopetusmateriaalin monisteissa on aloitustehtäväosio funktiosta. Sivun teoria voidaan käsitellä sen avulla.

Tvt-vinkit

- ◆ coolmath.com
⇒ algebra/functions
- ◆ opetustv.fi
⇒ Funktiot/ Funktion käsite
- ◆ openmatikka.com
⇒ Algebra ja funktiot/Funktiokone
- ◆ math.fi
⇒ 9.luokka/funktio/funktio
- ◆ mathsisfun.com
⇒ algebra2/Functions/What is a function?
- ◆ mathopolis.com
⇒ Questions/Math Course/Algebra1/Functions/What is a function
- ◆ www.khanacademy.org/math
⇒ Algebra /Functions/Evaluating functions/What is a function?
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

1. Keksi kuvasta jokin siihen liittyvä riippuvuus. Kerro lyhyesti, millainen tämä riippuvuus on.



2. Valitse kuvasta kaksi sellaista suuretta, joiden välillä on riippuvuus. Etsi ainakin kolme paria. Samaa suuretta saa käyttää useammassa parissa.



3. Tomilla on rahaa 5,00 €, joilla hän haluaa ostaa tomaatteja.
- a) Mistä tekijästä Tomin saama tomaattimäärä on riippuvainen?
- b) Selitä, millainen tämä riippuvuus on.



4. Yhdistä suure sellaiseen suureeseen, josta se voi riippua. Kutakin suuretta saa käyttää vain yhden kerran.

korkeushyppytulokset	A	1	nopeus
koulumatkaan käytetty aika	B	2	korkeus
paino	C	3	ponnistusvoima
pinta-ala	D	4	tiheys

5. Mistä tekijöistä on riippuu
- a) talon lämmityskustannukset
- b) auton bensiininkulutus
- c) lattiapinnan päällystämiskustannukset
- d) hiekkalaatikon hiekan määrä?
- Keksi kaksi tekijää jokaiseen kohtaan.

6. Mikä asia riippuu
- a) ämpärin suuruudesta
- b) ahkeruudesta
- c) metrihinnasta
- d) tarvittavasta ajasta?
- Keksi ainakin kaksi asiaa joka kohtaan.

Lisätehtävät s. 71
Kotitehtävät s. 86

9

Tuntitehtävien vastaukset

1. FUNKTIO

1. esim.
- a) Paristojen menekki riippuu kuunteluajasta.
- b) Vetämisen raskaus riippuu kyydissäolijoiden painosta.
- c) Hypyn näyttävyys riippuu harjoittelun määrästä.
- d) Laskun suuruus riippuu ostosten määrästä.
2. esim.
- Aika riippuu nopeudesta.
 - Hinta riippuu lukumäärästä.
 - Pinta-ala riippuu pituudesta.
 - Paino riippuu tilavuudesta.
 - Matka riippuu ajasta.
 - Pituus riippuu lämpötilasta.
3. a) tomaattien kilohinnasta
- b) Mitä korkeampi kilohinta sitä vähemmän tomaatteja saa.

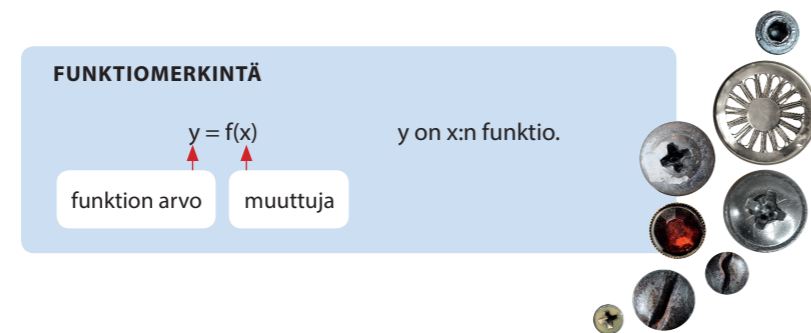
- 4.
- | | | | |
|----------------------------|---|---|----------------|
| korkeushyppytulokset | A | 1 | nopeus |
| koulumatkaan käytetty aika | B | 2 | korkeus |
| paino | C | 3 | ponnistusvoima |
| pinta-ala | D | 4 | tiheys |
5. esim.
- a) huoneiden lämpötilasta, lämmitysmuodosta
- b) moottorin kuutiotilavuudesta, ajotavasta
- c) päällystysmateriaalista, pinta-alasta
- d) laatikon koosta, hiekan tiheydestä
6. esim.
- a) täyden ämpärin paino, hiekkakakun suuruus
- b) arvosana, tehdyn työn määrä
- c) verhojen hinta, 100 €:lla saatavan laudan määrä
- d) harrastukset, juoksulenkin pituus

1. Funktio

Arkielämän funktioille, kuten ahkeruuden ja koenumeron väliselle riippuvuudelle, voi riippuvuutta kuvaavan säännön esittäminen matemaattisesti olla hyvin vaikeaa. Jos riippuvuutta voidaan kuvata matemaattisesti, se esitetään usein yhtälönä.

Funktiossa f muuttujan arvoa x vastaa tasan yksi funktion arvo y .
 $y = f(x)$

Funktiota merkitään usein kirjaimella f , joka tulee sanasta funktio. Muuttujaa merkitään kirjaimella x ja funktion arvoa kirjaimella y .



Esimerkki 3

Esimerkissä 1 aika on nopeuden funktio. Artun moottoripyörän nopeus on x ja matkaan käytetty aika y .

Riippuvuutta kuvaavan funktion yhtälö on $y = 240 : x$.

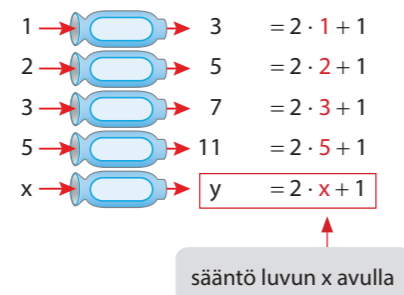
Funktio voidaan merkitä kahdella eri tavalla
 $y = x - 3$
 $f(x) = x - 3$

Esimerkissä 2 perunoiden määrä on x ja perunapussin hinta y .

Perunapussin hintaa kuvaava yhtälö on siis $f(x) = 0,5x$.

Esimerkki 4

Kuvan laitetta sanotaan **funktio koneeksi**. Se muuttaa jokaisen koneeseen syötetyn luvun tietyn säännön mukaan toiseksi luvuksi. Määritä säännön mukainen riippuvuus eli funktio sanoin ja yhtälönä.



Vastaus: Tämä funktio kone kertoo jokaisen koneeseen syötetyn luvun kahdella ja lisää tuloon luvun 1. Riippuvuutta kuvaa yhtälö on $y = 2x + 1$.

7. Tee taulukko vihkoosi ja täydennä se.

Funktio-merkintä	Kirjain, jolla funktiota on merkitty	Kirjain, jolla muuttujaa on merkitty
$f(x) = 3x - 2$		
$g(a) = a^2 + 4a$		
$h(s) = 9s$		

8. Kirjoita esimerkki funktiomerkinästä, jossa muuttujakirjain on b ja funktiota on merkitty kirjaimella h.

9. Mustikat maksavat torilla 3 €/kg. Merkitse lausekkeena ja laske, kuinka paljon maksaa

a) 2 kg b) 10 kg c) x kg.

10. Neliön sivun pituus on s. Mikä alla olevista yhtälöistä kuvaa

a) neliön piiriä p
b) neliön pinta-alaa A?

A $p = 4s$ B $A = 4s$ C $s = p^2$ D $A = s^2$

11. Funktiokone muuttaa sinne syötetyt luvut tietyn säännön mukaan. Esitä tämä sääntö sanoin.

a) $1 \rightarrow 3$ b) $1 \rightarrow 3$
 $2 \rightarrow 6$ $2 \rightarrow 4$
 $3 \rightarrow 9$ $3 \rightarrow 5$
 $5 \rightarrow 15$ $5 \rightarrow 7$



12. Etsi sääntö, jonka mukaan kone muuttaa lukuja. Esitä sääntö yhtälönä.

a) $1 \rightarrow 1$ b) $1 \rightarrow 1$
 $2 \rightarrow 3$ $2 \rightarrow 4$
 $3 \rightarrow 5$ $3 \rightarrow 9$
 $5 \rightarrow 9$ $5 \rightarrow 25$
 $x \rightarrow y$ $x \rightarrow y$

13. a) Esitä yhtälönä sääntö, jonka mukaan taulukon y:n arvot on laskettu x:n arvoista.

x	2	3	4	5
y	0	1	2	3

- b) Merkitse lukuparit (x, y)-koordinaatistoon. Piirrä pisteiden kautta suora ja valitse suoralta sellainen piste, jota ei ole taulukossa. Noudattavatko tämän pisteen koordinaatit a-kohdan sääntöä?

14. Etsi sääntö, jonka mukaan kone muuttaa lukuja. Esitä sääntö yhtälönä.

a) $1 \rightarrow 5$ b) $1 \rightarrow 1$
 $2 \rightarrow 7$ $2 \rightarrow -2$
 $4 \rightarrow 11$ $3 \rightarrow -5$
 $6 \rightarrow 15$ $4 \rightarrow -8$
 $x \rightarrow y$ $x \rightarrow y$

15. Merkitse koordinaatistoon pisteet (1, 2) ja (3, 6). Piirrä näiden pisteiden kautta suora. Päättele, miten tämän suoran minkä tahansa pisteen y-koordinaatti on laskettavissa sen x-koordinaatista. Esitä tämä sääntö sanoin ja yhtälönä.

Lisätehtävät s. 71
Kotitehtävät s. 86

Tuntitehtävien vastaukset

1. FUNKTIO

7.

Funktio-merkintä	Kirjain, jolla funktiota on merkitty	Kirjain, jolla muuttujaa on merkitty
$f(x) = 3x - 2$	f	x
$g(a) = a^2 + 4a$	g	a
$h(s) = 9s$	h	s

8. esimerkiksi $h(b) = 2b + 1$

9. a) $2 \text{ kg} \cdot 3 \text{ €/kg} = 6 \text{ €}$

b) $10 \text{ kg} \cdot 3 \text{ €/kg} = 30 \text{ €}$

c) $x \text{ kg} \cdot 3 \text{ €/kg} = 3x \text{ €}$

10. a) A: $p = 4s$

b) D: $A = s^2$

11. a) syötetty luku kerrotaan kolmella

b) syötettyyn lukuun lisätään kaksi

12. a) $y = 2x - 1$

b) $y = x^2$

13. a) $y = x - 2$

b) noudattavat

14. a) $y = 2x + 3$

b) $y = -3x + 4$

15. y-koordinaatti saadaan kertomalla x-koordinaatti kahdella eli $y = 2x$

2. Funktion arvo

20

Esimerkki 1

Laske funktion $y = x - 3$ arvo muuttujan arvoilla 5 ja -8 .

Sijoitetaan yhtälöön $y = x - 3$ muuttujan x paikalle luku 5 ja lasketaan lausekkeen arvo.

$$y = 5 - 3 = 2$$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow y = x - 3 \\ 5 \rightarrow y = 5 - 3 = 2 \\ -8 \rightarrow y = -8 - 3 = -11 \end{array}$$

Sijoitetaan muuttujan paikalle luku -8 ja lasketaan lausekkeen arvo.

$$y = -8 - 3 = -11$$

Vastaus: Muuttujan arvolla 5 funktion arvo on 2.
Muuttujan arvolla -8 funktion arvo on -11 .

Jos funktion $y = f(x)$ yhtälö on $y = x - 3$, se voidaan esittää myös muodossa $f(x) = x - 3$.

Merkintä $f(5)$ tarkoittaa funktion f arvoa muuttujan arvolla 5.

FUNKTION ARVO

Kun muuttujan x paikalle sijoitetaan muuttujaa vastaava luku saadaan funktion arvo.

$$\begin{array}{c} f(5) = 2 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{muuttujan } x \text{ arvo} \quad \text{funktion arvo} \end{array}$$

Esimerkki 2

Laske $f(3)$, kun $f(x) = 2x + 5$.

Sijoitetaan muuttujan x paikalle luku 3 ja lasketaan lausekkeen arvo.

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 6 + 5 = 11$$

Vastaus: $f(3) = 11$

12

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Funktiokone 3
- Moniste: Päässäälaskutehtäviä
- Moniste: Funktioruudukko

2. Funktion arvo

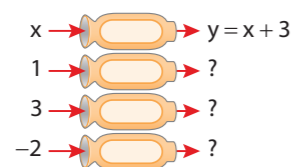
Tvt-vinkit

- ◆ coolmath.com
⇒ algebra/functions
- ◆ opetustv.fi
⇒ Funktiot/ Funktion käsite
- ◆ openmatikka.com
⇒ Algebra ja funktiot/Funktiokone
- ◆ math.fi
⇒ 9.luokka/funktiot/funktion arvo
- ◆ mathsisfun.com
⇒ algebra2/Functions/Evaluating Functions
- ◆ mathopolis.com
⇒ Questions/Math Course/Algebra2/Functions/Evaluating Functions
- ◆ www.khanacademy.org/math
⇒ Algebra/Function/Evaluating functions/Evaluating functions from equation
- ◆ thatquiz.Org
⇒ Algebra
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

Tuntitehtävien vastaukset

1. Laske funktion $y = x + 3$ arvo muuttujan arvoilla

a) 1 b) 3 c) -2

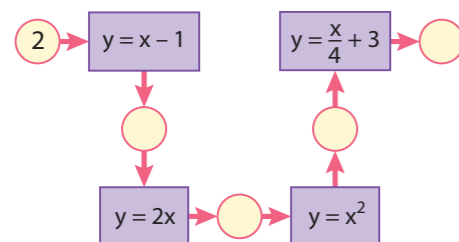


2. a) Mikä merkinnässä $f(3) = 5$ on muuttujan arvo ja mikä funktion arvo?
 b) Esitä vastaavanlaisena merkintänä lause "muuttujan arvolla -4 funktion g saa arvon 8".

3. a) Laske funktion $y = x + 5$ arvo, kun muuttuja saa arvon 3.
 b) Laske funktion $y = -x + 2$ arvo, kun muuttuja saa arvon 5.
 c) Laske funktion $f(x) = 4x - 3$ arvo, kun muuttuja saa arvon 2, eli laske $f(2)$.
 d) Funktio $g(x) = 5x + 1$. Laske $g(3)$.

4. Funktio $g(x) = \frac{x}{2} - 3$. Laske
 a) $g(2)$ b) $g(4)$ c) $g(10)$.

5. Sijoita edellisen funktion arvo seuraavan funktion muuttujan paikalle.



6. Funktio $f(x) = 3x + 1$, päättele millä muuttujan x arvolla

a) $f(x) = 4$ b) $f(x) = 1$ c) $f(x) = -2$.

7. Funktio $f(x) = 2x + 1$. Laske

a) $f(1)$ b) $f(2)$ c) $f(5)$.

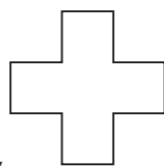
8. Funktio $h(x) = -2x$. Laske

a) $h(1)$ b) $h(-1)$ c) $h\left(\frac{1}{2}\right)$.

9. Funktio $f(x) = -x^2$. Laske

a) $f(2)$ b) $f(-2)$ c) $f(0,3)$.

10. Monikulmion kaikkien sivujen pituus on x . Muodosta funktio $f(x)$, joka kuvaa piirin pituutta ja laske monikulmion piiri, kun $x = 2,5$ cm.



11. Funktio $f(x) = \frac{6}{x}$. Laske

a) $f(2)$ b) $f(-3)$ c) $f(0,6)$.

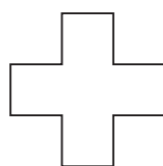
12. Funktio $h(x) = x^2 - 2x + 3$. Laske

a) $h(1)$ b) $h(-1)$ c) $h(3)$.

13. Funktio $f(x) = -x^2 + x$. Laske

a) $f(1)$ b) $f(-2)$ c) $f(0,5)$.

14. Monikulmion kaikkien sivujen pituus on x . Muodosta funktio $f(x)$, joka kuvaa monikulmion pinta-alaa ja laske monikulmion pinta-ala, kun $x = 3,0$ cm.



Lisätehtävät s. 72
 Kotitehtävät s. 86

2. FUNKTION ARVO

1. a) 4 b) 6 c) 1

2. a) muuttujan arvo 3
 funktion arvo 5

b) $g(-4) = 8$

3. a) 8 b) -3
 c) 5 d) 16

4. a) -2 b) -1 c) 2

5. $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 4$

6. a) $x = 1$ b) $x = 0$ c) $x = -1$

7. a) 3 b) 5 c) 11

8. a) -2 b) 2 c) -3

9. a) -4 b) -4 c) -0,09

10. $f(x) = 12x$
 $f(2,5 \text{ cm}) = 30 \text{ cm}$

11. a) 3 b) -2 c) 10

12. a) 2 b) 6 c) 6

13. a) 0 b) -6 c) 0,25

14. $f(x) = 5x^2$
 $f(3,0 \text{ cm}) = 45 \text{ cm}^2$

2. Funktion arvo

Käsiteltäessä useampia funktioita samanaikaisesti täytyy funktiot merkitä eri kirjaimilla, esimerkiksi $f(x)$ ja $g(x)$.

Esimerkki 3

Funktio $f(x) = 3x - 5$ ja funktio $g(x) = -x + 7$.

- a)** Millä muuttujan x arvolla funktio f saa arvon 1?
b) Millä muuttujan x arvolla funktiot f ja g saavat saman arvon eli $f(x) = g(x)$?



- a)** Merkitään funktion f lausekkeen arvoksi 1 ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 1 \\ 3x &= 1 + 5 \\ 3x &= 6 \quad | : 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

- b)** Merkitään funktioiden lausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= -x + 7 \\ 3x + x &= 7 + 5 \\ 4x &= 12 \quad | : 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Vastaus: **a)** Funktio f saa arvon 1, kun $x = 2$ eli $f(2) = 1$.

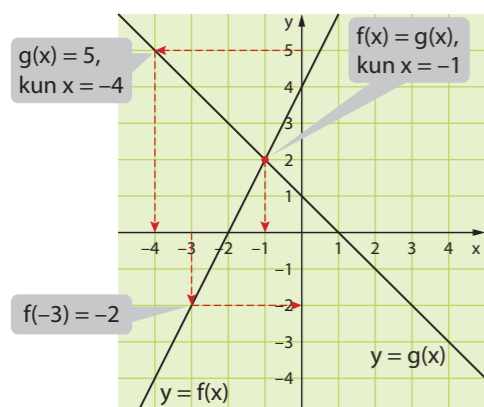
b) Funktiot f ja g saavat saman arvon, kun $x = 3$ eli $f(3) = g(3)$.

Funktion arvon riippuvuutta muuttujan arvosta voidaan kuvata graafisesti xy -koordinaatistossa.

Funktion kuvaaja muodostuu niistä xy -koordinaatiston pisteistä, jotka toteuttavat yhtälön $y = f(x)$.

Esimerkki 4

Määritä kuvaajan avulla.



- a)** $f(-3)$
b) Millä muuttujan x arvolla $g(x) = 5$?
c) Millä muuttujan arvolla $f(x) = g(x)$?

- a)** $f(-3)$ tarkoittaa funktion arvoa y , kun $x = -3$.
 $f(-3) = -2$
b) Etsitään muuttujan x arvoa, kun funktion g arvo on 5.
 $g(x) = 5$, kun $x = -4$.
c) Funktiot f ja g saavat saman arvon niiden kuvaajien leikkauspisteessä.
 $f(x) = g(x)$, kun $x = -1$.

14

Opetusvihjeitä

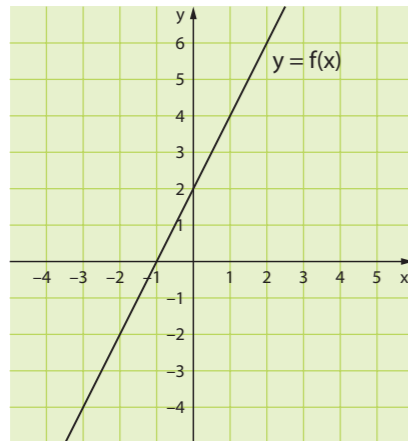
- Arvojen määrittäminen kuvaajasta voidaan opetella Digiopetusmateriaalissa olevan monisteen avulla.

Opetuskertaan liittyvä materiaali

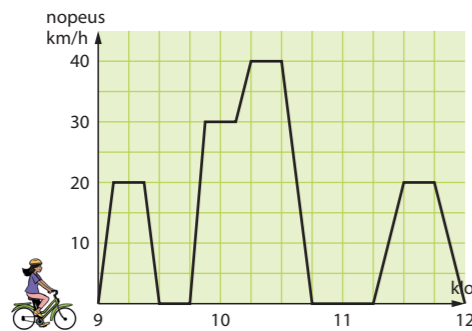
- Moniste: Funktion ja muuttujan arvon määrittäminen kuvaajasta
- Moniste: Funktiokone 4
- Moniste: Funktiojono
- Itsearviointitesti: Luku 2 (Digilisätehtävät)
- Päässälaskutesti: Luku 2 (Tulostettavat kokeet)

15. Funktio $f(x) = x - 6$. Millä muuttujan x arvolla funktio saa arvon
 a) 4 b) 0 c) -2?

16. Määritä kuvaajan avulla
 a) $f(1)$ b) $f(-3)$
 c) $f(1,5)$ d) $f(0)$.
 e) Millä muuttujan x arvolla $f(x) = 6$?
 f) Millä muuttujan x arvolla $f(x) = 0$?



17. Kuvio esittää Riinan pyöräilyretkeä aika-nopeus-koordinaatistossa.

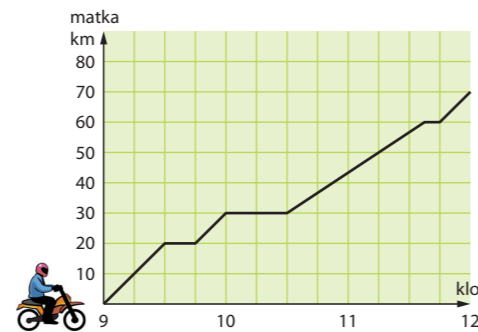


- a) Mikä on Riinan nopeus kello 10?
 b) Milloin Riina pysähtyi ensimmäisen kerran?
 c) Kuinka kauan kesti Riinan toinen pysähdys?
 d) Mikä oli Riinan huippunopeus?

18. Funktio $f(x) = 2x + 3$. Laske, millä muuttujan x arvolla
 a) $f(x) = 7$ b) $f(x) = -1$ c) $f(x) = 0$.

19. Funktio $f(x) = x - 4$ ja $g(x) = -x + 2$.
 Laske, millä muuttujan x arvolla $f(x) = g(x)$.

20. Kuvio esittää Jessen mopoilua aika-matka koordinaatistossa.



- a) Kuinka kaukana lähdöstä Jesse oli kello 10?
 b) Mihin aikaan Jesse pysähtyi ensimmäisen kerran?
 c) Kuinka kauan Jessen ensimmäinen tauko kesti?
 d) Mihin aikaan Jesse oli 50 kilometrin päässä lähdöstä?

21. Funktio $f(x) = x^2$.
 Laske, millä muuttuja x arvolla
 a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = \frac{1}{4}$ c) $f(x) = 0$.

22. Funktio $f(x) = 3x - 6$ ja $g(x) = -2x + 4$.
 Laske, millä muuttujan x arvolla $f(x) = g(x)$.

Lisätehtävät s. 72
 Kotitehtävät s. 87

Tuntitehtävien vastaukset

2. FUNKTION ARVO

15. a) $x = 10$ b) $x = 6$ c) $x = 4$

16. a) $f(1) = 4$
 b) $f(-3) = -4$
 c) $f(1,5) = 5$
 d) $f(x) = 6$ kun $x = 2$
 e) $f(x) = 0$ kun $x = -1$

17. a) 30 km/h b) klo 9.30
 c) 30 min d) 40 km/h

18. a) $x = 2$ b) $x = -2$

- c) $x = -1,5$

19. $x = 3$

20. a) 30 km b) klo 9.30

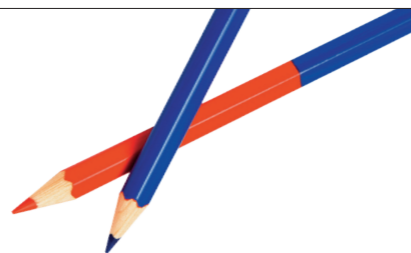
- c) 13 min d) klo 11.15

21. a) $x = \pm 1$ b) $x = \pm \frac{1}{2}$

- c) $x = 0$

22. $x = 2$

3. Suoran piirtäminen



Kahden suureen välinen riippuvuus voidaan esittää sanallisesti, taulukkona, yhtälönä tai graafisesti kuvaajana.

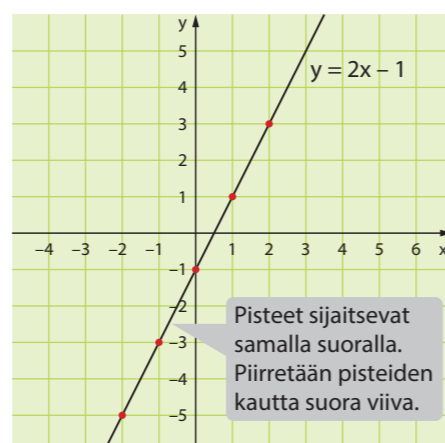
Esimerkki 1

Piirrä funktion $y = 2x - 1$ kuvaaja.

x	$y = 2x - 1$
0	$2 \cdot 0 - 1 = -1$
1	$2 \cdot 1 - 1 = 1$
2	$2 \cdot 2 - 1 = 3$
-1	$2 \cdot (-1) - 1 = -3$
-2	$2 \cdot (-2) - 1 = -5$

Valitaan muuttujalle x joitakin arvoja ja lasketaan niitä vastaavat funktion arvot. Merkitään pisteet (x, y) -koordinaatistoon.

Funktion $y = 2x - 1$ kuvaaja on suora.



ENSIMMÄISEN ASTEEN FUNKTIO

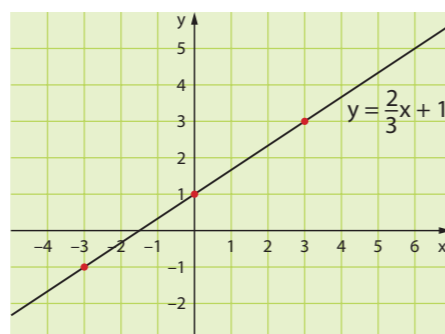
Jos funktion lausekkeessa muuttujan x korkein eksponentti on yksi, funktio on ensimmäisen asteen funktio. Ensimmäisen asteen funktion **kuvaaja on aina suora**.

Esimerkki 2

Piirrä suora $y = \frac{2}{3}x + 1$

Kun valitset muuttujan arvoksi nimittäjällä jaollisen luvun, saat funktion arvoksi kokonaisluvun.

x	$y = \frac{2}{3}x + 1$
0	$\frac{2}{3} \cdot 0 + 1 = 1$
3	$\frac{2}{3} \cdot 3 + 1 = 3$
-3	$\frac{2}{3} \cdot (-3) + 1 = -1$



Jokaisen suoralla olevan pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön.

16

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Koordinaatisto
- Moniste: Funktion kuvaaminen koordinaatistossa

3. Suoran piirtäminen

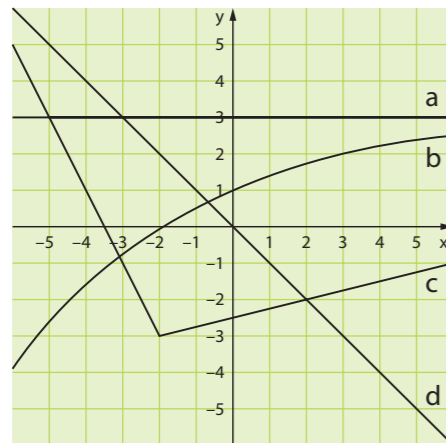
Opetusvihjeitä

- ◆ Ensimmäisellä tunnilla piirretään suorat laskemalla vähintään kolme pistettä. Tehtävissä 5, 6 ja 9 ennakoidaan vakiotermin merkitystä ja annetaan oppilaille mahdollisuus itse keksiä se ennen asian opettelemista seuraavalla tunnilla. Jos aikaa riittää, opetuksen voi aloittaa käyttämällä yhden tunnin Digiopetusmateriaalin monisteissa olevaan johdantotehtäväosioon: *Funktion kuvaaminen koordinaatistossa*.

Tvt-vinkit

- ◆ coolmath.com
⇒ algebra/lines
- ◆ opetustv.fi
⇒ lukio/MAB3/Suoran yhtälö
- ◆ openmatikka.com
⇒ Algebra ja funktiot/Mennään suoraan
- ◆ math.fi
⇒ 9.luokka/funktiot/Lineaarinen funktio ja suora
- ◆ mathsisfun.com
⇒ algebra/Linear equations
- ◆ mathopolis.com
⇒ Questions/Math Course/Algebra1/Functions/Linear Equations
- ◆ www.khanacademy.org/math
⇒ Algebra/Linear Equations, Functions, & Graphs
- ◆ thatquiz.Org
⇒ Algebra
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

1. Mitkä seuraavista funktioista ovat ensimmäistä astetta?
 a) $y = 3x - 4$ b) $y = x^2 + 1$
 c) $y = 0,5x + 1,5$ d) $y = \frac{1}{3}x + 2$
2. Mitkä seuraavista kuvaajista ovat ensimmäisen asteen funktion kuvaajia?



3. Täydennä taulukko. Merkitse pisteet koordinaatistoon ja piirrä pisteiden kautta kulkeva suora.
 a) $y = x + 1$ b) $y = 2x - 2$
- | x | y |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
- | x | y |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |

4. a) Piirrä suoran $y = 3x + 2$ kuvaaja.
 b) Tutki kuvaajasta, onko piste (1, 6) suoralla.
 c) Tutki laskemalla, onko piste (2, 8) suoralla.
5. Piirrä koordinaatistoon suoran kuvaaja. Missä pisteessä suora leikkaa y-akselin?
 a) $y = x - 4$ b) $y = -2x + 3$

6. Piirrä koordinaatistoon suoran kuvaaja. Missä pisteessä suora leikkaa y-akselin?
 a) $y = 4x$ b) $y = \frac{1}{2}x - 4$
7. Tutki laskemalla, kulkeeko suora $y = 6x - 4$ pisteen (1, 2) kautta.

8. a) Esitä yhtälönä sääntö, jonka mukaan taulukon y:n arvot on laskettu x:n arvoista.

x	0	1	2	3
y	1	3	5	7

- b) Merkitse pisteet koordinaatistoon ja piirrä yhtälön kuvaaja.
9. Piirrä koordinaatistoon suoran kuvaaja. Missä pisteessä suora leikkaa y-akselin?
 a) $y = -3x + 4$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 3$

10. Tutki laskemalla, kulkeeko suora $y = -\frac{2}{5}x + 2$ pisteen (5, 0) kautta.

11. a) Esitä yhtälönä sääntö, jonka mukaan taulukon y:n arvot on laskettu x:n arvoista.

x	0	1	2	3
y	1	0,5	0	-0,5

- b) Merkitse pisteet koordinaatistoon ja piirrä yhtälön kuvaaja.



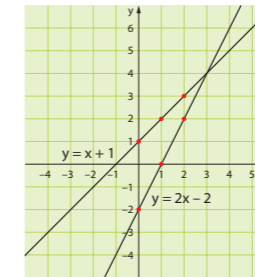
Lisätehtävät s. 73
Kotitehtävät s. 87

Tuntitehtävien vastaukset

3. SUORAN PIIRTÄMINEN

1. a), c) ja d)
 2. a ja d
 3. a) $y = x + 1$

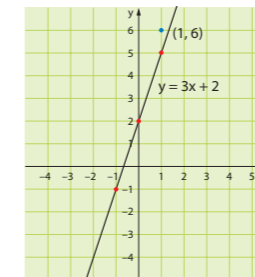
x	y
0	1
1	2
2	3



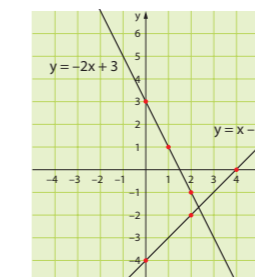
- b) $y = 2x - 2$

x	y
0	-2
1	0
2	2

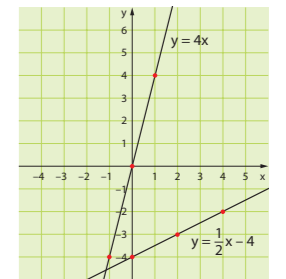
4. a)
 b) ei ole
 c) on



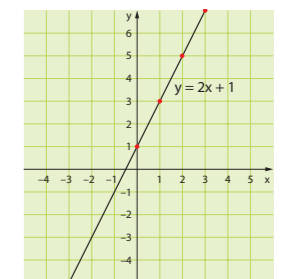
5. a) (0, -4)
 b) (0, 3)



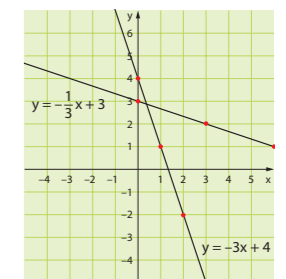
6. a) (0, 0)
 b) (0, -4)



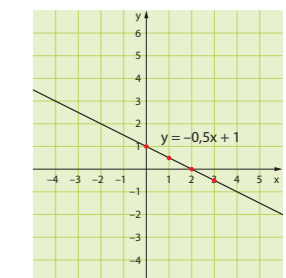
7. kulkee
 8. a) $y = 2x + 1$
 b)



9. a) (0, 4)
 b) (0, 3)



10. kulkee
 11. a) $y = -0,5x + 1$
 b)



3. Suoran piirtäminen



SUORAN YHTÄLÖ

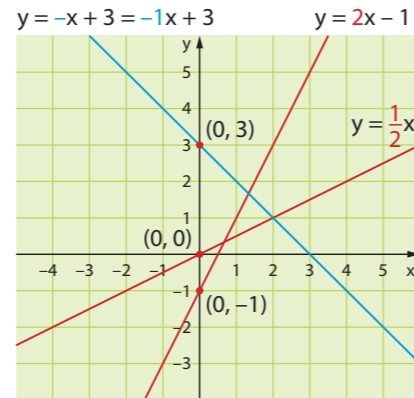
Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$. k on **kulmakerroin**
 b on **vakiotermi**

Jos kulmakerroin k on positiivinen, suora on **nouseva**.

Jos kulmakerroin k on negatiivinen, suora on **laskeva**.

Vakiotermi b ilmoittaa y :n arvon pisteessä, jossa suora leikkaa y -akselin.

Jos vakiotermiä ei ole eli $b = 0$, suora kulkee origon kautta.



Kulmakerroin on 2

$$y = 2x - 1$$

Suora leikkaa y -akselin pisteessä $(0, -1)$.

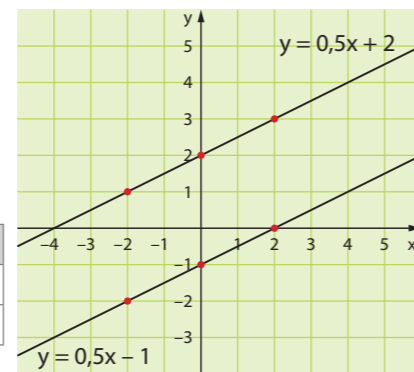
Esimerkki 3

Piirrä samaan koordinaatistoon suorat $y = 0,5x + 2$ ja $y = 0,5x - 1$.

Suorat ovat nousevia koska molempien suorien kulmakerroin on positiivinen. Ensimmäinen suora leikkaa y -akselin pisteessä $(0, 2)$ ja toinen pisteessä $(0, -1)$.

Lasketaan suorille kaksi muuta pistettä.

x	$y = 0,5x + 2$	x	$y = 0,5x - 1$
-2	$0,5 \cdot (-2) + 2 = 1$	-2	$0,5 \cdot (-2) - 1 = -2$
2	$0,5 \cdot 2 + 2 = 3$	2	$0,5 \cdot 2 - 1 = 0$



Jos mahdollista, valitaan sellaisia x :n arvoja, että y :n arvoksi tulee kokonaisluku.

Yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin.

Jos kahdella suoralla on sama kulmakerroin, niin suorat ovat yhdensuuntaiset.

Opetusvihjeitä

- ◆ Digiopetusmateriaalin monisteissa on suoran piirtämistehtäviä isommassa koordinaatistossa. Monisteen "Päättele ja yhdistä"-tehtävissä opetellaan kulmakertoimen ja vakiotermin merkitystä.

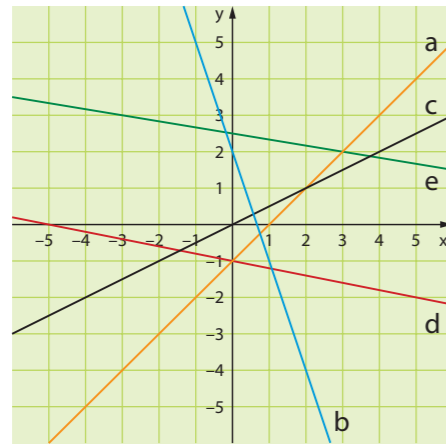
Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Suoran piirtäminen
- Moniste: Päättele ja yhdistä
- Itsearviointitesti: Luku 3 (Digilisätehtävät)
- Testi: Luku 3 (Tulostettavat kokeet)

12. Ilmoita suorien kulmakerroin ja vakiotermi.

a) $y = 4x + 3$ b) $y = -3x + 4$
 c) $y = -x - 1$ d) $y = 2x - 3$
 e) $y = 2x$ f) $y = -x$

13. Mitkä kuvan suorista ovat
 a) nousevia b) laskevia?



14. Ilmoita, onko suora nouseva vai laskeva.

a) $y = 3x + 3$ b) $y = -9x + 3$
 c) $y = -x$ d) $y = x + 1$

15. Mikä edellisen tehtävän suorista on

a) jyrkimmin nouseva
 b) jyrkimmin laskeva?

16. Päättele kuvaajaa piirtämättä, missä pisteessä suorat leikkaavat y-akselin.

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -3x + 4$
 c) $y = x$ d) $y = -4x + 9$



17. Päättele suoria piirtämättä, mitkä suorista ovat yhdensuuntaisia ja mitkä leikkaavat y-akselin samassa pisteessä. Perustele vastauksesi.

a) $y = -3x + 5$ b) $y = -4x - 7$
 c) $y = 4x + 5$ d) $y = -x + 7$
 e) $y = -3x + 1$ f) $y = -4x + 7$

18. Kuinka monta yhteistä pistettä suorilla on?

a) $y = 6x - 8$ ja $y = 8x - 6$
 b) $y = 3x$ ja $y = x + 3$
 c) $y = 4x - 7$ ja $y = 4x + 7$
 d) $y = -2x + 9$ ja $y = -2x$
 e) $y = x$ ja $y = -x$

19. Piirrä samaan koordinaatistoon suorat

a) $y = x - 4$ b) $y = -1,5x - 4$.

20. Piirrä samaan koordinaatistoon suorat

a) $y = 3x - 4$ b) $y = 3x + 3$.

21. Piirrä samaan koordinaatistoon suorat

a) $y = -\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}$ b) $y = 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.

22. Piirrä samaan koordinaatistoon suorat

a) $y = \frac{3}{4}x + 2$ b) $y = \frac{3}{4}x - 2,5$.

Lisätehtävät s. 74
 Kotitehtävät s. 87

19

Tuntitehtävien vastaukset

3. SUORAN PIIRTÄMINEN

12. a) $k = 4, b = 3$
 b) $k = -3, b = 4$
 c) $k = -1, b = -1$
 d) $k = 2, b = -3$
 e) $k = 2, b = 0$
 f) $k = -1, b = 0$

13. a) a ja c b) b, d ja e

14. a) nouseva b) laskeva

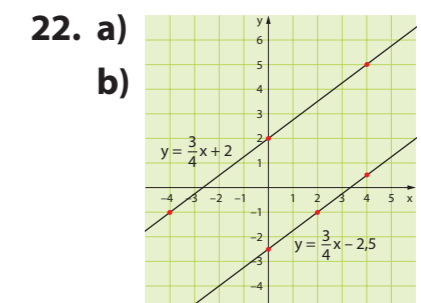
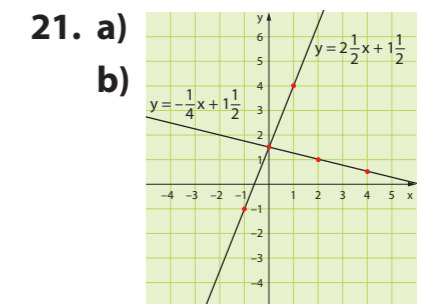
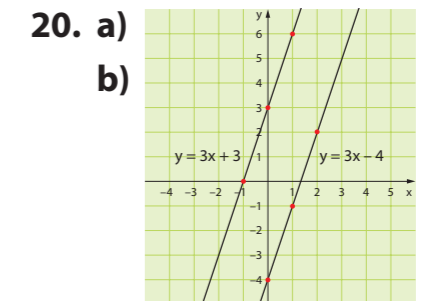
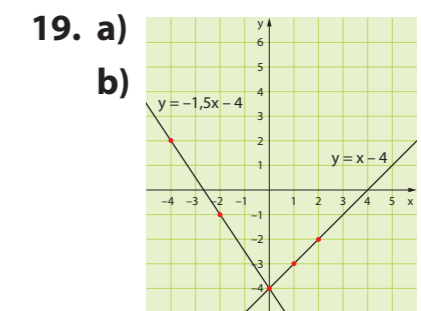
- c) laskeva d) nouseva

15. a) $y = 3x + 3$ b) $y = -9x + 3$

16. a) $(0, -3)$ b) $(0, 4)$
 c) $(0, 0)$ d) $(0, 9)$

17. yhdensuuntaisia: a ja e, b ja f
 yhtälöillä sama kulmakerroin leikkaavat y-akselin samassa pisteessä: a ja c, d ja f
 yhtälöillä sama vakiotermi

18. a) 1 b) 1 c) 0
 d) 0 e) 1



4. Akselien suuntaiset suorat



Muotoa $y = kx + b$ ($k \neq 0$) oleva suora on aina nouseva tai laskeva suora. Jos suoran kulmakerroin $k = 0$, suora ei ole nouseva eikä laskeva vaan vaakasuora. Yhtälö on silloin muotoa $y = b$. Vastaavasti pystysuoran suoran yhtälö on muotoa $x = a$.

Pystysuora suora ei ole funktion kuvaaja, koska yhtä muuttujan x arvoa vastaa useampi y :n arvo.

KOORDINAATTIAKSELIIEN SUUNTAISET SUORAT

$x = a$ y -akselin suuntainen suora. Kulmakerrointa ei voi määrittää.
 $y = b$ x -akselin suuntainen suora. Kulmakerroin $k = 0$.

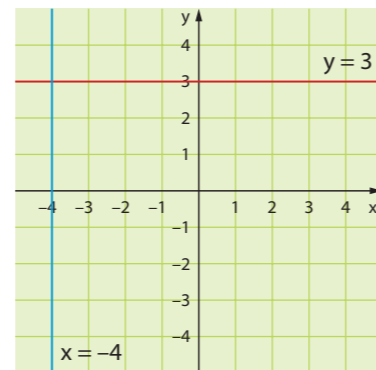
Esimerkki 1

Piirrä suorat $y = 3$ ja $x = -4$.

$y = 3$ tarkoittaa sitä, että suoran pisteiden y -koordinaatti on aina 3 olipa x -koordinaatti mikä tahansa.

$x = -4$ tarkoittaa sitä, että suoran pisteiden x -koordinaatti on aina -4 olipa y -koordinaatti mikä tahansa.

Akselien suuntaisia suoria piirrettäessä ei tarvitse laskea erillisiä suoran pisteitä.

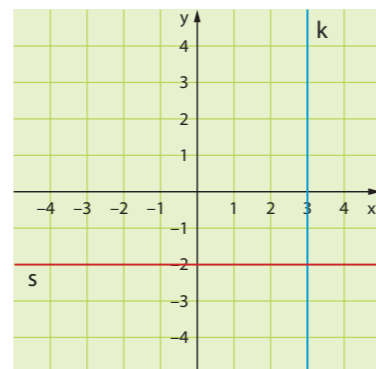


Esimerkki 2

Määritä suorien s ja k yhtälöt.

Suoralla s ovat kaikki ne pisteet, joiden y -koordinaatti on -2 . Suoran yhtälö on $y = -2$.

Suoralla k ovat kaikki ne pisteet, joiden x -koordinaatti on 3. Suoran yhtälö on $x = 3$.



20

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Ryhmätyö
- Akselien suuntaiset suorat
- Moniste: Piilosana
- Itsearviointitesti: Luku 4 (Digilisätehtävät)

4. Akselien suuntaiset suorat

Opetusvihjeitä

- ◆ Digiopetusmateriaalin monisteissa on **vaihtoehtoinen tapa** opetella akselien suuntaiset suorat **ryhmätyönä**. Harjoitustehtävät ovat samat.

Tvt-vinkit

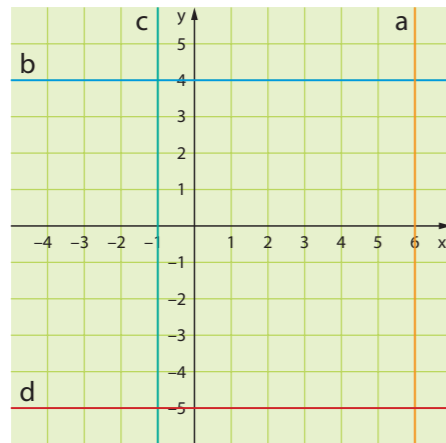
- ◆ coolmath.com
⇒ algebra/lines/horizontal and vertical lines
- ◆ opetustv.fi
⇒ lukio/ Lyhyt matematiikka /MAB3/Suoran yhtälö
- ◆ openmatikka.com
⇒ Algebra ja funktiot/Mennään suoraan
- ◆ mathsisfun.com
⇒ algebra2/Linear equations
- ◆ www.khanacademy.org/math
⇒ Algebra I/Two-variable linear equations/ Horizontal & vertical lines
- ◆ thatquiz.org
⇒ Algebra
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

1. Piirrä suora.
 ◆◇◇ a) $y = 3$ b) $x = -2$ c) $y = 0$

2. Piirrä suora.
 ◆◇◇ a) $x = 2$ b) $y = -1$ c) $x = 0$

3. Mikä on
 ◆◇◇ a) x-akselin b) y-akselin yhtälö?

4. Määritä suorien a, b, c ja d yhtälöt.
 ◆◇◇



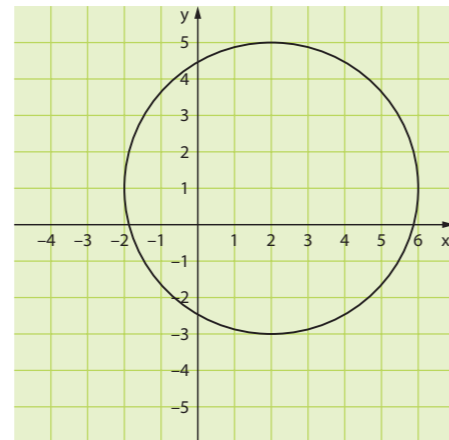
5. Piirrä taulukko vihkoosi ja merkitse rasti oikeiden vaihtoehtojen kohdalle.
 ◆◇◇

Suora	Nou-seva	Las-keva	x-akselin suun-tainen	y-akselin suun-tainen
$y = 8x - 7$				
$y = 8$				
$y = -8x$				
$x = -8$				
$y = -7$				
$y = x$				

6. Mikä on sen suoran yhtälö, joka on
 ◆◇◇ a) x-akselin b) y-akselin
 suuntainen ja kulkee pisteen (3, 1)
 kautta?

7. Piirrä koordinaatistoon pisteet A(3, 4),
 ◆◇◇ B(3, -2) ja C(-2, 4). Määritä suoran
 yhtälö kun suora kulkee pisteiden
 a) A ja B b) A ja C kautta.

8. Määritä ympyrän
 ◆◇◇ a) x-akselin b) y-akselin
 suuntaisten tangenttien yhtälöt.



9. Piirrä samaan koordinaatistoon suorat
 ◆◇◇ $x = -2$, $x = 4$, $y = 0$ ja $y = 5$. Laske suorien
 sisään jäävän suorakulmion pinta-ala.

Koordinaatistossa pinta-alayksikkönä käytetään yleensä yksikön mittaista ruutua, ei esim. neliösenttimetriä.

10. Piirrä samaan koordinaatistoon suorat
 ◆◇◇ $y = -2x + 4$, $y = 2x$ ja $y = -2$.
 Laske suorien rajoittaman kolmion
 pinta-ala.

11. Ympyrän keskipiste on (1, 2) ja säde on
 ◆◇◇ 3. Määritä tämän ympyrän
 a) x-akselin b) y-akselin
 suuntaisten tangenttien yhtälöt.

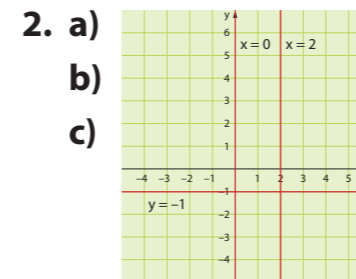
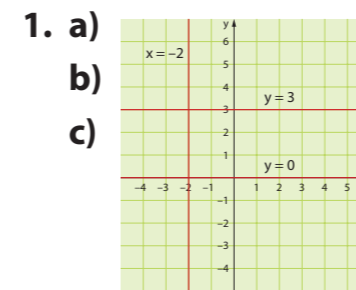


Lisätehtävät s. 74
 Kotitehtävät s. 88

21

Tuntitehtävien vastaukset

4. AKSELIEN SUUNTAISET SUORAT



3. a) $y = 0$ b) $x = 0$

4. a) $x = 6$ b) $y = 4$

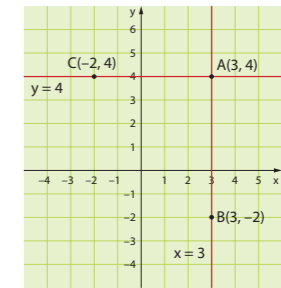
- c) $x = -1$ d) $y = -5$

5.

Suora	Nou-seva	Las-keva	x-akselin suun-tainen	y-akselin suun-tainen
$y = 8x - 7$	x			
$y = 8$			x	
$y = -8x$		x		
$x = -8$				x
$y = -7$			x	
$y = x$	x			

6. a) $y = 1$ b) $x = 3$

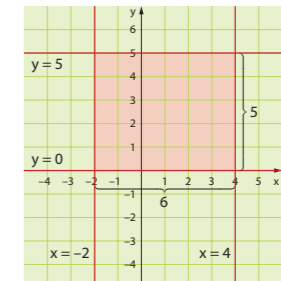
7. a) $x = 3$ b) $y = 4$



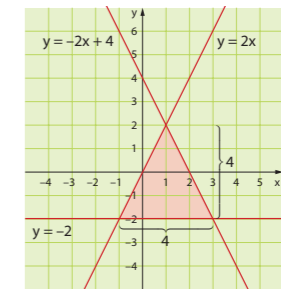
8. a) $y = 5$ ja $y = -3$

- b) $x = -2$ ja $x = 6$

9. 30



10. 8



11. a) $y = 5$ ja $y = -1$

- b) $x = -2$ ja $x = 4$

5. Suoran yhtälön määrittäminen



Suoran yhtälö voidaan muodostaa suoran kuvaajasta määrittämällä kulmakertoimen ja vakiotermin arvot.

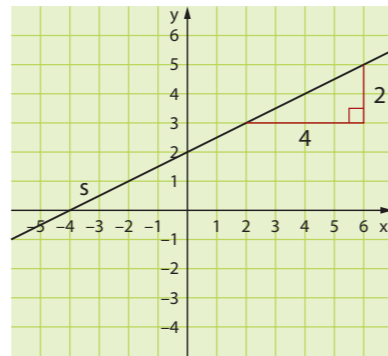
Esimerkki 1

Määritä suoran s yhtälö.

Suorakulmisen kolmion voi piirtää suoran viereen mihin kohtaan ja minkä kokoisena tahansa.

Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$, joten täytyy määrittää k :n ja b :n arvot.

Kulmakertoimen määrittämistä varten valitaan suoralta kaksi pistettä. Piirretään kuvan mukainen suorakulmainen kolmio.



Kulmakertoimen itseisarvo on pystysuoran (y-akselin suuntaisen) kateetin pituus jaettuna vaakasuoran (x-akselin suuntaisen) kateetin pituudella.

Jos suora on nouseva, $k > 0$
Jos suora on laskeva, $k < 0$

$|k| = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Koska suora on nouseva k on positiivinen, $k = \frac{1}{2}$.

Suoran ja y-akselin leikkauspiste on $(0, 2)$, joten vakio-termi $b = 2$.

Vastaus: Suoran yhtälö on $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Esimerkki 2

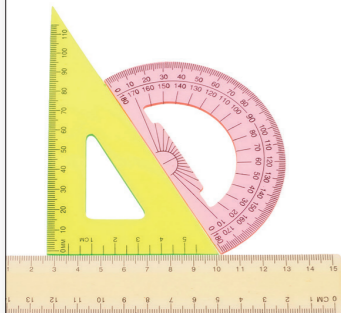
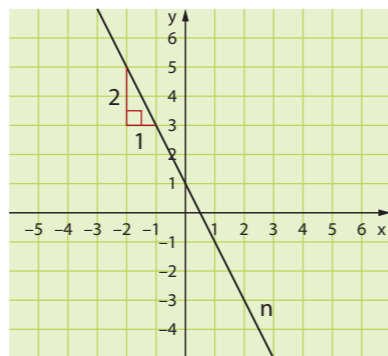
Määritä suoran n yhtälö.

Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$. Koska suora on laskeva, $k < 0$.

$$k = -\frac{2}{1} = -2$$

Koska suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 1)$, niin $b = 1$.

Vastaus: Suoran yhtälö on $y = -2x + 1$.



Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Yhtälön määrittäminen kuvaajasta

5. Suoran yhtälön määrittäminen

Opetusvihjeitä

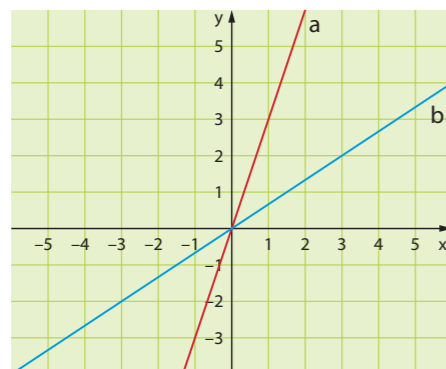
- ◆ Esimerkit 1 ja 2 voi käsitellä johdatellusti Digiopetusmateriaalissa olevan monisteen avulla.

Tvt-vinkit

- ◆ coolmath.com
⇒ algebra/lines
- ◆ opetustv.fi
⇒ lukio/ Lyhyt matematiikka /MAB3/Suoran yhtälö
- ◆ openmatikka.com
⇒ Algebra ja funktiot/Mennään suoraan
- ◆ math.fi
⇒ 9.luokka/funktio/Suoran yhtälön muodostaminen
- ◆ mathsisfun.com
⇒ algebra2/Linear equations
- ◆ mathopolis.com
⇒ Questions/math Course/Algebra1/Graphs/Equation of a straight line
⇒ Questions/math Course/Algebra1/Graphs/Linear equations
- ◆ www.khanacademy.org/math
⇒ Algebra I/Two-variable linear equations/Writing slope-intercept equations
- ◆ thatquiz.org
⇒ Algebra
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

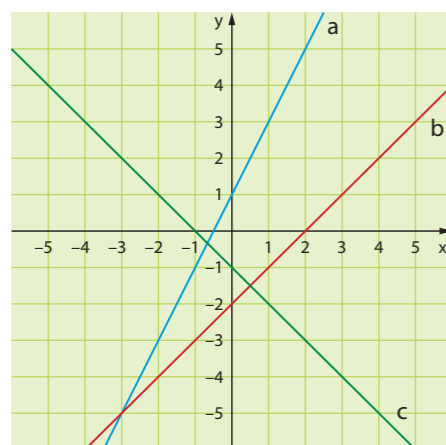
1. Määritä suoran kulmakerroin.

◆◇◇



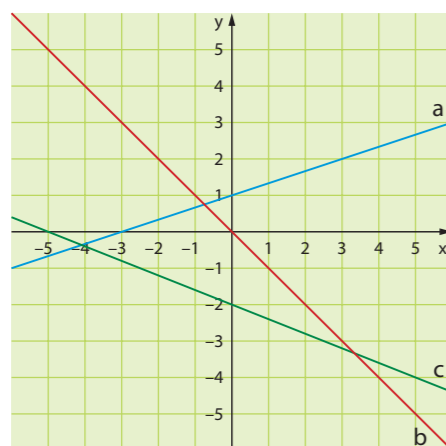
2. Määritä suoran kulmakerroin ja ilmoita, missä pisteessä suora leikkaa y-akselin.

◆◇◇



3. Määritä suoran yhtälö.

◆◇◇



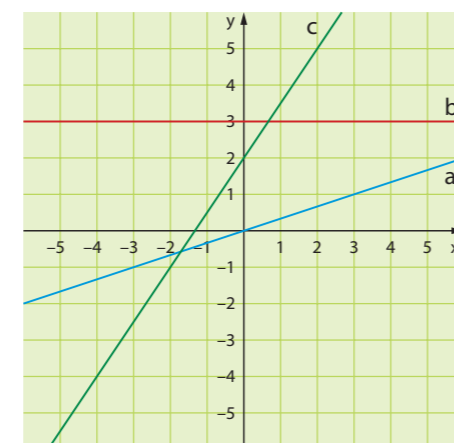
4. Suora kulkee pisteiden $(-2, -4)$ ja $(0, 1)$ kautta.

◆◇◇

- a) Määritä suoran kulmakerroin.
b) Määritä vakiotermin arvo.
c) Ilmoita suoran yhtälö.

5. Määritä suoran yhtälö.

◆◇◇

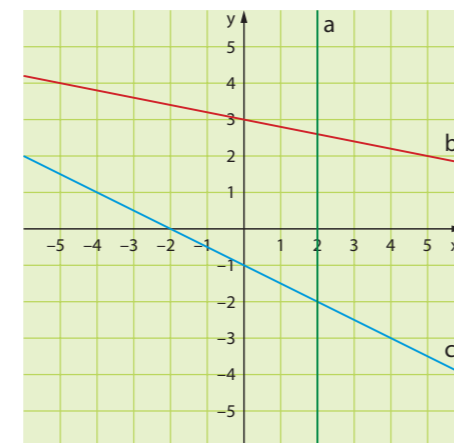


6. Piste $(1, 3)$ on origon kautta kulkevan suoran piste. Määritä suoran kulmakerroin.

◆◇◇

7. Määritä suoran yhtälö.

◆◇◇



Lisätehtävät s. 75
Kotitehtävät s. 88

23

Tuntitehtävien vastaukset

5. SUORAN YHTÄLÖN MÄÄRITYS

1. a) $k=3$ b) $k = \frac{2}{3}$

2. a) $k=2, (0, 1)$

b) $k=1, (0, -2)$

c) $k=1, (0, -1)$

3. a) $y = \frac{1}{3}x + 1$ b) $y = -x$

c) $y = -\frac{2}{5}x - 2$

4. a) $k = 2\frac{1}{2}$ b) $b=1$

c) $y = 2\frac{1}{2}x + 1$

5. a) $y = \frac{1}{3}x$ b) $y=3$

c) $y = 1\frac{1}{2}x + 2$

6. $k=3$

7. a) $x=2$

b) $y = -\frac{1}{5}x + 3$

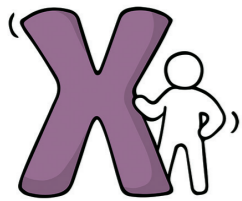
c) $y = -\frac{1}{2}x - 1$

5. Suoran yhtälön määrittäminen

Suoran yhtälö voidaan määrittää usein myös piirtämättä suoraa.

Esimerkki 3

Määritä sen suoran yhtälö, joka on suoran $y = 5x$ suuntainen ja kulkee pisteen $(0, -6)$ kautta.



Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$.

$k = 5$ koska kysytty suora on suoran $y = 5x$ suuntainen ja yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin.

$b = -6$ koska suora kulkee pisteen $(0, -6)$ kautta.

Vastaus: Suoran yhtälö on $y = 5x - 6$



Esimerkki 4

Määritä sen suoran yhtälö, joka on suoran $y = 3x + 4$ suuntainen ja kulkee pisteen $(2, 4)$ kautta.

Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$.

Kysytyn suoran kulmakerroin $k = 3$, koska suora on yhdensuuntainen suoran $y = 3x + 4$ kanssa.

Sijoitetaan suoran yhtälöön tunnetun pisteen x - ja y -koordinaattien arvot sekä kulmakertoimen k arvo.

y	k	x
↓	↓	↓
$4 = 3 \cdot 2 + b$		
$4 = 6 + b$		
$4 - 6 = b$		
$-2 = b$		

Vastaus: Suoran yhtälö on $y = 3x - 2$.

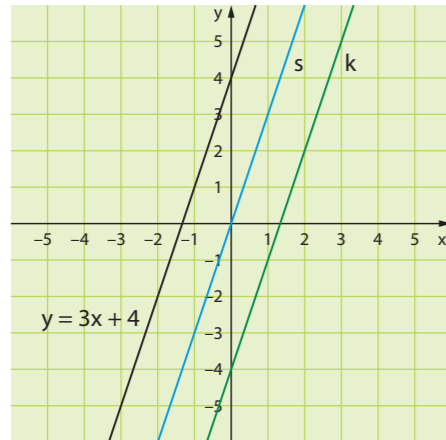


Opetuskertaan liittyvä materiaali

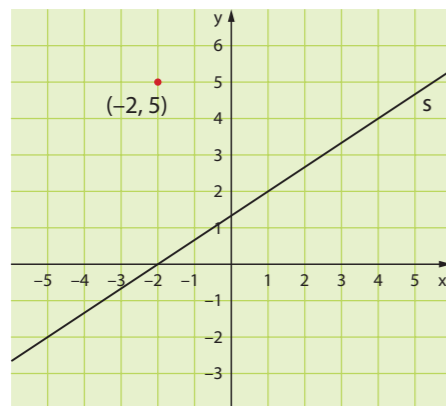
- Moniste: Funktioristikko 1
- Itsearviointitesti: Luku 5 (Digilisätehtävät)
- Testi: Luku 5 (Tulostettavat kokeet)

8. Ilmoita suoran yhtälö, kun suoran
 a) kulmakerroin on 3 ja se kulkee pisteen (0, 2) kautta
 b) kulmakerroin on -5 ja se kulkee pisteen (0, -3) kautta.

9. Ilmoita suorien s ja k yhtälöt.



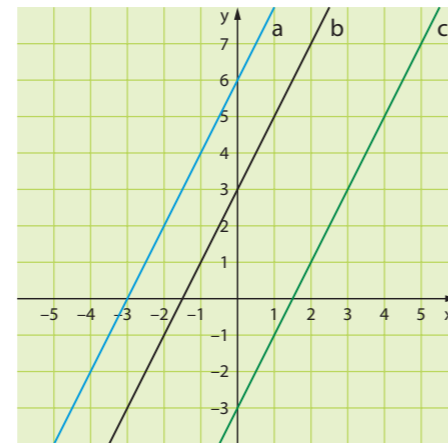
10. Suora kulkee pisteen (1, 2) kautta ja sen kulmakerroin on 2. Määritä
 a) vakiotermin arvo
 b) suoran yhtälö.
11. Määritä pisteen (-2, 5) kautta kulkevan suoran yhtälö, kun se on yhdensuuntainen suoran s kanssa.



12. Kirjoita sen suoran yhtälö, joka on suoran $y = -0,5x + 4$ suuntainen ja leikkaa y-akselin pisteessä (0, 1).

13. Kirjoita sen suoran yhtälö, joka on suoran $y = 2x$ suuntainen ja leikkaa y-akselin pisteessä (0, 5).

14. Suorat a, b ja c ovat yhdensuuntaisia. Suoran b yhtälö on $y = 2x + 3$. Määritä suorien a ja c yhtälöt.



15. Suora kulkee pisteen (2, -3) kautta ja sen kulmakerroin on -2. Tutki piirtämättä, onko piste (-2, 5) tällä suoralla.

16. Määritä piirtämättä sen suoran yhtälö, jonka kulmakerroin on 3 ja joka kulkee pisteen
 a) (0, 1) b) (-1, -6) kautta.

17. Määritä piirtämättä sen suoran yhtälö, joka on suoran $y = -\frac{3}{5}x - 1$ suuntainen ja joka kulkee pisteen (-4, 1) kautta.

Lisätehtävät s. 75
 Kotitehtävät s. 89

Tuntitehtävien vastaukset

5. SUORAN YHTÄLÖN MÄÄRITYS

8. a) $y = 3x + 2$ b) $y = -5x - 3$

9. s: $y = 3x$ k: $y = 3x - 4$

10. (1, 2) → y saa arvon 2 x:n arvolla 1, kulmakerroin $k = 2$

Sijoitetaan arvot suoran $y = kx + b$ yhtälöön.

a) $b = 0$ c) $y = 2x$

11. $y = \frac{2}{3}x + 6\frac{1}{3}$

12. $y = -0,5x + 1$

13. $y = 2x + 5$

14. a: $y = 2x + 6$ c: $y = 2x - 3$

15. on

16. a) $y = 3x + 1$

b) $y = 3x - 3$

17. $y = -\frac{3}{5}x - 1\frac{2}{5}$

6. Paraabeli

Ensimmäisen asteen funktion kuvaaja on suora. Sen piirtämiseen riittää, että tiedetään kaksi suoran pistettä. Kun funktion muuttujan korkein eksponentti on kaksi tai suurempi sen kuvaaja on käyrä viiva ja sen piirtämiseksi tarvitaan useampia pisteitä.

Esimerkki 1

Piirrä funktion $y = x^2$ kuvaaja.

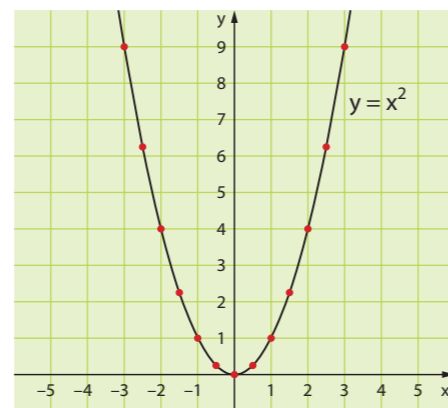
Merkittyjen pisteiden avulla voidaan hahmotella kuvaaja.

Muuttujan x vastalukuarvoilla saadaan sama y :n arvo.

x	$y = x^2$
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4
3	9
-3	9
0,5	0,25
-0,5	0,25
1,5	2,25
-1,5	2,25
2,5	6,25
-2,5	6,25

$$1^2 = 1$$

$$(-1)^2 = 1$$

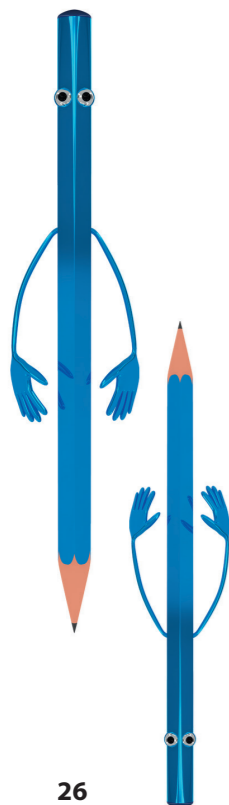
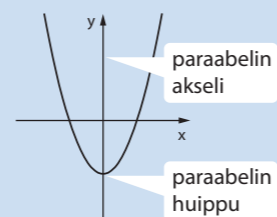


Kuvaaja on nimeltään **paraabeli**.
Funktion $y = x^2$ kuvaaja on ns. **perusparaabeli**.

PARAABELI $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$)

Toisen asteen funktion kuvaaja on paraabeli. Paraabeli on symmetrinen kuvio, jonka symmetria-akselia kutsutaan paraabelin **akseliksi**.

Akselin ja paraabelin leikkauspiste on paraabelin huippu.



26

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Paraabelin $y = ax^2$ piirtäminen

6. Paraabeli

Opetietoa

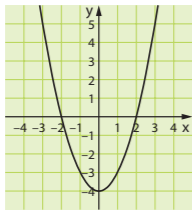
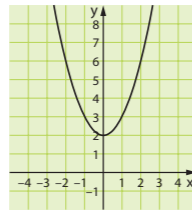
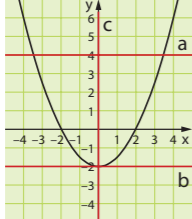
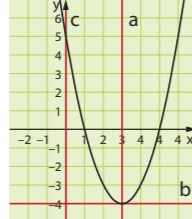
- ◆ Satelliittiantenni (lautasantenni) on paraboloidi tai pallopinnan kalotti, jossa akselin suuntaiset säteet heijastuvat polttopisteessä olevan vastaanottimen kautta.

Opetusvihjeitä

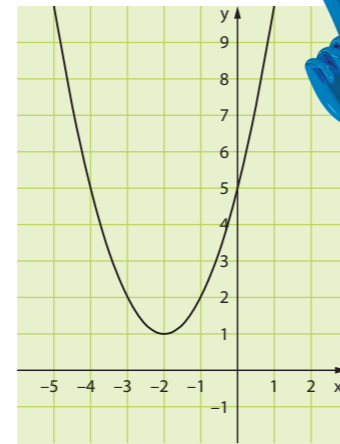
- ◆ Teorian voi käsitellä lisämateriaalissa olevan monisteen avulla.

Tvt-vinkit

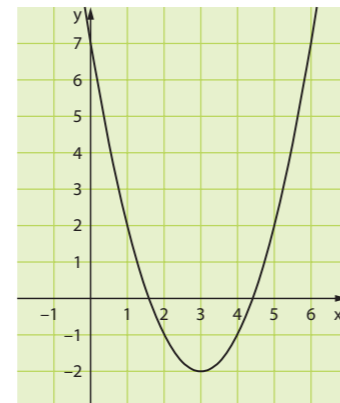
- ◆ coolmath.com
⇒ algebra/Graphing Quadratics (Parabolas)
- ◆ opetustv.fi
⇒ lukio/ Pitkä matematiikka /MAA2/Polynomifunktiot/Toisen asteen polynomifunktio
- ◆ openmatikka.com
⇒ Algebra ja funktiot/Hymiöt
- ◆ math.fi
⇒ 9.luokka/funktio/Toisen asteen funktio ja paraabeli
- ◆ mathsisfun.com
⇒ algebra 2/Equations of Second Degree/Graphing Quadratic Equations
- ◆ mathopolis.com
⇒ Questions/math Course/Algebra 1/Graphs/Graphing quadratic equations
- ◆ www.khanacademy.org/math
⇒ Algebra/Quadratic Equations & Functions/Graphing quadratic functions
- ◆ thatquiz.org
⇒ Algebra
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

1. Onko kuvaaja suora vai käyrä?
 ◆◇◇ a) $y = 4x^3 + 7$ b) $y = 6x - 2$
 c) $y = 5x^2$ d) $y = 5$
2. Mitkä seuraavista funktioista ovat toisen asteen funktioita?
 ◆◇◇ A) $y = 2x$ B) $y = x^2 + 1$
 C) $y = x^3$ D) $y = -4x^2 + 3$
 E) $y = x^4$ F) $y = -x$
 G) $y = 3x^2$ H) $y = x^3 + x^2 - 3$
3. Laske funktion $f(x) = 2x^2 + 1$ arvo, kun
 ◆◇◇ a) $x = 1$ b) $x = -1$
 c) $x = 3$ d) $x = -3$.
4. Ilmoita paraabelin huipun koordinaatit.
 ◆◇◇ a)  b) 
5. Mikä suorista on paraabelin akseli?
 ◆◇◇ a)  b) 
6. Piirrä samaan koordinaatistoon paraabelit
 ◆◇◇ a) $y = 2x^2$
 b) $y = -2x^2$
 c) $y = 3x^2$
 d) Miten x^2 -termin kerroin vaikuttaa paraabelin muotoon?

7. a) Onko paraabelin huippu pisteessä
 ◆◇◇ (2, 1), (-1, 2) vai (-2, 1)?
 b) Onko paraabelin akseli suora
 $y = -2$, $x = -2$ vai $y = 1$?



8. Piirrä samaan koordinaatistoon paraabelit
 ◆◇◇ a) $y = 0,5x^2$ b) $y = -0,5x^2$
 c) $y = \frac{1}{3}x^2$.
9. a) Ilmoita paraabelin huipun koordinaatit.
 ◆◇◇ b) Ilmoita sen suoran yhtälö, joka on paraabelin akseli.



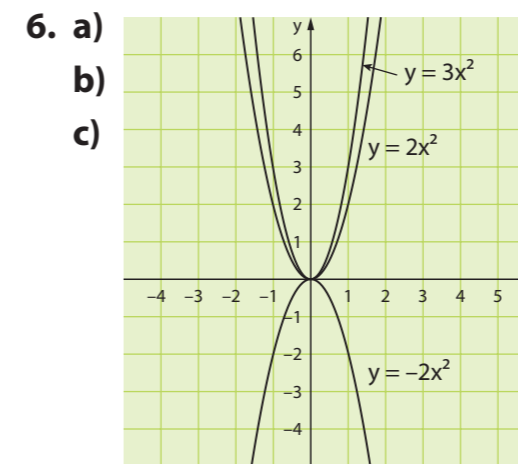
Lisätehtävät s. 76
 Kotitehtävät s. 89

27

Tuntitehtävien vastaukset

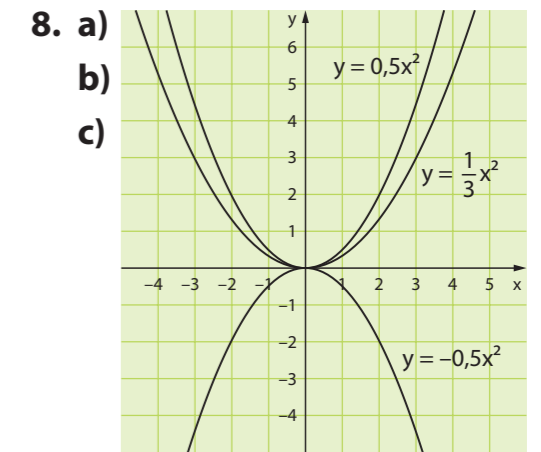
6. PARAABELI

1. a) käyrä b) suora
 c) käyrä d) suora
2. B, D ja G
3. a) $y = 3$ b) $y = 3$
 c) $y = 19$ d) $y = 19$
4. a) (0, -4) b) (0, 2)
5. a) c b) a



- d) negatiivinen kerroin → huippu on ylhäällä
 itseisarvoltaan pienempi kerroin → leveämpi paraabeli

7. a) (-2, 1) b) $x = -2$



9. a) (3, -2) b) $x = 3$

6. Paraabeli

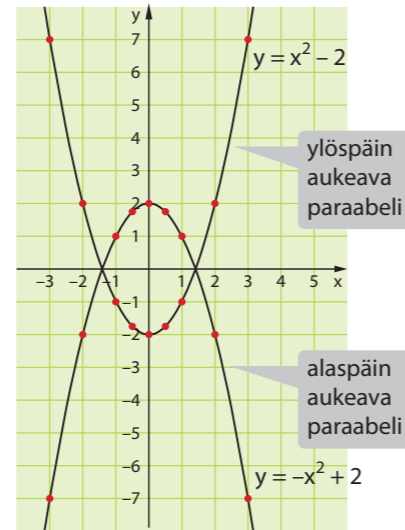
Esimerkki 2

Piirrä samaan koordinaatistoon paraabelit $y = x^2 - 2$ ja $y = -x^2 + 2$.

Merkintä \pm tarkoittaa, että lasketaan y :n arvo sekä $+$ että $-$ merkkisellä x :n arvolla.

x	$y = x^2 - 2$
± 0	-2
$\pm 0,5$	-1,75
± 1	-1
± 2	2
± 3	7

x	$y = -x^2 + 2$
± 0	2
$\pm 0,5$	1,75
± 1	1
± 2	-2
± 3	-7



ylöspäin aukeava paraabeli

alaspäin aukeava paraabeli

Paraabelin yleinen yhtälö on $y = ax^2 + bx + c$.

PARAABELIN $y = ax^2 + c$ OMINAISUUKSIA

- Huippu on pisteessä $(0, c)$.
- Akseli on y -akseli.
- Aukeaa ylöspäin, jos $a > 0$. Aukeaa alaspäin, jos $a < 0$.
- On sitä leveämpi mitä pienempi on a :n itseisarvo.

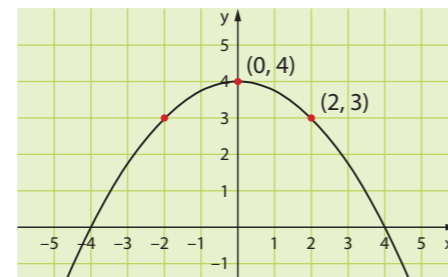
Esimerkki 3

Määritä kuvan paraabelin yhtälö.

Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + c$

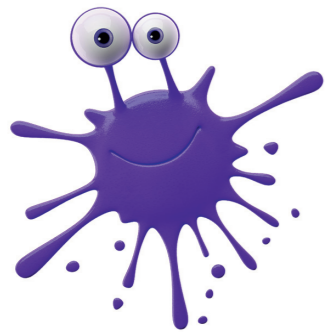
Huippu määrittää vakiotermin arvon, $c = 4$.

Kuvaaja kulkee pisteen $(2, 3)$ ($x = 2$ ja $y = 3$) kautta.



$$\begin{aligned} 3 &= a \cdot 2^2 + 4 && \leftarrow \text{Sijoitetaan } x = 2, y = 3 \text{ ja } c = 4 \text{ yhtälöön.} \\ 3 &= 4a + 4 \\ -4a &= 4 - 3 \\ -4a &= 1 && | : (-4) \\ a &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vastaus: Yhtälö on $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.



28

Opetusvihjeitä

- Paraabelin $y = ax^2 + c$ piirtäminen voidaan käsitellä lisämateriaalissa olevan monisteen avulla.

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Paraabelin $y = ax^2 + c$ piirtäminen
- Moniste: Funktoristikko 2
- Itsearviointitesti: Luku 6 (Digilisätehtävät)

10. Määritä piirtämättä, aukeaako paraabeli ylös- vai alaspäin.

a) $y = 14x^2$ b) $y = -8x^2$ c) $y = 7x^2$

11. Yhdistä funktio oikeaan tietoon.

$y = -2x + 4$	A	1	ylöspäin aukeava paraabeli
$y = -x^2$	B	2	alaspäin aukeava paraabeli
$y = 4$	C	3	laskeva suora
$y = 4x^2$	D	4	x-akselin suuntainen suora

12. Määritä piirtämättä

- ◆◇◇ a) mikä paraabeleista on kapein
b) mikä paraabeleista on levein
c) mitkä paraabeleista ovat keskenään yhtä leveät.
- A $y = 2x^2$ B $y = 7x^2 + 2$
C $y = -2x^2 + 2$ D $y = 0,5x^2$
E $y = -5x^2 + 1$ F $y = 3x^2 + 2$

13. Ilmoita paraabelin huippu, kun yhtälö on

a) $y = 2x^2 - 6$
b) $y = 5x^2 + 2$
c) $y = 0,6x^2$.

14. Piirrä samaan koordinaatistoon paraabelit

a) $y = 4x^2$ b) $y = -x^2$ c) $y = x^2$.

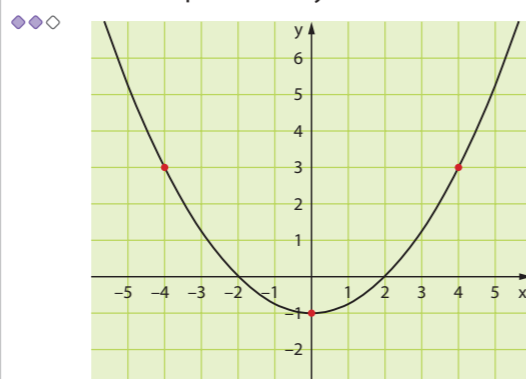
15. a) Piirrä samaan koordinaatistoon paraabeli $y = x^2 - 1$ ja suora $y = x + 2$. Väritä suoran ja paraabelin rajoittama alue.

- b) Onko piste (1, 2) tällä alueella?



16. Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + c$. Piirrä samaan koordinaatistoon paraabelit, kun
- ◆◇◇ a) $a = 2$ ja $c = -3$
b) $a = -2$ ja $c = 3$.
c) Ilmoita paraabelien leikkauspisteiden koordinaatit.

17. Määritä paraabelin yhtälö.



Lisätehtävät s. 76
Kotitehtävät s. 89

29

Tuntitehtävien vastaukset

6. PARAABELI

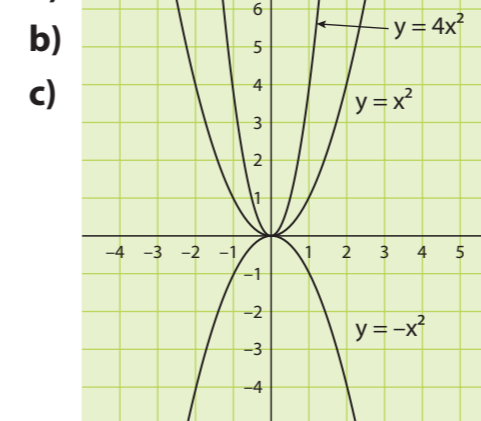
10. a) ylöspäin b) alaspäin
c) ylöspäin

11. A $\leftarrow \rightarrow$ 3
B $\leftarrow \rightarrow$ 2
C $\leftarrow \rightarrow$ 4
D $\leftarrow \rightarrow$ 1

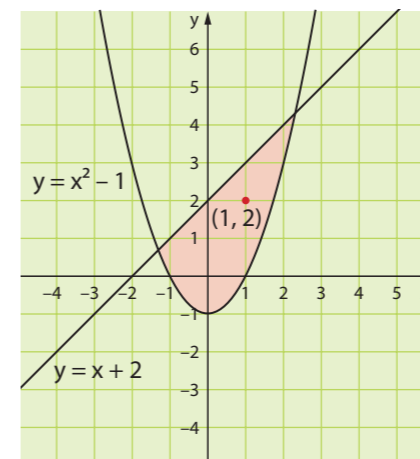
12. a) D b) B c) A ja C

13. a) (0, -6) b) (0, 2) c) (0, 0)

14. a)



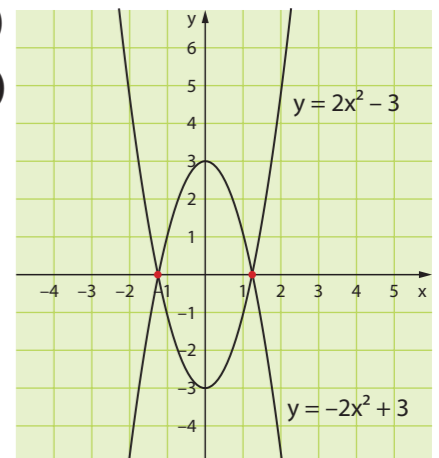
15. a)



- b) on

16. a)

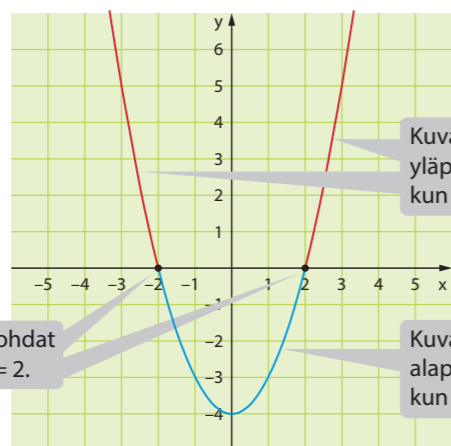
- b)



- c) (1, 2; 0) ja (-1, 2; 0)

17. $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

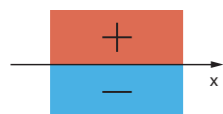
7. Funktion ominaisuuksia



Funktion nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 2$.

Kuvaaja on x-akselin yläpuolella, kun $x > 2$ tai $x < -2$.

Kuvaaja on x-akselin alapuolella, kun $-2 < x < 2$.



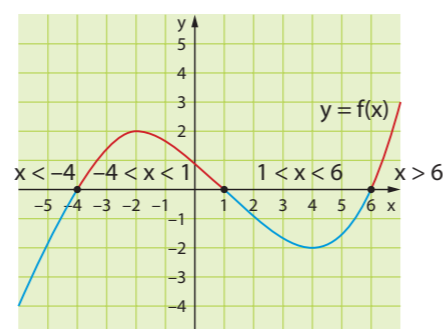
$f(x) = 0$ **Funktion nollakohta** on se muuttujan arvo, jolla funktio saa arvon nolla. Kuvaaja leikkaa nollakohdassa x-akselin.

$f(x) > 0$ **Funktion arvo on positiivinen**, kun kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

$f(x) < 0$ **Funktion arvo on negatiivinen**, kun kuvaaja on x-akselin alapuolella.

Esimerkki 1

- Määritä funktion nollakohdat.
- Millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat positiivisia?
- Millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia?



Lukujen 1 ja 6 väli merkitään $1 < x < 6$.

- nollakohdat: $x = -4$, $x = 1$ ja $x = 6$
- $f(x) > 0$, kun $-4 < x < 1$ tai $x > 6$.
- $f(x) < 0$, kun $x < -4$ tai $1 < x < 6$.

30

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Funktion ominaisuuksia 1
- Moniste: Funktiotehtäviä 1

7. Funktion ominaisuuksia

Opetusvihjeitä

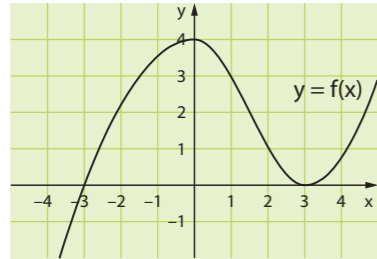
- Tämän sivun teoria voidaan käsitellä Digiopetusmateriaalissa olevan monisteen avulla.

Tvt-vinkit

- coolmath.com
⇒ algebra/Graphing polynomials
- opetustv.fi
⇒ lukio/ Pitkä matematiikka/MAA2/Polynomifunktiot/Toisen asteen polynomifunktio
- math.fi
⇒ 9.luokka/funktiot/funktion kuvaaja ja nollakohdat
- openmatikka.com
⇒ Algebra ja funktiot/Hymiöt
- mathsisfun.com
⇒ algebra 2/Functions
- www.khanacademy.org/math
⇒ Algebra/Functions/ [Maximum and minimum points](#)
⇒ Algebra/Functions/ [Intervals where a function is positive, negative, increasing, or decreasing](#)
- thatquiz.org
⇒ Algebra
- wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

1. Määritä funktion $f(x)$ nollakohdat.

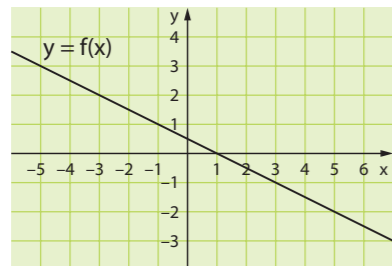
◆◇◇



2. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla

◆◇◇

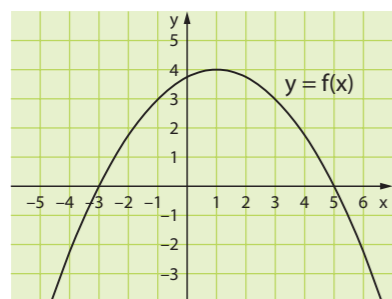
- a) funktion $f(x)$ arvo on nolla
b) funktio $f(x)$ on positiivinen
c) funktio $f(x)$ on negatiivinen.



3. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla

◆◇◇

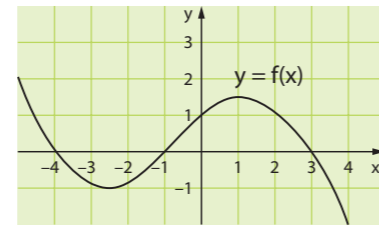
- a) funktion $f(x)$ arvo on nolla
b) funktion $f(x)$ arvo on positiivinen
c) funktion $f(x)$ arvo on negatiivinen.



4. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla

◆◇◇

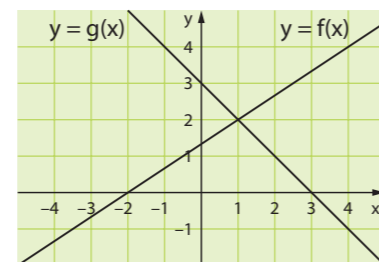
- a) $f(x) = 0$ b) $f(x) > 0$ c) $f(x) < 0$.



5. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla

◆◇◇

- a) $f(x) > 0$ b) $g(x) < 0$
c) $f(x) = g(x)$ d) $f(x) > g(x)$.



6. Laske funktion nollakohta.

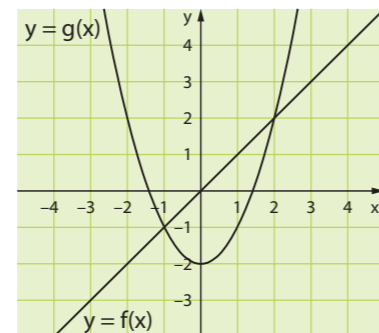
◆◇◇

- a) $y = x - 5$ b) $y = 4x + 8$

7. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla

◆◇◇

- a) $f(x) > 0$ b) $g(x) < 0$
c) $f(x) = g(x)$ d) $f(x) > g(x)$.



8. Laske funktion nollakohta.

◆◇◇

- a) $y = -2x - 6$
b) $y = x^2 - 9$

Lisätehtävät s. 77
Kotitehtävät s. 90

31

Tuntitehtävien vastaukset

7. FUNKTION OMINAISUUKSIA

1. $x = -3$ ja $x = 3$

2. a) $x = 1$ b) $x < 1$ c) $x > 1$

3. a) $x = -3$ tai $x = 5$

b) $-3 < x < 5$

c) $x < -3$ tai $x > 5$

4. a) $x = -4, x = -1$ tai $x = 3$

b) $x < -4$ tai $-1 < x < 3$

c) $-4 < x < -1$ tai $x > 3$

5. a) $x > -2$ b) $x > 3$

c) $x = 1$ d) $x > 1$

6. a) $x = 5$ b) $x = -2$

7. a) $x > 0$ b) $-1,5 < x < 1,5$

c) $x = -1$ tai $x = 2$

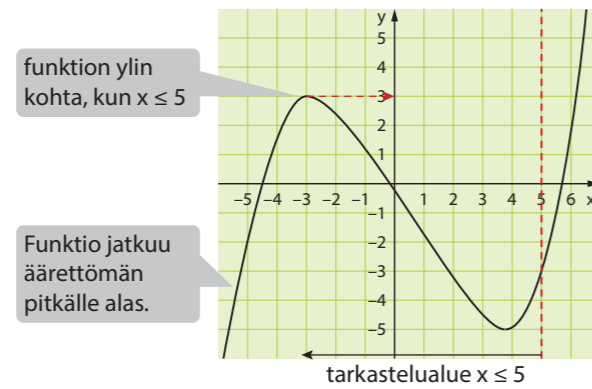
d) $-1 < x < 2$

8. a) $x = -3$ b) $x = \pm 3$

7. Funktion ominaisuuksia

Esimerkki 2

Määritä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo, kun $x \leq 5$.



Vastaus: Funktion $f(x)$ suurin arvo on 3, kun $x \leq 5$.

Funktio jatkuu äärettömän pitkälle alas, joten funktiolla $f(x)$ ei ole pienintä arvoa.

FUNKTION SUURIN JA PIENIN ARVO

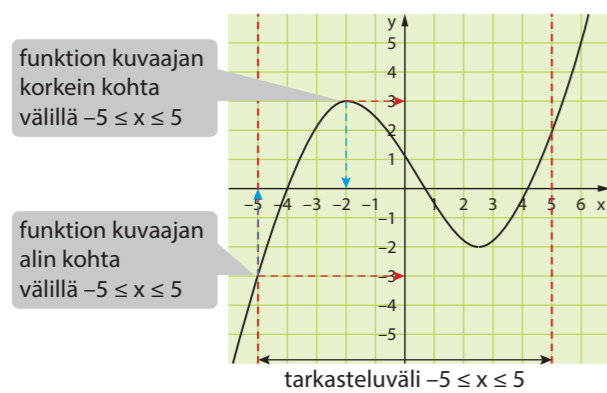
Suurimmaksi arvoksi sanotaan funktion koko tarkastelualueella saamaa suurinta arvoa.

Pienimmäksi arvoksi sanotaan funktion koko tarkastelualueella saamaa pienintä arvoa.

Esimerkki 3

a) Määritä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $-5 \leq x \leq 5$.

b) Millä muuttujan x arvolla funktio $f(x)$ saa suurimman ja millä pienimmän arvonsa välillä $-5 \leq x \leq 5$?



Vastaus:

a) Lukuvälillä $-5 \leq x \leq 5$ funktion suurin arvo on 3 ja pienin arvo -3 .

b) Funktio saa suurimman arvonsa x :n arvolla -2 . Funktio saa pienimmän arvonsa x :n arvolla -5 .

Opetuskertaan liittyvä materiaali

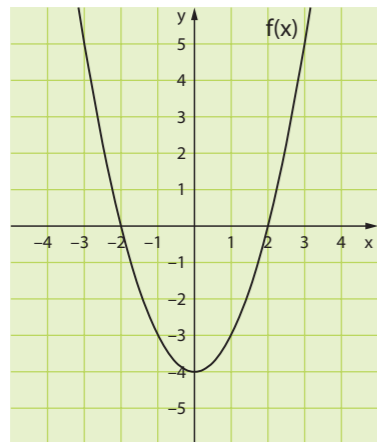
- Moniste: Funktion ominaisuuksia 2
- Moniste: Funktiotehtäviä 2
- Itsearviointitesti: Luku 7 (Digilisätehtävät)

Opetusvihjeitä

- Tämän sivun teoria voidaan käsitellä Digiopetusmateriaalissa olevan monisteen avulla.

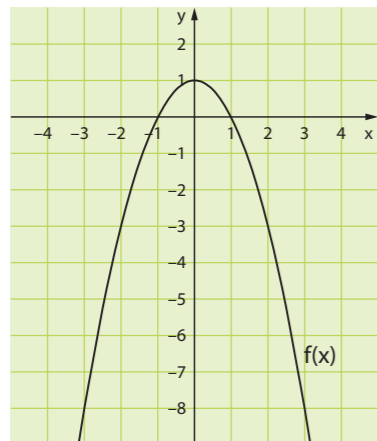
9. Määritä funktion $f(x)$ pienin arvo.

◆◇◇



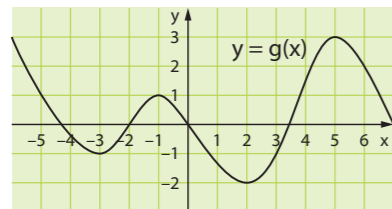
10. Määritä funktion $f(x)$
a) suurin arvo b) pienin arvo.

◆◇◇



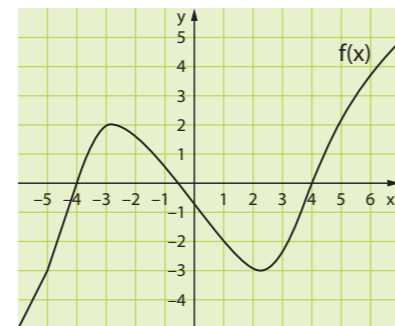
11. Määritä funktion $g(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $-5 < x < 6$.

◆◇◇



12. Määritä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo, kun $x > -4$.

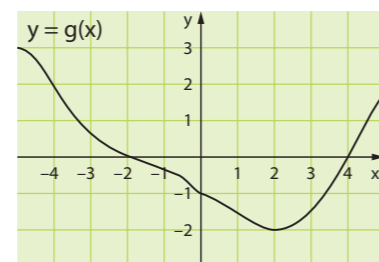
◆◇◇



13. a) Millä x :n arvolla funktio $g(x)$ saa suurimman ja millä pienimmän arvonsa välillä $-2 \leq x < 3$?

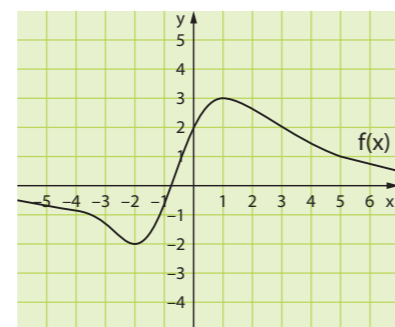
◆◇◇

- b) Millä x :n arvolla funktio $g(x)$ saa suurimman ja millä pienimmän arvonsa?



14. Määritä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $-3 < x < 3$.

◆◇◇



Lisätehtävät s. 78
Kotitehtävät s. 91

33

Tuntitehtävien vastaukset

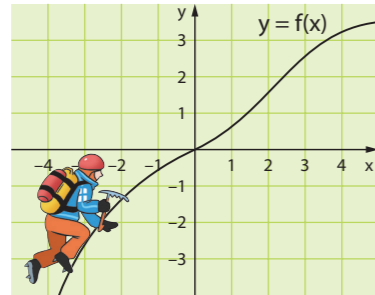
7. FUNKTION OMINAISUUKSIA

9. -4

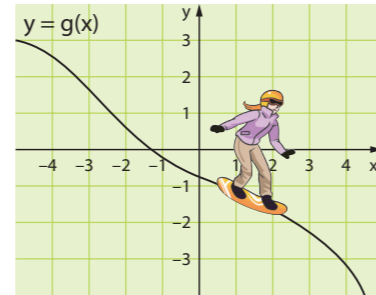
10. a) 1 b) ei ole

11. suurin arvo on 3 ja pienin arvo -2 .12. Suurinta arvoa ei ole ja pienin arvo on -3 .13. a) suurin arvo x :n arvolla -2 ja pienin arvo x :n arvolla 2b) ei saa suurinta arvoaan ja pienin arvo x :n arvolla 214. suurin arvo 3 ja pienin arvo -2

8. Kasvava ja vähenevä funktio



Siirryttäessä vasemmalta oikealle funktion kuvaaja nousee, funktion arvo kasvaa.



Siirryttäessä vasemmalta oikealle funktion kuvaaja laskee, funktion arvo vähenee.

Funktiota sanotaan kasvavaksi tai väheneväksi, vaikka funktion arvo pysyisi paikoin muuttumattomana.

KASVAVA JA VÄHENEVÄ FUNKTIO

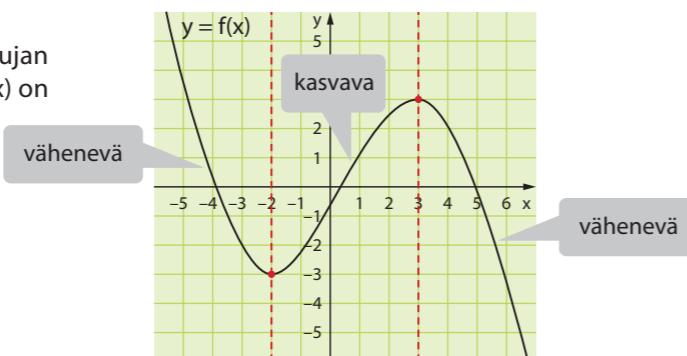
Funktio on **kasvava**, jos muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo kasvaa tai pysyy samana.

Funktio on **vähenevä**, jos muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo vähenee tai pysyy samana.

Esimerkki 1

Tutki, millä muuttujan arvoilla funktio $f(x)$ on

- kasvava
- vähenevä.



Vastaus: **a)** Funktio on kasvava välillä $-2 \leq x \leq 3$.
b) Funktio on vähenevä, kun $x \leq -2$ tai $x \geq 3$.

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Kasvava ja vähenevä funktio
- Moniste: Funktiotehtäviä 3
- Moniste: Funktiokrypto
- Itsearviointitesti: Luku 8 (Digilisätehtävät)
- Testi funktion ominaisuuksista (Tulostettavat kokeet)

8. Kasvava ja vähenevä funktio

Opetusvihjeitä

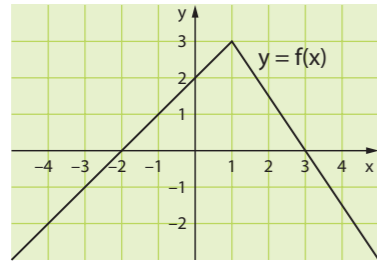
- ◆ Tämän sivun teoria voidaan käsitellä Digiopetusmateriaalissa olevan monisteen avulla.

Tvt-vinkit

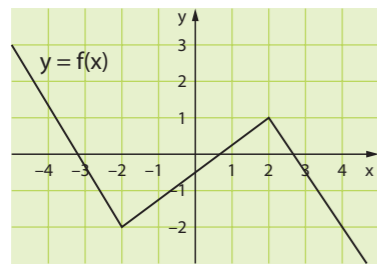
- ◆ coolmath.com
⇒ algebra/increasing and decreasing
- ◆ opetustv.fi
⇒ Lukio/Pitkä matematiikka/MAA7/Funktion kasvavuus ja vähenevyys
- ◆ mathsisfun.com
⇒ algebra2/Functions/Increasing and decreasing Functions
- ◆ mathopolis.com
⇒ questions/Math Course/Algebra1/Functions/Increasing and Decreasing Functions
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

Tuntitehtävien vastaukset

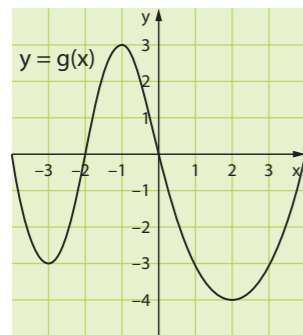
1. Millä muuttujan arvoilla funktio $f(x)$ on
 ◆◇◇ a) kasvava b) vähenevä?



2. Millä muuttujan arvoilla funktio $f(x)$ on
 ◆◇◇ a) kasvava b) vähenevä?

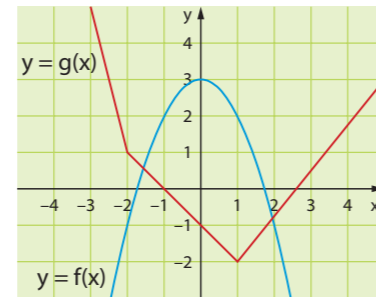


3. Millä muuttujan arvoilla funktio $g(x)$ on
 ◆◇◇ a) kasvava b) vähenevä?



4. Päättele tai piirrä funktion kuvaaja ja katso siitä, millä muuttujan arvoilla funktio
 ◆◇◇ a) $f(x) = 3x - 4$
 b) $g(x) = x^2 + 2$
 on kasvava.

5. Millä muuttujan arvoilla funktio
 ◆◇◇ a) $f(x)$ b) $g(x)$
 on kasvava?

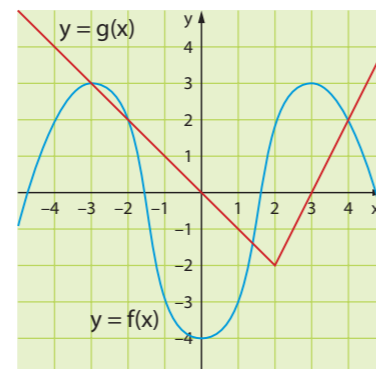


6. Päättele tai piirrä funktion kuvaaja ja katso siitä, millä muuttujan arvoilla funktio

a) $f(x) = -\frac{3}{5}x + 0,7$

b) $g(x) = 0,5x^2 - 1,5$
 on kasvava.

7. Millä välillä funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ ovat yhtä aikaa
 ◆◇◇ a) kasvavia b) väheneviä?



Lisätehtävät s. 79
 Kotitehtävät s. 92

8. KASVAVA JA VÄHENEVÄ FUNKTIO

1. a) $x < 1$ b) $x > 1$

2. a) $-2 < x < 2$

b) $x < -2$ tai $x > 2$

3. a) $-3 < x < -1$ tai $x > 2$

b) $x < -3$ tai $-1 < x < 2$

4. a) kaikilla x :n arvoilla

b) $x > 0$

5. a) $x < 0$ b) $x > 1$

6. a) ei millään x :n arvolla

b) $x > 0$

7. a) $2 < x < 3$ b) $-3 < x < 0$

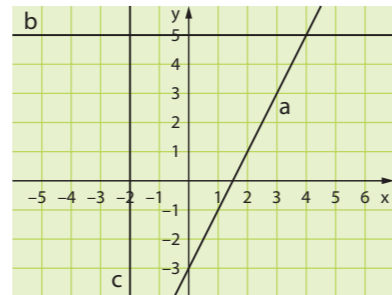
9. Kertaus



- Millä kirjaimella funktiomerkinässä $g(a) = 3a - 6$ on merkitty
 a) muuttujaa b) funktiota?
- Mikä merkinnässä $f(2) = 5$ on
 a) muuttujan arvo b) funktion arvo?
- Funktiokone muuttaa sinne syötetyt luvut tietyn säännön mukaan. Esitä tämä sääntö sanoin.
 a) $1 \rightarrow 6$ b) $1 \rightarrow 10$
 $2 \rightarrow 7$ $2 \rightarrow 20$
 $3 \rightarrow 8$ $3 \rightarrow 30$
 $5 \rightarrow 10$ $5 \rightarrow 50$
- Funktio $f(x) = 3x + 2$. Laske
 a) $f(1)$ b) $f(3)$ c) $f(0)$.
- Funktio $f(x) = x + 4$. Laske, millä muuttujan arvolla
 a) $f(x) = 7$ b) $f(x) = 10$ c) $f(x) = 3$.
- Laske suorien $y = x$, $y = -4$ ja $x = 4$ rajoittaman kolmion pinta-ala.
- Tutki laskemalla, kulkeeko suora $y = 12x - 30$ pisteen $(3, 6)$ kautta.
- Suoran kulmakerroin on 4 ja se leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -2)$. Määritä suoran yhtälö.

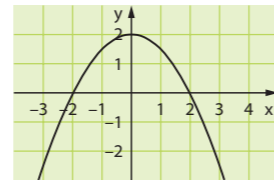


- Määritä suoran yhtälö.

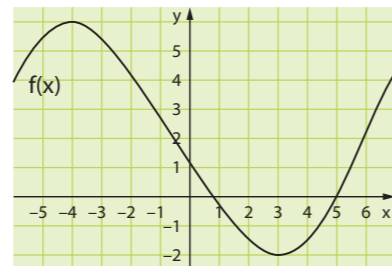


- Piirrä samaan koordinaatistoon paraabelit $y = x^2 - 4$ ja $y = -2x^2 + 4$. Kumpi paraabeleista
 a) on leveämpi
 b) aukeaa ylöspäin?

- Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla
 a) $f(x) = 0$
 b) $f(x) > 0$
 c) $f(x) < 0$.



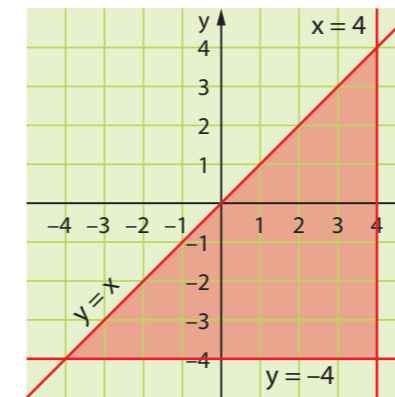
- Määritä kuvaajasta funktion
 a) suurin b) pienin arvo välillä $-5 < x < 5$.
 Millä muuttujan arvoilla funktio on
 c) kasvava d) vähenevä?



Tuntitehtävien vastaukset

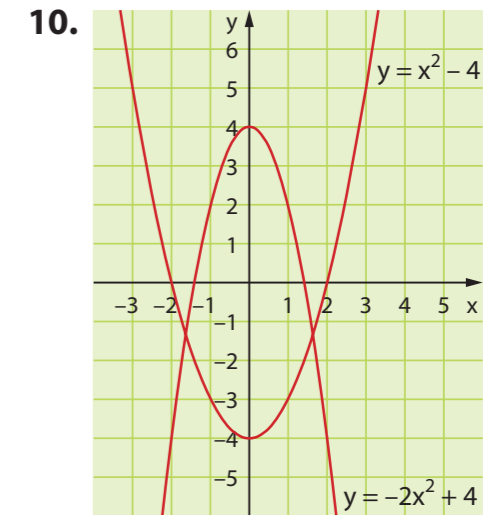
9. KERTAUS

- a) a b) g
- a) 2 b) 5
- a) lisää viisi
 b) kertoo kymmenellä
- a) $f(1) = 5$ b) $f(3) = 11$
 c) $f(0) = 2$
- a) $x = 3$ b) $x = 6$
 c) $x = -1$
- $A = 32$



- kulkee
- $y = 4x - 2$

- a) $y = 2x - 3$
 b) $y = 5$
 c) $x = -2$



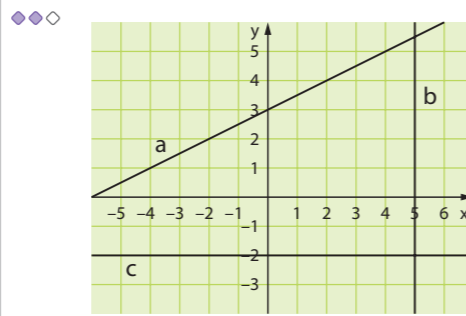
- a) $y = x^2 - 4$ b) $y = x^2 - 4$
- a) $x = -2$ tai $x = 2$
 b) $-2 < x < 2$
 c) $x < -2$ tai $x > 2$
- a) 6 b) -2
 c) $x < -4$ tai $x > 3$
 d) $-4 < x < 3$

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Itsearviointitesti: Luku 9 (Digilisätehtävät)
- Kertaustesti: Luvut 1-8 (Tulostettavat kokeet)

13. Millä kirjaimella funktiomerkinässä $h(n) = 5n - 8$ on merkitty
 a) muuttujaa b) funktiota?
14. Mikä merkinnässä $f(-4) = 12$ on
 a) muuttujan arvo b) funktion arvo?
15. Etsi sääntö, jonka mukaan kone muuttaa lukuja. Esitä sääntö yhtälönä.
 a) $1 \rightarrow 8$ b) $1 \rightarrow 2$
 $2 \rightarrow 10$ $2 \rightarrow 5$
 $3 \rightarrow 12$ $3 \rightarrow 10$
 $5 \rightarrow 16$ $5 \rightarrow 26$
 $x \rightarrow y$ $x \rightarrow y$
16. Funktio $f(x) = -3x + 2$. Laske
 a) $f(1)$ b) $f(-3)$ c) $f(0)$.
17. Funktio $f(x) = 2x - 8$. Laske, millä muuttujan arvolla
 a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 10$ c) $f(x) = 3$.
18. Funktio $f(x) = x^2 - 3x$ ja $g(x) = x^2 - 2x + 1$. Laske.
 a) $f(-1)$ b) $f(2) - g(3)$
 c) Millä x :n arvolla $f(x) = g(x)$?
19. Laske sen suunnikkaan pinta-ala, jota rajoittavat y -akseli, suorat $x = 5$, $y = x + 2$ ja $y = x - 3$.
20. Tutki laskemalla, kulkeeko suora $y = -12x - 30$ pisteen $(-3, 6)$ kautta.
21. Suora kulkee pisteen $(5, 3)$ kautta ja on suoran $y = 0,7x$ suuntainen. Määritä suoran yhtälö.

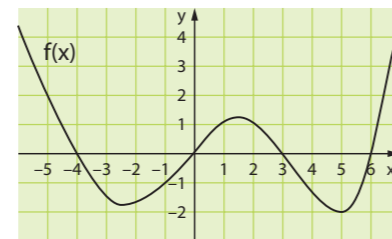
22. Määritä suoran yhtälö.



23. Piirrä samaan koordinaatistoon paraabelit $y = -4x^2 + 5$ ja $y = \frac{1}{5}x^2 - 5$.
 Kumpi paraabeleista
 a) on leveämpi
 b) aukeaa ylöspäin?

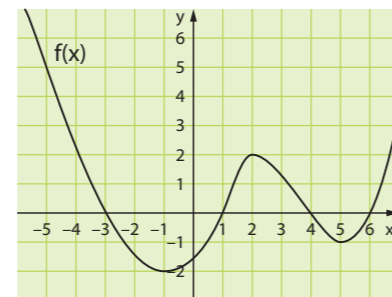
24. Millä muuttujan arvoilla

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) > 0$ c) $f(x) < 0$?



25. Määritä kuvaajasta funktion

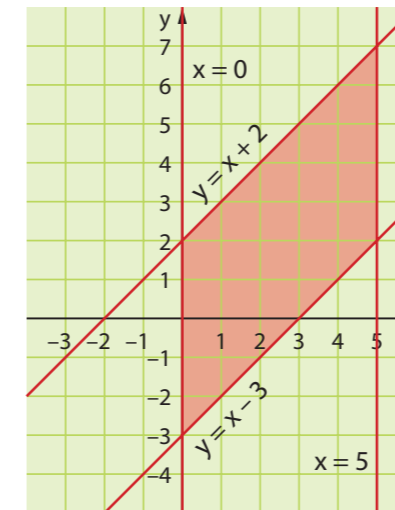
a) suurin arvo välillä $-5 \leq x \leq 5$
 b) pienin arvo välillä $-5 \leq x \leq 5$.
 Millä muuttujan arvoilla funktio on
 c) kasvava d) vähenevä?



Tuntitehtävien vastaukset

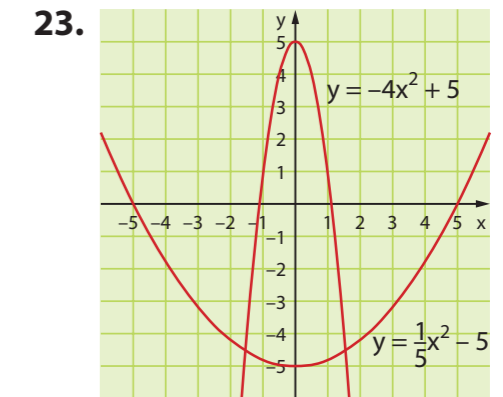
13. KERTAUS

13. a) n b) h
 14. a) -4 b) 12
 15. a) $y = 2x + 6$ b) $y = x^2 + 1$
 16. a) $f(1) = -1$ b) $f(-3) = 11$
 c) $f(0) = 2$
 17. a) $x = 4$ b) $x = 9$
 c) $x = 5,5$
 18. a) $f(-1) = 4$ b) $f(2) - g(3) = -6$
 c) $x = -1$
 19. $A = 25$



20. kulkee
 21. $y = 0,7x - 0,5$

22. a) $y = 0,5x + 3$
 b) $x = 5$ c) $y = -2$



- a) $y = \frac{1}{5}x^2 - 5$
 b) $y = \frac{1}{5}x^2 - 5$
 24. a) $x = -4, x = 0, x = 3$ tai $x = 6$
 b) $x < -4, 0 < x < 3$ tai $x > 6$
 c) $-4 < x < 0$ tai $3 < x < 6$
 25. a) 5 b) -2
 c) $-1 < x < 2$ tai $x > 5$
 d) $x < -1$ tai $2 < x < 5$

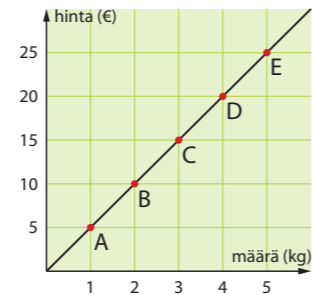
10. Verrannollisuus koordinaatistossa

Esimerkki 1

Karpaloiden kilohinta on 5,0 €/kg. Tutkitaan karpaloiden määrän x (kg) ja hinnan y (€) välistä riippuvuutta.

Suureet ovat **suoraan verrannolliset**, kun toisen suureen arvojen kasvaessa toisen arvot kasvavat samassa suhteessa.

Määrä (kg)	Hinta (€)	Piste
1	5	A
2	10	B
3	15	C
4	20	D
5	25	E



Merkitään pisteet koordinaatistoon ja piirretään kuvaaja. Havaitaan että pisteet asettuvat origon kautta kulkevalle suoralle.

Tällöin voidaan sanoa, että hinta y on **suoraan verrannollinen** määrään x .

Lisäksi voidaan havaita että hinnan ja määrän osamäärä (suhde) on kaikilla arvopareilla sama.

$$\frac{25\text{€}}{5\text{kg}} = 5\text{€ / kg} \quad \frac{15\text{€}}{3\text{kg}} = 5\text{€ / kg} \quad \frac{5\text{€}}{1\text{kg}} = 5\text{€ / kg}$$

Kun suureet ovat suoraan verrannolliset niiden suhde on vakio.

$$\frac{y}{x} = k \text{ eli } y = kx \quad k = \text{vakio}$$

SUORAAN VERRANNOLLISUUS

Suoraan verrannollisten suureiden y ja x **suhde on vakio k** .

Riippuvuus suureiden välillä voidaan esittää muodossa $y = kx$.

Vakiota k sanotaan **verrannollisuuskertoimeksi**.

Kuvaaja on origon kautta kulkeva **suora**, jonka kulmakerroin on **k** .

38

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Kertaustehtäviä verrannollisuudesta 1
- Moniste: Suoraan verrannollisuus

10. Verrannollisuus koordinaatistossa

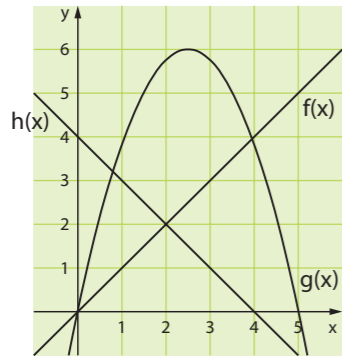
Opetusvihjeitä

- ◆ Suoraan verrannollisuuden käsite on tuttu 8. luokalta kurssista 5. Johdantona aiheeseen on Digiopetusmateriaalin monisteissa kertausmateriaalia, jolla palautetaan mieleen aiemmin opittua. Aiheen varsinaiseen käsittelyyn on moniste: *Suoraan verrannollisuus*.

Tvt-vinkit

- ◆ math.fi
⇒ 9.luokka/funktiot/Suoraan verrannollisuus
⇒ 9.luokka/funktiot/Kääntäen verrannollisuus
- ◆ www.khanacademy.org/math
⇒ Subjects/7th/rates & proportional relationships
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

1. Mikä kuvaajista esittää suoraan verrannollisuutta?



2. Tutki piirtämällä, ovatko suureet suoraan verrannollisia.

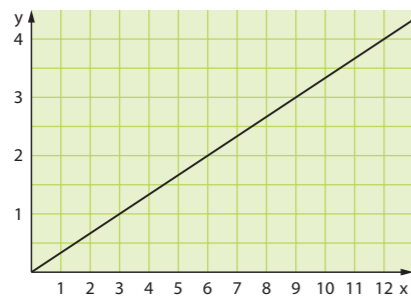
a)

Suure x	Suure y
2	4
3	6
4	8

b)

Suure x	Suure y
3	9
5	15
7	21

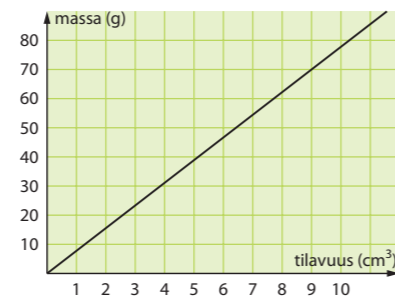
3. a) Määritä verrannollisuuskertoimen arvo.
b) Kuvaa suureiden välistä riippuvuutta yhtälön avulla.



4. Marjaana ajoi autolla tasaisella nopeudella.
a) Laske Marjaanan nopeus.
b) Kuinka pitkän matkan hän ajoi 2,5 tunnissa?
c) Missä ajassa hän olisi ajanut 440 km?



5. Emmalla on matkapuhelinliittymä, jossa puhelujen minuuttihinta on 0,08 €/ minuutti.
a) Kirjoita yhtälönä puhelujen kokonaishinnan y riippuvuus soittajasta x.
b) Piirrä kuvaaja (1000 min asti).
c) Määritä kuvaajasta, millä soittajalla puhelujen hinnaksi tulee 40,0 €.
6. Kappaleen massa m on suoraan verrannollinen tilavuuteen V. Verrannollisuuskertoimen on tiheys ρ. Määritä kuvaajan perusteella aineen tiheys.



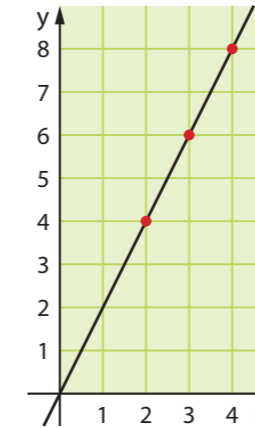
Lisätehtävät s. 80
Kotitehtävät s. 92

Tuntitehtävien vastaukset

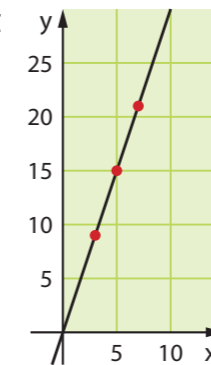
10. VERRANNOLLISUUS KOORDINAATISTOSSA

1. $f(x)$

2. a) ovat



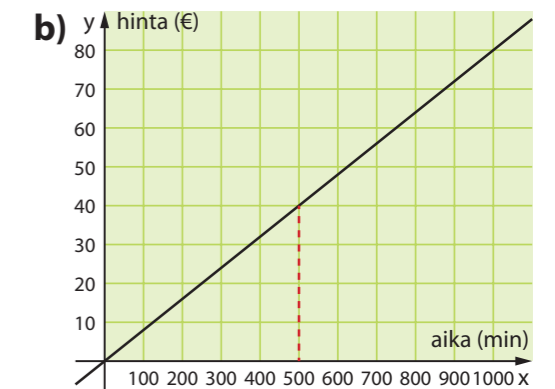
- b) ovat



3. a) $k = \frac{1}{3}$ b) $y = \frac{1}{3}x$

4. a) 80 km/h b) 200 km
c) 5,5 h

5. a) $y = 0,08x$



- c) 500 min
6. $7,78 \text{ g/cm}^3$

10. Verrannollisuus koordinaatistossa

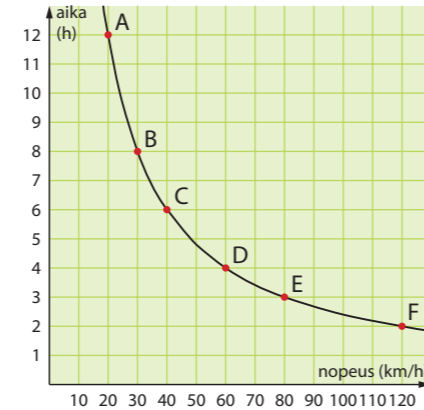


Esimerkki 2

Savonlinnasta Lahteen on matkaa 240 kilometriä. Kun matka on vakio, matkaan käytetty aika on kääntäen verrannollinen keskinopeuteen.

Suureet ovat kääntäen verrannolliset, kun toisen suureen arvojen kasvaessa toisen arvot pienenevät samassa suhteessa.

Keski-nopeus (km/h)	Aika (h)	Piste
20	12	A
30	8	B
40	6	C
60	4	D
80	3	E
120	2	F



Merkitään pisteet koordinaatistoon ja hahmotellaan kuvaaja. Kuvaaja on osa **hyperbeliksi** kutsuttavaa kuvaajaa.

Lisäksi voidaan havaita että keskinopeuden ja ajan tulo on kaikilla arvopareilla sama.

$$20 \text{ km/h} \cdot 12 \text{ h} = 240 \text{ km} \quad 60 \text{ km/h} \cdot 4 \text{ h} = 240 \text{ km}$$

Kääntäen verrannollisten suureiden tulo on vakio.

$$xy = k \text{ eli } y = \frac{k}{x} \quad k \text{ on vakio}$$

KÄÄNTÄEN VERRANNOLLISUUS

Kääntäen verrannollisten suureiden **tulo on vakio**.

Riippuvuus suureiden välillä voidaan esittää muodossa

$$y = \frac{k}{x}, \text{ jossa } k \text{ on vakio } (k \neq 0, x \neq 0).$$

Vakiota k sanotaan **verrannollisuuskertoimeksi**.

Kuvaaja on **hyperbeli**.

40

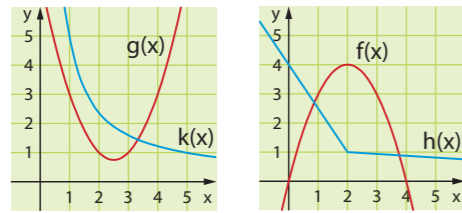
Opetusvihjeitä

- ◆ Kääntäen verrannollisuuden käsite on tuttu 8. luokalta kurssista 5. Digiopetusmateriaalin monisteissa on aiheeseen liittyvää kertausmateriaalia. Aiheen varsinaiseen käsittelyyn on esimerkkiin 2 liittyvä moniste: *Kääntäen verrannollisuus*.

Opetuskertaan liittyvä materiaali

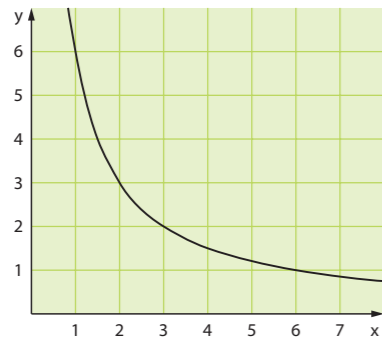
- Moniste: Kertaustehtäviä verrannollisuudesta 2
- Moniste: Kääntäen verrannollisuus
- Itsearviointitesti: Luku 10 (Digilisätehtävät)

7. Mikä kuvaajista esittää kääntäen verrannollisuutta?



8. Suureet x ja y ovat kääntäen verrannolliset.

- a) Mikä on suureen y arvo, kun $x = 3,0$?
 b) Mikä on suureen x arvo, kun $y = 1,0$?
 c) Mikä on suureiden x ja y tulo?



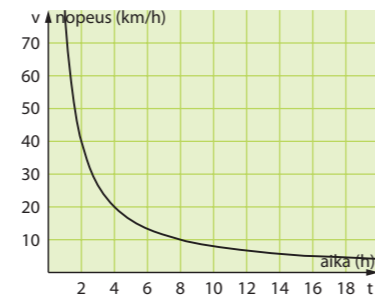
9. Ovatko suureet suoraan vai kääntäen verrannolliset vai eivät kumpaakaan?
- a) $y = 3x$ b) $y = \frac{2}{x}$ c) $y = 2x + 2$
 d) $y = \frac{1}{x}$ e) $yx = 8$ f) $x + y = 4$

10. Kääntäen verrannollisten suureiden x ja y tulo on 4. Piirrä suureiden riippuvuutta esittävä kuvaaja.



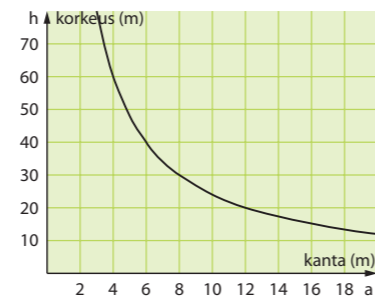
11. Autolla ajettiin eri nopeuksilla sama välimatka. Matkaan käytetty aika mitattiin ja saaduista tuloksista piirrettiin kuvaaja.

- a) Kuinka pitkä välimatka oli?
 b) Merkitse yhtälönä nopeuden v ja ajan t riippuvuus.



12. Kuvaaja esittää suorakulmion kannan ja korkeuden riippuvuutta, kun pinta-ala pysyy vakiona.

- a) Mikä on suorakulmion pinta-ala?
 b) Kirjoita yhtälönä korkeuden (h) riippuvuus kannasta (a).



13. Sadon korjaamiseen käsin kuluu 20 henkilöltä aikaa 8 päivää.

- a) Kirjoita yhtälönä korjaamiseen kuluvan ajan t riippuvuus työntekijöiden määrästä x .
 b) Piirrä kuvaaja.
 c) Määritä kuvaajasta, kuinka kauan sadon korjuuseen kuluu aikaa 12 hengen työporukalta.

Lisätehtävät s. 81
 Kotitehtävät s. 93

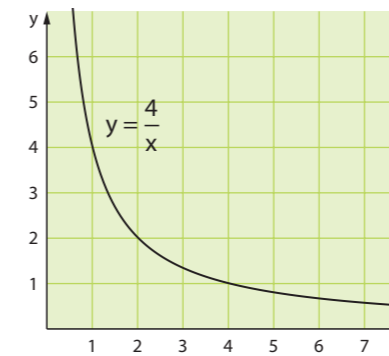
41

Tuntitehtävien vastaukset

10. VERRANNOLLISUUS KOORDINAATISTOSSA

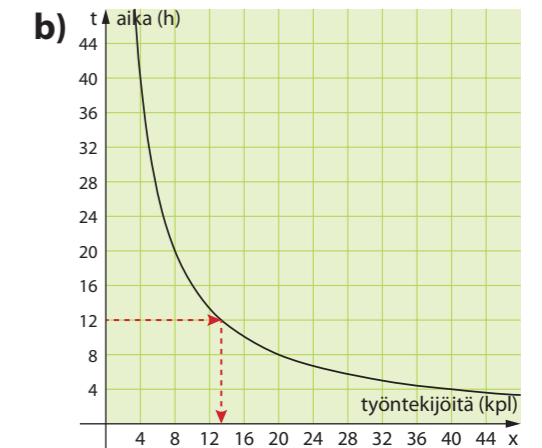
7. $k(x)$
 8. a) $y = 2$ b) $x = 6$ c) 6
 9. a) suoraan b) kääntäen
 c) ei kumpaakaan d) kääntäen
 e) kääntäen
 f) ei kumpaakaan

10. $xy = 4$ eli $y = \frac{4}{x}$



11. a) 80 km b) $v = \frac{80}{t}$
 12. a) 240 m^2 b) $h = \frac{240}{a}$

13. a) $t = \frac{160}{x}$



- c) 13 tuntia

11. Kahden muuttujan yhtälö

Yhtälössä kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi. Yhtälössä $2x + 1 = 0$ on yksi muuttuja (x).

Yhtälössä $2x + y = 2$ on kaksi muuttujaa. Ratkaistaan yhtälö muuttujan y suhteen.

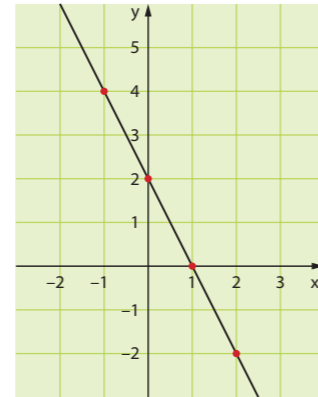
$$2x + y = 2$$

$$y = -2x + 2$$

Sijoitetaan muuttujan x paikalle joitakin lukuja ja lasketaan niitä vastaavat muuttujan y arvot.

x	y = -2x + 2
0	$-2 \cdot 0 + 2 = 2$
1	$-2 \cdot 1 + 2 = 0$
2	$-2 \cdot 2 + 2 = -2$
-1	$-2 \cdot (-1) + 2 = 4$

Merkitään lukuparit (0, 2), (1, 0), (2, -2) ja (-1, 4) pisteinä koordinaatistoon.



Pisteet sijaitsevat samalla suoralla.

Tämän suoran **kaikki pisteet toteuttavat** yhtälön $2x + y = 2$. Yhtälön toteuttavia lukupareja on siis äärettömän monta.

KAHDEN MUUTTUJAN YHTÄLÖ

Yhtälö $ax + by = c$ on kahden muuttujan yhtälö ($a \neq 0, b \neq 0$). Sen muuttujat ovat x ja y .

Yhtälön ratkaisu voidaan esittää graafisesti piirtämällä suoran $ax + by = c$ kuvaaja.

Esimerkki 1

Toteuttaako lukupari (1, 3) yhtälön $2x - y = -1$?

Sijoitetaan $x = 1$ ja $y = 3$ yhtälöön $2x - y = -1$.

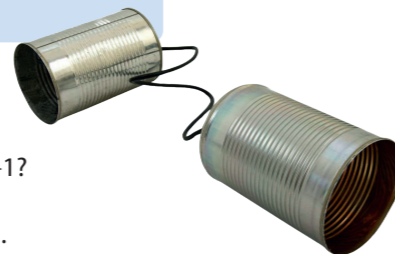
$$2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$2 - 3 = -1$$

$$-1 = -1$$

Identtisesti tosi

Vastaus: Toteuttaa.



Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Testaa itsesi: Yhtälön ratkaiseminen

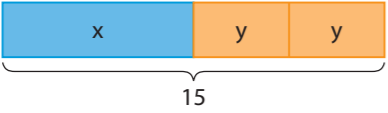
11. Kahden muuttujan yhtälö

Opetusvihjeitä

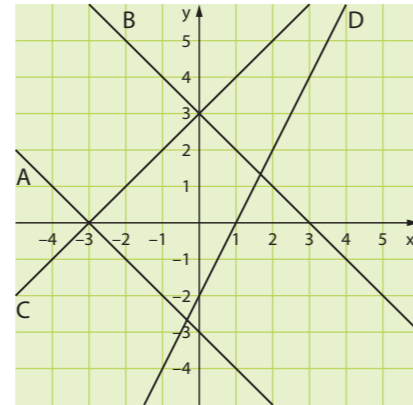
- ◆ Digiopetusmateriaalin monisteissa on testi, jolla palautetaan mieliin yhtälöiden ratkaiseminen.

Tvt-vinkit

- ◆ coolmath.com
⇒ algebra/systems of equations (sx2s)
- ◆ opetustv.fi
⇒ Lukio/Pitkä matematiikka/MAA1/Yhtälöparit
- ◆ math.fi
⇒ 9.luokka/Epäyhtälöt, yhtälöt ja yhtälöparit
- ◆ mathsisfun.com
⇒ algebra2/Systems of Linear equations/ Systems of Linear equations
⇒ algebra2/Systems of Linear equations/ Systems of Linear and Quadratic Equations
- ◆ www.khanacademy.org/math
⇒ Algebra/Systems of Equations
- ◆ thatquiz.org
⇒ Algebra
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

1. Tutki, toteutuuko yhtälö kun $x = 2$ ja $y = 1$.
 a) $2x - 3y = 1$ b) $-x + 2y = 0$
2. Mitkä lukupareista toteuttavat kahden muuttujan yhtälön $2x - y = 4$?
- A(2, 3) B(-1, 6)
 C(0, -4) D(2, 0)
3. Muodosta kuviosta kahden muuttujan yhtälö.
- 
4. Ratkaise yhtälö $3x + y = -2$ muuttujan y suhteen. Piirrä kuvaaja niistä lukupareista, jotka ovat yhtälön ratkaisuja.
5. Muodosta kahden muuttujan yhtälö.
 a) Lukujen x ja y summa on 32.
 b) Lukujen x ja y osamäärä on 11.
6. Olkoon yhtälö $2x + y = 4$. Millä muuttujan x arvolla y :n arvo on
 a) 0 b) 2 c) 4?
7. Muodosta kahden muuttujan yhtälö.
 a) Tiinu (x) on 8 vuotta vanhempi kuin Liinu (y).
 b) Pusero (x) on 22 € halvempi kuin housut (y).

8. Mikä kuvaajista on kahden muuttujan yhtälön $2x - y = 2$ graafinen esitys?



9. Määritä se kahden muuttujan yhtälö, jonka ratkaisuna on pisteiden A(3, 1) ja B(-2, -2) kautta kulkeva suora.
10. Neljän tuolin ja pöydän kokonaishinta on 700 €. Merkitään yhden tuolin hintaa muuttujalla x ja pöydän hintaa muuttujalla y . Muodosta kahden muuttujan yhtälö, joka kuvaa koko ryhmän hintaa.

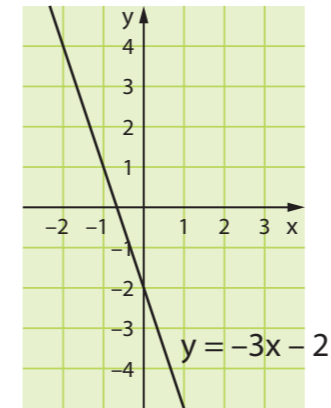


Lisätehtävät s. 81
 Kotitehtävät s. 94

Tuntitehtävien vastaukset

11. KAHDEN MUUTTUJAN YHTÄLÖ

1. a) toteutuu b) toteutuu
 2. C ja D
 3. $x + 2y = 15$
 4. $y = -3x - 2$



5. a) $x + y = 32$ b) $\frac{x}{y} = 11$
 6. a) $x = 2$ b) $x = 1$ c) $x = 0$
 7. a) $x = y + 8$ b) $x + 22 = y$

8. D
 9. $y = \frac{2}{3}x - 1$
 10. $4x + y = 700$

12. Yhtälöpari



Yhtälöparilla tarkoitetaan kahta yhtälöä, joille etsitään yhteisiä ratkaisuja.

YHTÄLÖPARI

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{Yhtälöiden muuttujat ovat } x \text{ ja } y.$$

Yhtälöparin **ratkaisu** on lukupari (x,y) joka toteuttaa molemmat yhtälöt. Ratkaisun voi merkitä usealla eri tavalla.

esimerkiksi $x = 3$ ja $y = -1$ tai $(3, -1)$ tai $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

Esimerkki 1

Onko lukupari $(1, 2)$ yhtälöparin ratkaisu?

a) $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

Tutkitaan, toteuttaako lukupari $(1, 2)$ molemmat yhtälöt sijoittamalla $x = 1$ ja $y = 2$ molempiin yhtälöihin.

a)

y x	y x
↓ ↓	↓ ↓
$2 = 3 \cdot 1 - 1$	$2 = -2 \cdot 1 + 1$
$2 = 3 - 1$	$2 = -2 + 1$
$2 = 2$ tosi	$2 = -1$ epätosi

Vastaus: Lukupari $(1, 2)$ ei ole yhtälöparin ratkaisu.

b)

y x	y x
↓ ↓	↓ ↓
$2 = 1 + 1$	$2 = -2 \cdot 1 + 4$
$2 = 2$ tosi	$2 = -2 + 4$
	$2 = 2$ tosi

Vastaus: Lukupari $(1, 2)$ on yhtälöparin ratkaisu.

44

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Vaakatehtäviä 1
- Itsearvioiontitesti: Luku 12 (Digilisätehtävät)
- Päässälaskutesti: Luku 12 (Tulostettavat kokeet)

12. Yhtälöpari

Opetietoa

- ◆ 1950-luvulla vanhan kansakoulun laskuopissa käsiteltiin jo kuudennella luokalla yhtälöparin tyyppisiä tehtäviä nimellä kaksiehtoinen päättelylasku.

Tvt-vinkit

- ◆ coolmath.com
⇒ algebra/systems of equations (sx2s)
- ◆ opetustv.fi
⇒ Lukio/Pitkä matematiikka/MAA1/Yhtälöparit
- ◆ math.fi
⇒ 9.luokka/Epäyhtälöt, yhtälöt ja yhtälöparit
- ◆ mathsisfun.com
⇒ algebra2/Systems of Linear equations/ Systems of Linear equations
⇒ algebra2/Systems of Linear equations/ Systems of Linear and Quadratic Equations
- ◆ www.khanacademy.org/math
⇒ Algebra/Systems of Equations
- ◆ thatquiz.Org
⇒ Algebra
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

1. Toteuttaako lukupari $x = 1$ ja $y = 2$

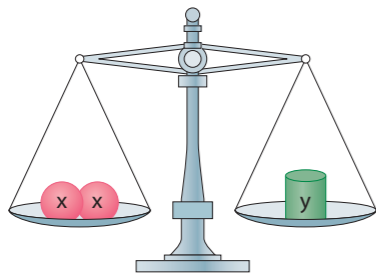
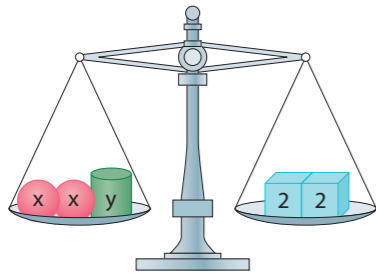
◆◇◇ a) yhtälön $y = 5x - 3$
b) yhtälön $y = -2x + 4$

c) yhtälöparin $\begin{cases} y = 5x - 3 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$?

2. Tutki, onko lukupari $(1, 1)$ yhtälöparin ratkaisu.

◆◇◇ a) $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x \end{cases}$

3. Muodosta yhtälöpari. Päättele yhtälöparin ratkaisu.

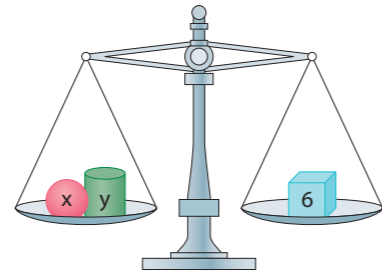
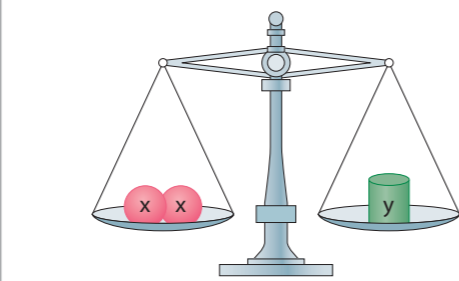


4. Mikä lukupari on yhtälöparin

◆◇◇ $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$ ratkaisu?

A (1, 1) B (1, 3)
C (3, 1) D $x = 2$ ja $y = 2$

5. Muodosta yhtälöpari. Päättele yhtälöparin ratkaisu.



6. Päättele lukupari, joka toteuttaa

◆◇◇ yhtälöparin $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 2x \end{cases}$.

7. Yhtälöpari toteutuu, kun $y = 3$.

◆◇◇ Mikä on muuttujan x arvo?

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -3x + y = -12 \end{cases}$$

8. Täydennä yhtälöpari $\begin{cases} x - y = \blacksquare \\ 2x - \blacksquare = \blacksquare \end{cases}$

◆◇◇ niin, että sen ratkaisu on $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$.

9. Päättele lukupari, joka toteuttaa

◆◇◇ yhtälöparin $\begin{cases} y = x \\ y = 2x - 1 \end{cases}$.

Lisätehtävät s. 82
Kotitehtävät s. 95

Tuntitehtävien vastaukset

12. YHTÄLÖPARI

1. a) toteuttaa b) toteuttaa
c) toteuttaa

2. a) ei b) on

3. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x = y \end{cases}$, josta $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

4. C

5. $\begin{cases} 2x = y \\ x + y = 6 \end{cases}$, josta $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

6. $x = 3$ ja $y = 6$

7. $x = 5$

8. esimerkiksi $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

9. $x = 1$ ja $y = 1$

13. Graafinen ratkaiseminen



Yhtälöparin ratkaisu voidaan etsiä **graafisesti** piirtämällä kahden muuttujan yhtälöitä vastaavat suorat. Ratkaisuna on yleensä suorien leikkauspiste.

Joissakin tapauksissa suorilla ei ole yhtään yhteistä pistettä, jolloin yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

Joskus suorilla on äärettömän monta yhteistä pistettä, jolloin kyseessä ovat samat suorat. Tällöin yhtälöparin ratkaisevia pisteitä on äärettömän monta ja ratkaisuna annetut suorat.

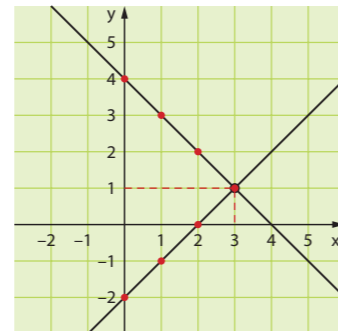
Suorien $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$ leikkauspiste on

$$\text{yhtälöparin } \begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \text{ graafinen ratkaisu.}$$

Esimerkki 1

Ratkaise graafisesti yhtälöpari $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$.

Piirretään kahden muuttujan yhtälöitä vastaavat suorat koordinaatistoon.



Huom!
Graafinen ratkaisu on likiarvo.

x	y = -x + 4	x	y = x - 2
0	-0 + 4 = 4	0	0 - 2 = -2
1	-1 + 4 = 3	1	1 - 2 = -1
2	-2 + 4 = 2	2	2 - 2 = 0

Leikkauspiste on (3, 1).

Vastaus: Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

46

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Aloitustehtävä: Graafinen ratkaiseminen
- Moniste: Päätelytehtäviä: Mikä on yhtälöparin ratkaisu?

13. Graafinen ratkaiseminen

Opetusvihjeitä

- ◆ Digiopetusmateriaalin monisteissa olevan aloitustehtävän voi monistaa oppilaille. Näin jokainen oppilas joutuu itse pohtimaan, mistä löytyy yhtälöparin ratkaisu. Aloitustehtävän voi käsitellä myös yhteisesti.

Tvt-vinkit

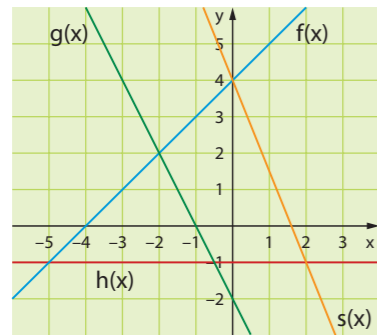
- ◆ coolmath.com
⇒ algebra/systems of equations (sx2s)
- ◆ opetustv.fi
⇒ Lukio/Pitkä matematiikka/MAA1/Yhtälöparit
- ◆ openmatikka.com
⇒ Algebra ja funktiot/Tanssii parin kanssa
- ◆ math.fi
⇒ 9.luokka/Epäyhtälöt, yhtälöt ja yhtälöparit
- ◆ mathsisfun.com
⇒ algebra2/Systems of Linear equations/ Systems of Linear equations
⇒ algebra2/Systems of Linear equations/ Systems of Linear and Quadratic Equations
- ◆ www.khanacademy.org/math
⇒ Algebra/Systems of Equations
- ◆ thatquiz.org
⇒ Algebra
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

1. Mikä on yhtälöparin ratkaisu?

◆◇◇

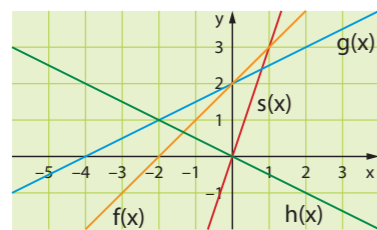
a) $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = f(x) \\ y = s(x) \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = h(x) \\ y = s(x) \end{cases}$



2. Kirjoita yhtälöpari, jonka ratkaisu on
a) (1, 3) b) (0, 2).

◆◇◇



3. Piirrä suorien $y = x - 3$ ja $y = -x + 1$ kuvaajat samaan koordinaatistoon. Määritä kuvaajien avulla yhtälöparin

◆◇◇

$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x + 1 \end{cases}$ ratkaisu.

4. Ratkaise yhtälöpari graafisesti.

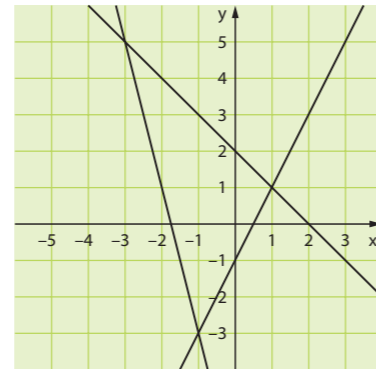
◆◇◇

a) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x \end{cases}$

5. Tutki kuvaajia. Mikä on yhtälöparin ratkaisu?

◆◇◇

a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -4x - 7 \end{cases}$



Ratkaise yhtälöpari graafisesti.

◆◇◇

6. a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

◆◇◇

7. a) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x \\ y = -3x + 1 \end{cases}$

◆◇◇

8. a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 0,5x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 4x \\ y = 4 \end{cases}$

◆◇◇

9. $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$



Lisätehtävät s. 82
Kotitehtävät s. 95

47

Tuntitehtävien vastaukset

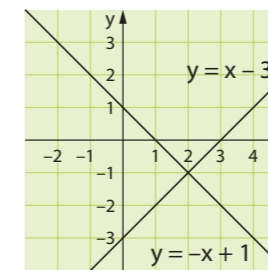
13. GRAAFINEN RATKAISEMINEN

1. a) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$

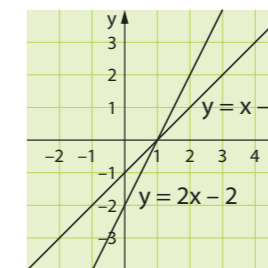
c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} y = f(x) \\ y = s(x) \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

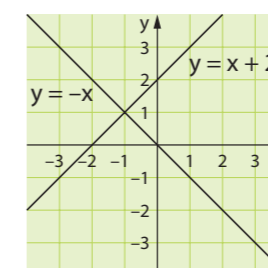
3. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$



4. a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

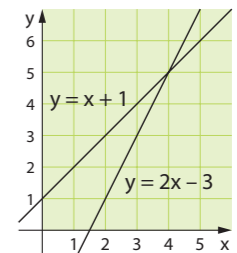


b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

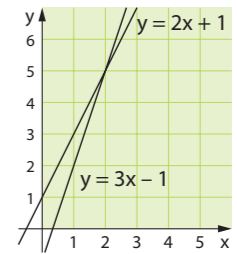


5. a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$

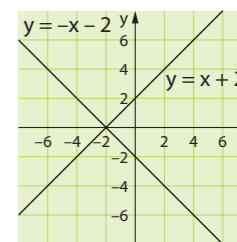
6. a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$



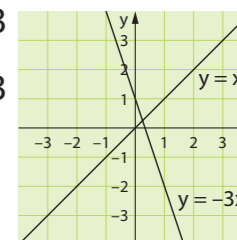
b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$



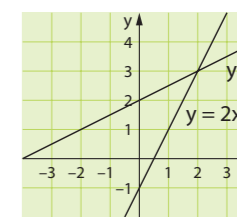
7. a) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$



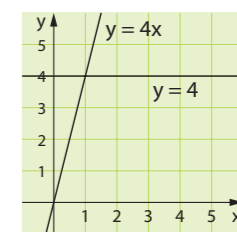
b) $\begin{cases} x = 0,3 \\ y = 0,3 \end{cases}$



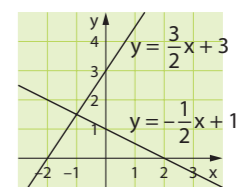
8. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$



b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$



9. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1,5 \end{cases}$



13. Graafinen ratkaiseminen

Esimerkki 2

Ratkaise graafisesti yhtälöpari $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$.

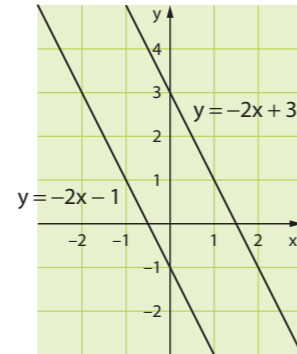
x	$y = -2x + 3$
0	3
1	1
2	-1

x	$y = -2x - 1$
0	-1
1	-3
2	-5

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä y .
 $y = -2x - 1$

Suorien kulmakertoimet ovat yhtä suuret ja vakiotermit eri suuret. Suorilla ei ole leikkauspistettä, eikä yhtälöparilla siis ratkaisua.

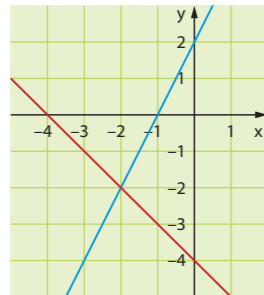
Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.



YHTÄLÖPARIN RATKAISUJEN LUKUMÄÄRÄ

$$\text{Yhtälöparilla } \begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$

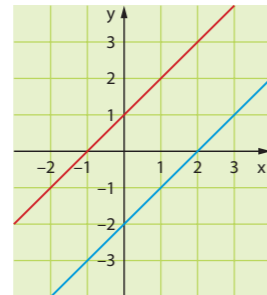
voi olla yksi, ei yhtään tai äärettömän monta ratkaisua.



yksi ratkaisu

$$k_1 \neq k_2$$

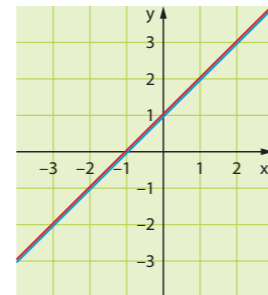
Suorat leikkaavat. Ratkaisuna on suorien leikkauspiste.



ei yhtään ratkaisua

$$k_1 = k_2 \text{ ja } b_1 \neq b_2$$

Suorat ovat yhdensuuntaiset.



äärettömän monta ratkaisua

$$k_1 = k_2 \text{ ja } b_1 = b_2$$

Suorat ovat samat, jolloin ratkaisuna ovat kaikki annetun suoran pisteet.



48

Opetusvihjeitä

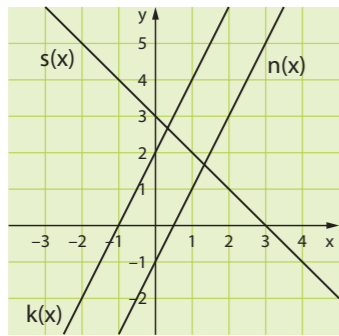
- ◆ Digiopetusmateriaalin monisteissa on **vaihtoehtoinen tapa** opetella yhtälöparin ratkaisujen lukumäärä **ryhmätyönä**. Harjoitustehtävät ovat samat.

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Ryhmätyö
- Yhtälöparin ratkaisujen lukumäärä
- Testi: Yhtälöparin graafinen ratkaiseminen (Tulostettavat kokeet)

10. Kuinka monta ratkaisua yhtälöparilla on?

◆◇◇ a) $\begin{cases} y = s(x) \\ y = k(x) \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = n(x) \\ y = k(x) \end{cases}$



11. Päättele, kuinka monta ratkaisua yhtälöparilla on.

◆◇◇ a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$

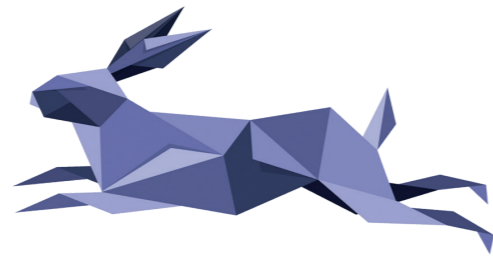
c) $\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 5 \\ y = 5x \end{cases}$

Ratkaise graafisesti.

◆◇◇ 12. a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -x - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x - 1 \end{cases}$

◆◇◇ 13. a) $\begin{cases} y = x \\ y = x - 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 4x \\ y = 4 \end{cases}$

◆◇◇ 14. a) $\begin{cases} y = 2x \\ y = -2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 3x \\ y = 3x + 2 \end{cases}$



Päättele, kuinka monta ratkaisua yhtälöparilla on.

◆◇◇ 15. a) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

◆◇◇ 16. a) $\begin{cases} y = 6x - 3 \\ y = 6x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x - 4 \\ y = x \end{cases}$

17. Kirjoita yhtälöpari, jolla
◆◇◇ a) ei ole yhtään ratkaisua
b) on äärettömän monta ratkaisua.

18. Määritä vakioiden a ja b arvot siten, että yhtälöparilla
◆◇◇

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

- a) ei ole yhtään ratkaisua
b) on äärettömän monta ratkaisua
c) on täsmälleen yksi ratkaisu.

19. Millä vakion b arvolla yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua?
◆◇◇

$$\begin{cases} y = (3b + 4)x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

Lisätehtävät s. 83
Kotitehtävät s. 96

Tuntitehtävien vastaukset

13. GRAAFINEN RATKAISEMINEN

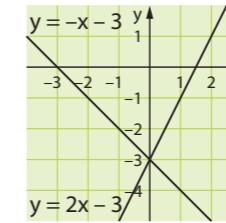
10. a) yksi b) ei yhtään

11. a) yksi b) ei yhtään

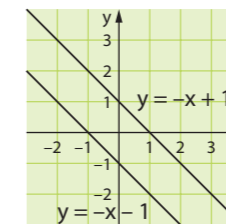
- c) äärettömän monta

- d) yksi

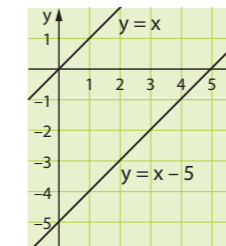
12. a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$



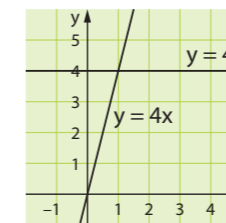
- b) ei ratkaisua



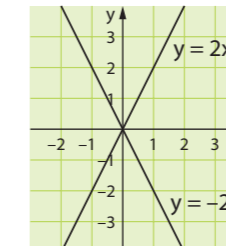
13. a) ei ratkaisua



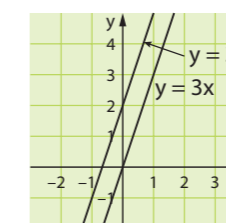
b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$



14. a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$



- b) ei ratkaisua



15. a) äärettömän monta

- b) yksi

16. a) ei yhtään b) ei yhtään

17. esim.

a) $\begin{cases} y = x \\ y = x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x \\ y = x \end{cases}$

18. a) $a = -2$ ja $b \neq 1$

- b) $a = -2$ ja $b = 1$

- c) $a \neq -2$

19. $b = -2$

14. Algebrallinen ratkaiseminen

Yhtälöparin algebrallinen ratkaiseminen tarkoittaa ratkaisun etsimistä laskemalla. Ratkaisumenetelmiä ovat sijoituskeino ja yhteenlaskukeino.

SIJOITUSKEINO

Esimerkki 1

$$\text{Ratkaise yhtälöpari } \begin{cases} y = -2x - 4 \\ y = x + 2 \end{cases}.$$

Yhtälöpari on ratkaistava algebrallisesti, ellei erikseen pyydetä graafista ratkaisua.

1. Sijoitetaan alempaan yhtälöön y :n paikalle lauseke $-2x - 4$.

$$-2x - 4 = x + 2$$

$$-2x - x = 2 + 4$$

$$-3x = 6$$

$$x = -2$$

2. Sijoitetaan saatu x :n arvo helpompaan yhtälöön $y = x + 2$:

$$y = -2 + 2 = 0 \quad \text{Vastaus: } \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Esimerkki 2

$$\text{Ratkaise yhtälöpari } \begin{cases} x - 3y = -3 \\ 3x + 5y = 19 \end{cases}.$$

1. Ratkaistaan ylempi yhtälö x :n suhteen: $x = -3 + 3y$.

$$3(-3 + 3y) + 5y = 19$$

$$-9 + 9y + 5y = 19$$

$$9y + 5y = 19 + 9$$

$$14y = 28 \quad | :14$$

$$y = 2$$

Sijoitetaan $-3 + 3y$ alempaan yhtälöön tuntemattoman x paikalle.

2. Sijoitetaan saatu y :n arvo helpompaan yhtälöön $x - 3y = -3$.

$$x - 3 \cdot 2 = -3$$

$$x - 6 = -3$$

$$x = -3 + 6$$

$$x = 3$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$



50

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Yhtälöpariruudukko
- Moniste: Vaakatehtäviä 2

14. Algebrallinen ratkaiseminen

Opetusvihjeitä

- ◆ Graafinen ratkaiseminen tuottaa usein likimääräisiä arvoja. Siksi on syytä korostaa, että yhtälöpari ratkaistaan aina algebrallisesti, ellei toisin pyydetä.

Tvt-vinkit

- ◆ coolmath.com
⇒ algebra/systems of equations (sx2s)
- ◆ opetustv.fi
⇒ Lukio/Pitkä matematiikka/MAA1/Yhtälöparit
- ◆ openmatikka.com
⇒ Algebra ja funktiot/Tanssii parin kanssa
- ◆ math.fi
⇒ 9.luokka/Epäyhtälöt, yhtälöt ja yhtälöparit
- ◆ mathsisfun.com
⇒ algebra2/Systems of Linear equations/ Systems of Linear equations
⇒ algebra2/Systems of Linear equations/ Systems of Linear and Quadratic Equations
- ◆ www.khanacademy.org/math
⇒ Algebra/Systems of Equations
- ◆ thatquiz.org
⇒ Algebra
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

Ratkaise yhtälöpari algebrallisesti.

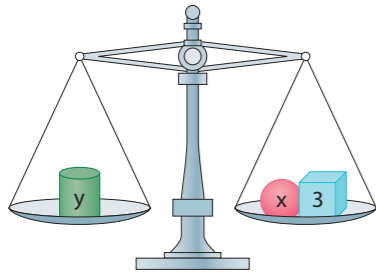
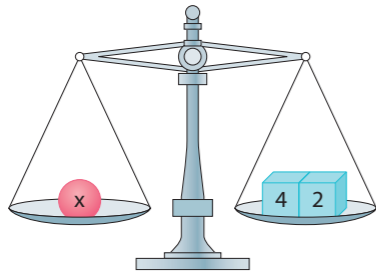
$$1. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} & b) \begin{cases} y = 2 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} a) \begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \end{cases} & b) \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 3y \\ x - y = 18 \end{cases} & b) \begin{cases} x = y + 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 3y + 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} & b) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x = y + 2 \end{cases} \end{cases}$$

5. Kirjoita yhtälöpari ja ratkaise tuntemattomat x ja y .

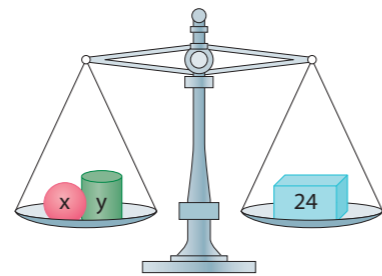
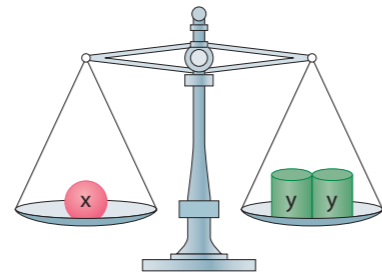


Ratkaise yhtälöpari algebrallisesti.

$$6. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 2y \\ x + y = 12 \end{cases} & b) \begin{cases} y = x \\ y = 2x + 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} a) \begin{cases} y = 2x \\ y + 1 = x + 2 \end{cases} & b) \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \end{cases}$$

8. Kirjoita yhtälöpari ja ratkaise tuntemattomat x ja y .



Ratkaise yhtälöpari algebrallisesti.

$$9. \begin{cases} a) \begin{cases} y = x - 3 \\ 2x - y = 5 \end{cases} & b) \begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ x = y - 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} a) \begin{cases} x + y = 2x - 3 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} & b) \begin{cases} 7x - 4y = -5 \\ 2y = x + 5 \end{cases} \end{cases}$$

Lisätehtävät s. 83
Kotitehtävät s. 96

Tuntitehtävien vastaukset

14. ALGEBRALLINEN RATKAISEMINEN

$$1. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} & b) \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} & b) \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 27 \\ y = 9 \end{cases} & b) \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} & b) \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \begin{cases} x = 4 + 2 \\ y = x + 3 \end{cases} & \begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \end{cases} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases} & b) \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} & b) \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \begin{cases} x = 2y \\ x + y = 24 \end{cases} & \begin{cases} x = 16 \\ y = 8 \end{cases} \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} & b) \begin{cases} x = -0,5 \\ y = 1,5 \end{cases} \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \end{cases} & b) \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases}$$

14. Algebrallinen ratkaiseminen



YHTEENLASKUKEINO

Yhteenlaskukeinossa lasketaan yhtälöparin yhtälöiden vasemmat puolet yhteen ja oikeat puolet yhteen eli **lasketaan yhtälöt puolittain yhteen**. Tätä ennen yhtälöitä on muokattava niin, että yhteen laskettaessa toinen muuttujista saadaan pois. Tätä kutsutaan muuttujan **eliminoimiseksi**.

Esimerkki 3

$$\text{Ratkaise yhtälöpari } \begin{cases} -2x + y = 1 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y = 1 & | \cdot 2 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -x \quad = -1 \quad | : (-1) \\ x \quad = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2 \cdot 1 + y = 1 \\ y = 1 + 2 \\ y = 3 \end{array}$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet kahdella, jotta saadaan y:n kertoimiksi vastaluvut.

Vastalukujen summa on 0.

Sijoitetaan $x = 1$ ylempään yhtälöön.

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Esimerkki 4

$$\text{Ratkaise yhtälöpari } \begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 5y = 3 & | \cdot 3 \\ 2x + 3y = 2 & | \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x - 15y = 9 \\ 10x + 15y = 10 \end{cases}$$

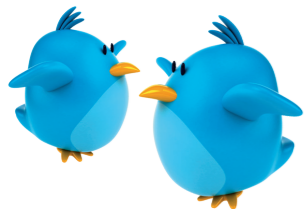
$$\begin{array}{r} 19x \quad = 19 \quad | : 19 \\ x \quad = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Sijoitus } 3 \cdot 1 - 5y = 3 \\ -5y = 3 - 3 \\ -5y = 0 \quad | : (-5) \\ y = 0 \end{array}$$

Muokataan yhtälöitä, jotta saadaan y:n tai x:n kertoimiksi vastaluvut.

Sijoitetaan saatu x:n arvo jompaankumpaan yhtälöön.

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$



52

Opetusvihjeitä

- Useimmille oppilaille yhteenlaskukeino on vaikeampi keino varsinkin, jos yhtälöparin molempia yhtälöitä on muokattava.

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Päässäälaskutehtäviä

Ratkaise algebrallisesti.

$$11. \begin{cases} a) \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} & b) \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ -2x + 5y = 5 \end{cases} \end{cases}$$

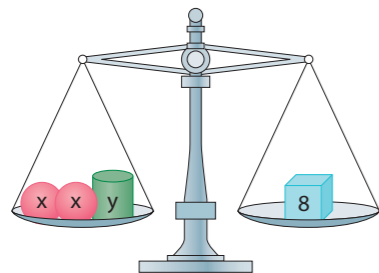
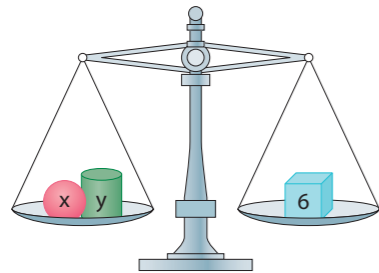
$$12. \begin{cases} a) \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} & b) \begin{cases} -2x - 5y = 6 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} a) \begin{cases} x - y = 7 \\ 3x - y = 9 \end{cases} & b) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -x + 3y = 7 \end{cases} \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} a) \begin{cases} x + y = 8 \\ -2x + y = 2 \end{cases} & b) \begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases} \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} a) \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - y = 11 \end{cases} & b) \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -4x - 3y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

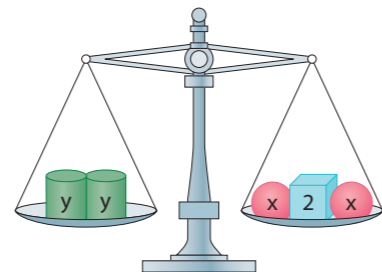
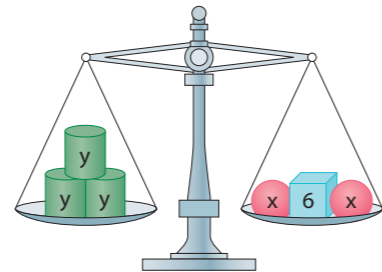
16. Muodosta yhtälöpari ja ratkaise se.



17. Ratkaise algebrallisesti.

$$17. \begin{cases} a) \begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} & b) \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \end{cases}$$

18. Muodosta yhtälöpari ja ratkaise se.



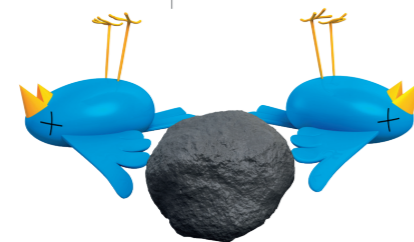
Ratkaise algebrallisesti.

$$19. \begin{cases} a) \begin{cases} 4x + 2y = 28 \\ y - x = 7 \end{cases} & b) \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -6x + 2y = 10 \end{cases} \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} a) \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 3x - 4y = 13 \end{cases} & b) \begin{cases} 6x - 5y - 10 = 0 \\ 4x - 3y - 10 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

21. Määritä vakiot a ja b siten, että yhtälöparin ratkaisu on (1, 2).

$$\begin{cases} ax + by = -1 \\ -ax - 2by = 3 \end{cases}$$

Lisätehtävät s. 83
Kotitehtävät s. 96

53

Tuntitehtävien vastaukset

14. ALGEBRALLINEN RATKAISEMINEN

$$11. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} & b) \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} & b) \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 1 \\ y = -6 \end{cases} & b) \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} & b) \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} & b) \begin{cases} x = 5 \\ y = -7 \end{cases} \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} & b) \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3y = 2x + 6 \\ 2y = 2x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 0 \\ y = 7 \end{cases} & b) \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} a) \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} & b) \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases} \end{cases}$$

21. a = 1 ja b = -1

14. Algebrallinen ratkaiseminen

Yhtälöpareja ratkaistaessa kannattaa aina harkita, kumpi sijoitus- vai yhteenlaskukeinosta on tehtävässä parempi.

Esimerkki 5

$$\text{Ratkaise yhtälöpari } \begin{cases} 8x - 14y = -4 \\ -4x + 7y = 2 \end{cases}.$$

Valitaan yhteenlaskukeino.

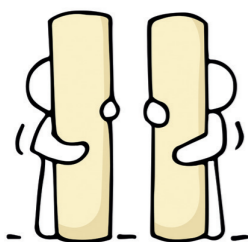
Muokataan alempaa yhtälöä, jotta saadaan polynomin $8x - 14y$ vastapolynomi $-8x + 14y$.

$$\begin{cases} 8x - 14y = -4 \\ -4x + 7y = 2 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} 8x - 14y = -4 \\ -8x + 14y = 4 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

Identtisesti tosi



Yhtälöt $8x - 14y = -4$ ja $-4x + 7y = 2$ kuvaavat siis samaa suoraa.

Vastaus: Yhtälöparin ratkaisuja ovat kaikki suoran $-4x + 7y = 2$ pisteet.

Esimerkki 6

$$\text{Ratkaise yhtälöpari } \begin{cases} x = 2y + 2 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}.$$

Valitaan sijoituskeino.

Sijoitetaan $2y + 2$ alempaan tuntemattoman x paikalle.

$$\text{Sijoitus: } 3(2y + 2) - 6 = 3$$

Muista sulkumerkit.

$$6y + 6 - 6 = 3$$

$$6y - 6y = 3 - 6$$

$$0 = -3$$

Identtisesti epätosi

Yhtälöiden $x = 2y + 2$ ja $3x - 6y = 3$ kuvaajat ovat siis yhdensuuntaiset suorat.

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

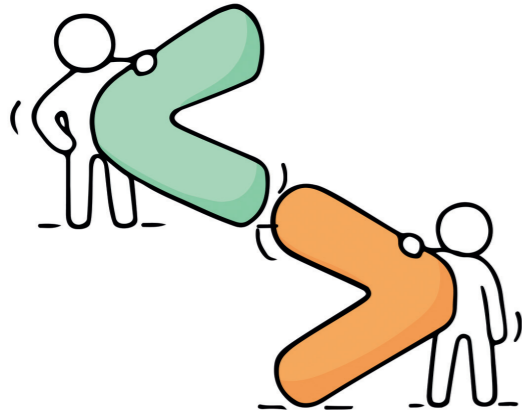
54

Opetusvihjeitä

- ◆ Yhtälöparin algebrallinen ratkaiseminen on jaettu kolmeen osaan. Ensimmäisellä tunnilla käsiteltiin sijoituskeino ja toisella yhteenlaskukeino. Nyt opetellaan valitsemaan kulloiseenkin tehtävään paremmin sopiva keino ja tutustutaan identtisiin tapauksiin.

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Yhtälöpariristikko
- Testi: Yhtälöparin algebrallinen ratkaiseminen (Tulostettavat kokeet)

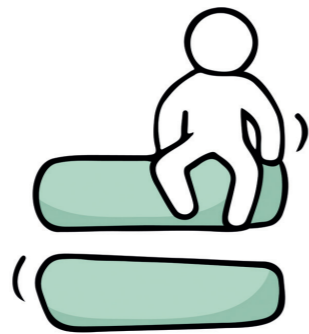


Ratkaise yhtälöpari.

22. a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5 \\ x - 4 = y \end{cases}$
23. a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 7 - x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 2 - x \end{cases}$
24. a) $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 20 \\ y = 3x \end{cases}$
25. a) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$
26. a) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -6x + 4y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 5x + 16y = 40 \end{cases}$
27. a) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ 5x = 15 \end{cases}$
28. a) $\begin{cases} -x + 2y = 7 \\ -x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2y \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$

Ratkaise yhtälöpari.

29. a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 3 + x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ y = 2 - 2x \end{cases}$
30. a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$
31. a) $\begin{cases} 5x + 8y = 24 \\ 7x - 6y = -18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 7y - 40 = 0 \\ 2x + 3y + 6 = 0 \end{cases}$
32. Millä a:n arvoilla yhtälöparilla
 $\begin{cases} 4x + 6y + 5 = 0 \\ -4x - 6y - a = 0 \end{cases}$
 a) on äärettömän monta ratkaisua
 b) ei ole ratkaisua?
33. Määritä suoran $y = ax + b$ yhtälö, kun suora kulkee pisteiden (1, 1) ja (4, 7) kautta. Muodosta yhtälöpari ja ratkaise se.

Lisätehtävät s. 84
Kotitehtävät s. 96

Tuntitehtävien vastaukset

14. ALGEBRALLINEN RATKAISEMINEN

22. a) $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$
23. a) kaikki suoran $y = -x + 7$ pisteet
b) ei ratkaisuja
24. a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 15 \end{cases}$
25. a) ei ratkaisuja
b) kaikki suoran $y = -2x + 3$ pisteet
26. a) ei ratkaisuja
b) $\begin{cases} x = 40 \\ y = -10 \end{cases}$
27. a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 12 \end{cases}$
28. a) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$ b) ei ratkaisuja
29. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$ b) ei ratkaisuja
30. a) kaikki suoran $y = 2x + 1$ pisteet
b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$
31. a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$
32. a) $a = 5$ b) $a \neq 5$
33. $y = 2x - 1$

15. Sovelluksia

Esimerkki 1

Lida on 8 vuotta vanhempi kuin Emmi. Tyttöjen yhteenlaskettu ikä on 28 vuotta. Minkä ikäisiä tytöt ovat?

Merkitään lidan ikää kirjaimella x ja Emmin ikää kirjaimella y . Kirjoitetaan annetuista tiedoista yhtälöt, joiden on oltava voimassa yhtä aikaa.

$$\begin{cases} x = y + 8 \\ x + y = 28 \end{cases}$$

lidan ikä = Emmin ikä + 8

Yhteenlaskettu ikä = 28

Ratkaistaan sijoittamalla ylempi alempaan:

$$\begin{aligned} y + 8 + y &= 28 \\ y + y &= 28 - 8 \\ 2y &= 20 \quad | : 2 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

lidan ikä $x = 10 + 8 = 18$

Vastaus: lida on 18 vuotta ja Emmi 10 vuotta.

YHTÄLÖPARIN KÄYTTÖ ONGELMANRATKAISUSSA

- Lue tehtävä huolellisesti
- Piirrä tarvittaessa havainnollistava kuva tilanteesta ja/tai tee taulukko.
- Kerää tiedot ja valitse muuttujat.
- Muodosta yhtälöt
- Ratkaise yhtälöpari ja laske tarvittaessa lisätietoja.
- Kirjoita vastaus
- Tarkista.



56

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Päättelytehtäviä

15. Sovelluksia

Opetusvihjeitä

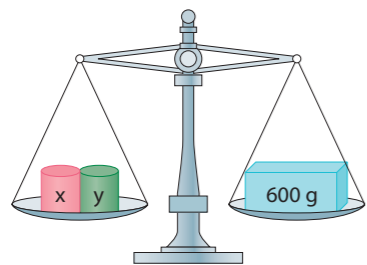
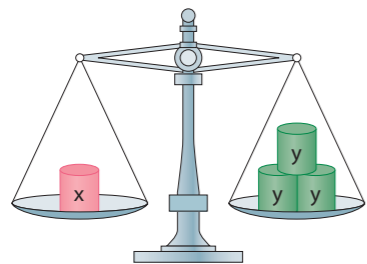
- ◆ Osa tehtävistä olisi helposti ratkaistavissa myös yhden muuttujan yhtälöllä. Tämän ja seuraavan aukeaman tehtävissä on kuitenkin ohjeistus käyttää yhtälöparia. Näin opitaan tämä perusasteen viimeinenkin ongelmanratkaisutyökalu riittävän syvällisesti.

Tvt-vinkit

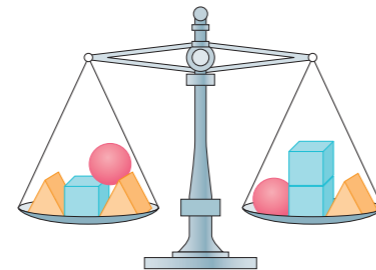
- ◆ opetustv.fi
⇒ Lukio/Pitkä matematiikka/MAA1/Yhtälöparit
- ◆ openmatikka.com
⇒ Algebra ja funktiot/Funktiokone
- ◆ math.fi
⇒ 9.luokka/Epäyhtälöt, yhtälöt ja yhtälöparit
- ◆ mathsisfun.com
⇒ algebra2/Systems of Linear equations/ Systems of Linear equations
⇒ algebra2/Systems of Linear equations/ Systems of Linear and Quadratic Equations
- ◆ www.khanacademy.org/math
⇒ Algebra/Systems of Equations
- ◆ wolframalpha.com
⇒ mathematics/Plotting & Graphics/functions

Ratkaise tehtävät yhtälöparin avulla.

1. Lukujen x ja y summa on 123 ja erotus on 11. Ratkaise luvut.
2. Tualla on rahaa kolme kertaa niin paljon kuin Monalla. Yhteensä heillä on 88 €. Laske, kuinka paljon kummallakin on rahaa.
3. Yhdeksännellä luokalla on yhteensä 112 oppilasta. Kuinka moni oppilaista on tyttöjä, kun poikia on 8 vähemmän kuin tyttöjä?
4. Moottoripyörän takarattaassa on 25 hammasta enemmän kuin eturattaassa. Yhteensä hampaista etu- ja takarattaissa 59 kappaletta. Laske hampaiden määrä kummassakin rattaassa.
5. Eetun ja Samun ikäero on 4 vuotta. Heidän ikinsä summa on 28 vuotta. Laske poikien iät.
6. Kirjoita vaaka-asetelmista yhtälöpari ja laske purkkien massat.



7. Milja ja Joono keräävät mangatarroja. Heillä on yhteensä 75 tarraa. Jos Joono saisi 15 tarraa lisää, hänellä olisi yhtä monta kuin Miljalla. Kuinka monta mangatarraa kummallakin on?
8. Muodosta yhtälöpari ja laske pallon ja kuution massa. Pyramidin massa on 20,0 g.



9. Kuution ja pallon massojen suhde on 1 : 3. Yhteenlaskettu massa on 520 kg. Laske kuution ja pallon massat.
10. Liike myi kahta eri kannettavaa tietokonetta. Eräällä viikolla myytiin A-mallia 9 kappaletta ja B-mallia 5 kappaletta, jolloin tuotto oli 9 925 €. Seuraavalla viikolla myytiin 6 kappaletta A-mallia ja 8 kappaletta B-mallia, jolloin tuotto oli 11 260 €. Laske mallien A ja B hinnat.

Lisätehtävät s. 84
Kotitehtävät s. 97

Tuntitehtävien vastaukset

15. SOVELLUKSIA

1. $x = 67$ ja $y = 56$
2. Tualla on 66 € ja Monalla 22 €.
3. 60
4. eturattaassa 17 ja takarattaassa 42
5. Eetu 16 v. ja Samu 12 v.
6. $x = 450$ g ja $y = 150$ g
7. Joonalla 30 ja Miljalla 45 tarraa
8. kuutio 20,0 g ja pallo 40,0 g
9. kuutio 130 kg ja pallo 390 kg
10. malli A 550 € ja malli B 995 €

15. Sovelluksia

Esimerkki 2

Lastenlippu kesätapahtumaan maksoi 3 € ja aikuisten lippu 5 €. Sateisena kesäkuun päivänä kävijöistä saadut tulot olivat 338 €, kun kävijöitä oli 90. Laske kuinka monta aikuista ja lasta tapahtumassa kävi.

Merkitään lasten lukumäärää kirjaimella x ja aikuisten määrää kirjaimella y .

	Lukumäärä	Tuotto (€)
lapset	x	$3x$
aikuiset	y	$5y$
yhteensä	90	338

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ 3x + 5y = 338 \end{cases}$$

Lapsia ja aikuisia yhteensä 90. Lastenlipuista ja aikuistenlipuista saatu tuotto oli 338 €.

Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 90 & | \cdot (-5) \\ 3x + 5y = 338 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 5y = -450 \\ 3x + 5y = 338 \end{cases}$$

$$-2x = -112$$

$$x = \frac{-112}{-2} = 56$$

$x + y = 90$, josta $y = 90 - x = 90 - 56 = 34$.

Vastaus: Lapsia kävi 56 ja aikuisia 34.

Opetusvihjeitä

- ◆ Taulukon laatiminen on monissa vaativammassa tehtävissä hyvä apukeino.

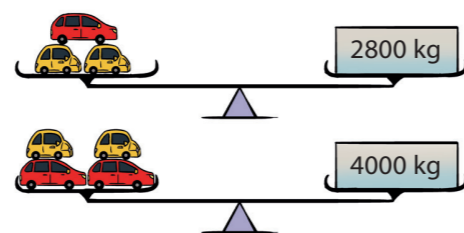
Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Pääsälaskutesti: Luku 15 (Tulostettavat kokeet)

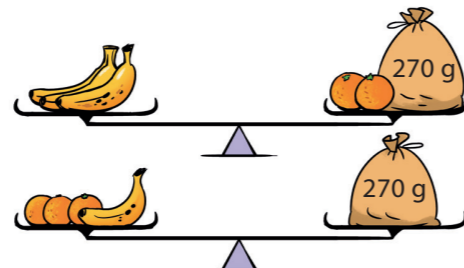
Ratkaise tehtävät yhtälöparin avulla.

11. Kahden luvun erotus on 6. Kun ensimmäinen luku kerrotaan kahdella ja tuloon lisätään toinen luku saadaan 54. Määritä luvut.
12. Erään kaksinumeroisen luvun numeroiden summa on 12. Numeroiden erotus on 6. Mikä luku on kyseessä?
13. Biologian luokassa on undulaatteja ja marsuja. Niillä on yhteensä 18 päätä ja 56 jalkaa. Kuinka monta undulaattia ja kuinka monta marsua luokassa on?
14. Suorakulmion kanta on 8 cm pidempi kuin korkeus. Suorakulmion piiri on 96 cm. Määritä kanta ja korkeus.
15. Jannikalla on punaisia ja sinisiä palloja. Niitä on yhteensä 42 kappaletta. Punaisia on kuusi enemmän kuin sinisiä. Kuinka monta punaista ja kuinka monta sinistä palloa Jannikalla on?
16. Ella on kaksi kertaa niin vanha kuin Mette. Tyttöjen yhteenlaskettu ikä on 48 vuotta. Laske, kuinka vanhoja tytöt ovat.

17. Kirjoita vaaka-asetelmista yhtälöpari ja laske autojen massat.



18. Laske banaanin ja appelsiinin massat.



19. Oppilaskunnan kahvilassa myytiin yhteensä 85 munkkia. Berliininmunkin hinta oli 1,50 € ja munkkirinkilän 1,00 €. Laske, kuinka monta berliininmunkkia ja munkkirinkilää myytiin, kun munkeista saatu tuotto oli 103,00 €.
20. 9A-luokalla on 27 oppilasta. Luokan tytöillä on Facebookissa keskimäärin 45 ystävää ja pojilla 16. Yhteensä luokan oppilailla on 867 kontaktia. Laske tyttöjen ja poikien lukumäärä luokassa.

Tuntitehtävien vastaukset

15. SOVELLUKSIA

11. 20 ja 14
12. 93
13. 8 undulaattia ja 10 marsua
14. kanta 28 cm ja korkeus 20 cm
15. 24 punaista ja 18 sinistä
16. Ella 32 v. ja Mette 16 v.
17. keltainen 800 kg ja punainen 1200 kg
18. appelsiini 49 g ja banaani 123 g
19. 36 berliininmunkkia ja 49 munkkirinkilää
20. 15 tyttöä ja 12 poikaa

Lisätehtävät s. 85
Kotitehtävät s. 97

16. Kertaus

1. Ovatko suuret suoraan vai kääntäen verrannolliset vai ei kumpaakaan?

a) $y = 7x$ b) $y = \frac{7}{x}$ c) $y = 7x - 5$

2. Määritä kolme lukuparia (x, y) , jotka toteuttavat yhtälön $x - y = 5$.

Ratkaise yhtälöpari graafisesti.

3. a) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 4 \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} y = -x \\ y = x - 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 5x - 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Ratkaise yhtälöpari.

5. a) $\begin{cases} x = y + 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2y \\ x - y = 3 \end{cases}$

6. a) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -5x + y = 20 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ -x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ -6x + 2y = 1 \end{cases}$

Ratkaise tehtävät 8-12 yhtälöparin avulla.

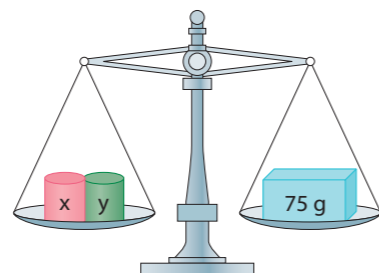
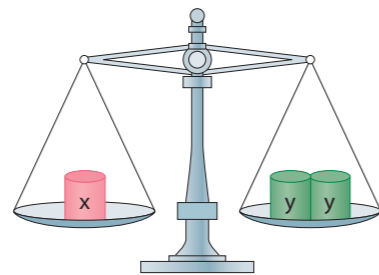
8. Tiialla on rahaa kaksi kertaa niin paljon kuin Katariinalla. Yhteensä heillä on 135 €. Laske, kuinka paljon kummallakin on rahaa.

9. Eetu kerää punaisia ja sinisiä pikku-autoja. Punaisia on neljä enemmän kuin sinisiä. Autoja on yhteensä 36 kappaletta. Kuinka monta punaista ja kuinka monta sinistä autoa Eetulla on?

10. lina on 10 cm pidempi kuin Anu. Heidän yhteenlaskettu pituutensa on 310 cm. Laske tyttöjen pituudet.

11. Aapolla on rahaa 10 € vähemmän kuin Aleksilla. Aleksilla on kaksi kertaa niin paljon kuin Aapolla. Laske kuinka paljon kummallakin on rahaa.

12. Kirjoita vaakasetelmistä yhtälöparit ja laske purkkien massat.



60

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Itsearviointitesti: Luku 16 (Digilisätehtävät)
- Kertaustesti: Luvut 10-15 (Tulostettavat kokeet)

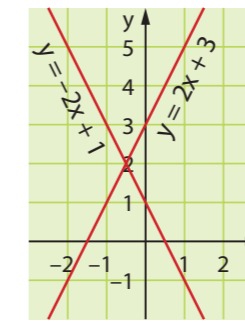
Tuntitehtävien vastaukset

16. KERTAUS

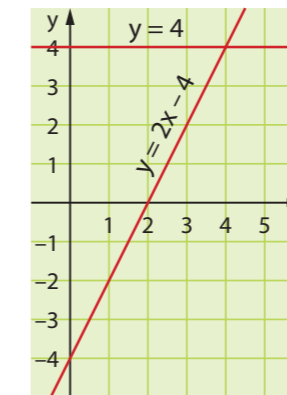
1. a) suoraan b) kääntäen
c) ei kumpaakaan

2. Esimerkiksi $(5, 0)$, $(6, 1)$ ja $(7, 2)$

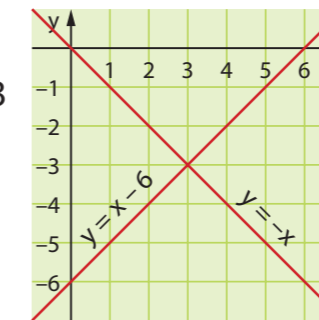
3. a) $\begin{cases} x = -0,5 \\ y = 2 \end{cases}$



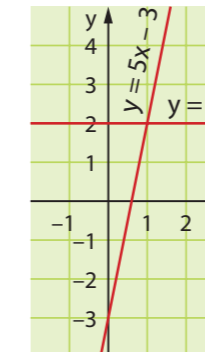
b) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$



4. a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$



b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$



5. a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$

6. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$

7. a) kaikki suoran $y = x - 5$ pisteet
b) ei ratkaisuja.

8. Katariinalla 45 € ja Tiialla 90 €

9. 16 sinistä ja 20 punaista

10. Anu on 150 cm ja lina 160 cm.

11. Aleksilla 20 € ja Aapolla 10 €

12. $\begin{cases} x = 2y \\ xy = 75 \end{cases}$ $x = 50 \text{ g}$ ja $y = 25 \text{ g}$

Ratkaise yhtälöpari graafisesti.

$$13. \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = 4x - 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} y - x = 0 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = 2x \\ y - x = 2 \end{cases}$$

Ratkaise yhtälöpari.

$$15. \begin{cases} y = x + 3 \\ y = 5x - 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 7 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} -x + y = 4 \\ 3x + 3y = -6 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 4x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 8x - 4y + 12 = 0 \\ 5x - 3y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 4y - 8 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

19. Määritä k ja b siten että yhtälöparilla

$$\begin{cases} y = 2kx + 4 \\ y = -6x - b \end{cases}$$

a) on äärettömän monta ratkaisua

b) ei ole yhtään ratkaisua

c) on ratkaisuna lukupari (1,2).

Ratkaise tehtävät 20–23 yhtälöparin avulla.

20. Jos luku a kerrotaan kahdella ja tuloon lisätään b, saadaan 26. Jos luku b kerrotaan kahdella ja tulosta vähennetään luku a, saadaan 17. Määritä luvut a ja b.

21. Koulun juhlasalissa oli samanpituisia penkkejä. Jos jokaiseen penkkiin sijoitettiin 10 oppilasta, jäi koulun oppilaista 20 seisomaan. Jos penkkiin sijoittui 11 oppilasta, oli viimeisessä penkissä vain 7 oppilasta. Kuinka monta oppilasta koulussa oli ja kuinka monta penkkiä oli juhlasalissa?

22. Aarolla on rahaa kummassakin kädessään. Jos hän siirtää 17 € oikeasta kädestä vasempaan, on kummassakin kädessä yhtä paljon rahaa. Jos hän (tekemättä edellistä) siirtää vasemmasta kädestä oikeaan 17 €, oikeassa kädessä on kaksi kertaa niin paljon kuin vasemmassa. Kuinka paljon Aarolla oli alkujaan rahaa vasemmassa ja kuinka paljon oikeassa kädessä?

23. Kahden luvun erotus on 15. Suuremman luvun kahdeksasosa on yhtä suuri kuin pienemmän luvun kolmasosa. Mitkä nämä luvut ovat?

24. Suureen y arvo on 12, kun x:n arvo on 4. Laske suureen y arvo x:n arvon ollessa 3, kun suureet ovat

a) suoraan verrannollisia

b) kääntäen verrannollisia.

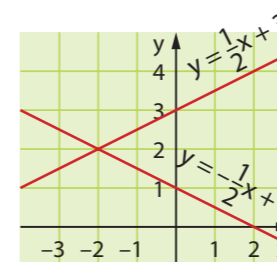


61

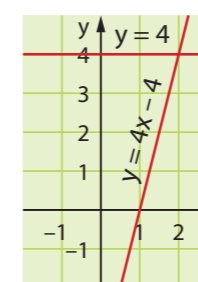
Tuntitehtävien vastaukset

16. KERTAUS

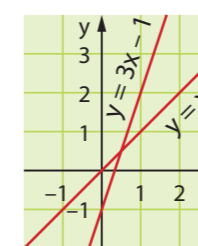
$$13. \text{ a) } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$



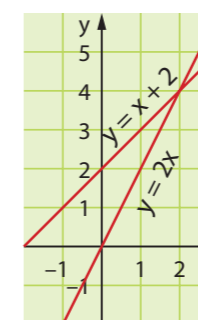
$$\text{b) } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$



$$14. \text{ a) } \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 0,5 \end{cases}$$



$$\text{b) } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$



$$15. \text{ a) } \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$16. \text{ a) } \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$17. \text{ a) } \begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$18. \text{ a) } \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

19. a) $k = -3$ ja $b = -4$ b) $k = -3$ ja $b \neq -4$ c) $k = -1$ ja $b = -8$ 20. $a = 7$ ja $b = 12$

21. Penkkejä on 24 ja oppilaita 260.

22. 85 € vasemmassa ja 119 € oikeassa kädessä

23. 24 ja 9

24. a) 9 b) 16



Tiivistelmä luvut 1–8

FUNKTIO

Funktio kuvaa kahden suureen välistä **riippuvuutta**.

Funktiomerkinä

$$y = f(x)$$

funktion arvo

muuttuja

FUNKTION ARVO

Kun muuttujan paikalle sijoitetaan muuttujaa vastaava luku, saadaan **funktion arvo**.

SUORAN PIIRTÄMINEN

Jos funktion lausekkeessa muuttujan korkein eksponentti on yksi, funktio on **ensimmäisen asteen funktio**. Ensimmäisen asteen funktion **kuvaaja on aina suora**.

Suoran yhtälö on muotoa **$y = kx + b$** .

k = kulmakerroin ja b = vakiotermi

Nousevalla suoralla k on positiivinen.

Laskevalla suoralla k on negatiivinen.

Vakiotermi b on suoran ja y -akselin leikkauspisteen y -koordinaatti.

Suoran piirtäminen

1. Lasketaan muuttujaa x vastaavat y :n arvot.
2. Sijoitetaan (x, y) -pisteet koordinaatistoon.
3. Piirretään suora pisteiden kautta.

Yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin.

AKSELIN SUUNTAISET SUORAT

$x = a$ y -akselin suuntainen suora.

Kulmakerrointa ei voi määrittää.

$y = b$ x -akselin suuntainen suora.

Kulmakerroin $k = 0$.

SUORAN YHTÄLÖN MÄÄRITYS

Suoran yhtälö $y = kx + b$, saadaan määritettyä, kun kuvaajasta katsotaan vakiotermin b arvo ja lasketaan kulmakertoimen k arvo.

Nousevalla suoralla k on positiivinen.

Laskevalla suoralla k on negatiivinen.

Vakiotermi b on suoran ja y -akselin leikkauspisteen y -koordinaatti.

PARAABELI

Toisen asteen funktion kuvaaja on **paraabeli**.

$$y = ax^2 + c \quad (a \neq 0)$$

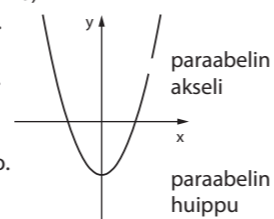
Huippu on pisteessä $(0, c)$.

Akseli on y -akseli.

Aukeaa ylöspäin, jos $a > 0$.

Aukeaa alaspäin, jos $a < 0$.

On sitä leveämpi, mitä pienempi on a :n itseisarvo.



FUNKTION OMINAISUUKSIA

$f(x) = 0$ Funktion **nollakohta** on se muuttujan arvo, jolla funktio saa arvon nolla.

$f(x) > 0$ Funktion arvo on **positiivinen**, kun kuvaaja on x -akselin yläpuolella.

$f(x) < 0$ Funktion arvo on **negatiivinen**, kun kuvaaja on x -akselin alapuolella.

Funktion **ääriarvoiksi** sanotaan **suurinta ja pienintä arvoa**, jonka funktio voi saada.

KASVAVA JA VÄHENEVÄ FUNKTIO

Funktio on **kasvava**, jos muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo kasvaa tai pysyy samana.

Funktio on **vähenevä**, jos muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo vähenee tai pysyy samana.



Tiivistelmä luvut 10–15

SUORAAN VERRANNOLLISUUS

Suoraan verrannollisten suureiden y ja x **suhde on vakio k** .

Riippuvuus voidaan esittää muodossa $y = kx$. Vakiota k sanotaan verrannollisuuskertoimeksi.

Kuvaaja on origon kautta kulkeva suora, jonka kulmakerto on k .

KÄÄNTÄEN VERRANNOLLISUUS

Kääntäen verrannollisten suureiden **tulo on vakio**.

Riippuvuus voidaan esittää muodossa $y = \frac{k}{x}$,

jossa k on vakio ($k \neq 0, x \neq 0$).

Vakiota k sanotaan verrannollisuuskertoimeksi.

Kuvaaja on **hyperbeli**.

KAHDEN MUUTTUJAN YHTÄLÖ

Yhtälö

$$ax + by = c$$

on kahden muuttujan yhtälö. ($a \neq 0, b \neq 0$)

Sen muuttujat ovat x ja y .

Yhtälön ratkaisu voidaan esittää graafisesti piirtämällä suoran $ax + by = c$ kuvaaja.

YHTÄLÖPARI

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Yhtälöiden muuttujat ovat x ja y .

Yhtälöparilla voi olla yksi, ei yhtään tai äärettömän monta ratkaisua.

GRAAFINEN RATKAISEMINEN

Yhtälöparin graafinen ratkaisu on suorien $a_1x + b_1y = c_1$ ja $a_2x + b_2y = c_2$ **leikkauspiste**.

Yhtälöpari on ratkaistava algebrallisesti ellei erikseen pyydetä graafista ratkaisua.

ALGEBRALLINEN RATKAISEMINEN

Sijoituskeinossa

ratkaistaan jompikumpi yhtälö toisen muuttujan suhteen. Tämän jälkeen sijoitetaan ratkaisussa saatu lauseke toiseen yhtälöön.

Yhteenlaskukeinossa

lasketaan yhtälöparin yhtälöiden vasemmat puolet yhteen ja oikeat puolet yhteen eli **lasketaan yhtälöt puolittain yhteen**. Tätä ennen yhtälöitä on muokattava niin, että yhteen laskettaessa toinen muuttujista eliminoiduu pois.

YHTÄLÖPARIN KÄYTTÖ
ONGELMANRATKAISUSSA

Lue tehtävä huolellisesti.

- Piirrä tarvittaessa havainnollistava kuva tilanteesta ja/tai tee taulukko.
- Kerää tiedot ja valitse muuttujat.
- Muodosta yhtälöt.
- Ratkaise yhtälöpari ja laske tarvittaessa lisätietoja.
- Kirjoita vastaus.
- Tarkista.



Funktio, s. 8–9

1. Mistä tekijöistä riippuu koulumatkaan käytetty aika?
◆◇◇
2. Mansikat maksavat 2,50 €/kg.
◆◇◇ a) Kuinka paljon mansikoita saa 20 eurolla?
b) Kuinka paljon maksaa 5 kg mansikoita?
3. Mitkä tekijät vaikuttavat Mitjan tekemän mopomatkan kustannuksiin?
◆◇◇
4. Miten sarjapeliin pistetilanne riippuu pelin lopputuloksista, kun peli on a) jääkiekko b) jalkapallo?
◆◇◇
5. Kuvaaja esittää perunapussin hinnan riippuvuutta pussin painosta. Esiä hinnan riippuvuus a) sanoin b) yhtälönä.
◆◇◇



Funktio, s. 10–11

6. 2 kg perunoita maksaa 1,40 € ja 5 kg perunoita maksaa 3,50 €. Merkitse perunoiden määrää x :llä ja esiä sääntönä perunoiden hinta y , kun ostetaan x kiloa perunoita.
◆◇◇



7. Esiä sääntö yhtälönä: y :n arvo on kolminkertainen x :n arvoon verrattuna.
◆◇◇
8. Vuoden 2002 alusta Suomessa siirryttiin käyttämään euroja markan sijasta. 1 € = 5,94573 mk. Kirjoita yhtälönä muunnoskaava, jolla a) markat muutetaan euroiksi b) eurot muutettiin markoiksi.
◆◇◇

9. Funktiokone muuttaa sinne syötetyt luvut tietyn säännön mukaan. Esiä tämä sääntö sanoin.
◆◇◇
- | | |
|-----------|-----------|
| a) 1 → 4 | b) 1 → -1 |
| 2 → -3 | 2 → -2 |
| 3 → -2 | 3 → -3 |
| 5 → 0 | 5 → -5 |
| x → y | x → y |

10. Etsi sääntö, jonka mukaan kone muuttaa lukuja. Esiä sääntö yhtälönä.
◆◇◇

- | | |
|-----------|-----------|
| a) 1 → 1 | b) 1 → 4 |
| 2 → 0 | 2 → 6 |
| 3 → -1 | 3 → 8 |
| 5 → -3 | 5 → 12 |
| x → y | x → y |

11. Etsi sääntö, jonka mukaan funktiokone muuttaa lukuja. Esiä sääntö yhtälönä.
◆◇◇

- | | |
|-----------|-----------|
| a) 1 → 7 | b) 1 → 4 |
| 2 → 8 | 2 → 8 |
| 4 → 10 | 4 → 16 |
| 8 → 14 | 6 → 24 |
| x → y | x → y |



L8

Lisätehtäviä

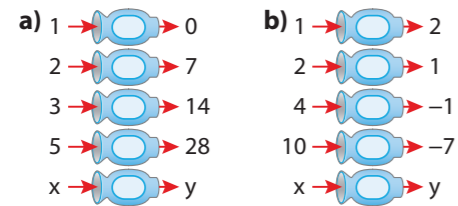
Lisätehtävien vastaukset

1. esimerkiksi matkan pituudesta, kulkuvälineestä, säästä
2. a) 8 kg b) 12,50 €
3. esimerkiksi bensiinin hinta, matkan pituus, mopon kulutus
4. a) voitto varsinaisella peliajalla 3 p., jatkoaikavoitto ja voittomaalivoitto 2 p., jatkoikatappio ja voittomaalitappio 1 p., tappio varsinaisella peliajalla 0 p.
b) voitto 3 p., tasapeli 1 p., tappio 0 p.
5. a) Perunapussin kilohinta on 0,75 €.
b) hinta = paino · 0,75 €/kg
6. $y = 0,7x$ €/kg

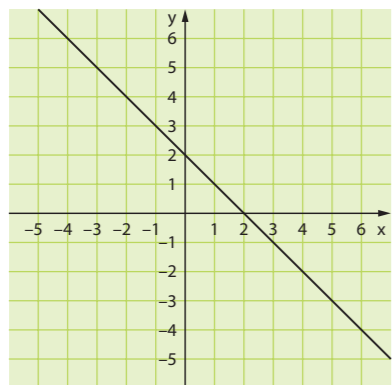
7. $y = 4x$
8. a) $y = x : 5,94573$
b) $y = 5,94573 \cdot x$
9. a) Luvusta vähennetään viisi.
b) Luku muutetaan vasta-luvukseen.
10. a) $y = -x + 2$ b) $y = 2x + 2$
11. a) $y = x + 6$ b) $y = 4x$

L8 Lisätehtäviä

12. Etsi sääntö, jonka mukaan funktiokone muuttaa lukuja. Esitä sääntö yhtälönä.



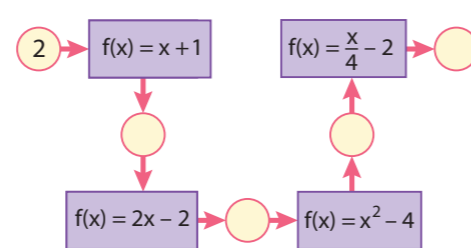
13. Määritä kuvaajan esittämän funktion yhtälö.



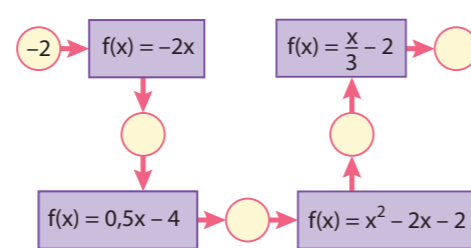
Funtion arvo, s. 12–13

14. Mikä merkinnässä $f(4) = 10$ on
 a) muuttujan arvo
 b) funktion arvo?
15. Funktio $f(x) = 2x + 9$. Laske
 a) $f(0)$ b) $f(2)$ c) $f(4)$.
16. Funktio $f(x) = -5x + 6$. Laske
 a) $f(1)$ b) $f(4)$ c) $f(-2)$.
17. Funktio $f(x) = -x^2 + 5$. Laske
 a) $f(0)$ b) $f(2)$ c) $f(4)$.

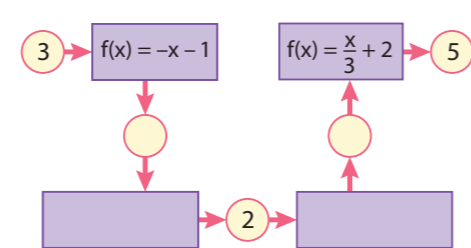
18. Sijoita edellisen funktion arvo seuraavan funktion muuttujan paikalle.



19. Sijoita edellisen funktion arvo seuraavan funktion muuttujan paikalle.

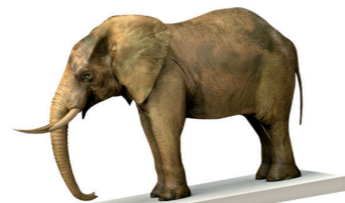
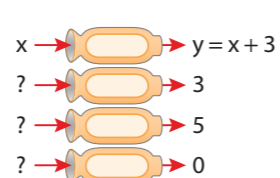


20. Etsi puuttuvat arvot ja funktiot.



Funtion arvo, s. 14–15

21. Päättele, mitkä ovat koneeseen laitetut luvut.



Lisätehtävien vastaukset

12. a) $y = 7x - 7$ b) $y = -x + 3$
 13. $y = -x + 2$
 14. a) 4 b) 10
 15. a) $f(0) = 9$ b) $f(2) = 13$
 c) $f(4) = 17$
 16. a) $f(1) = 1$ b) $f(4) = -14$
 c) $f(-2) = 16$
 17. a) $f(0) = 5$ b) $f(2) = 1$
 c) $f(4) = -11$

18. $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 12 \rightarrow 1$
 19. $-2 \rightarrow 4 \rightarrow -2 \rightarrow 6 \rightarrow 0$
 20. $3 \rightarrow y = -x - 1 \rightarrow -4 \rightarrow$
 $y = -0,5x \rightarrow 2 \rightarrow y = x + 7$
 $\rightarrow 9 \rightarrow y = \frac{x}{3} + 2 \rightarrow 5$
 21. $x \rightarrow y = x + 3$
 $0 \rightarrow 3$
 $2 \rightarrow 5$
 $-3 \rightarrow 0$

L8

Lisätehtäviä

22. Päättelä, mikä on funktiokoneeseen laitettu luku.

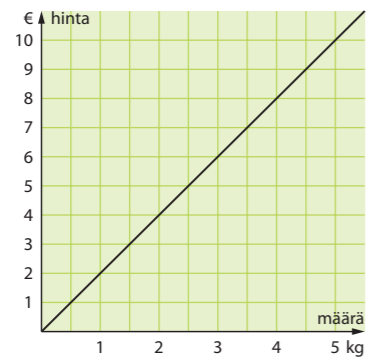
a) ? \rightarrow $y = 2x + 1 \rightarrow 5$

b) ? \rightarrow $y = -4x \rightarrow 12$

23. Funktio $f(x) = 2x + 2$. Laske, millä muuttujan arvolla
 a) $f(x) = 4$ b) $f(x) = -2$ c) $f(x) = 0$.

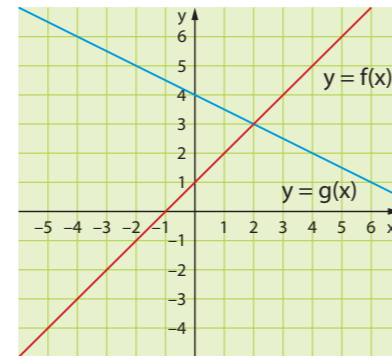
24. Funktio $f(x) = x^2 - 1$. Laske, millä muuttujan arvolla
 a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = -1$ c) $f(x) = 0$.

25. Kuvaaja esittää mansikoiden hinnan riippuvuutta määrästä (kg).
 a) Kuinka paljon maksaa 5 kg mansikoita?
 b) Kuinka paljon mansikoita saa 5 eurolla?
 c) Määritä mansikoiden kilohinta.



26. Kumpi funktio, $f(x) = 2x$ vai $g(x) = x^2$, saa suuremman arvon kun
 a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = 0$?

27. Määritä kuvaajan avulla,
 a) millä muuttujan x arvolla $f(x) = 0$
 b) millä muuttujan x arvolla $g(x) = 4$
 c) millä muuttuja x arvolla $f(x) = g(x)$
 d) $f(5)$ e) $f(-3)$ f) $g(4)$ g) $g(-2)$.



28. Funktion yhtälö on muotoa $y = kx - 2$.
 Määritä k :n arvo ja kirjoita funktion yhtälö, kun tiedetään, että funktio saa arvon -8 muuttujan arvolla 3.

Suoran piirtäminen, s. 16–17

29. Täydennä taulukko vihkoosi. Merkitse pisteet koordinaatistoon ja piirrä pisteiden kautta kulkeva suora.

a) $y = x - 3$

b) $y = -x + 4$

x	y
0	
1	
2	

x	y
0	
1	
2	

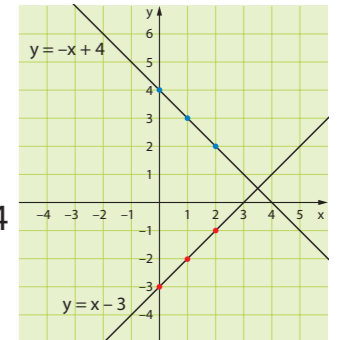
30. Piirrä koordinaatistoon suorat $y = 2x$, $y = 2x + 2$ ja $y = -2x + 2$.

Lisätehtävien vastaukset

22. a) 2 b) -3
 23. a) $x = 1$ b) $x = -2$
 c) $x = -1$
 24. a) $x = \pm 2$ b) $x = 0$
 c) $x = \pm 1$
 25. a) 10 € b) 2,5 kg
 c) 2 €/kg
 26. a) yhtä suuret b) $g(x) = x^2$
 c) yhtä suuret

27. a) $x = -1$ b) $x = 0$
 c) $x = 2$ d) $f(5) = 6$
 e) $f(-3) = -2$ f) $g(4) = 2$
 g) $g(-2) = 5$
 28. $k = -2$, $y = -2x - 2$
 29. a) $y = x - 3$

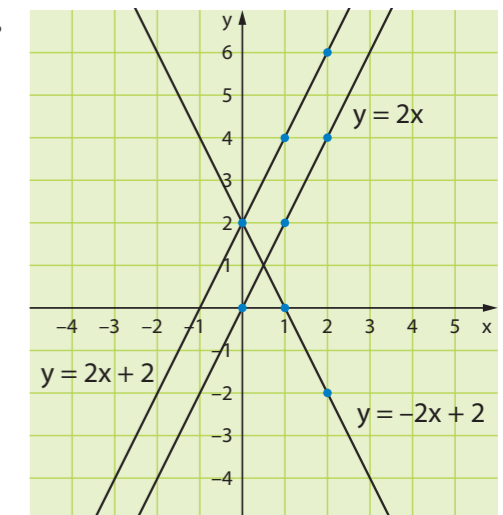
x	y
0	-3
1	-2
2	-1



b) $y = -x + 4$

x	y
0	4
1	3
2	2

30.



L8 Lisätehtäviä

31. Piirrä suora.

◆◇◇ a) $y = 3x - 2$ b) $y = -x$

32. Piirrä suora.

◆◇◇ a) $y = 0,4x - 2$ b) $y = \frac{2}{3}x$

33. Määritä laskemalla arvo vakiotermille

◆◇◇ b siten, että suora $y = 2x + b$ kulkee pisteen (2, 3) kautta.

Suoran piirtäminen, s. 18-19

34. Tee taulukko vihkoosi ja täydennä se.

Suora	Kulma-kerroin	Vakio-termi	Nouseva vai laskeva
$y = 2x - 7$			
$y = -3x + 4$			
$y = -x + 5$			
$y = \frac{2}{3}x - 6$			

35. Ilmoita, onko suora nouseva vai laskeva.

◆◇◇ a) $y = -2x$ b) $y = x + 1$

36. Päättele kuvaajaa piirtämättä, missä pisteessä suora leikkaa y-akselin.

◆◇◇ a) $y = -x - 1$ b) $y = 9x$

37. Määritä piirtämättä sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen (0, 5) kautta ja jonka kulma-kerroin on -3.

38. Piirrä suora.

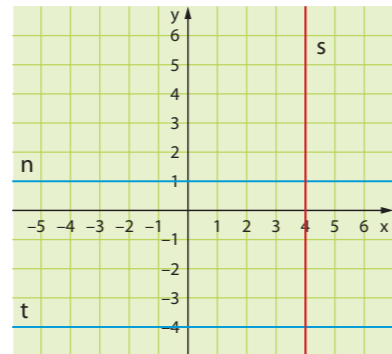
◆◇◇ a) $y = -5x + 1$ b) $y = \frac{1}{4}x - 3$

39. Piirrä suora.

◆◇◇ a) $y = -2\frac{1}{2}x + 2$ b) $y = 0,6x - 1,2$

Akselien suuntaiset suorat, s. 20-21

40. Määritä kuvaajasta suorien n, s ja t yhtälöt.



41. Piirrä suora.

◆◇◇ a) $x = -6$ b) $y = -2$.

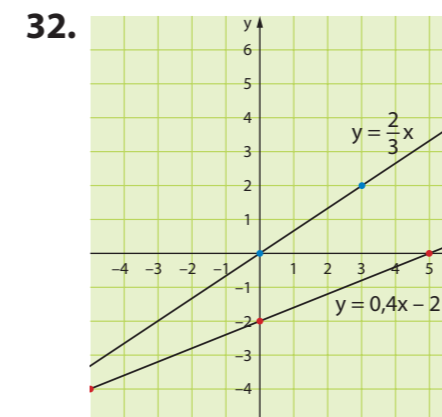
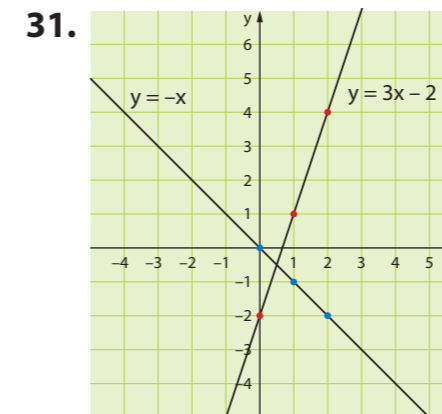
42. Missä pisteessä suorat $x = -5$ ja $y = 3$ leikkaavat toisensa?

43. Mikä on sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen (-2, 4) kautta ja on

◆◇◇ a) x-akselin suuntainen
b) y-akselin suuntainen?

44. Määritä sen suoran yhtälö joka kulkee pisteen (0, 2) kautta ja on suoran $y = 5$ suuntainen.45. Määritä sen suoran yhtälö joka kulkee origon kautta ja on suoran $x = 3$ suuntainen.46. Määritä laskemalla arvo vakiolle k siten, että suora $y = kx + 5$ kulkee pisteen (-3, 5) kautta.

Lisätehtävien vastaukset

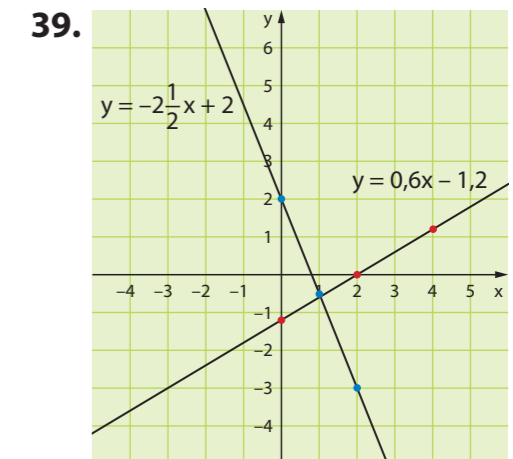
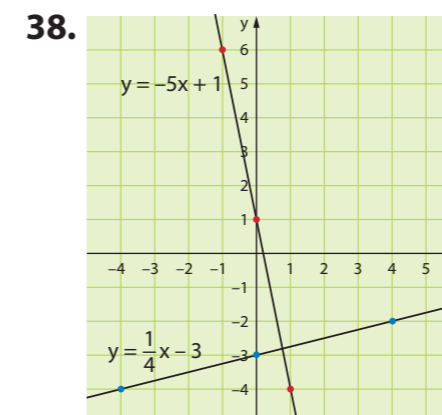
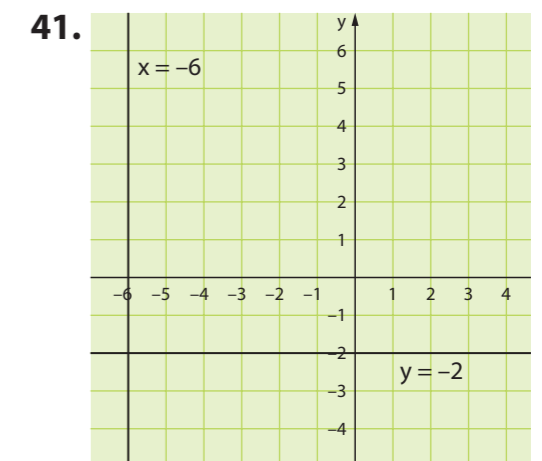
33. $b = -1$

34.

Suora	Kulma-kerroin	Vakio-termi	Nouseva vai laskeva
$y = 2x - 7$	2	-7	nouseva
$y = -3x + 4$	-3	4	laskeva
$y = -x + 5$	-1	5	laskeva
$y = \frac{2}{3}x - 6$	$\frac{2}{3}$	-6	nouseva

35. a) laskeva b) nouseva

36. a) (0, -1) b) (0, 0)

37. $y = -3x + 5$ 40. n: $y = 1$ s: $x = 4$ t: $y = -4$ 

42. (-5, 3)

43. a) $y = 4$ b) $x = -2$ 44. $y = 2$ 45. $x = 0$ 46. $k = 0$

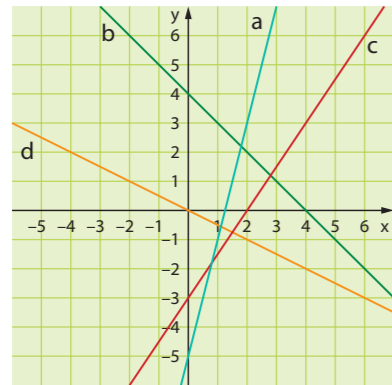
L8

Lisätehtäviä

Suoran yhtälön määrittäminen, s. 22–23

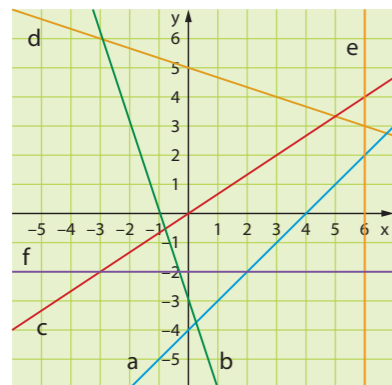
47. Määritä suoran kulmakerroin.

◆◇◇



48. Määritä suoran yhtälö.

◆◇◇



49. Suora kulkee pisteiden (0, 2) ja (2, 0)

◆◇◇ kautta. Piirrä suora ja määritä kuvaajasta sen yhtälö.

50. Origin kautta kulkeva suora kulkee pisteen (3, 5) kautta. Piirrä suora ja määritä sen yhtälö.

◆◇◇

51. Origin kautta kulkeva suora kulkee pisteen (0, 5) kautta. Piirrä suora ja määritä sen yhtälö.

◆◇◇

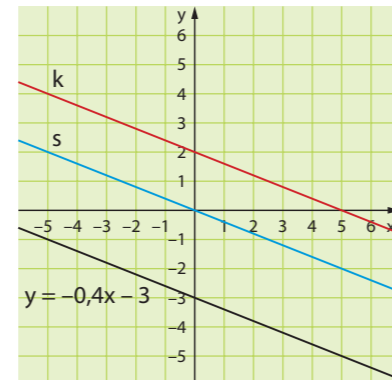
52. Tutki piirtämättä, missä pisteessä suora $4x - y + 17 = 0$ leikkaa y-akselin.

◆◆◆

Suoran yhtälön määrittäminen, s. 24–25

53. Ilmoita suorien s ja k yhtälöt.

◆◇◇

54. Määritä piirtämättä sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen (0, 2) kautta ja jolla on sama kulmakerroin kuin suoralla $y = 0,5x + 1,5$.

◆◇◇

55. Määritä suoran yhtälön vakiotermin arvo, kun suora kulkee pisteen (1, 1) kautta ja sen kulmakerroin on 1.

◆◇◇

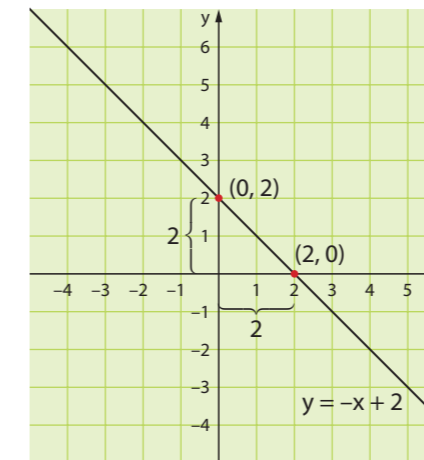
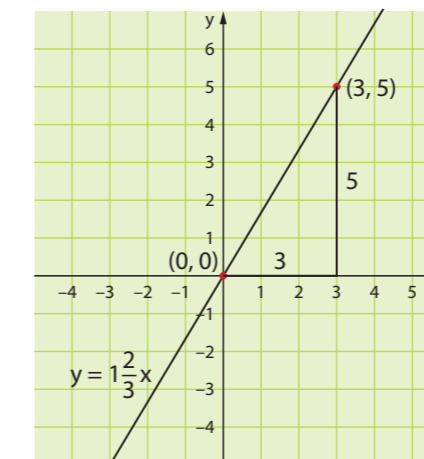
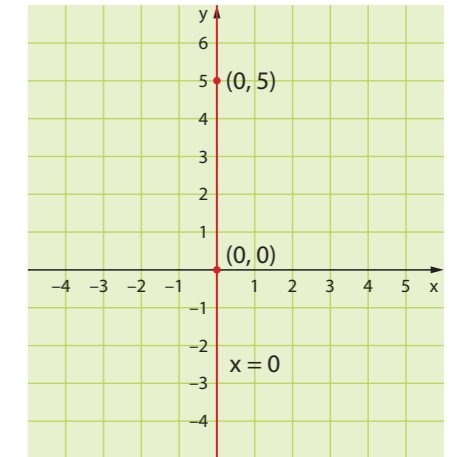
56. Suora kulkee pisteen (4, 2) kautta ja sen kulmakerroin on 2. Määritä suoran yhtälö piirtämättä suoraa.

◆◇◇

57. Suora on yhdensuuntainen suoran $y = 3x - 2$ kanssa ja kulkee pisteen (1, 5) kautta. Määritä suoraa piirtämättä sen yhtälö.

◆◇◇

Lisätehtävien vastaukset

47. a: $k = 4$ b: $k = -1$ c: $k = 1,5$ d: $k = -0,5$ 48. a: $y = x - 4$ b: $y = -3x - 3$ c: $y = \frac{2}{3}x$ d: $y = -\frac{1}{3}x + 5$ 49. $y = -x + 2$ 50. $y = 1\frac{2}{3}x$ 51. $x = 0$ 

52. (0, 17)

53. s: $y = -0,4x$ k: $y = -0,4x + 2$ 54. $y = 0,5x + 2$ 55. $b = 0$ 56. $y = 2x - 6$ 57. $y = 3x + 2$

L8 Lisätehtäviä

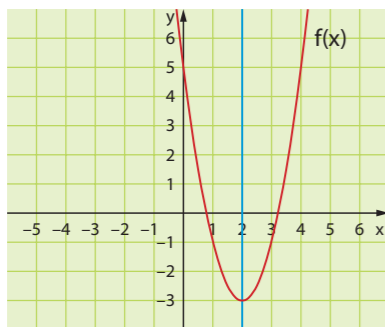
58. Suora kulkee pisteen (4, 3) kautta.
 ◆◆ Määritä laskemalla suoran $y = 0,5x + b$ vakiotermi.
59. Suora kulkee pisteiden (-2, a) ja (b, 4) kautta. Millä a:n ja b:n arvoilla suoran yhtälö on $y = 2x + 2$?
60. Jos kaksi suoraa ovat **kohtisuorassa** toisiaan vastaan, niiden **kulmakertoimien tulo on -1**.
 ◆◆ Määritä suoralle $y = 3x - 2$ pisteen (0, 4) kautta piirretyn normaalin yhtälö.

Paraabeli, s. 26–27

61. Tee taulukko vihkoosi ja täydennä se.

$y = 8x^2$		$y = -8x^2$	
x	y	x	y
2		2	
-2		-2	

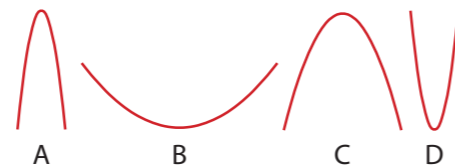
62. a) Ilmoita paraabelin huipun koordinaatit.
 ◆◆ b) Kirjoita paraabelin akselina olevan suoran yhtälö.
 c) Millä muuttujan x arvoilla funktio saa arvon 5?



63. a) Piirrä samaan koordinaatistoon paraabelit $y = 0,5x^2$ ja $y = 2x^2 - 3$.
 ◆◆ b) Väritä paraabelien rajoittama alue.
 c) Ilmoita kahden väritetyllä alueella olevan pisteen koordinaatit.
64. Tutki laskemalla, kulkeeko paraabeli $y = x^2 - 3$ pisteen
 ◆◆ a) (0, 3)
 b) (3, 9)
 c) (9, 3) kautta.
65. Tutki laskemalla, kulkeeko paraabeli $y = 0,7x^2$ pisteen
 ◆◆ a) (5, 7)
 b) (10, 70) kautta.

Paraabeli, s. 28–29

66. Yhdistä paraabelin yhtälö oikeaan kuvioon
 ◆◆
- | | |
|--------------------|-------------------|
| 1 $y = 6x^2 - 3$ | 2 $y = -6x^2 - 3$ |
| 3 $y = 0,2x^2 - 3$ | 4 $y = -x^2 + 3$ |



67. Päättele piirtämättä, aukeaako paraabeli ylös- vai alaspäin.
 ◆◆ a) $y = -24x^2$ b) $y = 40x^2$
 c) $y = -0,8x^2$
68. Päättele piirtämättä, mikä on paraabelin huippu ja mihin suuntaan paraabeli aukeaa.
 ◆◆ a) $y = 15x^2 - 9$ b) $y = -0,6x^2 + 12$
 c) $y = \frac{1}{7}x^2 - 5$

Lisätehtävien vastaukset

58. $b = 1$

59. $a = -2$ ja $b = 1$

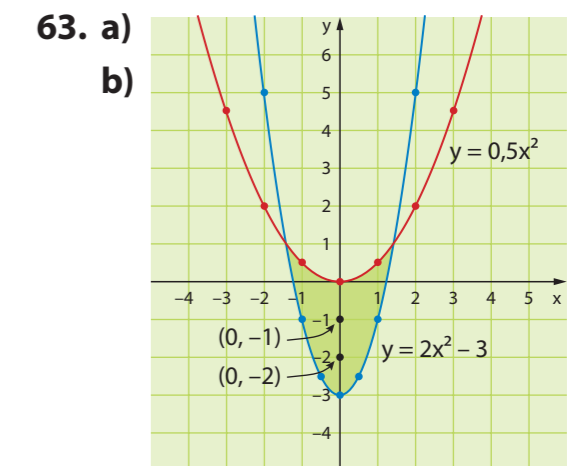
60. $y = -\frac{1}{3}x + 4$

61.

$y = 8x^2$		$y = -8x^2$	
x	y	x	y
2	32	2	-32
-2	32	-2	-32

62. a) (2, -3) b) $x = 2$

c) $x = 0$ ja $x = 4$



c) esim. (0, -2) ja (0, -1)

64. a) ei b) kulkee c) ei

65. a) ei b) kulkee

66. A \leftrightarrow 2

B \leftrightarrow 3

C \leftrightarrow 4

D \leftrightarrow 1

67. a) alaspäin b) ylöspäin

c) alaspäin

68. a) (0, -9), ylöspäin

b) (0, 12), alaspäin

c) (0, -5), ylöspäin

L8

Lisätehtäviä

69. Päättelä paraabelia piirtämättä,
 • mikä on paraabelin huippu
 • mikä on paraabelin akseli
 • mihin suuntaan paraabeli aukeaa,
 kun paraabeli on
 a) $y = -5x^2$ b) $y = 6x^2 + 3$
 c) $y = x^2 - 8$.

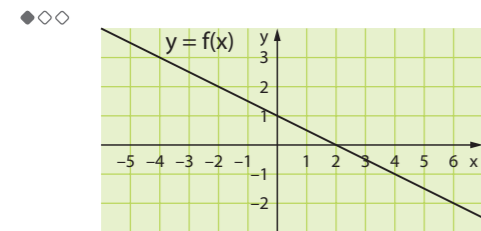
70. Piirrä paraabelin $y = 3x^2 - 3$ kuvaaja.

71. Piirrä paraabelin $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ kuvaaja.

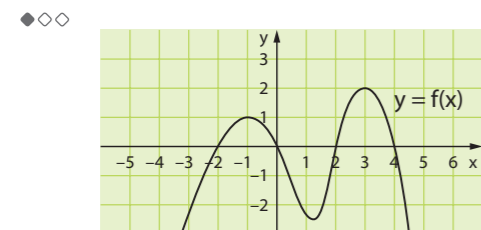
72. Mikä on sen paraabelin yhtälö, jonka huippu on pisteessä $(0, 2)$, akseli on y-akseli ja joka kulkee pisteen $(-1, 0)$ kautta?

Funktion ominaisuuksia, s. 30–31

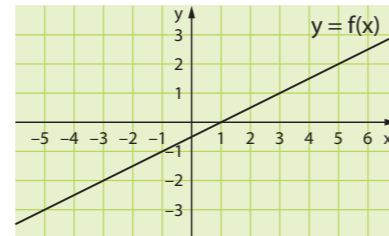
73. Määritä funktion $f(x)$ nollakohta.



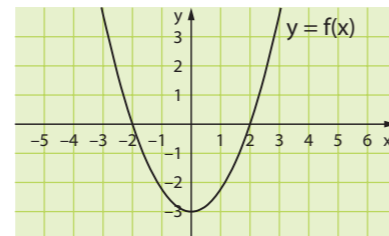
74. Määritä funktion $f(x)$ nollakohdat.



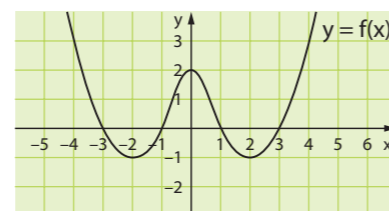
75. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla funktion $f(x)$ arvo on
 a) nolla b) positiivinen
 c) negatiivinen.



76. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla funktion $f(x)$ arvo on
 a) nolla b) positiivinen
 c) negatiivinen.

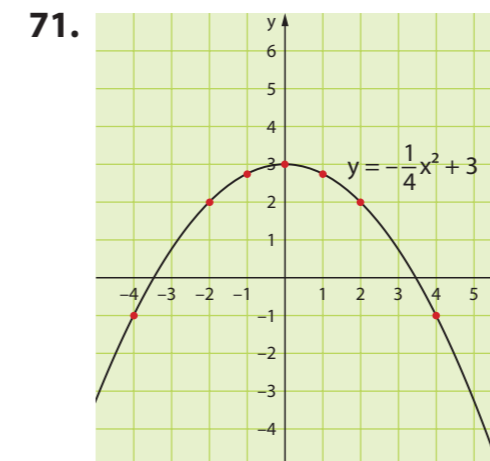
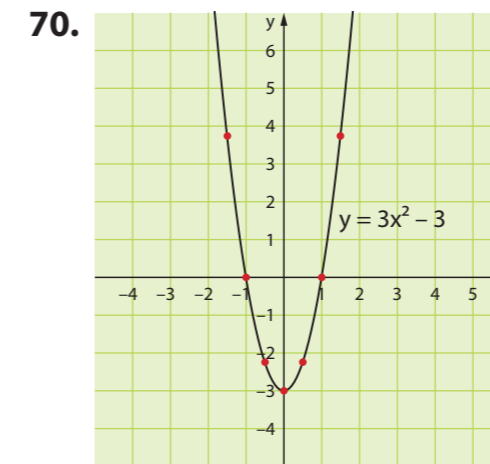


77. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla
 a) $f(x) = 0$ b) $f(x) < 0$
 c) $f(x) > 0$.



Lisätehtävien vastaukset

69. a) $(0, 0)$, $x = 0$, alaspäin
 b) $(0, 3)$, $x = 0$, ylöspäin
 c) $(0, -8)$, $x = 0$, ylöspäin



72. $y = -2x^2 + 2$

73. $x = 2$

74. $x = -2, x = 0, x = 2$ ja $x = 4$

75. a) $x = 1$ b) $x > 1$ c) $x < 1$

76. a) $x = -2$ tai $x = 2$

b) $x < -2$ tai $x > 2$

c) $-2 < x < 2$

77. a) $x = -3, x = -1, x = 1$ tai $x = 3$

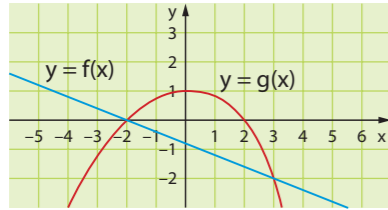
b) $-3 < x < -1$ tai $1 < x < 3$

c) $x < -3, -1 < x < 1$ tai $x > 3$

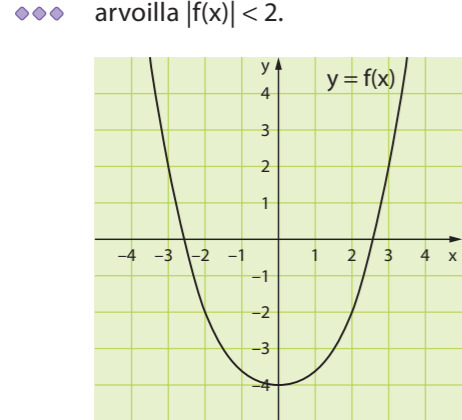
L8 Lisätehtäviä

78. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla

- ◆◇◇ a) $f(x) < 0$ b) $g(x) > 0$
c) $f(x) = g(x)$ d) $f(x) < g(x)$.



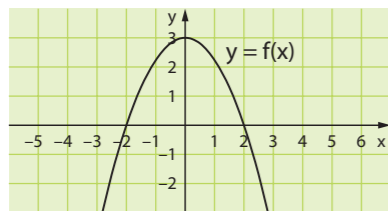
79. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla $|f(x)| < 2$.



Funktio ominaisuuksia, s. 32–33

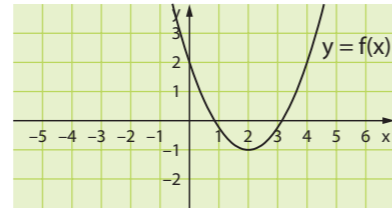
80. Määritä funktion $f(x)$

- ◆◇◇ a) suurin arvo
b) suurin arvo, kun $x \geq 2$
c) pienin arvo
d) pienin arvo välillä $-2 \leq x \leq 2$.



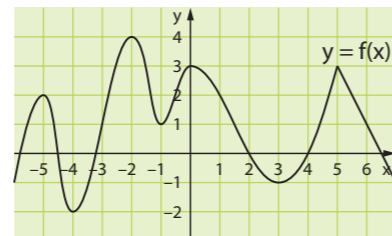
81. a) Määritä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo.

- ◆◇◇ b) Millä muuttujan x arvolla funktio saa pienimmän arvonsa?



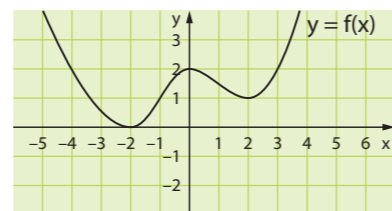
82. Määritä funktion $f(x)$

- ◆◇◇ a) suurin arvo välillä $-6 \leq x \leq 6$
b) pienin arvo välillä $-5 \leq x \leq 5$
c) suurin arvo välillä $-3 \leq x \leq 3$
d) pienin arvo välillä $-2 \leq x \leq 1$.



83. a) Määritä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $-4 \leq x \leq 2$.

- ◆◇◇ b) Millä muuttujan x arvoilla funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä $-4 \leq x \leq 2$?



84. Päättele funktion $f(x) = 2x^2 - 5$ pienin arvo.

◆◇◇

Lisätehtävien vastaukset

78. a) $x > -2$ b) $-2 < x < 2$

c) $x = -2$ tai $x = 3$

d) $-2 < x < 3$

79. $-3 < x < -2$ tai $2 < x < 3$

80. a) 3 b) 0

c) ei ole d) 0

81. Suurinta arvoa ei ole,
pienin arvo on -1 .

82. a) 4 b) -2

c) 4 d) 1

83. a) Suurin arvo on 2, pienin arvo on 0.

b) Suurin on 2, kun $x = 0$ tai $x = -4$.

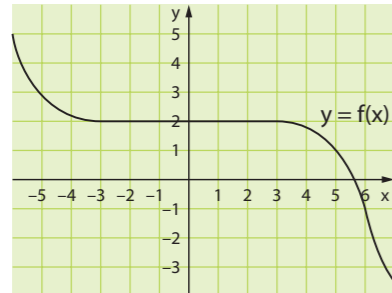
Pienin on 0, kun $x = -2$.

84. -5

L8

Lisätehtäviä

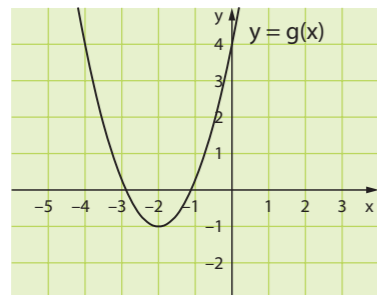
85. a) Määritä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $-2 \leq x \leq 2$.
 b) Millä muuttujan x arvoilla funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä $-2 \leq x \leq 2$?
 c) Määritä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo.



86. Laske tai päättele funktion $f(x) = 3x^2 - 2$
 a) pienin arvo
 b) suurin arvo välillä $-2 \leq x \leq 3$.

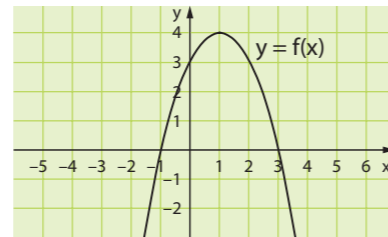
Kasvava ja vähenevä funktio, s. 34–35

87. Millä muuttujan arvoilla funktio $g(x)$ on
 a) kasvava b) vähenevä?

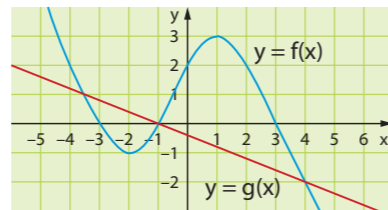


88. Millä muuttujan arvoilla funktio on kasvava?
 a) $f(x) = 2x - 7$
 b) $f(x) = -x + 6$
 c) $f(x) = x^2 - 4$
 d) $f(x) = -2x^2 + 1$

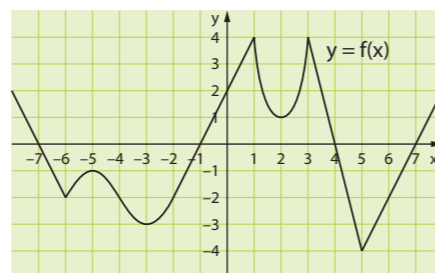
89. Millä muuttujan arvoilla funktio $f(x)$ on
 a) kasvava b) vähenevä?



90. Millä muuttujan arvoilla funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ ovat yhtä aikaa väheneviä?



91. Määritä kuvaajasta
 a) funktion $f(x)$ nollakohdat
 b) millä muuttujan arvoilla funktio $f(x)$ on positiivinen
 c) millä muuttujan arvoilla funktio $f(x)$ on negatiivinen
 d) millä muuttujan arvoilla funktio $f(x)$ on kasvava
 e) millä muuttujan arvoilla funktio $f(x)$ on vähenevä
 f) funktion $f(x)$ suurin arvo välillä $-6 \leq x \leq -2$
 g) funktion $f(x)$ pienin arvo välillä $0 \leq x \leq 3$.



79

Lisätehtävien vastaukset

85. a) suurin arvo 2, pienin arvo 2
 b) Funktiolla ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.
 86. a) -2 b) 25
 87. a) $x > -2$ b) $x < -2$
 88. a) kaikilla b) ei millään
 c) $x > 0$ d) $x < 0$

89. a) $x < 1$ b) $x > 1$
 90. $x < -2$ ja $x > 1$
 91. a) $x = -7, x = -1, x = 4$ ja $x = 7$
 b) $x < -7, -1 < x < 4$ tai $x > 7$
 c) $-7 < x < -1$ tai $4 < x < 7$
 d) $-6 < x < -5, -3 < x < 1, 2 < x < 3$ tai $x > 5$
 e) $x < -7, -5 < x < -3, 1 < x < 2$ tai $3 < x < 5$
 f) -1
 g) 1

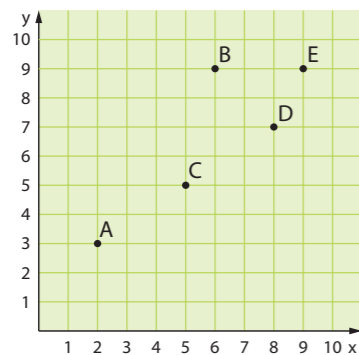
L8 Lisätehtäviä

Verrannollisuus koordinaatistossa, s. 38–39

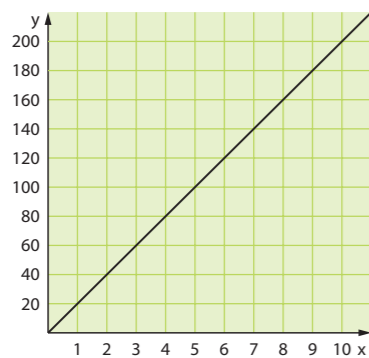
92. Suureet x ja y ovat suoraan verrannolliset. Täydennä taulukko vihkoosi ja piirrä kuvaaja.

Suure x	Suure y
2	4
4	
	10

93. Minkä kahden pisteen kautta voidaan piirtää suora niin että x ja y ovat suoraan verrannollisia?

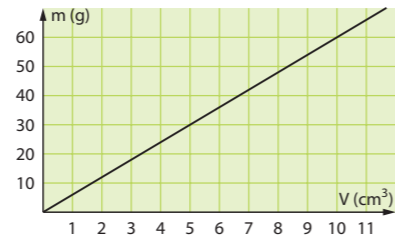


94. a) Määritä suureen y arvo, kun $x = 6$.
 b) Määritä suureen x arvo, kun $y = 180$.
 c) Mikä on verrannollisuuskertoimen arvo?

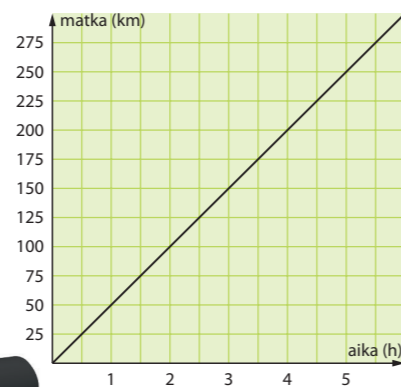


95. Kappaleen massa on suoraan verrannollinen tilavuuteen.
 a) Mikä on kappaleen massa, kun tilavuus on $5,0 \text{ cm}^3$?
 b) Mikä on kappaleen tilavuus, kun massa on 45 g ?
 c) Laske kappaleen tiheys.

$$\rho = \frac{m}{v}$$



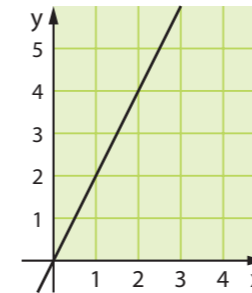
96. Eräällä hitaalla tieosuudella autoilijan kulkema matka (s) riippui ajasta (t) kuvaajan mukaisesti.
 a) Määritä autoilijan nopeus.
 b) Kirjoita yhtälönä kuljetun matkan s riippuvuus ajasta t .
 c) Kuinka pitkän matkan autoilija olisi ajanut 8 tunnissa?



Lisätehtävien vastaukset

92.

Suure x	Suure y
2	4
4	8
5	10



93. C ja E

94. a) $y = 120$ b) $x = 9$ c) 20

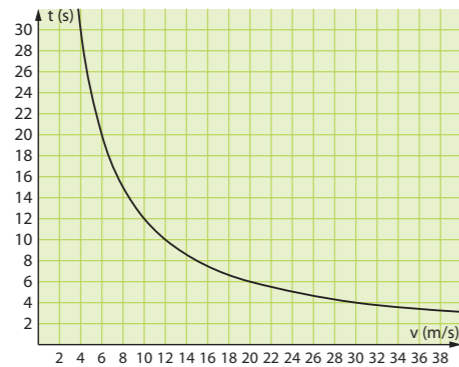
95. a) 30 g b) $7,5 \text{ cm}^3$
 c) $6,0 \text{ g/cm}^3$
 96. a) 50 km/h b) $s = 50t$
 c) 400 km

Verrannollisuus koordinaatistossa, s. 40–41

97. Suureet x ja y ovat kääntäen verrannolliset. Täydennä taulukko vihkoosi ja piirrä kuvaaja.

Suure x	Suure y
3	24
4	
	12

98. Sama matka ajettiin eri nopeuksilla. Ajan ja nopeuden välisestä riippuvuudesta piirrettiin kuvaaja.
- a) Millä nopeudella aikaa kului 8,0 sekuntia?
- b) Mikä oli käytetty aika, kun nopeus oli 30 m/s?
- c) Laske kuljettu matka ($s = vt$).



99. Mitkä suureista nopeus (v), aika (t) ja matka (s) voivat olla keskenään kääntäen verrannollisia?
100. Kääntäen verrannollisten suureiden tulo on 36. Kirjoita riippuvuus muotoa $y = \dots$ olevana yhtälönä.
101. Kolmion pinta-ala on 128 cm^2 . Kirjoita muotoa $a = \dots$ oleva yhtälö, joka esittää kolmion kannan pituuden a riippuvuuden korkeudesta h .

102. Piirrä funktion kuvaaja ($x > 0$).

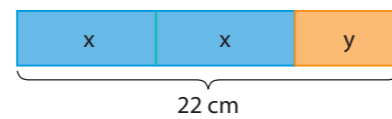
a) $y = \frac{x}{5}$ b) $y = \frac{5}{x}$

Kahden muuttujan yhtälö, s. 42–43

103. Toteutuuko yhtälö $3x + 2y = 5$, kun

a) $x = 1$ ja $y = 1$
 b) $x = 2$ ja $y = \frac{1}{2}$?

104. a) Muodosta kuviosta kahden muuttujan yhtälö.
 b) Tutki, toteutuuko yhtälö, kun $x = 8 \text{ cm}$ ja $y = 6 \text{ cm}$.



105. Kun lukujen x ja y erotus kerrotaan kolmella saadaan 9.
- a) Muodosta kahden muuttujan yhtälö.
 b) Toteutuuko a-kohdan yhtälö, kun $x = 12$ ja $y = 9$?
106. Parkkipaikalla on autoja x kappaletta ja moottoripyöriä y kappaletta. Muodosta kahden muuttujan yhtälö, kun
- a) autoja ja moottoripyöriä on yhteensä 25
 b) autoissa ja moottoripyörissä on renkaita yhteensä 90.
 c) Toteutuvatko a- ja b-kohdan yhtälöt, kun autoja on 20 ja moottoripyöriä 5?



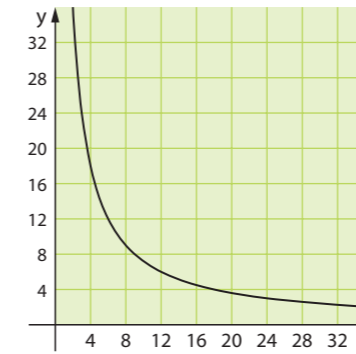
L8

Lisätehtäviä

Lisätehtävien vastaukset

97.

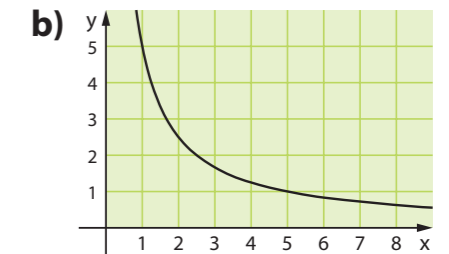
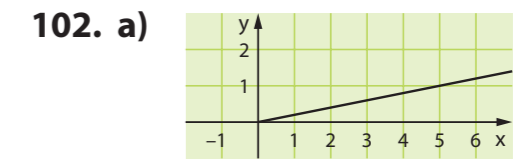
Suure x	Suure y
3	24
4	18
6	12



98. a) 15 m/s b) 4 s c) 120 m
99. Kun matka on vakio, nopeus ja aika.

100. $y = \frac{36}{x}$

101. $a = \frac{256}{h}$



103. a) toteutuu b) ei toteudu
104. a) $2x + y = 22$ b) toteutuu
105. a) $3(x - y) = 9$ b) toteutuu
106. a) $x + y = 25$
 b) $4x + 2y = 90$
 c) toteutuvat

L8 Lisätehtäviä

Yhtälöpari, s. 44–45

107. Toteuttaako lukupari (5,11)

- ◆◆◆ a) yhtälön $y = 2x + 1$
 b) yhtälön $y = 3x - 4$

c) yhtälöparin $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$?

108. Mikä lukupareista on yhtälöparin

◆◆◆ $\begin{cases} 2x - 4y = 8 \\ -x + y = -7 \end{cases}$ ratkaisu?

A $\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$ B $\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$

C $\begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$ D $\begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$

109. Täydennä yhtälöpari $\begin{cases} x + y = \square \\ x - y = \square \end{cases}$

niin, että sen ratkaisu

on $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$.

110. Yhtälöpari $\begin{cases} y = ax - 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ toteutuu,kun $x = 2$. Ratkaise vakion a ja muuttujan y arvo.111. Tutki, onko lukupari $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

yhtälöparin ratkaisu.

a) $\begin{cases} y = x + \frac{1}{6} \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x + 9y = 8 \end{cases}$

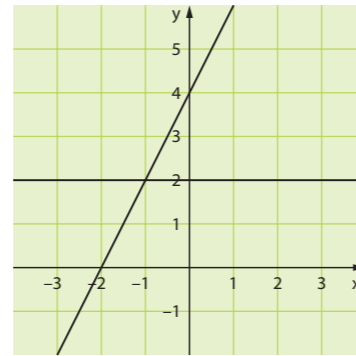
Graafinen ratkaiseminen, s. 46–47

112. Tutki kuvaajien avulla, toteuttaako

◆◆◆ piste $(-1, 2)$

- a) yhtälön $y = 2$
 b) yhtälön $y = 2x + 4$

c) yhtälöparin $\begin{cases} y = 2 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$.



Ratkaise yhtälöpari graafisesti.

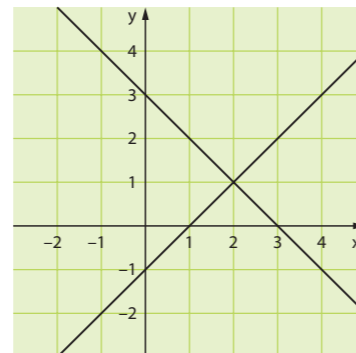
◆◆◆ 113. a) $\begin{cases} y = -1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

◆◆◆ 114. a) $\begin{cases} y = -2x - 4 \\ y = x - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$

◆◆◆ 115. a) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 3x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$

116. a) Kirjoita kuviota vastaava yhtälöpari.

◆◆◆ b) Mikä on yhtälöparin ratkaisu?



Lisätehtävien vastaukset

107. a) toteuttaa b) toteuttaa

c) toteuttaa

108. C

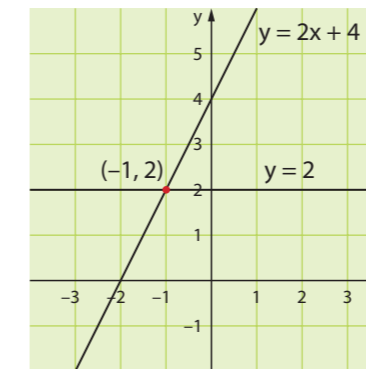
109. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

110. $y = 5$ ja $a = 4$

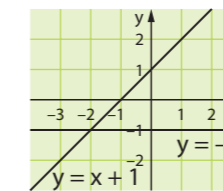
111. a) on b) on

112. a) toteuttaa b) toteuttaa

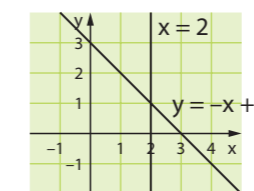
c) toteuttaa



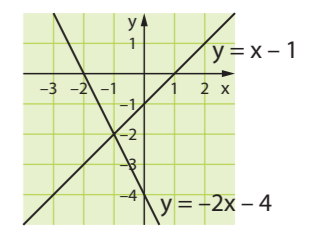
113. a) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$



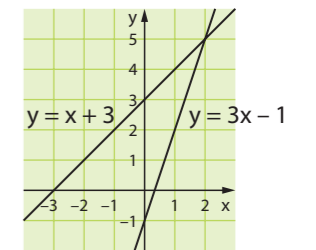
b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$



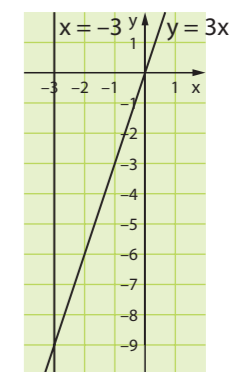
114. a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$



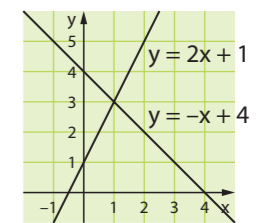
b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$



115. a) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -9 \end{cases}$



b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$



116. a) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

L8

Lisätehtäviä

117. Ratkaise graafisesti, millä vakioiden a ja b arvoilla yhtälöparilla
- $$\begin{cases} ax + 2by + 6 = 0 \\ bx - 2ay + 3b = 0 \end{cases}$$
- on ratkaisuna piste (3, 3).
Vihje: Käytä ab-koordinaatistoa.

Graafinen ratkaiseminen, s. 48–49

118. Tutki graafisesti, kuinka monta ratkaisua on yhtälöparilla

a) $\begin{cases} y = 4x + 3 \\ y = -3x + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = -3x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

119. Tutki yhtälöparin ratkaisujen lukumäärää piirtämättä kuvaajia.

a) $\begin{cases} y = 42x + 5 \\ y = 42x - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -6x + 12 \\ y = -6x + 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 14x + y = 7 \\ y + 7 = -14x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 14x + y - 2 = 0 \\ y - 14x + 2 = 0 \end{cases}$

120. Täydennä yhtälöpari $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \square x + 4 \end{cases}$ niin, että sillä ei ole yhtään ratkaisua.

121. Mikä on vakion b arvo, kun yhtälöparilla $\begin{cases} y = bx + 3 \\ y = -5x + 3 \end{cases}$ on
- a) nolla ratkaisua
b) äärettömän monta ratkaisua
c) yksi ratkaisu?

122. Määritä k ja b siten, että yhtälöparilla $\begin{cases} y - kx = 5 \\ 2y - 3x = b \end{cases}$ on
- a) äärettömän monta ratkaisua
b) ratkaisuna lukupari (2, 4).

Algebraalinen ratkaiseminen, s. 50–51

Ratkaise yhtälöpari algebraalisesti.

123. a) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -4x + 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -x - 3 \end{cases}$

124. a) $\begin{cases} 7x - 12y = 13 \\ y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

125. a) $\begin{cases} x - 12y = 22 \\ y = x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 4x \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$

126. a) $\begin{cases} x = 3y \\ y = x + 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 14 \\ -x + y = 2 \end{cases}$

127. a) $\begin{cases} 5x - y + 2 = 0 \\ 2x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

128. Ratkaise algebraalisesti, millä vakioiden a ja b arvoilla yhtälöparilla $\begin{cases} ax + by - 3 = 0 \\ 4x - 2ay + b = 0 \end{cases}$ on ratkaisuna piste (1, 1).

Algebraalinen ratkaiseminen, s. 52–53

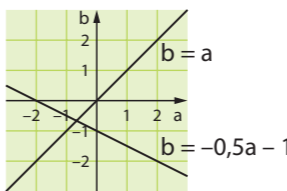
Ratkaise algebraalisesti.

129. a) $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 3y = 6 \\ x + y = 6 \end{cases}$

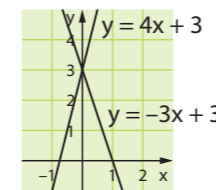
130. a) $\begin{cases} 5x - 2y = 20 \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -6x - 3y = 9 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$

83

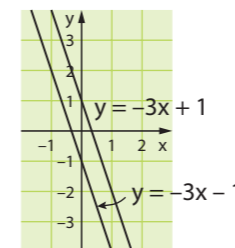
Lisätehtävien vastaukset

117. $\begin{cases} a = -0,7 \\ b = -0,7 \end{cases}$ 

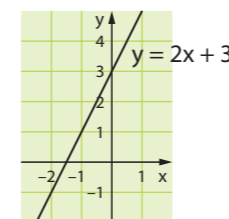
118. a) yksi



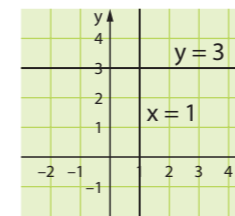
- b) ei yhtään



- c) äärettömän monta



- d) yksi



119. a) ei yhtään b) ei yhtään
c) ei yhtään d) yksi ratkaisu

120. $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

121. a) ei millään b:n arvolla
b) $b = -5$ c) $b \neq -5$

122. a) $k = 1,5$ ja $b = 10$
b) $k = -0,5$ ja $b = 2$

123. a) $\begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = 4\frac{1}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$

124. a) $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

125. a) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

126. a) $\begin{cases} x = -12 \\ y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$

127. a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1\frac{4}{11} \\ y = 1\frac{3}{11} \end{cases}$

128. a) $\begin{cases} a = 2\frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$

129. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

130. a) $\begin{cases} x = 8 \\ y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -2,5 \\ y = 2 \end{cases}$

L8 Lisätehtäviä

$$131. \text{ a) } \begin{cases} 8x + 3y = -13 \\ -3x + 2y = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 4y = 14 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$132. \text{ a) } \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 6x + 8y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

133. Ratkaise suorien leikkauspiste.

$$\text{a) } \begin{cases} -3x + 10y = 2 \\ 4x + 9y = 42 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - 8y = 42 \\ 7x + 3y = 33 \end{cases}$$

Algebraalinen ratkaiseminen, s. 54–55

Ratkaise yhtälöpari

$$134. \text{ a) } \begin{cases} x = 2y \\ x + 2y = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$135. \text{ a) } \begin{cases} -x - y = 1 \\ x - 5y = -13 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x - 2y = -6 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$$

$$136. \text{ a) } \begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 7x + 3y = 12 \\ 3x + 4y = 16 \end{cases}$$

$$137. \text{ a) } \begin{cases} 2x + 7y = 8 \\ 2x = -7y + 22 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x - 3y = 13 \\ 3x + 7y = 19 \end{cases}$$

138. Millä vakion a arvoilla yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua?

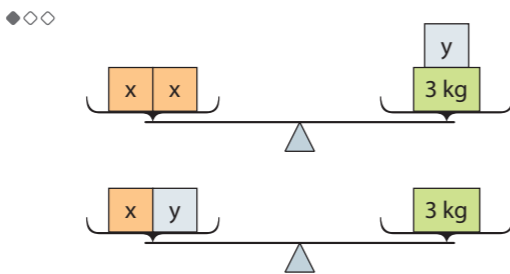
$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ bx + (a + 1)y = 5 \end{cases}$$



Sovelluksia, s. 56–57

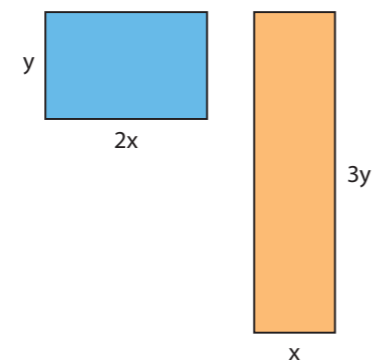
Ratkaise tehtävät yhtälöparin avulla.

139. Kirjoita yhtälöpari ja laske massat x ja y .



140. Marjaanan ja Elisan pituuksien summa on 290 cm. Pituuksien erotus on 20 cm. Laske tyttöjen pituudet, kun Marjaana on pidempi.

141. Sinisen suorakulmion piiri on 40 cm ja oranssin 60 cm. Laske suorakulmioiden sivujen pituudet.



142. Koriste-esineen tekemiseen tarvitaan $1,2 \text{ dm}^3$ kuparia ja $0,88 \text{ dm}^3$ sinkkiä, jolloin esineen massa on 17 kg. Kun tehdään koriste-esine, johon käytetään $0,70 \text{ dm}^3$ kuparia ja $0,52 \text{ dm}^3$ sinkkiä, saadaan esineen massaksi 10 kg. Laske tietojen perusteella kuparin ja sinkin tiheys.

Lisätehtävien vastaukset

$$131. \text{ a) } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$132. \text{ a) } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$133. \text{ a) } \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 6 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$134. \text{ a) } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$135. \text{ a) } \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

b) kaikki suoran $y = 2x + 3$ pisteet

$$136. \text{ a) } \begin{cases} x = 46 \\ y = -12 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$137. \text{ a) ei ratkaisua } \quad \text{b) } \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$138. \begin{cases} a = -2\frac{1}{4} \\ b = 3\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$139. \begin{cases} 2x = y + 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$x = 2 \text{ kg}$ ja $y = 1 \text{ kg}$

140. Marjaana 155 cm ja Elisa 135 cm

141. 8 cm ja 12 cm sekä 6 cm ja 24 cm

142. kuparin tiheys $5,0 \text{ kg/dm}^3$ ja sinkin $12,5 \text{ kg/dm}^3$

- 143.** Katariina ja Leevi asuvat saman tien varrella 820 metrin päässä toisistaan. He sopivat lähtevänsä samaan aikaan kävelemään toisiaan vastaan tietä pitkin. Tutki, miten kummankin etäisyys (x) Leevin kodista riippuu ajasta (t). Kirjoita paikkaa kuvaavat yhtälöt. Ratkaise, kuinka kaukana Leevin kodista he kohtaavat ja missä ajassa. Leevi liikkuu 80 m/min ja Katariina 60 m/min.

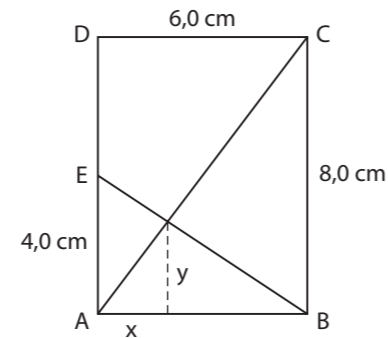
Sovelluksia, s. 58–59

- 144.** Kahden luvun summa on 25. Kun ensimmäinen kerrotaan kahdella, saadaan kolme kertaa toinen luku. Määritä luvut.
- 145.** Jos luku x kerrotaan kahdella ja tuloon lisätään y , saadaan 22. Jos luku x kerrotaan kolmella ja tuloon lisätään y , saadaan 27. Määritä luvut x ja y .
- 146.** Maijun auto maksoi 2500 € enemmän kuin Millan auto. Autot maksoivat yhteensä 50 500 €. Laske kummankin auton hinta.
- 147.** Perheravintola Sapuskassa kävi eräänä päivänä lounaalla 60 henkeä. Liikevaihto oli 540 €. Laske, kuinka monta lasta ja aikuista ravintolassa lounasti.

LOUNAS
Lapset 7,00 €
Aikuiset 12,00 €

- 148.** Kahden luvun erotus on 10 ja keskiarvo 25. Määritä luvut.

- 149.** Veeti sanoi Urholle: "Kolme vuotta sitten olin vielä neljä kertaa niin vanha kuin sinä, mutta kolmen vuoden kuluttua olen enää kolme kertaa niin vanha kuin sinä." Kuinka vanhoja Veeti ja Urho ovat tällä hetkellä?
- 150.** Laske yhtälöparin avulla janojen AC ja BE leikkauspiste. Vihje: Origo kannattaa sijoittaa pisteeseen A.



- 151.** Kolminumeroinen luvun viimeinen numero on 3. Luvun numeroiden summa on 7. Kun luvun numeroiden paikkaa vaihdetaan kuvan mukaisesti, saadaan alkuperäisen ja uuden luvun summaksi 785. Määritä x ja y .

x y 3

y 3 x



Lisätehtävien vastaukset

- 143.** Leevi: $y = 80t$
Katariina: $y = 820 - 60t$
Aikaa kuluu noin 6 minuuttia ja matkaa on 470 metriä Leeville.
- 144.** 15 ja 10
- 145.** 5 ja 12
- 146.** Maijun auto 26 500 € ja Millan 24 000 €.
- 147.** 36 lasta ja 24 aikuista
- 148.** 30 ja 20

- 149.** Veeti 51 v. Urho 15 v.

$$150. \begin{cases} x = 2 \\ y = 2\frac{2}{3} \end{cases}$$

- 151** $x = 2$ ja $y = 5$

K8 Kotitehtäviä

Funktio, s. 8–9

1. Mistä tekijöistä sinun kännykkälaskusi suuruus riippuu?
◆◆◆
2. Muodosta parit, joiden välillä on riippuvuus.
◆◆◆
- | | | | |
|---------------------|---|---|---------|
| mopon jarrutusmatka | A | 1 | määrä |
| tilavuus | B | 2 | rakkaus |
| hintaa | C | 3 | nopeus |
| rikkaus | D | 4 | paino |
3. Irtokarkit maksavat 6,80 €/kg.
◆◆◆ a) Kuinka paljon karkkia saa 2 eurolla?
b) Kuinka paljon maksaa 250 g karkkeja?

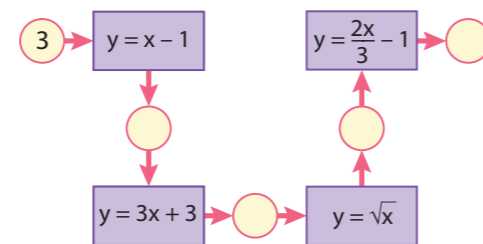
Funktio, s. 10–11

4. Etsi sääntö, jonka mukaan kone muuttaa lukuja. Esitä sääntö yhtälönä.
◆◆◆
- | | |
|----------|-----------|
| a) 2 → 1 | b) 2 → -1 |
| 4 → 2 | 4 → 0 |
| 6 → 3 | 6 → 1 |
| 8 → 4 | 8 → 2 |
| x → y | x → y |
5. Kirjoita esimerkki funktiomerkinästä, jossa muuttujakirjain on a ja funktiota on merkitty kirjaimella h.
◆◆◆
6. Muodosta yhtälö, kun luku y on kaksi kertaa niin suuri kuin luku x.
◆◆◆

7. Yksi tuuma on noin 2,5 cm. Muodosta yhtälö, jolla tuumamitat muutetaan senttimetreiksi.
◆◆◆

Funktion arvo, s. 12–13

8. Funktio $f(x) = x + 9$. Laske
◆◆◆ a) $f(0)$ b) $f(2)$ c) $f(-4)$.
9. a) Mikä merkinnässä $f(7) = 3$ on muuttujan arvo ja mikä funktion arvo?
◆◆◆ b) Esitä vastaavanlaisena merkintänä "muuttujan arvolla 9 funktio g saa arvon -7".
10. Sijoita edellisen funktion arvo seuraavan funktion muuttujan paikalle.
◆◆◆



11. Funktion f arvo on kolme kertaa muuttujan x arvo. Muodosta funktio $f(x)$ ja laske
◆◆◆ a) $f(2)$ b) $f(0)$ c) $f(-1)$.
12. Neliön piiri p riippuu neliön sivun pituudesta a. Muodosta funktio $p(a)$ ja laske
◆◆◆ a) $p(1 \text{ cm})$ b) $p(5 \text{ m})$.

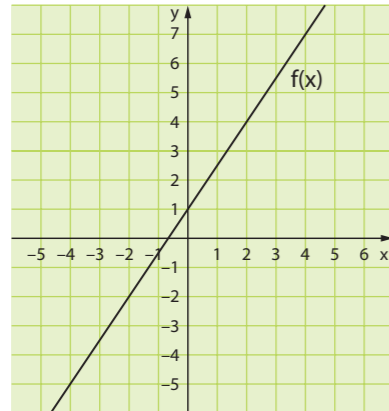


Kotitehtävien vastaukset

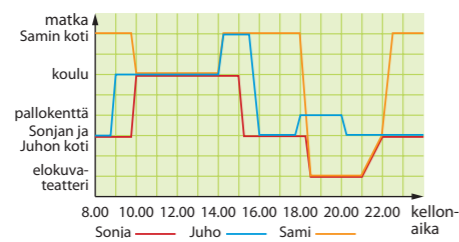
1. esimerkiksi puheajasta, sopimuksesta, maasta
2. A $\leftarrow \rightarrow$ 3
B $\leftarrow \rightarrow$ 1
C $\leftarrow \rightarrow$ 1
C $\leftarrow \rightarrow$ 4
3. a) 290 g
b) 1,70 €
4. a) $y = x : 2$
b) $y = x : 2 - 2$
5. $h(a)$
6. $y = 2x$
7. $y = 2,5 \text{ cm} \cdot x$
8. a) $f(0) = 9$
b) $f(2) = 11$
c) $f(-4) = 5$
9. a) muuttujan arvo on 7, funktion arvo on 3
b) $g(9) = -7$
10. $3 \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1$
11. $f(x) = 3x$
a) $f(2) = 6$
b) $f(0) = 0$
c) $f(-1) = -3$
12. $p(a) = 4a$
a) $p(1 \text{ cm}) = 4 \text{ cm}$
b) $p(5 \text{ m}) = 20 \text{ m}$

Funktio arvo, s. 14–15

13. Funktio $f(x) = -x + 4$. Millä muuttujan x arvolla funktio saa arvon
 a) 4 b) 0 c) -3?
14. Määritä kuvaajan avulla
 a) $f(2)$ b) $f(-2)$ c) $f(0)$
 d) millä muuttujan x arvolla $f(x) = -5$
 e) millä muuttujan x arvolla $f(x) = 7$.



15. Sonja ja Juho ovat sisaruksia ja Sami heidän ystävänsä. Kuvaaja esittää heidän yhteistä päiväänsä.



- a) Mihin aikaan Juhon koulu alkoi?
 b) Kuinka pitkä oli Sonjan koulupäivä?
 c) Minne Juho meni heti koulun jälkeen?
 d) Kuinka kauan Sami oli iltapäivällä kotona?
 e) Missä Juho oli klo 19.00?
 f) Ketkä kävivät yhdessä elokuvissa?
 g) Kuinka kauan elokuva kesti?

16. Funktio $f(x) = 2x$ ja $g(x) = x + 2$.
 Laske, millä muuttujan x arvolla $f(x) = g(x)$.
17. Funktio $f(x) = x^2 + x$ ja $g(x) = x + 4$.
 Laske, millä muuttujan x arvolla $f(x) = g(x)$.

Suoran piirtäminen, s. 16–17

18. Onko funktion kuvaaja suora?
 a) $y = 4x + 1$ b) $y = 2x^2 + 0,5$
 c) $y = 0,8x - 1$ d) $y = \frac{5}{7}x + 1$

19. a) Esitä yhtälönä sääntö, jonka mukaan taulukon y :n arvot on laskettu x :n arvoista.

x	0	1	2	3
y	-2	-1	0	1

- b) Merkitse (x, y) -pisteet koordinaatistoon ja piirrä yhtälön kuvaaja.

20. Piirrä suora.
 a) $y = x - 5$ b) $y = \frac{1}{4}x + 3$
 Missä pisteessä suora leikkaa y -akselin?

Suoran piirtäminen, s. 18–19

21. Tee taulukko vihkoosi ja täydennä se.

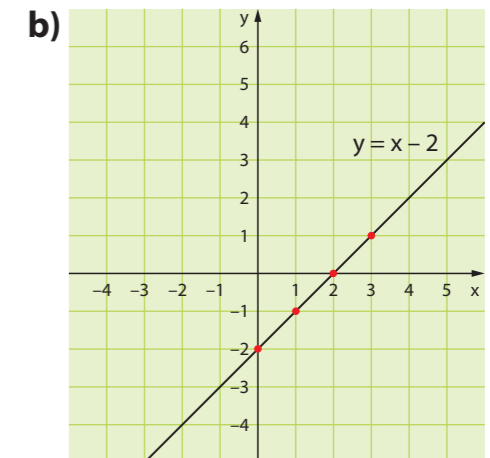
Suora	Kulma-kerroin	Vakio-termi	Nouseva vai laskeva
$y = x + 9$			
$y = -x + 7$			
$y = -2x - 1$			
$y = \frac{4}{7}x - \frac{1}{2}$			

87

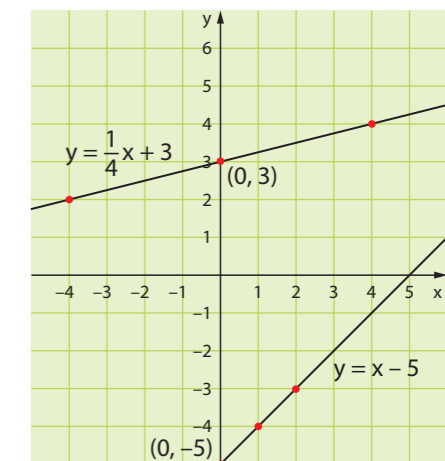
Kotitehtävien vastaukset

13. a) $x = 0$
 b) $x = 4$
 c) $x = 7$
14. a) $f(2) = 4$
 b) $f(-2) = -2$
 c) $f(0) = 1$
 d) $x = -4$
 e) $x = 4$
15. a) 9.00
 b) 5 tuntia
 c) Samin kotiin
 d) 3 h 45 min
 e) pallokentällä
 f) Sonja ja Sami
 g) 2 h 30 min

16. $x = 2$
 17. $x = \pm 2$
 18. a) on
 b) ei
 c) on
 d) on
 19. a) $y = x - 2$



20. a) $(0, -5)$
 b) $(0, 3)$



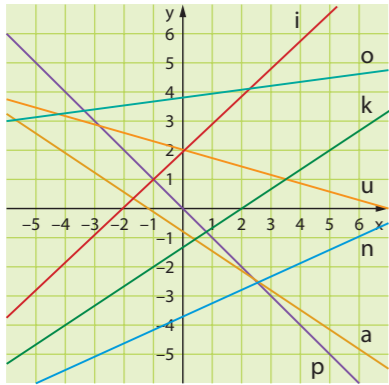
21.

Suora	Kulma-kerroin	Vakio-termi	Nouseva vai laskeva
$y = x + 9$	1	9	nouseva
$y = -x + 7$	-1	7	laskeva
$y = -2x - 1$	-2	-1	laskeva
$y = \frac{4}{7}x - \frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{2}$	nouseva

K8 Kotitehtäviä

22. Päättelä kuvaajaa piirtämättä, missä pisteessä suora leikkaa y-akselin.
 ◆◇◇ a) $y = 2x - 3$ b) $y = -3x + 4$
 c) $y = x$ d) $y = -4x + 9$

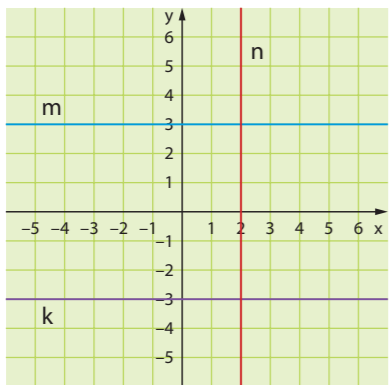
23. Kirjoita nousevien suorien kirjaimet loivimmasta jyrkimpään. Mikä sana muodostuu?



24. Piirrä suora.
 ◆◇◇ a) $y = 4x - 5$ b) $y = -0,5x + 4$

Akselien suuntaiset suorat, s. 20–21

25. Määritä kuvaajasta suorien k, m ja n yhtälöt.
 ◆◇◇



26. Piirrä koordinaatistoon suorat
 ◆◇◇ a) $y = 4$ b) $y = 0$ c) $x = -2$.

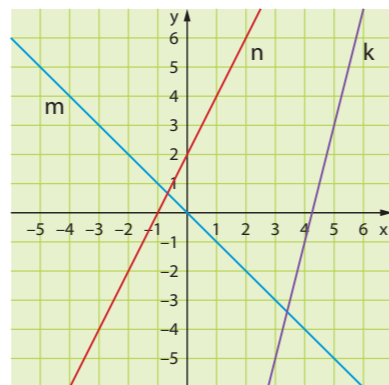
88

27. a) Piirrä koordinaatistoon suora joka kulkee pisteiden (3, 2) ja (-2, 2) kautta.
 ◆◇◇ b) Ilmoita suoran yhtälö.

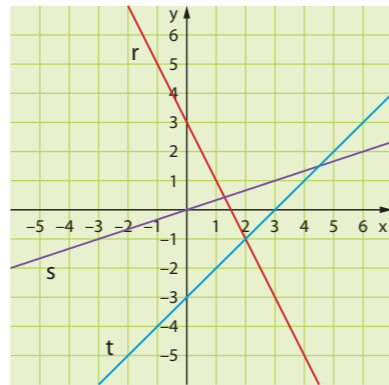
28. a) Piirrä koordinaatistoon suora joka kulkee pisteen (3, 2) kautta ja on suoran $y = 1$ suuntainen.
 ◆◇◇ b) Ilmoita suoran yhtälö.

Suoran yhtälön määrittäminen, s. 22–23

29. Määritä kuvaajasta suorien k, m ja n kulmakertoimet.
 ◆◇◇



30. Määritä suoran yhtälö.
 ◆◇◇

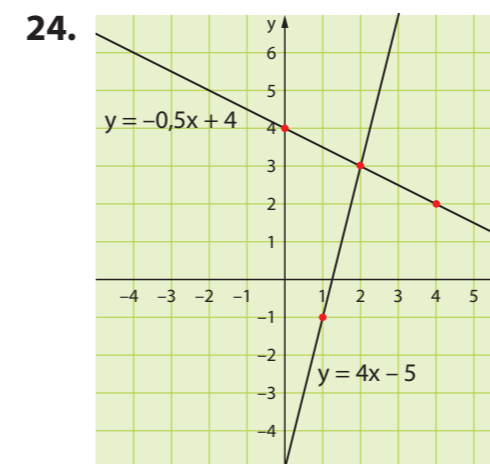


31. Suora kulkee origon ja pisteen (-3, -3) kautta. Piirrä suora ja määritä sen yhtälö.
 ◆◇◇

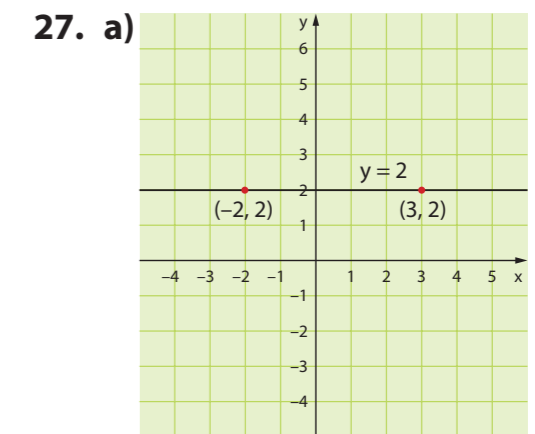
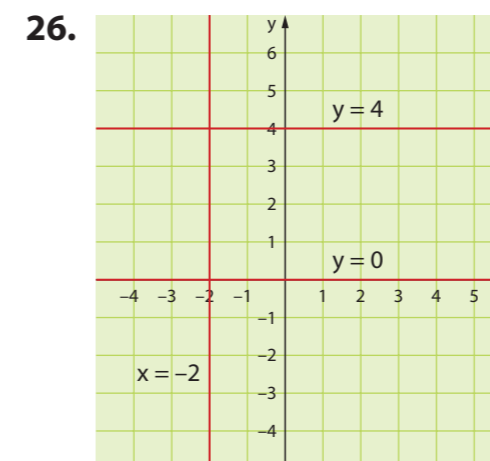
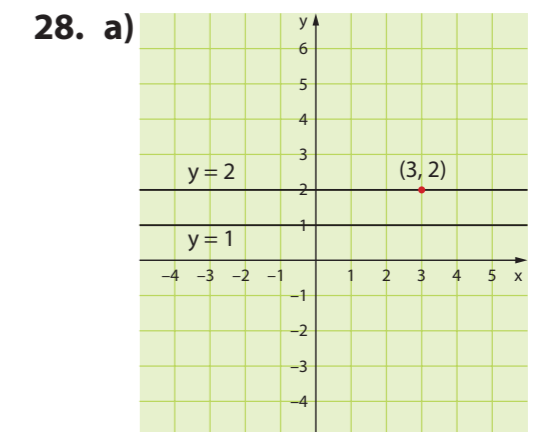
Kotitehtävien vastaukset

22. a) (0, -3)
 b) (0, 4)
 c) (0, 0)
 d) (0, 9)

23. onki

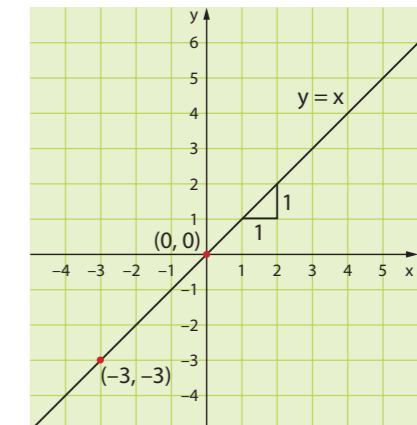


25. k: $y = -3$
 m: $y = 3$
 n: $x = 2$

b) $y = 2$ b) $y = 2$

29. k: $k = 4$
 m: $k = -1$
 n: $k = 2$

30. r: $y = -2x + 3$
 s: $y = \frac{1}{3}x$
 t: $y = x - 3$

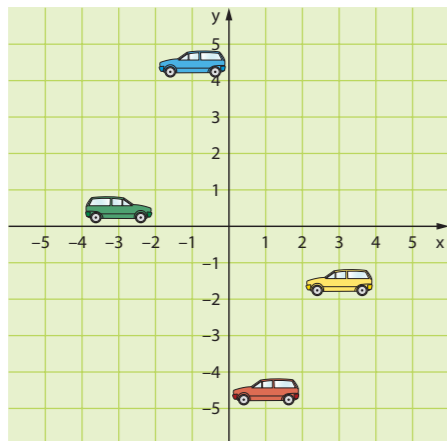
31. $y = x$ 

Suoran yhtälön määrittäminen, s. 24–25

- 32.** Suora kulkee pisteen (0, 3) kautta ja sen kulmakerroin on 1. Määritä suoran yhtälö piirtämättä suoraa.
- 33.** Suora on yhdensuuntainen suoran $y = 8x + 7$ kanssa ja kulkee pisteen (0, -5) kautta. Määritä suoraa piirtämättä sen yhtälö.
- 34.** Määritä piirtämättä sen suoran yhtälö, joka on suoran $y = 4x - 1$ suuntainen ja kulkee pisteen (1, 6) kautta.
- 35.** Määritä piirtämättä sen suoran yhtälö, joka on suoran $y = \frac{2}{3}x$ suuntainen ja kulkee pisteen (3, 5) kautta.

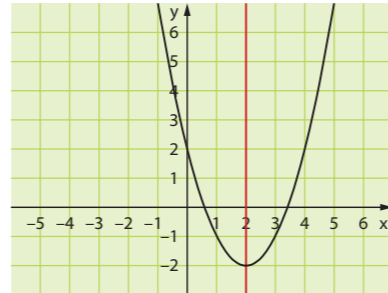
Paraabeli, s. 26–27

- 36.** a) Päättele piirtämättä, mikä kuvan autoista jää paraabelin $y = -x^2$ ja suoran $y = -5$ rajoittaman alueen sisään.
- b) Piirrä paraabeli $y = -x^2$ ja suora $y = -5$ samaan koordinaatistoon. Valitsitko oikean auton?
- c) Määritä kuvaajan avulla paraabelin ja suoran leikkauspisteet.

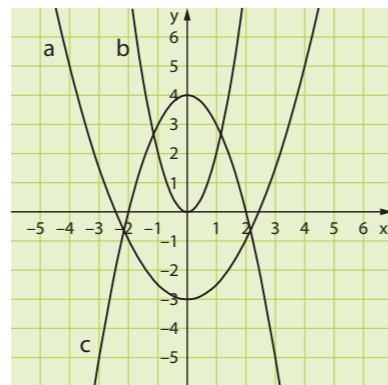


- 37.** Piirrä samaan koordinaatistoon paraabelit $y = x^2 - 6$ ja $y = -x^2 + 5$.

- 38.** a) Ilmoita paraabelin huipun koordinaatit.
b) Kirjoita paraabelin akselina olevan suoran yhtälö.

**Paraabeli, s. 28–29**

- 39.** Minkä paraabelin yhtälö on
a) $y = -x^2 + 4$
b) $y = 0,5x^2 - 3$
c) $y = 2x^2$?



89

Kotitehtävien vastaukset

32. $y = x + 3$

33. $y = -2x - 2$

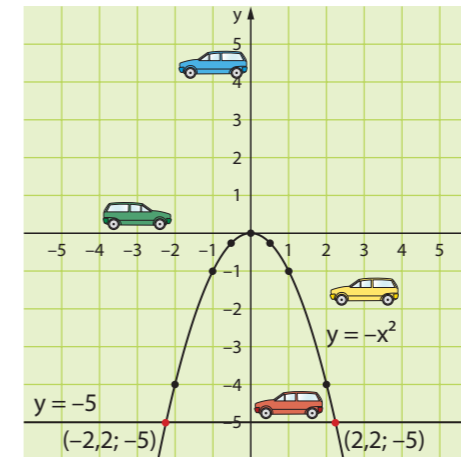
34. $y = 4x + 2$

35. $y = \frac{2}{3}x + 3$

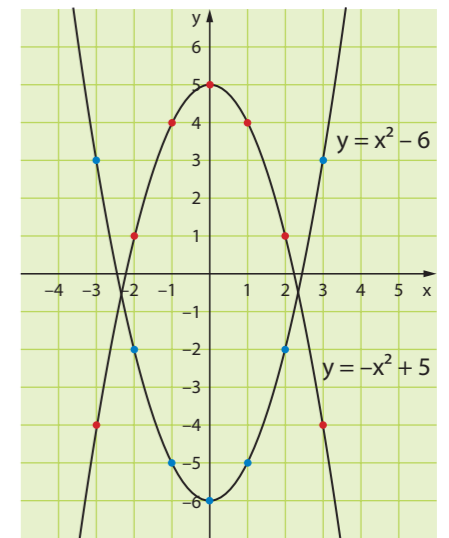
36. a) punainen auto

b) $y = -x^2$

c) (-2,2;-5) ja (2,2;-5)



37.



38. a) (2, -2)

b) $x = 2$

39. a) c

b) a

c) b

K8 Kotitehtäviä

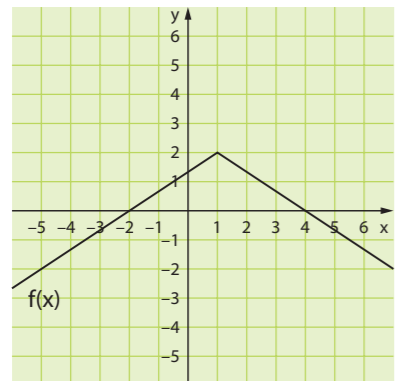
40. Yhdistä paraabelin yhtälö oikeaan tietoon.

$y = 2x^2 - 1$	A	1	on levein
$y = 4x^2$	B	2	huippu (0, -1)
$y = 0,1x^2$	C	3	aukeaa alaspäin
$y = -x^2 + 1$	D	4	on kapein

41. Määritä paraabelin yhtälö, kun sen huippu on pisteessä (0, 2), se aukeaa ylöspäin ja se on yhtä leveä kuin paraabeli $y = x^2$.
42. Määritä paraabelin yhtälö, kun sen huippu on pisteessä (0, 2) ja kulkee pisteen (1, 3) kautta.

Funktion ominaisuuksia, s. 30–31

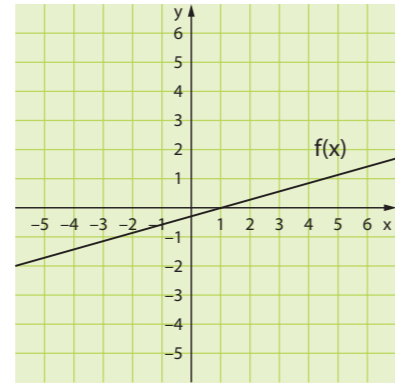
43. Määritä funktion $f(x)$ nollakohdat.



44. Määritä laskemalla funktion nollakohdat.
- a) $f(x) = x - 7$
b) $f(x) = x^2 - 16$

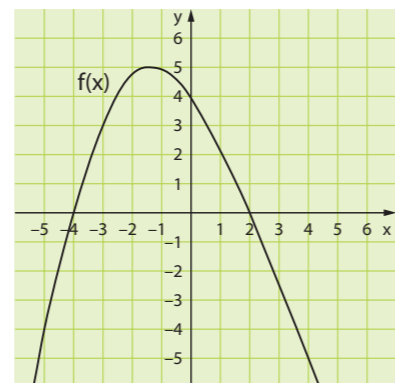
45. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla funktion $f(x)$ arvo on

- a) nolla b) positiivinen
c) negatiivinen.



46. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla

- a) $f(x) = 0$ b) $f(x) > 0$
c) $f(x) < 0$.

**Kotitehtävien vastaukset**

40. A \leftrightarrow 2

B \leftrightarrow 4

C \leftrightarrow 1

D \leftrightarrow 3

41. $y = x^2 + 2$

42. $y = x^2 + 2$

43. $x = -2$ tai $x = 4$

44. a) $x = 7$

b) $x = \pm 4$

45. a) $x = 1$

b) $x > 1$

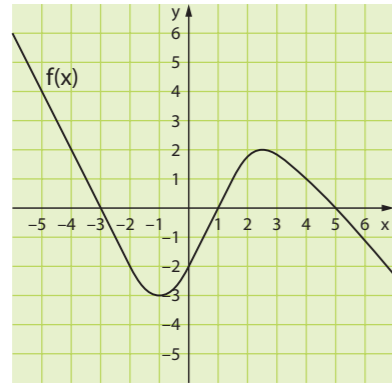
c) $x < 1$

46. a) $x = -4$ tai $x = 2$

b) $-4 < x < 2$

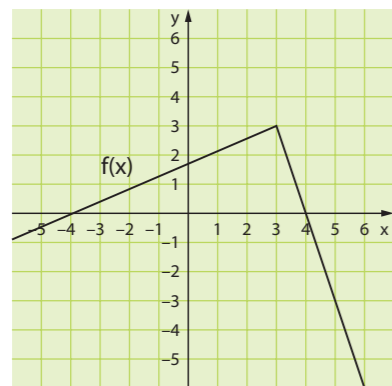
c) $x < -4$ tai $x > 2$

47. Määritä kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla
 a) $f(x) = 0$ b) $f(x) > 0$ c) $f(x) < 0$.

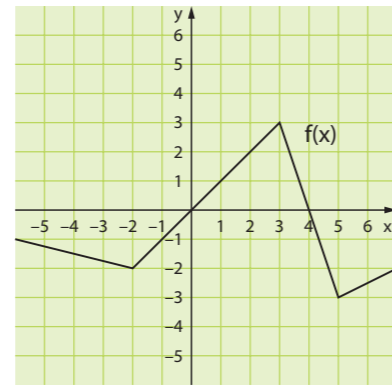


Funktion ominaisuuksia, s. 32–33

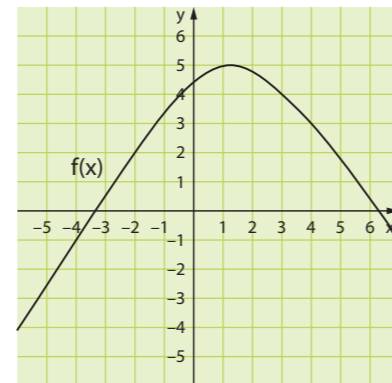
48. Määritä funktion $f(x)$ suurin arvo, kun $x > 0$.



49. Määritä funktion $f(x)$
 a) suurin arvo välillä $-4 \leq x \leq 4$
 b) pienin arvo välillä $-4 \leq x \leq 4$.



50. a) Määritä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $-4 \leq x \leq 4$.
 b) Millä muuttujan x arvolla funktio saa pienimmän arvonsa välillä $-4 \leq x \leq 4$?



51. Päättele tai laske funktion $f(x) = -x^2 + 2$ suurin arvo.
 52. Laske tai päättele funktion $f(x) = x^2 - 2$ suurin ja pienin arvo välillä $-2 \leq x \leq 3$.

K8

Kotitehtäviä

Kotitehtävien vastaukset

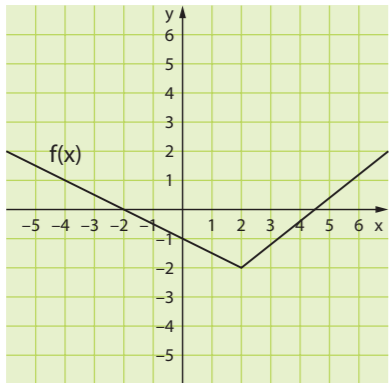
47. a) $x = -3, x = 1$ tai $x = 5$
 b) $x < -3$ tai $1 < x < 5$
 c) $-3 < x < 1$ tai $x > 5$
 48. 3

49. a) 3
 b) -2
 50. a) suurin arvo 5, pienin arvo -1
 b) $x = -4$
 51. 2
 52. pienin arvo -2 , suurin arvo 7

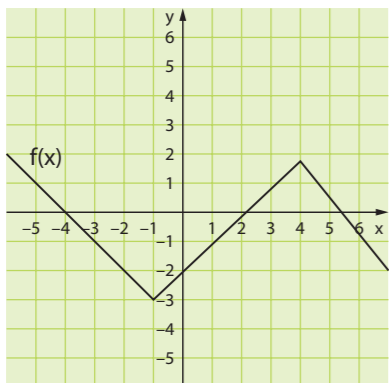
K8 Kotitehtäviä

Kasvava ja vähenevä funktio, s. 34–35

53. Millä muuttujan arvoilla funktio $f(x)$ on
 ◆◆ a) kasvava b) vähenevä?

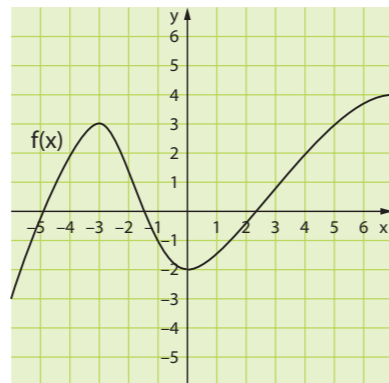


54. Millä muuttujan arvoilla funktio $f(x)$ on
 ◆◆ a) kasvava b) vähenevä?

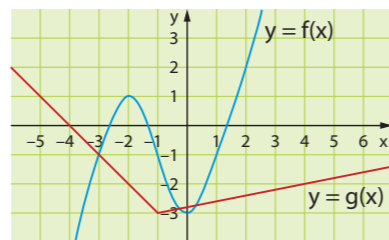


55. Millä muuttujan arvoilla funktio on kasvava?
 ◆◆ a) $f(x) = x - 11$
 b) $f(x) = x^2 - 11$

56. Millä muuttujan arvoilla funktio $f(x)$ on vähenevä?
 ◆◆



57. Millä muuttujan arvoilla funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ ovat yhtä aikaa väheneviä?
 ◆◆



Verrannollisuus koordinaatistossa, s. 38–39

58. Suureet A ja B ovat suoraan verrannollisia. Tee taulukko vihkoosi ja täydennä se.
 ◆◆

Suure A	Suure B
1,0	2,5
3,0	
	10,0

Kotitehtävien vastaukset

53. a) $x > 2$
 b) $x < 2$
 54. a) $-1 < x < 4$
 b) $x < -1$ tai $x > 4$
 55. a) kaikilla
 b) $x > 0$

56. $-3 < x < 0$

57. $-2 < x < -1$

58.

Suure A	Suure B
1,0	2,5
3,0	7,5
4,0	10,0



Kotitehtävien vastaukset

K8

Kotitehtäviä

59. Tutki piirtämällä suureiden verrannollisuutta.

a)

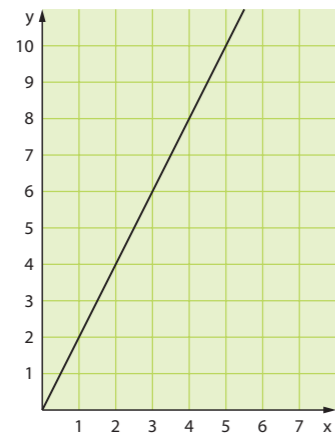
Suure x	Suure y
1,0	3,0
2,0	6,0
3,0	9,0

b)

Suure x	Suure y
2,0	4,0
4,0	8,0
5,0	10,0

60. Suureet x ja y ovat suoraan verrannolliset.

- a) Määritä verrannollisuuskertoimen k.
b) Kirjoita suureiden välinen riippuvuus yhtälönä.

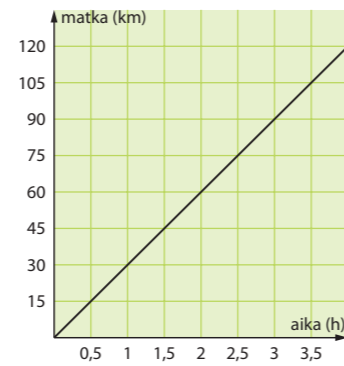


61. Talousveden hinta riippuu kulutuksesta. Kun kulutus on 25 m^3 hinta on 75 €.

- a) Muodosta yhtälö, joka kuvaa vesilaskun suuruuden riippuvuutta kulutuksesta.
b) Piirrä kuvaaja

62. Mona oli pitkällä pyörälenkillä ja ajoi likimain tasaisella nopeudella. Monan nopeus oli suoraan verrannollinen käytettyyn aikaan. Alla on kuvattu matkan riippuvuutta ajasta.

- a) Laske Monan nopeus.
b) Kuinka pitkän matkan Mona kaikkiaan ajoi 5,0 tunnin retkellä?



63. Iivon kävelynopeus on $3,0 \text{ km/h}$.

- a) Kirjoita Iivon kulkema matka ajan funktiona.
b) Piirrä funktion kuvaaja.

Verrannollisuus koordinaatistossa, s. 40–41

64. Tutki piirtämällä suureiden verrannollisuutta.

a)

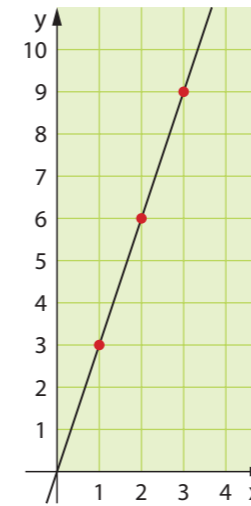
Suure x	Suure y
2,0	12,0
3,0	8,0
6,0	4,0

b)

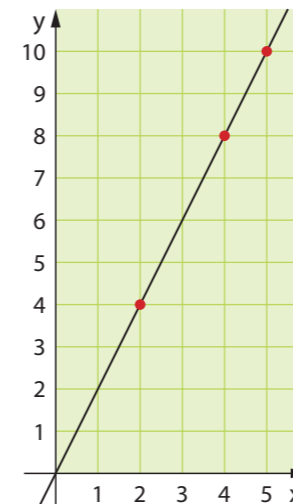
Suure x	Suure y
10	20
25	8
40	5

93

59. a) suoraan verrannollisia

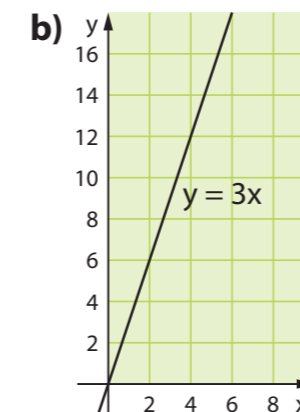


- b) suoraan verrannollisia



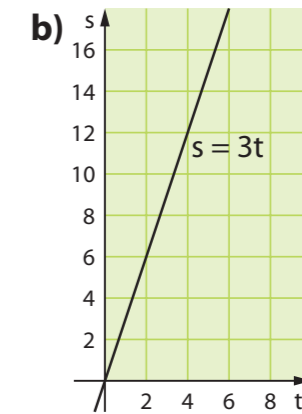
60. a) 2
b) $y = 2x$

61. a) $y = 3x$



62. a) 30 km/h b) 150 km

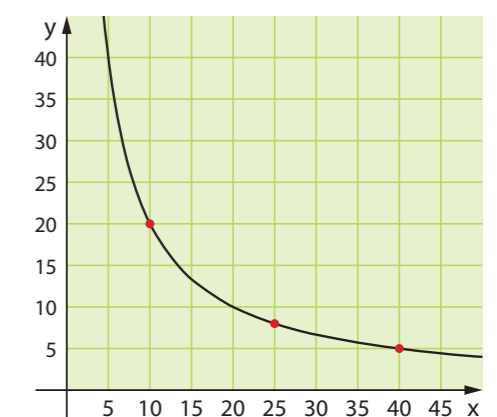
63. a) $s = 3t$



64. a) kääntäen verrannollisia

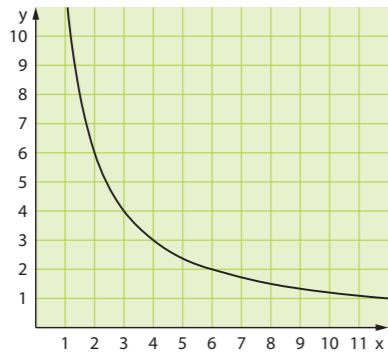


- b) kääntäen verrannollisia

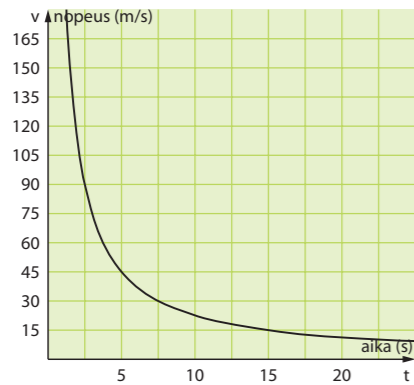


K8 Kotitehtäviä

65. Suureet x ja y ovat kääntäen verrannolliset.
 a) Määritä suureen y arvo, kun $x = 6$.
 b) Määritä suureen x arvo, kun $y = 3$.
 c) Muodosta suureiden välistä riippuvuutta kuvaava yhtälö.



66. Matkan ollessa vakio, nopeus v on kääntäen verrannollinen matka-aikaan t .
 a) Määritä kuljettu matka.
 b) Muodosta riippuvuutta kuvaava yhtälö.



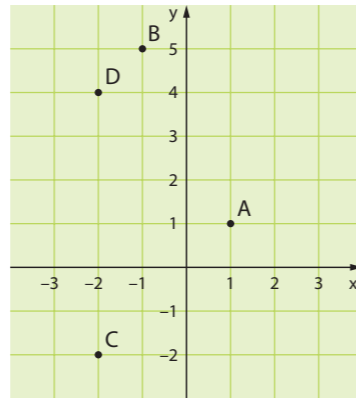
67. Isossa yrityksessä ostettiin työkaverille yhteinen syntymäpäivälahja. Lahjan hinta oli 280 €. Muodosta yhtälö, joka kuvaa yksittäiselle henkilölle maksettavaksi tulevan osuuden suuruutta y , riippuen lahjaan osallistuvien määrästä x .



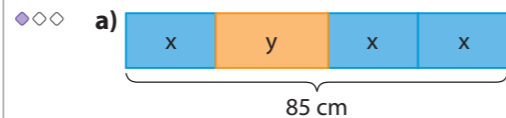
68. Suureet A ja B ovat suoraan verrannolliset. Suureet B ja C ovat kääntäen verrannolliset. Tutki suureiden A ja C verrannollisuutta.

Kahden muuttujan yhtälö, s. 42–43

69. Toteutuuko kahden muuttujan yhtälö $5x - 4y = 8$, kun
 a) $x = 4$ ja $y = 3$
 b) $x = 0$ ja $y = -2$
 c) $y = 0$ ja $x = 2$?
70. Mitkä pisteet toteuttavat kahden muuttujan yhtälön
 a) $2x + y = 3$
 b) $x + y = 0$
 c) $x + 2y = 6$?



71. Muodosta kahden muuttujan yhtälö.



- b) Toteutuuko yhtälö, kun $x = 20$ cm ja $y = 25$ cm?
 c) Onko muita yhtälön toteuttavia arvo pareja?

Kotitehtävien vastaukset

65. a) $y = 2$ b) $x = 4$ c) $y = \frac{12}{x}$

66. a) 225 m b) $v = \frac{225}{t}$

67. $y = \frac{280}{x}$

68. Suureet A ja C ovat kääntäen verrannolliset.

69. a) toteutuu

b) toteutuu

c) ei toteudu

70. a) A ja B

b) ei mitkään

c) D

71. a) $3x + y = 85$

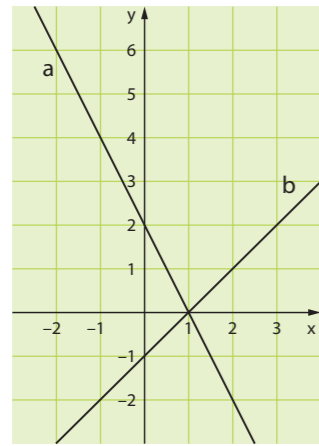
b) toteutuu

c) Esimerkiksi $x = 25$ cm ja $y = 10$ cm

K8

Kotitehtäviä

72. a) Määritä kahden muuttujan yhtälöt a ja b.



- b) Millä lukuparilla toteutuvat molemmat kahden muuttujan yhtälöt?

Yhtälöpari, s. 44–45

73. Tutki, toteuttaako lukupari (2, -3)

a) yhtälön $y = 5x - 13$

b) yhtälön $y = -2x + 1$

c) yhtälöparin $\begin{cases} y = 5x - 13 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

74. Mikä on vaihtoehdoista on yhtälöparin

$\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ -4x + 3y = -8 \end{cases}$ ratkaisu?

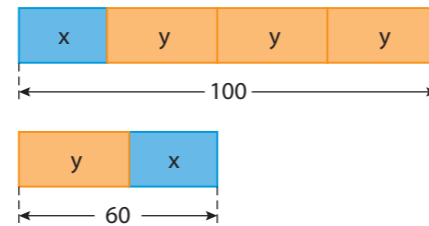
A(3, 1)

B(-1, 1)

C(2, 0)

D(4, 8)

75. a) Kirjoita tiedoista yhtälöpari.



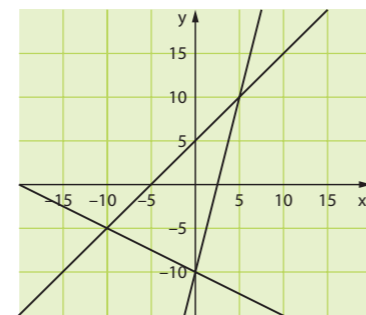
- b) Tutki, millä muuttujien arvoilla molemmat yhtälöt ovat tosia.

76. Yhtälöparin $\begin{cases} y = ax - 2 \\ y = -x + 3 \end{cases}$ ratkaisu on (2, 1). Mikä on vakion a arvo?

Graafinen ratkaiseminen, s. 46–47

77. Päättele kuvion avulla, mikä on yhtälöparin ratkaisu.

a) $\begin{cases} y = x + 5 \\ y = 4x - 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 5 \\ y = -0,5x - 10 \end{cases}$



Ratkaise graafisesti yhtälöpari.

78. a) $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

79. a) $\begin{cases} y = -x - 4 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 4 \\ y = -4x - 4 \end{cases}$

Kotitehtävien vastaukset

72. a) a: $y = -2x + 2$ ja b: $y = x - 1$
b) (1, 0)

73. a) toteuttaa
b) toteuttaa
c) toteuttaa

74. C

75. a) $\begin{cases} x + 3y = 100 \\ x + y = 60 \end{cases}$

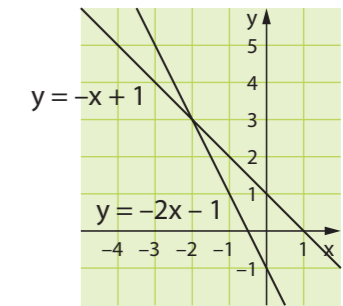
b) $x = 40$ ja $y = 20$

76. a = 1,5

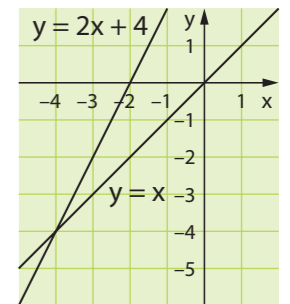
77. a) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -10 \\ y = -5 \end{cases}$

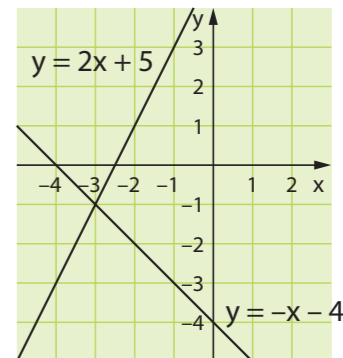
78. a) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$



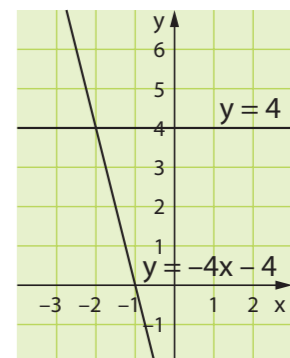
b) $\begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases}$



79. a) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$



b) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$



K8 Kotitehtäviä

Ratkaise graafisesti yhtälöpari.

$$80. \text{ a) } \begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = x - 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$81. \begin{cases} -3x + y = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Graafinen ratkaiseminen, s. 48–49

82. Tutki piirtämällä, kuinka monta ratkaisua on yhtälöparilla

$$\text{a) } \begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = x + 2 \\ y = x \end{cases}$$

83. Tutki kulmakertoimen ja vakiotermin avulla, kuinka monta ratkaisua on yhtälöparilla

$$\text{a) } \begin{cases} y = 32x - 44 \\ y = 32x + 44 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = -0,25x - 12 \\ y = 0,25x - 12 \end{cases}$$

84. Tutki päättelämällä, kuinka monta ratkaisua yhtälöparilla on.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 12 \\ y = -3x + 6 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = 12 \\ y = 12x + 5 \end{cases}$$

85. Kirjoita yhtälöpari, jolla ei ole yhtään ratkaisua.

86. Määritä vakion a arvo siten että yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua.

$$\begin{cases} ax + 2y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

Algebraalinen ratkaiseminen, s. 50–51

87. Ratkaise yhtälöpari.

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = -2 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

96

$$88. \text{ a) } \begin{cases} 4x + y = 17 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

89. Ratkaise yhtälöpari.

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = -6 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 0 \\ y - x = 8 \end{cases}$$

90. Ratkaise yhtälöpari.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 6y = 10 \\ 2x + 3y + 7 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + 10y - 22 = 0 \\ 7x = -y - 38 \end{cases}$$

Algebraalinen ratkaiseminen, s. 52–53

91. Ratkaise yhtälöpari.

$$\text{a) } \begin{cases} 6x - 5y = 5 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 7x + 3y = -1 \\ -7x - y = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 8x + 4y = -16 \\ 3x + 4y = 9 \end{cases}$$

92. Ratkaise yhtälöpari.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 7x + 6y = 10 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -3x + 7y = 1 \\ 6x + y = 13 \end{cases}$$

$$93. \text{ Ratkaise yhtälöpari } \begin{cases} x - 7y + 6 = 0 \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$$

94. Millä vakioiden a ja b arvoilla yhtälöparin ratkaisu on (3, 1)?

$$\begin{cases} (a + 1)x + by = 3 \\ ax - 2by = -6 \end{cases}$$

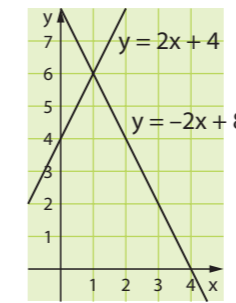
Algebraalinen ratkaiseminen, s. 54–55

Ratkaise yhtälöpari.

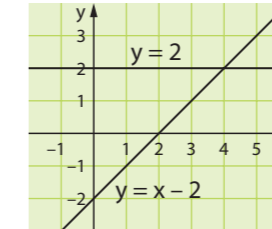
$$95. \text{ a) } \begin{cases} y = x + 5 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 2x = -3y - 6 \end{cases}$$

Kotitehtävien vastaukset

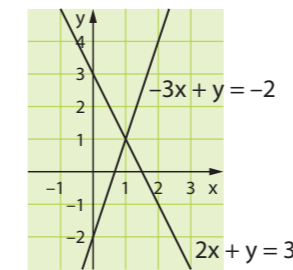
$$80. \text{ a) } \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$$



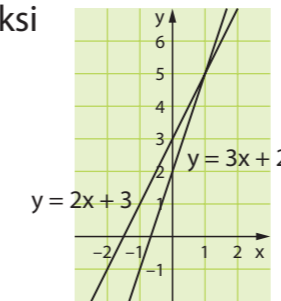
$$\text{b) } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$



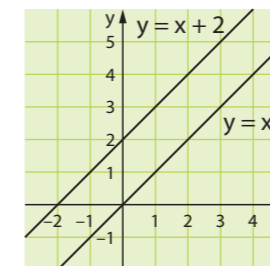
$$81. \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$



82. a) yksi



b) ei yhtään



83. a) ei yhtään b) yksi

84. a) ei yhtään b) yksi

85. Esimerkiksi $\begin{cases} y = x \\ y = x + 1 \end{cases}$

86. a = 6

$$87. \text{ a) } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 15 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$88. \text{ a) } \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$89. \text{ a) } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$90. \text{ a) } \begin{cases} x = -8 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = -6 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$91. \text{ a) } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1\frac{2}{5} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = -5 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$92. \text{ a) } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$93. \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

94. a = $-\frac{2}{3}$ ja b = 2

$$95. \text{ a) } \begin{cases} x = 3 \\ y = 81 \end{cases} \quad \text{b) ei ratkaisuja}$$

K8

Kotitehtäviä

$$96. \quad \begin{cases} a) \begin{cases} 2x + y = -2 \\ 5x + 4y = 4 \end{cases} \\ b) \begin{cases} 3y = 2x \\ 2x = y + 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$97. \quad \begin{cases} a) \begin{cases} 5x - y = 3 \\ 5x = 15 \end{cases} \\ b) \begin{cases} x + 4y = 9 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases} \end{cases}$$

$$98. \quad \begin{cases} a) \begin{cases} 4x + 6y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \\ b) \begin{cases} x - 5y = -16 \\ -2x + 3y = 11 \end{cases} \end{cases}$$

$$99. \quad \begin{cases} a) \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y = x - 4 \end{cases} \\ b) \begin{cases} -2x + 4,5y = 10 \\ -3x + 2,5y = 6,5 \end{cases} \end{cases}$$

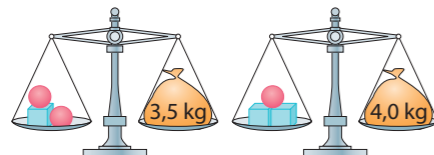
100. Millä vakioiden a ja b arvoilla suorilla $y = ax - 2$ ja $y = -3x + b$ ei ole leikkauspisteitä?

Sovelluksia, s. 56–57

Ratkaise tehtävät yhtälöparin avulla.

101. Laske pallon ja kuution massat.

◆◇◇



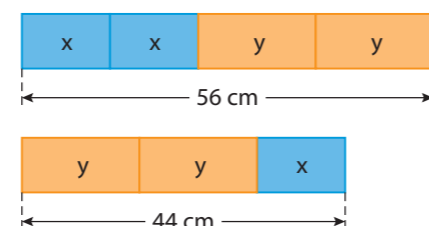
102. Auralla ja Ilpolla on yhteensä 232 keräilykorttia. Auralla on 64 korttia enemmän kuin Ilpolla. Laske Auran ja Ilpon korttien lukumäärät.

103. Aleksin ja Tepon koulumatkojen yhteispituus on 12 km. Aleksin koulumatka on kilometrin pidempi kuin Tepon. Laske poikien koulumatkat.

104. Neljän maitolitrin ja kahden karjalanpiirakan hinta on 9,20 €. Kuusi piirakkaa ja kaksi litraa maitoa maksaa 10,60 €. Laske paljonko maksaa yksi litra maitoa ja yksi karjalanpiirakka.

Sovelluksia, s. 58–59

105. Muodosta yhtälöpari ja ratkaise palkkien x ja y pituudet.



106. Luku x on kolme kertaa niin suuri kuin luku y. Kun luku x kerrotaan kolmella ja tulosta vähennetään 16, saadaan luku y. Määritä luvut x ja y.

107. Mintulla on 3 € enemmän rahaa kuin Santulla. Lapsilla on yhteensä 35 €. Laske, kuinka paljon kummallakin on rahaa.

108. Taralla ja Veralla on sarjakuvalehtiä. Jos Tara antaisi Veralle yhden lehden, olisi tytöillä yhtä monta lehteä. Jos taas Vera antaisi Taralle yhden lehden, olisi Taralla kaksi kertaa niin paljon lehtiä kuin Veralla. Kuinka paljon Taralla oli lehtiä alkujaan?

109. Joulunalusviikolla mediasoitinmallien 8 Gb ja 16 Gb myyntimäärät olivat 22 kpl ja 9 kpl. Niiden tuotto oli 5320 €. Joulun jälkeen 8 Gb:n mallin hintaa pudotettiin 10 % ja 16 Gb:n 20 %, jolloin myyntimäärät olivat 20 kpl ja 18 kpl. Tuotto oli tällöin 5760 €. Laske alkuperäiset hinnat.

97

Kotitehtävien vastaukset

$$96. \quad \begin{cases} a) \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases} \\ b) \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$97. \quad \begin{cases} a) \begin{cases} x = 3 \\ y = 12 \end{cases} \\ b) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$98. \quad \begin{cases} a) \text{ ei ratkaisuja} \\ b) \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$99. \quad \begin{cases} a) \text{ ei ratkaisuja} \\ b) \begin{cases} x = -0,5 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$100. \quad a = -3 \text{ ja } b \neq -2$$

$$101. \quad \text{pallo } 1 \text{ kg ja kuutio } 1,5 \text{ kg}$$

$$102. \quad \text{Auralla } 148 \text{ ja Ilpolla } 84$$

$$103. \quad \text{Aleksilla } 6,5 \text{ km ja Tepolla } 5,5 \text{ km}$$

$$104. \quad \text{maito } 1,0 \text{ € ja piirakka } 0,8 \text{ €}$$

$$105. \quad \begin{cases} 2x + 2y = 56 \\ x + 2y = 44 \end{cases}$$

$$x = 12 \text{ cm ja } y = 16 \text{ cm}$$

$$106. \quad x = 6 \text{ ja } y = 2$$

$$107. \quad \text{Mintulla } 19 \text{ € ja Santulla } 16 \text{ €}$$

$$108. \quad 7 \text{ lehteä}$$

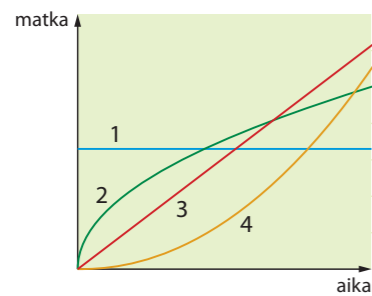
$$109. \quad 8 \text{ Gb: } 160 \text{ € ja } 16 \text{ Gb: } 200 \text{ €}$$

1. Kuvaajatutkimuksia

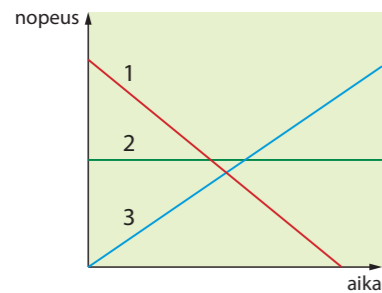
s. 21

TUTKITAAN KUVAAJIA

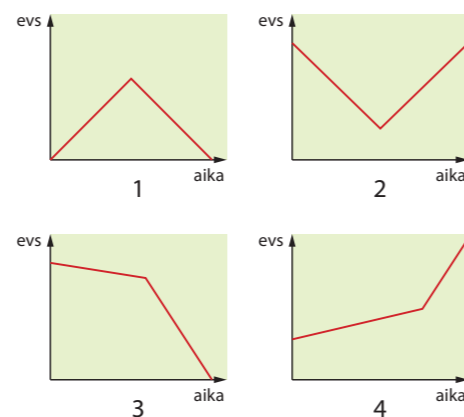
1. Yhdistä lause ja kuvaaja.
- ◆◇◇ A. Mia juoksi koko matkan tasaisella nopeudella.
 B. Essi pysyi koko ajan paikoillaan.
 C. Maija kulki koko matkan vauhtiaan hidastaen.
 D. Emmi kiihdytti koko matkan vauhtiaan.



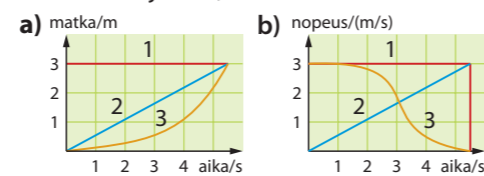
2. Yhdistä edellisen tehtävän lauseet kuvaajiin. Piirrä puuttuva kuvaaja.



3. Yhdistä lause ja kuvaaja.
- ◆◇◇ Unna tanssii keskellä huonetta. Hän lähestyy vuoronperään vasenta ja oikeaa seinää. (evs tarkoittaa etäisyyttä vasemmasta seinästä.) Unna tanssii
- A. nopeasti vasemmalle, sitten nopeasti oikealle
 B. hitaasti oikealle, sitten nopeasti oikealle
 C. nopeasti oikealle, sitten nopeasti vasemmalle
 D. hitaasti vasemmalle, sitten nopeasti vasemmalle.



4. Pallo pyörii kiihtyvällä nopeudella mäkeä alas ja pysähtyy talon seinään. Mikä kuvaajista 1, 2 vai 3 on oikea?



- c) Kuinka suurella nopeudella pallo osuu seinään?



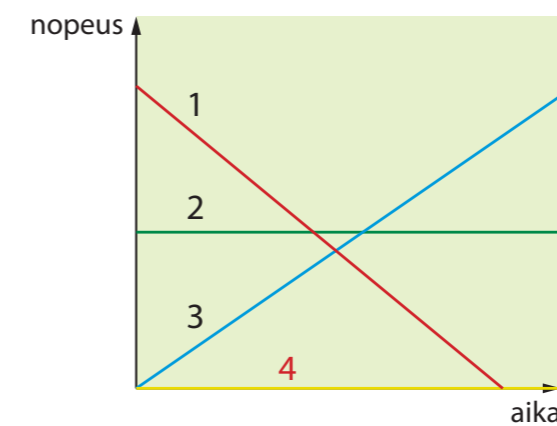
64

Joustotehtävien vastaukset

1. KUVAAJATUTKIMUKSIA

1. A $\leftarrow \rightarrow$ 3
 B $\leftarrow \rightarrow$ 1
 C $\leftarrow \rightarrow$ 2
 D $\leftarrow \rightarrow$ 4

2. A $\leftarrow \rightarrow$ 2
 B $\leftarrow \rightarrow$ 4
 C $\leftarrow \rightarrow$ 1
 D $\leftarrow \rightarrow$ 3



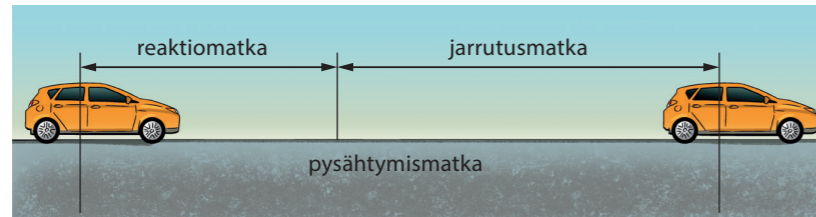
3. A $\leftarrow \rightarrow$ 2
 B $\leftarrow \rightarrow$ 4
 C $\leftarrow \rightarrow$ 1
 D $\leftarrow \rightarrow$ 3

4. a) 3
 b) 2
 c) 3 m/s

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Harjoittele lisää 1

PYSÄHTYMISMATKA



Matka, joka tarvitaan ajoneuvon pysäyttämiseen, koostuu ns. reaktiomatkasta eli matkasta, jonka ajoneuvo etenee ennen kuin kuljettaja ehtii reagoida ja varsinaisesta jarrutusmatkasta. Seuraavan yleissäännön avulla voidaan laskea, miten reaktiomatka ja jarrutusmatka riippuvat ajoneuvon nopeudesta kuivalla ja tasaisella tiellä.

Reaktiomatka metreinä saadaan, kun nopeus (km/h) kerrotaan luvulla $\frac{3}{10}$.

Vastaavasti jarrutusmatkan pituus metreinä saadaan siten, että nopeuden (km/h) kymmenesosa korotetaan potenssiin 2.

$$\text{REAKTIOMATKA (m)} \triangleq \frac{3}{10} \cdot \text{nopeus (km/h)}$$

$$\text{JARRUTUSMATKA (m)} \triangleq \left(\frac{\text{nopeus (km/h)}}{10} \right)^2$$

5. Piirrä koordinaatistoon kuvaaja, joka kuvaa reaktiomatkan riippuvuutta ajoneuvon nopeudesta ja määritä kuvaajan perusteella taulukon arvot.

Nopeus (km/h)	Reaktiomatka (m)
20	
40	
	15
60	
	20
70	
100	

6. Piirrä koordinaatistoon kuvaaja, joka esittää jarrutusmatkan nopeuden funktiona ja täydennä taulukko kuvaajan perusteella.

Nopeus (km/h)	Jarrutusmatka (m)
20	
40	
	25
60	
	50
80	
100	

7. Laske, mikä on ajoneuvon pysähtymismatka, kun nopeus on
- a) 40 km/h b) 50 km/h
c) 80 km/h d) 100 km/h.

1.

Joustotehtäviä

65

Joustotehtävien vastaukset

1. KUVAAJATUTKIMUKSIA

5.

Nopeus (km/h)	Reaktiomatka (m)
20	6
40	12
50	15
60	18
67	20
70	21
100	30

6.

Nopeus (km/h)	Jarrutusmatka (m)
20	4
40	16
50	25
60	36
70	50
80	64
100	100

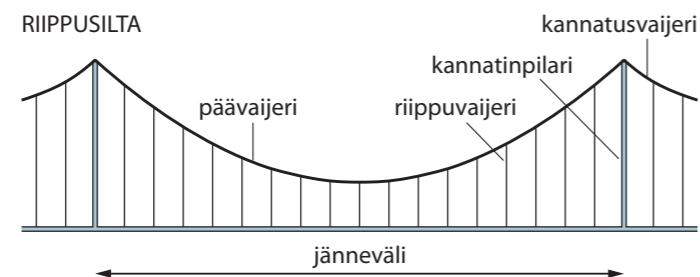
7. a) 28 m
b) 40 m
c) 88 m
d) 130 m

2. Sillat ja paraabelit

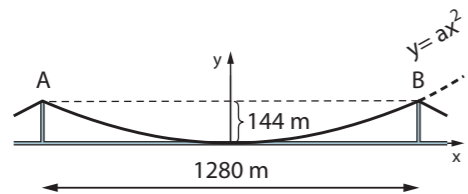
s. 29



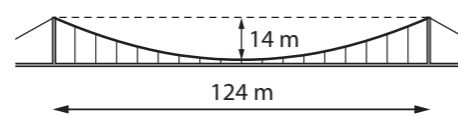
Sillanrakennuksella on kautta aikojen ollut läheinen yhteys matematiikkaan. Esimerkiksi roomalaisten rakentamat kiviset siltakaaret olivat puoliympyrän muotoisia. Nykyisten siltojen tukirakenteissa esiintyy usein paraabeli.



1. Riippusillan päävaijerista muodostuu paraabeli. Piirretään kuvaan xy-koordinaatisto.
- a) Mitkä ovat pisteiden A ja B koordinaatit?
- b) Siltaparaabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2$. Laske vakion a arvo ja ilmoita paraabelin yhtälö.



2. Karisalmen silta Asikkalassa on teräsbetonikantinen riippusilta. Määritä siltaparaabelin yhtälö.



Joustotehtävien vastaukset

2. SILLAT JA PARAABELIT

1. a) A(-640, 144) ja B(640, 144)
b) $y = 0,00035x^2$

2. $y = 0,0036x^2$

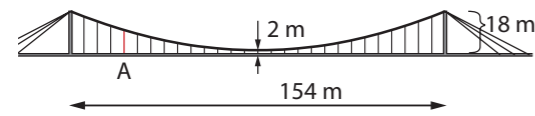
Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Harjoittele lisää 2

2.

Joustotehtäviä

3. Sääksmäen silta on teräksinen riippusilta. Kannatinpilarien välissä on tasavälein 27 kannatinvaijeria. Laske vaijerin A pituus.

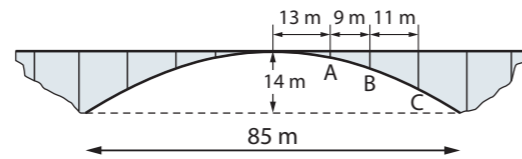


4. Rautatiesillan paraabelin yhtälö on $y = -\frac{1}{90}x^2$. Laske sillan jänneväli, kun kaaren korkeus on 69 m.



5. Syvingin silta Ruovedellä on teräsbetoninen kaarisilta. Joen leveys sillan kohdalla on 85 m ja kaaren korkeus 14 m.

- a) Määritä siltaparaabelin yhtälö.
b) Laske tukipilarien A, B ja C pituudet.



6. Määritä siltaparaabelin yhtälö, kun silta on 80 m leveä ja kaaren korkeus on 12 m.



7. Yhdistä sillat oikeisiin nimiin ja kaupunkeihin.

◆◇◇



- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| 1 Rialto Bridge, Venetsia | 2 Harbour Bridge, Sydney |
| 3 Westminster Bridge, London | 4 Golden Gate Bridge, San Francisco |

67

Joustotehtävien vastaukset

2. SILLAT JA PARAABELIT

3. 10 m
4. 158 m

5. a) $y = -0,0078x^2$
b) A: 1,3 m
B: 3,8 m
C: 8,5 m

6. $y = -0,0075x^2$

7. A-2, B-1, C-4, D-3

3. Yhtälöryhmä

s. 55

Yhtälöryhmän ratkaiseminen tapahtuu eliminointimenetelmällä. Valitaan yhtälöistä kaksi ja poistetaan yksi tuntemattomista. Tehdään näin myös kahdelle muulle yhtälölle.

Esimerkki 1

Ratkaise kolmen yhtälön yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 15 \\ 4x - 3y + z = 4 \\ -x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu onnistuu joskus myös sijoitusmenetelmällä.

Valitaan yhtälöt (1) ja (2) ja eliminoidaan yksi muuttuja pois.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 15 & (1) \\ 4x - 3y + z = 4 & (2) \\ -x + 2y + 2z = -3 & (3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 15 \\ 4x - 3y + z = 4 \\ \hline 7x - y = 19 & (4) \end{cases}$$

Valitaan yhtälöt (2) ja (3) ja eliminoidaan muuttuja z pois.

$$\begin{cases} 4x - 3y + z = 4 & | \cdot (-2) \\ -x + 2y + 2z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -8x + 6y - 2z = -8 \\ -x + 2y + 2z = -3 \\ \hline -9x + 8y = -11 & (5) \end{cases}$$

Saadaan yhtälöpari (4) ja (5).

$$\begin{cases} 7x - y = 19 & | \cdot 8 \\ -9x + 8y = -11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 56x - 8y = 152 \\ -9x + 8y = -11 \\ \hline 47x = 141 & | : 47 \\ x = 3 \end{cases}$$

Sijoittamalla $x = 3$ yhtälöön (4) saadaan

$$\begin{aligned} 7 \cdot 3 - y &= 19 \\ 21 - y &= 19 \end{aligned}$$

$$-y = 19 - 21$$

$$-y = -2 \quad | : (-1)$$

$$y = 2$$

Yhtälöstä (2) saadaan

$$4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + z = 4$$

$$12 - 6 + z = 4$$

$$z = 4 - 12 + 6 = -2$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisun voi ilmoittaa samalla tavalla kuin yhtälöparin.

Opetuskertaan liittyvä materiaali

- Moniste: Neliöjuurisokkelo

3.

Joustotehtäviä

Ratkaise yhtälöryhmä.

$$1. \begin{cases} x = 3 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x - 2y + 5z = -4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ 2x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 4y - z = 4 \\ -2x + 3y + z = 6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x + 5y - z = 9 \\ -x - 9y - z = -9 \\ 2x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

5. Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ kulkee pisteiden $(0, 3)$, $(2, 5)$ ja $(3, 12)$ kautta. Määritä vakiot a , b ja c .

6. Liina, Siina ja Riina pääsivät kesätöihin kotikaupungin puisto-osastolle. Yhteensä he saivat palkkaa 3000 €. Liina ahkerimpana sai kaksi kertaa niin paljon kuin Siina. Riina sai 150 € vähemmän kuin Liina. Laske, kuinka paljon kukin tytöistä sai. Merkitse tyttöjen saamia rahamääriä kirjaimilla x , y ja z . Muodosta kolmen yhtälön yhtälöryhmä ja ratkaise se.

7. Ratkaise yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ -6x + 4y - 2z = -14 \end{cases}$$



69

Joustotehtävien vastaukset

3. YHTÄLÖRYHMÄ

1. $(3, -30, -14)$

2. $(2\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$

3. ei ratkaisua

4. $(15, -3, 21)$

5. $a = 2, b = -3$ ja $c = 3$

$$\begin{cases} x - z = 150 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3000 \end{cases}$$

Liina 1260 €, Siina 630 € ja

Riina 1110 €

7. äärettömän monta ratkaisua

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 5 \end{cases}$$

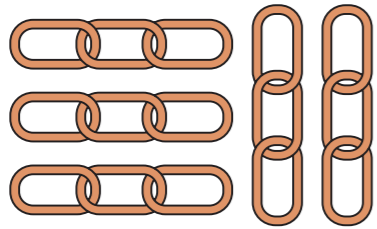
$$\begin{cases} z = 3 - x \end{cases}$$

4. Lisäpuuhaa

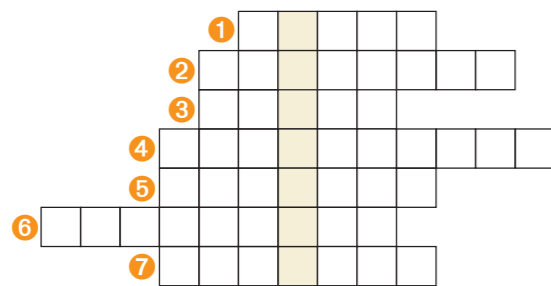
s. 45


KETJUONGELMA

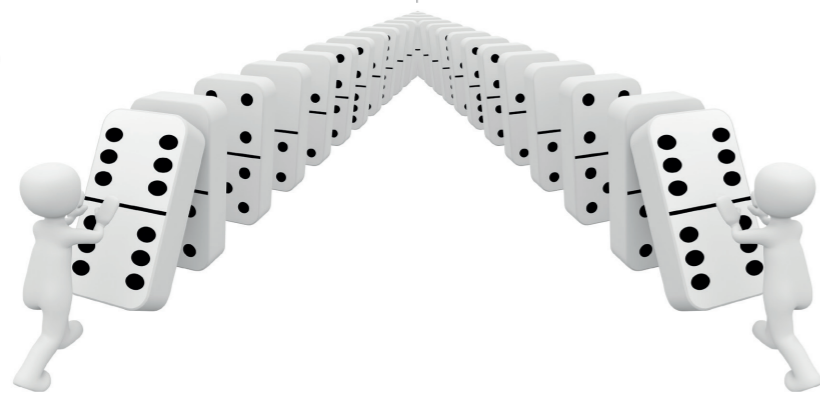
Sinun täytyy tehdä yhtenäinen ketju viidestä ketjun pätkästä mahdollisimman vähin liitoksain. Kuinka tehtävä on suoritettava?



RISTIKKO



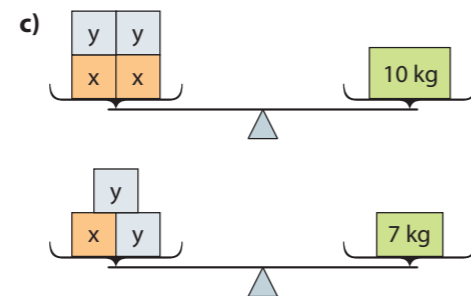
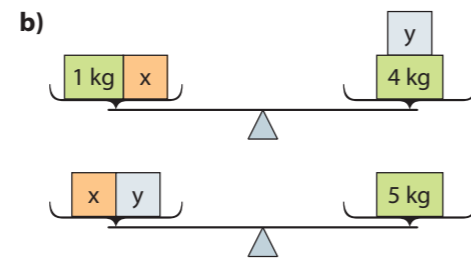
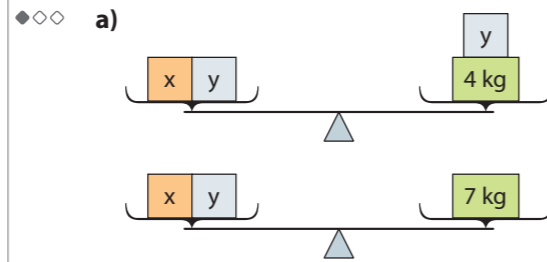
- 1 Funktion $f(x) = -21x + 12$ kuvaaja.
- 2 $g(x) = 6x + 5$
- 3 $h(x) = x^2 - 16$
- 4 $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$
- 5 $12x + 4$
- 6 
- 7 $y = m(x)$



70

VAAKATEHTÄVIÄ

1. Päättelä massat x ja y .



Joustotehtävien vastaukset

4. LISÄPUUHAA

KETJUONGELMA

Katkaistaan yhdestä ketjusta kaikki kolme lenkkiä. Käytetään näitä lenkkejä muiden ketjun pätkien liittämiseen.

RISTIKKO



KESÄKUU

VAAKATEHTÄVIÄ

1. a) $x = 4$ kg ja $y = 3$ kg
- b) $x = 4$ kg ja $y = 1$ kg
- c) $x = 3$ kg ja $y = 2$ kg