Laudatur 9

Trigonometriset funktiot ja lukujonot

MAA 9

Tarmo Hautajärvi
Jukka Ottelin
Leena Wallin-Jaakkola

Opettajan aineisto

Helsingissä Kustannusosakeyhtiö Otava

SISÄLLYS

Otavan asiakaspalvelu
Puh. 0800 17117
asiakaspalvelu@otava.fi

Tilaukset
Kirjavälitys Oy
Puh. 010 345 1520
Faksi 010 345 1454
kvtilaus@kirjavalitys.fi

1. painos

Toimitus: Mare Herlevi
Taitto: Jukka Ottelin
Piirrokset: Eeva Lehtonen

Sidonta: KEURUSKOPIO

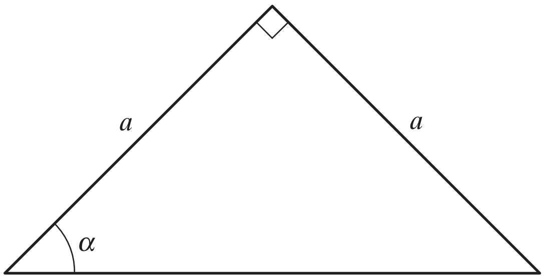
Painopaikka: Otavan Kirjapaino Oy, Keuruu 2008

ISBN 978-951-1-22029-9

RATKAISUT KIRJAN TEHTÄVIIN

Testaa lähtötaitosi

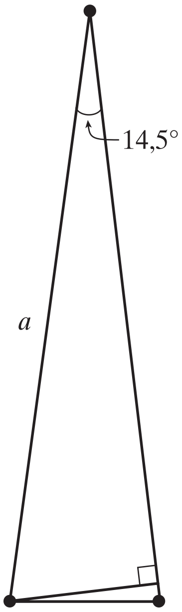
1.



$$\tan\alpha = \frac{a}{a} = 1$$

<u>Vastaus:</u> 1

2.



$$\sin 14,5° = \frac{1,0}{a}$$

$$a \sin 14,5° = 1,0$$

$$a = \frac{1,0}{\sin 14,5°}$$

Kolmion ala

$$A = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot \frac{1,0}{\sin 14,5°} \cdot 1,0 \approx 2,0$$

<u>Vastaus:</u> 2,0 cm^2

3.

Sivut *n* -1 , *n* ja *n* + 1, joista pisin eli hypotenuusa on *n* +1

$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$$

$$n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$n^2 - 4n = 0$$

$$n(n-4) = 0$$

$$n = 0 \text{ tai } n - 4 = 0$$

$$\text{ei käy, } n > 0 \qquad n = 4$$

Joten lyhin sivu on $n - 1 = 4 - 1 = 3$

<u>Vastaus</u>: 3

4.

alkuperäinen hinta *a*

keskimääräinen nousukerroin *q*

$$aq^3 = 1,125a$$

$$q^3 = 1,125$$

$$q = \sqrt[3]{1,125}$$

$$q = 1,0400...$$

$$104,00...\% - 100\% \approx 4,0\%$$

<u>Vastaus</u>: 4,0 %

5.

Hypotenuusa *a* on pisin sivu, joten

Kolmion ala

$$A = \frac{1}{2}ah$$

$$7,5 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3,0$$

$$15,0 = 3a$$

$$a = 5$$

<u>Vastaus</u>: Hypotenuusan pituus on 5,0 cm.

6.

$f(x) = \ln\sqrt{x}$

$g(x) = x^2 + 8$

$h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\sqrt{x^2+8}$

$$h'(x) = \frac{2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+8)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2+8}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+8} \cdot \sqrt{x^2+8}} = \frac{x}{x^2+8}$$

$$h'(2) = \frac{2}{2^2+8} = \frac{1}{6}$$

Vastaus: $\frac{1}{6}$

7.

9,61,52,63,94,x,18

Jos jonoa lukee oikealta vasemmalle, saadaan jono

81, x, 49, 36, 25,16,9

jolloin jonossa ovat lukujen 9, 8,7,6,5,4,3 neliöt, joten x on luvun 8 neliö 64 kirjoitettuna oikealta vasemmalle eli 46.

Vastaus: 46

8.

$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{x}, \frac{7}{11}$

Jonon lukujen osoittajat kasvavat kahdella ja nimittäjät kolmella, joten $x = 8$.

Vastaus: 8

9.

11 kuukauden korko on $\frac{11}{12}$ koko vuoden korosta.

$r = \frac{11}{12} \cdot 0,06 \cdot 1800\,€ = 99\,€$

Vastaus: 99 €

10.

$\sin\alpha = 0,1736$

$\alpha = 9,997...^\circ$ tai $\alpha = 180^\circ - 9,997...^\circ = 170,00...^\circ$

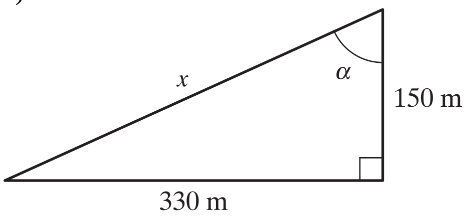
ei käy, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Kulman α vieruskulma $180^\circ - \alpha = 180^\circ - 170,00...^\circ \approx 10^\circ$

Vastaus: 10°

1. Suunnattu kulma

1. a) Kuljettaessa itään kompassisuunta on 90°.
b) Kuljettaessa luoteeseen kompassisuunta on 270° + 45° = 315°
c)



Etäisyys suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella

$x^2 = 150^2 + 330^2$

$x^2 = 131\ 400 \qquad |\sqrt{\ }\ , x > 0$

$x \approx 362$

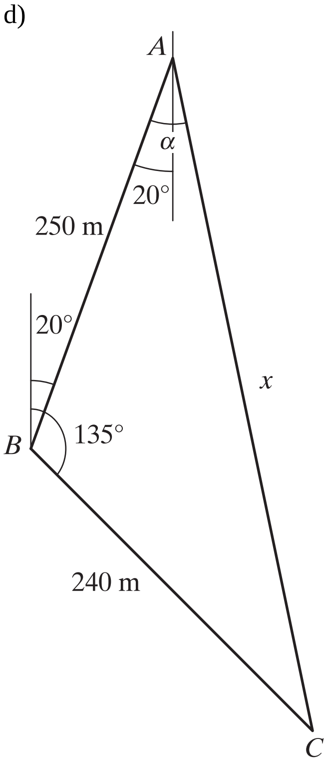
Kulma α

$$\tan\alpha = \frac{330}{150}$$

$$\alpha \approx 65{,}6°$$

Suora kulkusuunta 180° + 65,6° = 245,6°

d)



Kulma $\sphericalangle B = 115°$

Kosinilauseella kolmiosta *ABC*

$$x^2 = 240^2 + 250^2 - 2 \cdot 240 \cdot 250 \cos 115°$$

$$x^2 = 120100 - 120\,000 \cos 115° \quad \Big| \sqrt{\ }, x > 0$$

$$x = \sqrt{120100 - 120\,000 \cos 115°}$$

$$x \approx 413$$

Sinilauseella kolmiosta *ABC*

$$\frac{240}{\sin\alpha} = \frac{413{,}29...}{\sin 115°}$$

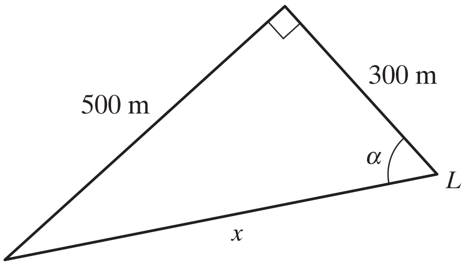
$$\sin\alpha = \frac{240 \sin 115°}{413{,}29...}$$

$$\alpha \approx 32°$$

Suora kulkusuunta 200° – 32° = 168°

<u>Vastaus</u>: a) 90° b) 315° c) Jani on 362 metrin etäisyydellä lähtöpisteestä. Suora kulkusuunta olisi ollut 245,6°. d) Jani on 413 metrin etäisyydellä lähtöpisteestä. Suora kulkusuunta olisi ollut 168°.

2.



Etäisyys lähtöpisteestä

$$x^2 = 300^2 + 500^2$$

$$x^2 = 340\,000 \quad | \sqrt{\ }, x > 0$$

$$x \approx 583$$

Kulma α

$$\tan\alpha = \frac{500}{300}$$

$$\alpha \approx 59°$$

Suora kulkusuunta 360° – 45° – 59° = 256°

<u>Vastaus</u>: Matti on 583 metrin etäisyydellä lähtöpisteestä. Suora kulkusuunta olisi ollut 256°.

3. a) Suoran kulmakerroin $k = 1$

Suoran ja x-akselin leikkauskulma on suuntakulman itseisarvo

$$\tan\alpha = k | \ k = 1$$

$$\tan\alpha = 1$$

$$\alpha = 45°$$

b) Suoran kulmakerroin $k = 3$
Suoran ja x-akselin leikkauskulma on suuntakulman itseisarvo

$\tan \alpha = k| \; k = 3$
$\tan \alpha = 3$
$\alpha \approx 71{,}6°$

c) Suoran kulmakerroin $k = 5$
Suoran ja x-akselin leikkauskulma on suuntakulman itseisarvo

$\tan \alpha = k| \; k = 5$
$\tan \alpha = 5$
$\alpha \approx 78{,}7°$

<u>Vastaus</u>: Suoran ja x-akselin leikkauskulma on a) 45° b) 71,6° c) 78,7°.

4. Suoran kulmakerroin on a) $\frac{1}{2}$ b) -4 c). Määritä suoran suuntakulma?

a) Suoran kulmakerroin $k = \frac{1}{2}$

Suoran suuntakulma

$\tan \alpha = k| \; k = \frac{1}{2}$

$\tan \alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha \approx 26{,}6°$

b) Suoran kulmakerroin $k = -4$
Suoran suuntakulma

$\tan \alpha = k| \; k = -4$
$\tan \alpha = -4$
$\alpha \approx -76{,}0°$

c) Suoran kulmakerroin $k = -\frac{3}{4}$

Suoran suuntakulma

$\tan \alpha = k| \; k = -\frac{3}{4}$

$\tan \alpha = -\frac{3}{4}$

$\alpha \approx -36{,}9°$

<u>Vastaus</u>: Suoran suuntakulma on a) 26,6° b) –76,0° c) –36,9°.

5. Kulma on yksikköympyrässä.
a) Kulma 180°
Loppukylki kiertää puoli kierrosta vastapäivään, joten loppukylki sijaitsee negatiivisella x-akselilla.
b) Kulma 360°

Loppukylki kiertää yhden kierroksen vastapäivään, joten loppukylki sijaitsee positiivisella x-akselilla.
c) Kulma 540° = 1·360° + 180°
Loppukylki kiertää puolitoista kierrosta vastapäivään, joten loppukylki sijaitsee negatiivisella x-akselilla.
d) Kulma 630° = 1·360° + 270°
Loppukylki kiertää yhden ja kolme neljännes kierrosta vastapäivään, joten loppukylki sijaitsee negatiivisella y-akselilla.

Vastaus: Loppukylki sijaitsee a) negatiivisella x-akselilla b) positiivisella x-akselilla c) negatiivisella x-akselilla d) negatiivisella y-akselilla.

6. Kulma on yksikköympyrässä.
a) Kulma –90°
Loppukylki kiertää neljänneskierroksen myötäpäivään, joten loppukylki sijaitsee negatiivisella y-akselilla.
b) Kulma –270°
Loppukylki kiertää kolme neljännes kierrosta myötäpäivään, joten loppukylki sijaitsee positiivisella y-akselilla.
c) Kulma –540° = –1·360° – 180°
Loppukylki kiertää puolitoista kierrosta myötäpäivään, joten loppukylki sijaitsee negatiivisella x-akselilla.
d) Kulma –630° = –1·360° – 270°
Loppukylki kiertää yhden ja kolme neljännes kierrosta myötäpäivään, joten loppukylki sijaitsee positiivisella y-akselilla.

Vastaus: Loppukylki sijaitsee a) negatiivisella y-akselilla b) positiivisella y-akselilla c) negatiivisella x-akselilla d) positiivisella y-akselilla.

7. Muutetaan kulman yksikkö asteista radiaaneiksi.

a) $\pi \text{ rad} = 180° \quad |:18$

$$10° = \frac{\pi}{18}$$

b) $\pi \text{ rad} = 180° \quad |:6$

$$30° = \frac{\pi}{6}$$

c) $\pi \text{ rad} = 180° \quad |:180$

$$1° = \frac{\pi}{180} \quad |\cdot 70$$

$$70° = \frac{7\pi}{18}$$

d) $\pi \text{ rad} = 180° \quad |:180$

$$1° = \frac{\pi}{180} \quad |\cdot 450$$

$450° = \frac{5\pi}{2}$

e) π rad = 180° |:180

$1° = \frac{\pi}{180}$ |·1 456

$1\,456° = \frac{364\pi}{45}$

Vastaus: Kulma radiaaneina on a) $\frac{\pi}{18}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{7\pi}{18}$ d) $\frac{5\pi}{2}$ e) $\frac{364\pi}{45}$.

8.Muutetaan kulman yksikkö asteista radiaaneiksi.

a) π rad = 180° |:(–9)

$–20° = -\frac{\pi}{9}$

b) π rad = 180° |:180

$1° = \frac{\pi}{180}$ |·(–40)

$–40° = -\frac{2\pi}{9}$

c) π rad = 180° |:180

$1° = \frac{\pi}{180}$ |·(–135)

$–135° = -\frac{3\pi}{4}$

d) π rad = 180° |·(–2)

$–360° = –2\pi$

e) π rad = 180° |·(–4)

$720° = –4\pi$

Vastaus: Kulma radiaaneina on a) $-\frac{\pi}{9}$ b) $-\frac{2\pi}{9}$ c) $-\frac{3\pi}{4}$ d) $–2\pi$ e) $–4\pi$.

9. Muutetaan kulman yksikkö radiaaneista asteiksi.

a) π rad = 180° |·2

$2\pi = 360°$

b) π rad = 180° |·3

$3\pi = 540°$

c) π rad = 180° |·4

$4\pi = 720°$

d) π rad = 180° |·5

$5\pi = 900°$

Vastaus: Kulma asteina on a) 360° b) 540° c) 720° d) 900°.

10. Muutetaan kulman yksikkö radiaaneista asteiksi.

a) π rad = 180° |:2

$\frac{\pi}{2} = 90°$

b) π rad = 180° |:3

$\frac{\pi}{3} = 60°$

c) π rad = 180° |:6

$\frac{\pi}{6} = 30°$

d) π rad = 180° |:15

$\frac{\pi}{15} = 12°$

Vastaus: Kulma asteina on a) 90° b) 60° c) 30° d) 12°.

11.Muutetaan kulman yksikkö radiaaneista asteiksi.

a) π rad = 180° $|\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$

$-\frac{3\pi}{2} = –270°$

b) π rad = 180° $|\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$

$-\frac{3\pi}{4} = –135°$

c) π rad = 180° $|\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)$

$-\frac{5\pi}{2} = –450°$

d) π rad = 180° $|\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)$

$-\frac{7\pi}{3} = –420°$

Vastaus: Kulma asteina on a) –270° b) –135° c) –450° d) –420°.

12. Muutetaan kulman yksikkö radiaaneista asteiksi.

a) π rad = 180° $|:\pi$

$$1 = \frac{180°}{\pi} \quad |\cdot 3$$

$$3 = \frac{540°}{\pi}$$

$$3 \approx 172°$$

b) π rad = 180° $|:\pi$

$$1 = \frac{180°}{\pi} \quad |\cdot 12$$

$$12 = \frac{2160°}{\pi}$$

$$3 \approx 688°$$

c) π rad = 180° $|:\pi$

$$1 = \frac{180°}{\pi} \quad |\cdot(-4)$$

$$-4 = -\frac{720°}{\pi}$$

$$3 \approx -229°$$

d) π rad = 180° $|:\pi$

$$1 = \frac{180°}{\pi} \quad |\cdot(-135)$$

$$-135 = -\frac{24\,300°}{\pi}$$

$$-135 \approx -7\,735°$$

Vastaus: Kulma asteina on a) 172° b) 688° c) –229° d) –7 735°.

13. Kulman kärki sijaitsee origossa ja alkukylki positiivisella x-akselilla.

a) Loppukylki positiivisella y-akselilla, joten yksi kulma on 90° = $\frac{\pi}{2}$. Tämän jälkeen kulmat toistuvat 360° = 2π:n välein

Kaikki kulmat asteina $90° + n\cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}$

Radiaaneina $\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

b) Loppukylki positiivisella x-akselilla, joten yksi kulma on 0° = 0. Tämän jälkeen kulmat toistuvat 360° = 2π:n välein

Kaikki kulmat asteina $0° + n\cdot 360° = n\cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}$

Radiaaneina $0 + n\cdot 2\pi = n\cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Vastaus: Kaikki kulmat saadaan a) asteina $90° + n\cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}$ ja radiaaneina $\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ b) asteina $n\cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}$ ja radiaaneina $n\cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

14. a) Pyörimisnopeus 8 000 rpm

Pyörimiskulma 15 sekunnissa $\frac{8000}{60}\cdot 15\cdot 360° = 720\,000°$

b) Pyörimisnopeus 8 000 rpm $= \frac{8000}{60}\cdot 2\pi : 1\ \text{s} = \frac{800\pi}{3}\frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 838\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Vastaus: a) Kulma on 720 000°.   b) Pyörimisnopeus on 838 rad/s.

15. a) Pyörimisnopeus 7 200 rpm

Pyörimiskulma 6 sekunnissa $\frac{7200}{60}\cdot 6\cdot 360° = 259\,200°$

b) Pyörimisnopeus 7 200 rpm $= \frac{7200}{60}\cdot 2\pi : 1\ \text{s} = 240\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 754\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Vastaus: a) Kulma on 259 200°.   b) Pyörimisnopeus on 754 rad/s.

16. Pyörimisnopeus 15 000 rpm $= \frac{15000}{60}\cdot 2\pi : 1\ \text{s} = 500\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 1571\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Vastaus: Pyörimisnopeus on 1 571 rad/s.

17. Polkupyörän nopeus 42 km/h

Kuljettu matka minuutissa $42\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot\frac{1}{60}\text{h} = 0,7\,\text{km} = 700\,\text{m}$

Renkaan kehä $p = \pi d = \pi\cdot 28'' = \pi\cdot 28\cdot 0,0254\ \text{m} = 0,7112\pi\ \text{m}$

Kierroksia minuutissa $\frac{700}{0,7112\pi} \approx 313$

Kierroksia sekunnissa $\frac{700}{0,7112\pi} : 60 = \frac{700}{0,7112\pi}\cdot\frac{1}{60} = \frac{70}{4,2672\pi}$

Renkaan pyörimisnopeus $\frac{70}{4,2672\pi}\cdot 2\pi : 1\ \text{s} = \frac{70}{2,1336}\frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 33\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Vastaus: Rengas pyörii 313 kierrosta minuutissa. Renkaan pyörimisnopeus on 33 rad/s.

18. Auton nopeus 100 km/h

Kuljettu matka sekunnissa $100\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot\frac{1}{3600}\text{h} = \frac{1}{36}\text{km} = \frac{250}{9}\text{m}$

Renkaan kehä $p = \pi d = \pi\cdot 13'' = \pi\cdot 13\cdot 0,0254\ \text{m} = 0,3302\pi\ \text{m}$

Kierroksia sekunnissa $\dfrac{\frac{250}{9}}{0,3302\pi} = \dfrac{250}{2,9718\pi}$

Renkaan pyörimisnopeus $\dfrac{250}{2,9718\pi} \cdot 2\pi : 1\text{ s} = \dfrac{500}{2,9718}\dfrac{1}{\text{s}} \approx 168\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

Vastaus: Renkaan pyörimisnopeus on 168 rad/s.

19. Kulma on yksikköympyrässä.

a) Kulma $\dfrac{5\pi}{4}$ = 225°

Loppukylki kiertää vastapäivään 225°, joten loppukylki sijaitsee pisteessä $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

b) Kulma $-\dfrac{\pi}{4}$ = –45°

Loppukylki kiertää myötäpäivään 45°, joten loppukylki sijaitsee pisteessä $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

a) Kulma $\dfrac{55\pi}{4}$ = 2475° = 6·360° + 315°

Loppukylki kiertää vastapäivään, joten loppukylki sijaitsee pisteessä $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Vastaus: Loppukylki sijaitsee pisteessä a) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ c) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

20. Suoran yhtälö on $2x + 3y = 5$. Mikä on suoran suuntakulma.

Suora $2x + 3y = 5$

$$3y = -2x + 5 \quad |:3$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

Suoran kulmakerroin $k = -\dfrac{2}{3}$

Suoran suuntakulma

$$\tan\alpha = k \,|\, k = -\frac{2}{3}$$

$$\tan\alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\alpha \approx -33{,}7°$$

Vastaus: Suoran suuntakulma on −33,7°.

21. Suora 1: $y = x + 1$
Suoran kulmakerroin $k = 1$
Suoran suuntakulma

$$\tan \alpha = k \,|\, k = 1$$
$$\tan \alpha = 1$$
$$\alpha_1 = 45°$$

Suora 2: $y = 3x - 4$
Suoran kulmakerroin $k = 3$
Suoran suuntakulma

$$\tan \alpha = k \,|\, k = 3$$
$$\tan \alpha = 3$$
$$\alpha_2 = 71{,}6°$$

Leikkauskulma $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 71{,}6° - 45° = 26{,}6°$
<u>Vastaus</u>: Suorat leikkaavat toisensa 26,6 asteen kulmassa.

22. Takapyörän halkaisija x (cm)
Etupyörän halkaisija y (cm)
Halkaisijoiden erotus $x - y = 18$
Kuljettu matka sama $8 \cdot \pi x = 11\pi y$
Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x - y = 18 \\ 8\pi x = 11\pi y \end{cases}$$

Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä $x = 18 + y$ ja sijoitetaan se alempaan yhtälöön.

$$8\pi\,(18 + y) = 11\pi y \quad |:\pi$$
$$3y = 144 \quad |:3$$
$$y = 48$$

Muuttuja $x = 18 + y = 18 + 48 = 66$
<u>Vastaus</u>: Takapyörän halkaisija on 66 cm ja etupyörän halkaisija 48 cm.

23. Etupyörän ympärys on $2\frac{3}{4}$ m ja se pyörähtää matkalla x kertaa.

Takapyörän ympärys on $3\frac{5}{6}$ m ja se pyörähtää matkalla y kertaa.

Lyhin matka, jolla kumpikin pyörä pyörähtää kokonaisen luvun kierroksia

$$2\frac{3}{4}x = 3\frac{5}{6}y$$
$$\frac{11}{4}x = \frac{23}{6}y \quad \Big|\cdot\frac{4}{11}$$
$$x = \frac{46}{33}y$$

Jotta x olisi kokonaisluku y:n pitää olla 33, jolloin $x = 46$.

Kuljettu matka $46 \cdot 2\frac{3}{4}$ m = 126,5 m

<u>Vastaus</u>: Lyhin matkaon 126,5 m, ja etupyörä pyörähtää 46 ja takapyörä 33 kertaa.

24. Taulukoidaan tiedot.

Halkaisija (cm)	Kierrosnopeus (rpm)
56	75
x	140

Vauhtipyörän halkaisija ja kierrosnopeus ovat kääntäen verrannolliset.

$$\frac{56}{x} = \frac{140}{75}$$
$$x = \frac{56 \cdot 75}{140}$$
$$x = 30$$

Vastaus: Toisen pyörän halkaisija on 30 cm.

25. Pyörien halkaisija on 57 cm
Kuljettu matka yhdellä kierroksella πd = 57π cm = 0,57π m

Auton nopeus $100\frac{\text{km}}{\text{h}} = 100 \cdot \frac{1000\text{ m}}{60\text{ min}} = \frac{5000}{3}\frac{\text{m}}{\text{min}}$

Pyörimisnopeus minuutissa $\dfrac{\frac{5000}{3}\frac{\text{m}}{\text{min}}}{0{,}57\pi\text{ m}} = \frac{5000}{1{,}71\pi}$ rpm ≈ 931 rpm

Vastaus: Pyörät pyörivä 931 kierrosta minuutissa.

26. 60 km:n matkalla auton rengas pyörähtää $\frac{60\,000}{0{,}73\pi}$ kierrosta.

Mäntä kulkee $\frac{4\,000}{780} \cdot 0{,}14\text{ m}$, kun rengas pyörähtää kerran.

Männän kulkema matka on $\frac{60\,000}{0{,}73\pi} \cdot \frac{4\,000}{780} \cdot 0{,}14\text{ m} \approx 18\,783\text{ m}$.

Vastaus: 18,8 km

27. Muutetaan kulman yksikkö asteista radiaaneiksi.

a) π rad = 180° |:180

$1° = \frac{\pi}{180}$ |·105

$105° = \frac{7\pi}{12}$

b) π rad = 180° |:180

$1° = \frac{\pi}{180}$ |·315

$315° = \frac{7\pi}{4}$

c) π rad = 180° |:180

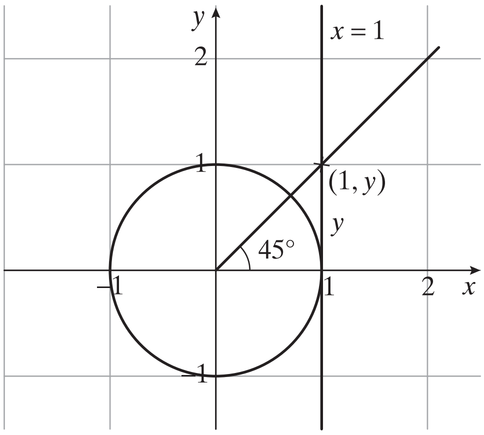
$1° = \frac{\pi}{180}$ |·(–420)

$-420° = -\frac{7\pi}{3}$

Vastaus: Kulma radiaaneina on a) $\frac{7\pi}{12}$ b) $\frac{7\pi}{4}$ c) $-\frac{7\pi}{3}$

2. Trigonometriset funktiot

28. a)



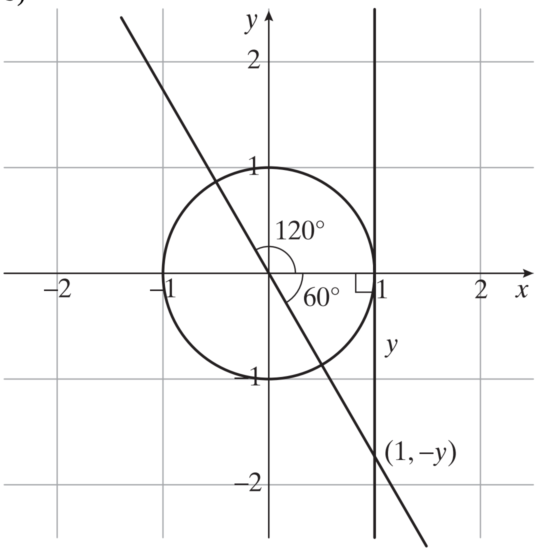
Suorakulmaisesta kolmiosta

$\tan 45° = \frac{y}{1}$

$y = 1$

Leikkauspiste on (1,1)

b)



Suorakulmaisesta kolmiosta

$$\tan 60° = \frac{y}{1}$$

$$y = \sqrt{3}$$

Leikkauspiste on $(1, -\sqrt{3})$

<u>Vastaus</u>: Leikkauspiste on a) (1,1) b) $(1, -\sqrt{3})$.

29. Sinin ja kosinin välinen yhteys

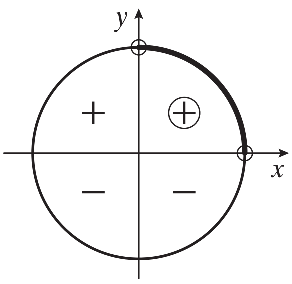
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad | \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \qquad |\sqrt{\ }$$

$$\sin \alpha = \pm\frac{4}{5} \qquad |0 < \alpha < 90°$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$



Muut kysytyt arvot

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = 1 : \frac{4}{3} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

<u>Vastaus</u>: sin $\alpha = \frac{4}{5}$, tan $\alpha = \frac{4}{3}$ ja cot $\alpha = \frac{3}{4}$

30. Sinin ja kosinin välinen yhteys

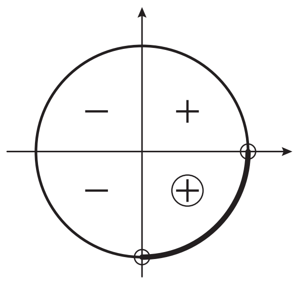
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \mid \sin\alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{24}{25} \qquad \mid\sqrt{\ }$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{24}}{5} \qquad \mid 270° < \alpha < 360°$$

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$



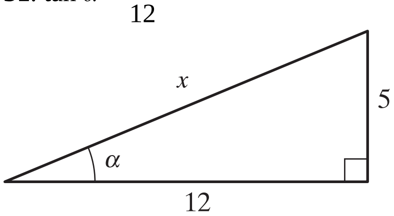
Muut kysytyt arvot

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = -\frac{1}{5} : \frac{2\sqrt{6}}{5} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2\sqrt{6}} = {}^{\sqrt{6})}-\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{6}}{12}} = -1 : \frac{\sqrt{6}}{12} = -{}^{\sqrt{6})}\frac{12}{\sqrt{6}} = -2\sqrt{6}$$

<u>Vastaus</u>: cos $\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, tan $\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{12}$ ja cot $\alpha = -2\sqrt{6}$

31. tan $\alpha = \frac{5}{12}$



Sivu x

$$x^2 = 12^2 + 5^2$$
$$x = 13$$

Tällöin

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$ ja $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ koska kulman α loppukylki kuuluu ensimmäiseen neljännekseen.

Kysytyt arvot

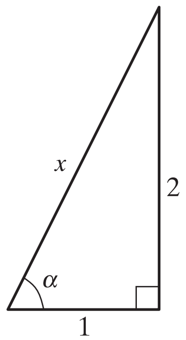
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13} = \frac{120}{169}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{5}{6} : \frac{119}{144} = \frac{5}{6}\cdot\frac{144}{119} = \frac{120}{119}$$

<u>Vastaus</u>: $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = \frac{119}{169}$ ja $\tan 2\alpha = \frac{120}{119}$

32. $\tan\alpha = -2$



Sivu x

$$x^2 = 2^2 + 1^2$$
$$x = \sqrt{5}$$

Tällöin

$\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ ja $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, koska kulma $270° < \alpha < 360°$.

Kysytyt arvot

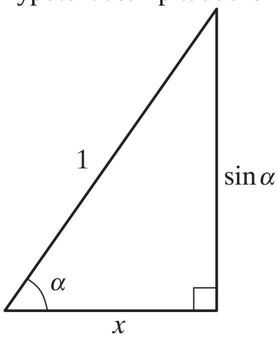
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot(-2)}{1-(-2)^2} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

<u>Vastaus</u>: $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ ja $\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$

33. Sijoitetaan suorakulmaiseen kolmioon kulman α vastaisen kateetin pituudeksi $\sin \alpha$ ja hypotenuusan pituudeksi 1.



Sivu x

$$x^2 + \sin^2\alpha = 1^2$$
$$x^2 = 1 - \sin^2\alpha$$
$$x = \sqrt{1-\sin^2\alpha}\,, \quad \text{koska kulma } \alpha \text{ on terävä.}$$

a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1} = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)^2 - \sin^2\alpha = 1-\sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

c) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

d) $$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}}{1-\left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\right)^2} = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} : \left({}^{1-\sin^2\alpha)} 1 - \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\right)$$

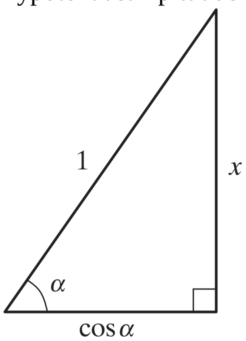
$$= \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} : \left(\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\right) = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \cdot \frac{1-\sin^2\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-2\sin^2\alpha}$$

<u>Vastaus</u>: a) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ b) $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ c) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

d) $\tan 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-2\sin^2\alpha}$

34. Sijoitetaan suorakulmaiseen kolmioon kulman α viereisen kateetin pituudeksi cos α ja hypotenuusan pituudeksi 1.



Sivu x

$$x^2 + \cos^2 \alpha = 1^2$$

$$x^2 = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$x = \sqrt{1-\cos^2\alpha}\,, \quad \text{koska kulma } \alpha \text{ on terävä.}$$

a) $\sin \alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1} = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

b) $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2\sqrt{1-\cos^2\alpha}\cos\alpha = 2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

c) $\sin 3\alpha = \sin \alpha\,(4\cos^2 \alpha - 1) = \sqrt{1-\cos^2\alpha}\,(4\cos^2 \alpha - 1) = (4\cos^2 \alpha - 1)\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

d) $\tan \alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}}{1-\left(\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} : \left({}^{\cos^2\alpha)}1-\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} : \left(\frac{\cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{2\cos^2\alpha - 1}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{1}{\dfrac{2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{2\cos^2\alpha-1}} = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

Vastaus: a) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ b) $\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2 \alpha}$

c) $\sin 3\alpha = (4\cos^2 \alpha - 1)\sqrt{1-\cos^2 \alpha}$ d) $\cot 2\alpha = \dfrac{2\cos^2 \alpha - 1}{2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}$

35. a) $1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 1 = 0$
b) $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\cos 2\alpha$
c) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin 2\alpha$
Vastaus: a) 0 b) $-\cos 2\alpha$ c) $1 - 2 \sin 2\alpha$

36. Osoitetaan, että $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha$.

$$
\begin{aligned}
\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \quad | \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\
&= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\
&= -\cos 2\alpha \quad \square
\end{aligned}
$$

37. Osoitetaan, että $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha$.

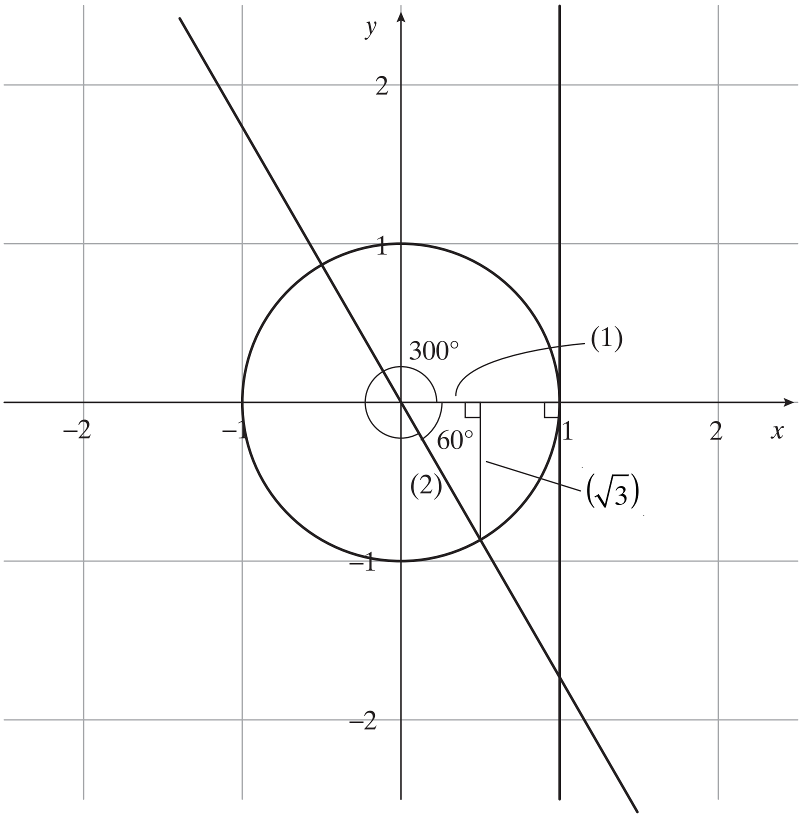
$$
\begin{aligned}
\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha &= (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha)(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) \quad | \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \\
&= \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha \qquad |\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\
&= 1 - \sin^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha \\
&= 1 - 2\sin^2 2\alpha \quad \square
\end{aligned}
$$

38. Sievennetään lauseketta.

$$
\begin{aligned}
\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= \sin^4 \alpha \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha \cos^2 \alpha \qquad |\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\
&= \sin^4 \alpha(1 - \cos^2 \alpha) + \cos^4 \alpha(1 - \sin^2 \alpha) \\
&= \sin^4 \alpha - \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha - \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha \\
&= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha \\
&= \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\
&= \sin^2 \alpha(1 - \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\
&= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\
&= 1 - 3\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \qquad | \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha\cos \alpha \\
&= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha \qquad \left| \begin{array}{l} \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha \end{array} \right. \\
&= 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\alpha\right) \\
&= 1 - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\alpha \\
&= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\alpha
\end{aligned}
$$

Vastaus: Vakiot ovat $A = \frac{5}{8}$ ja $B = \frac{3}{8}$

39. a) Kulma 300°



Kolmion sivujen suhteet saadaan muistikolmiosta ja merkit merkkikaavioista.
sin 300° < 0 ja cos 300° > 0
Trigonometristen funktioiden arvot

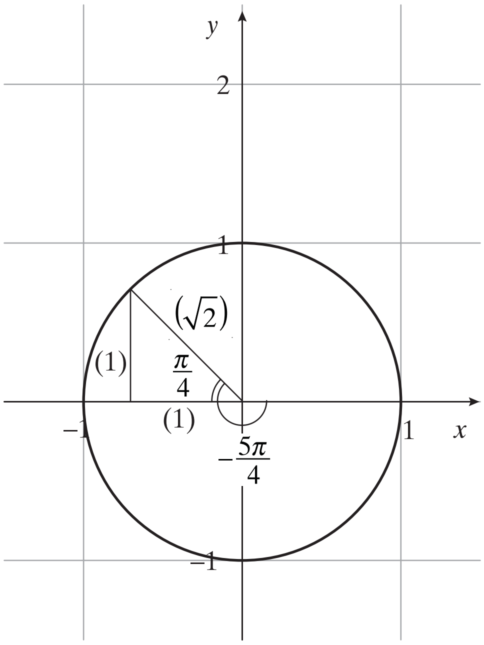
$\sin 300° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 300° = \dfrac{1}{2}$

$\tan 300° = \dfrac{\sin 300°}{\cos 300°} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

$\cot 300° = \dfrac{1}{\tan 300°} = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) Kulma $\alpha = -\dfrac{5\pi}{4}$



Kolmion sivujen suhteet saadaan muistikolmiosta ja merkit merkkikaavioista.

$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) > 0$ ja $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) < 0$

Trigonometristen funktioiden arvot

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$$

$$\cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{1}{-1} = -1$$

<u>Vastaus</u>: Katso tehtävä.

40. Sinin ja kosinin välinen yhteys

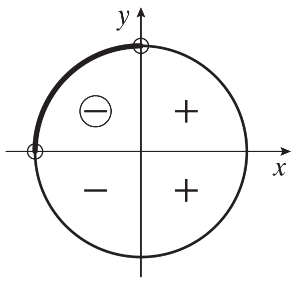
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad | \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \qquad |\sqrt{}$$

$$\cos \alpha = \pm\frac{4}{5} \qquad |90° < x < 360°$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$$



a) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

b) $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

<u>Vastaus</u>: a) $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$ b) $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$

41. a) Taulukkokirjasta $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin(\alpha + 60°) = \sin \alpha \cos 60° + \cos \alpha \sin 60°$

$$= \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} + \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha$$

b) Taulukkokirjasta $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
$\cos(\alpha - 60°) = \cos \alpha \cos 60° + \sin \alpha \sin 60°$

$$= \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} + \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha + \frac{1}{2}\cos \alpha$$

<u>Vastaus</u>: a) $\sin(\alpha + 60°) = \frac{1}{2}\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha$ b) $\cos(\alpha - 60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha + \frac{1}{2}\cos \alpha$

42. Taulukkokirjasta $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{\sqrt{2})}{=} \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Taulukkokirjasta $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{\sqrt{2})}{=} \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Vastaus: $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

43. Sinin ja kosinin välinen yhteys

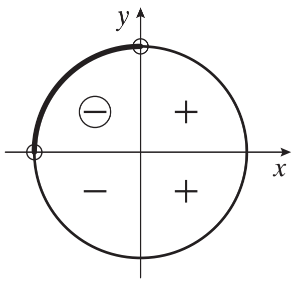
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad | \ \sin x = \frac{12}{13}$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{25}{169} \quad |\sqrt{\ }$$

$$\cos x = \pm\frac{5}{13} \quad | \ \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

$$\cos x = -\frac{5}{13}$$



Vastaus: $\cos x = -\dfrac{5}{13}$

44. Sinin ja kosinin välinen yhteys

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad | \ \sin x = -\frac{1}{5}$$

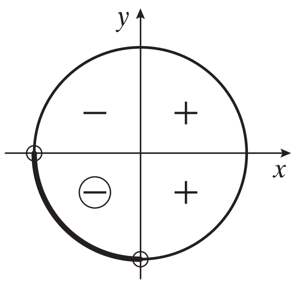
$$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{24}{25} \quad |\sqrt{\ }$$

$$\cos x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5} \quad | \ \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\cos x \approx -0{,}980$$



Vastaus: $\cos x = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5} \approx -0{,}980$

45. Sinin ja kosinin välinen yhteys

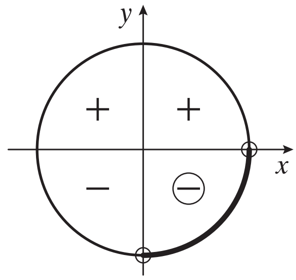
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad | \cos x = \frac{5}{13}$$

$$\sin^2 x + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{144}{169} \qquad |\sqrt{\ }$$

$$\sin x = \pm\frac{12}{13} \qquad | \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

$$\sin x = -\frac{12}{13}$$



Kysytty arvo sin 2x = 2sin x cos x = $2\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\frac{5}{13} = -\frac{120}{169}$

Vastaus: sin 2x = $-\frac{120}{169}$

46. Sinin ja kosinin välinen yhteys

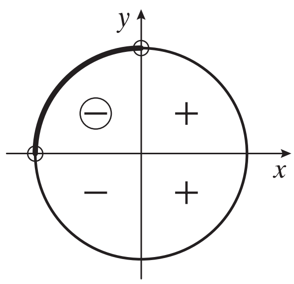
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad | \sin x = \frac{7}{25}$$

$$\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{576}{625} \qquad |\sqrt{\ }$$

$$\cos x = \pm\frac{24}{25} \qquad | \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

$$\cos x = -\frac{24}{25}$$



Kysytty arvo tan x = $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{7}{25}}{-\frac{24}{25}} = -\frac{7}{24}$

Vastaus: tan x = $-\frac{7}{24}$

47. Kolmion kulmat x, 2x ja 3x
Kolmion kulmien summa on 180°.

$x + 2x + 3x = 180°$

$6x = 180° \quad |:6$

$x = 30°$

Kolmion kulmat
$x = 30°$
$2x = 2\cdot 30° = 60°$
$3x = 3\cdot 30° = 90°$

Lausekkeen arvo

$$(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^2 = (\sin 30° + \sin 60° + \sin 90°)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2$$

$$= \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{4} = \frac{12+6\sqrt{3}}{4} = \frac{6+3\sqrt{3}}{2}$$

<u>Vastaus</u>: Lausekkeen arvo on $\dfrac{6+3\sqrt{3}}{2}$.

48. Sinin ja kosinin välinen yhteys

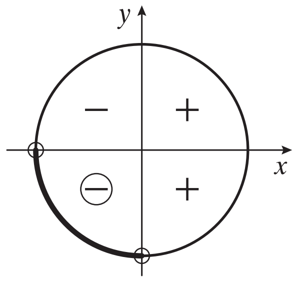
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad |\sin x = -\frac{8}{17}$$

$$\left(-\frac{8}{17}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{225}{289} \qquad |\sqrt{\ }$$

$$\cos x = \pm\frac{15}{17} \qquad |\pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

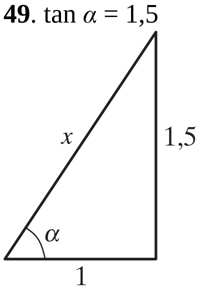
$$\cos x = -\frac{15}{17}$$



Kysytty arvo sin 2x = 2sin x cos x = $2 \cdot \left(-\frac{8}{17}\right) \cdot \left(-\frac{15}{17}\right) = \frac{240}{289}$

<u>Vastaus</u>: sin 2x = $\dfrac{240}{289}$

49. tan α = 1,5



Sivu x

$$x^2 = 1{,}5^2 + 1^2$$

$$x = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Tällöin

$$\sin\alpha = -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} \text{ ja } \cos\alpha = -\frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$
, koska kulma 180° < α < 360° eli 180° < α < 270°.

Kysytyt arvot

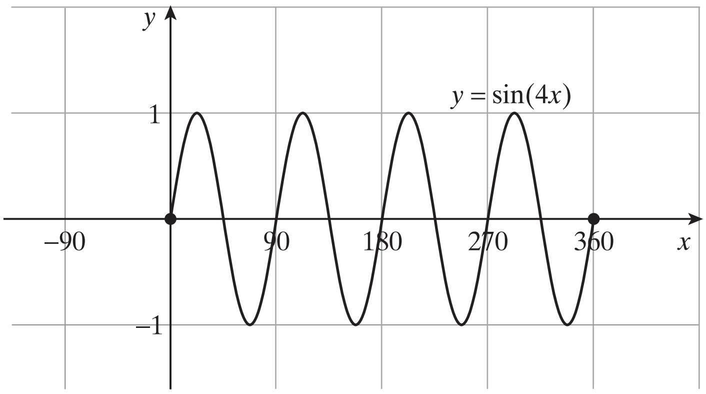
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \frac{12}{13}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 - \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{4}{13} - \frac{9}{13} = -\frac{5}{13}$$

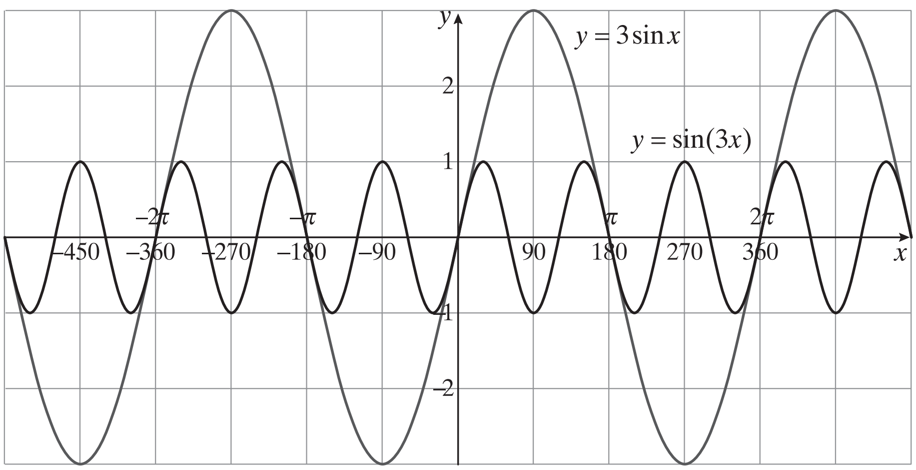
Vastaus: $\sin 2\alpha = \frac{12}{13}$ ja $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$

3. Trigonometristen funktioiden kuvaajat

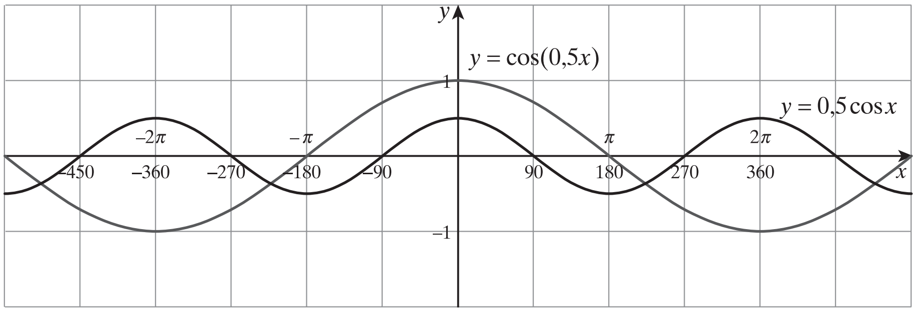
50. Funktion $f(x) = \sin 4x$ kuvaaja, kun $0° \le x \le 360°$



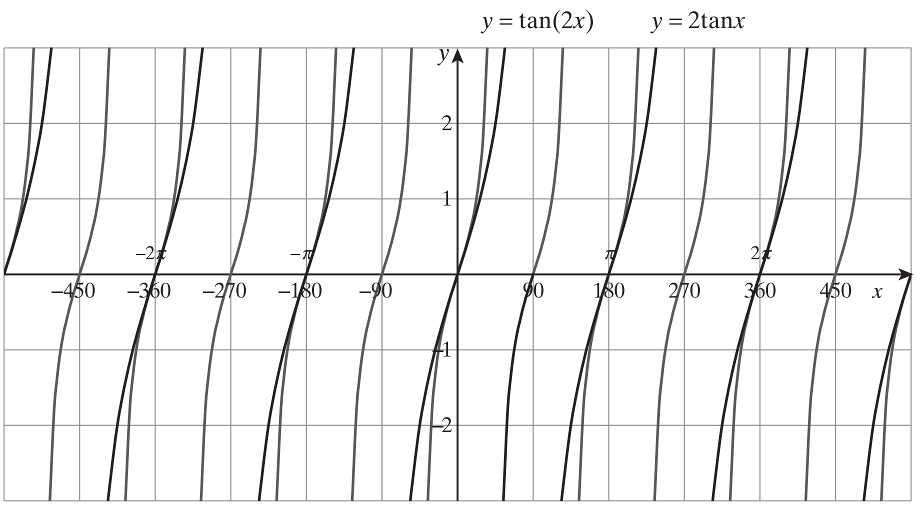
51. Funktioiden $f(x) = 3\sin x$ ja $g(x) = \sin 3x$ kuvaajat



52. Funktioiden $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$ ja $g(x) = \cos \frac{1}{2}x$ kuvaajat.



53. Funktioiden $f(x) = 2\tan x$ ja $g(x) = \tan 2x$ kuvaajat.



54. a) Funktio $f(x) = \sin 5x$
Funktion amplitudi $|A| = 1$
Perusjakso $5x = n \cdot 2\pi \quad |:5$

$$x = n \cdot \frac{2\pi}{5}$$

Perusjakso on $\frac{2\pi}{5}$.

b) Funktio $g(x) = 5\cos \frac{x}{3}$

Funktion amplitudi $|A| = 5$

Perusjakso $\frac{x}{3} = n \cdot 2\pi \quad |\cdot 3$

$$x = n \cdot 6\pi$$

Perusjakso on 6π.

c) Funktio $h(x) = 3\tan\left(\frac{x}{12} + \frac{\pi}{2}\right)$

Perusjakso $\frac{x}{12} = n \cdot \pi \quad |\cdot 12$

$$x = n \cdot 12\pi$$

Perusjakso on 12π.

Ei amplitudia, koska kyseessä on tangentti.

<u>Vastaus</u>: a) Amplitudi on $|A| = 1$ja perusjakso $\frac{2\pi}{5}$. b) Amplitudi on $|A| = 5$ja perusjakso 6π.

c) Ei amplitudia ja perusjakso on 12π.

55. a) Funktio $f(x) = 25\sin(12x + 1)$
Funktion amplitudi $|A| = 25$
Perusjakso $12x = n \cdot 2\pi \quad |:12$

$$x = n \cdot \frac{\pi}{6}$$

Perusjakso on $\frac{\pi}{6}$.

b) Funktio $g(x) = -\cos(-x)$
Funktion amplitudi $|A| = 1$
Perusjakso on 2π.

c) Funktio $h(x) = 3\tan(7x - 5)$
Ei amplitudia
Perusjakso $7x = n \cdot \pi \quad |:7$

$$x = n \cdot \frac{\pi}{7}$$

Perusjakso on $\frac{\pi}{7}$.

Vastaus: a) Amplitudi on $|A| = 25$ ja perusjakso $\frac{\pi}{6}$. b) Amplitudi on $|A| = 1$ ja perusjakso 2π. c) Ei amplitudia ja perusjakso $\frac{\pi}{7}$.

56. a) Funktio $f(x) = \cos 2x$

$-1 \le \cos 2x \le 1$

Funktion arvojoukko on $-1 \le y \le 1$.

b) Funktio $g(x) = 4\cos 2x - 3$

$-1 \le \cos 2x \le 1 \quad |\cdot 4$

$-4 \le 4\cos 2x \le 4 \quad | -3$

$-7 \le 4\cos 2x - 3 \le 1$

Funktion arvojoukko on $-7 \le y \le 1$.

c) Funktio $h(x) = 3\cos^2 x - 1$

$0 \le \cos^2 x \le 1 \quad |\cdot 3$

$0 \le 3\cos^2 x \le 3 \quad | -1$

$-1 \le 3\cos^2 x - 1 \le 2$

Funktion arvojoukko on $-1 \le y \le 2$.

Vastaus: Funktion arvojoukko on a) $-1 \le y \le 1$ b) $-7 \le y \le 1$ c) $-1 \le y \le 2$.

57. a) Funktio $f(x) = -\sin 3x - 3$

$-1 \le \sin 3x \le 1 \quad |\cdot(-1)$

$-1 \le -\sin 3x \le 1 \quad |-3$

$-4 \le -\sin 3x - 3 \le -2$

Funktion arvojoukko on $-4 \le y \le -2$.

b) Funktio $g(x) = \dfrac{1}{2\sin x + 5}$

$-1 \le \sin x \le 1 \quad |\cdot 2$

$-2 \le 2\sin x \le 2 \quad |+5$

$3 \le 2\sin 3x + 5 \le 7$

$$\frac{1}{7} \le \frac{1}{2\sin x + 5} \le \frac{1}{3}$$

Funktion arvojoukko on $\frac{1}{7} \le y \le \frac{1}{3}$.

c) Funktio $h(x) = \dfrac{6}{2\cos^2 x + 1}$

$0 \le \cos^2 x \le 1 \quad |\cdot 2$

$0 \le 2\cos^2 x \le 2 \quad | +1$

$1 \le 2\cos^2 x + 1 \le 3$

$$\frac{1}{3} \le \frac{1}{2\cos^2 x + 1} \le 1 \quad |\cdot 6$$

$$2 \le \frac{6}{2\cos^2 x + 1} \le 6$$

Funktion arvojoukko on $2 \le y \le 6$.

Vastaus: Funktion arvojoukko on a) $-4 \le y \le -2$ b) $\frac{1}{7} \le y \le \frac{1}{3}$ c) $2 \le y \le 6$.

58.a) Funktio $f(x) = \sin^2 x - 3\cos 2x + \cos^2 x - 2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 3\cos 2x - 2$

$= 1 - 3\cos 2x - 2 = -1 - 3\cos 2x$

$-1 \le \cos 2x \le 1 \quad |\cdot(-3)$

$-3 \le -3\cos 2x \le 3 \quad | -1$

$-4 \le -3\cos 2x - 1 \le 2$

Funktion arvojoukko on $-4 \le y \le 2$.

b) Funktio $g(x) = 4\sin x\cos x - 5 = 2\cdot 2\sin x\cos x - 5 = 2\sin 2x - 5$

$-1 \le \sin 2x \le 1 \quad |\cdot 2$

$-2 \le 2\sin 2x \le 2 \quad | -5$

$-7 \le 2\sin 2x - 5 \le -3$

Funktion arvojoukko on $-7 \le y \le -3$.

c) Funktio $h(x) = \dfrac{12}{4\sin^2 x + 2}$

$0 \le \sin^2 x \le 1 \quad |\cdot 4$

$0 \le 4\sin^2 x \le 4 \quad | +2$

$2 \le 4\sin^2 x + 2 \le 6$

$$\frac{1}{6} \le \frac{1}{4\sin^2 x + 2} \le \frac{1}{2} \quad |\cdot 12$$

$$2 \le \frac{1}{4\sin^2 x + 2} \le 6$$

Funktion arvojoukko on $2 \le y \le 6$.

Vastaus: Funktion arvojoukko on a) $-4 \le y \le 2$ b) $-7 \le y \le -3$ c) $2 \le y \le 6$.

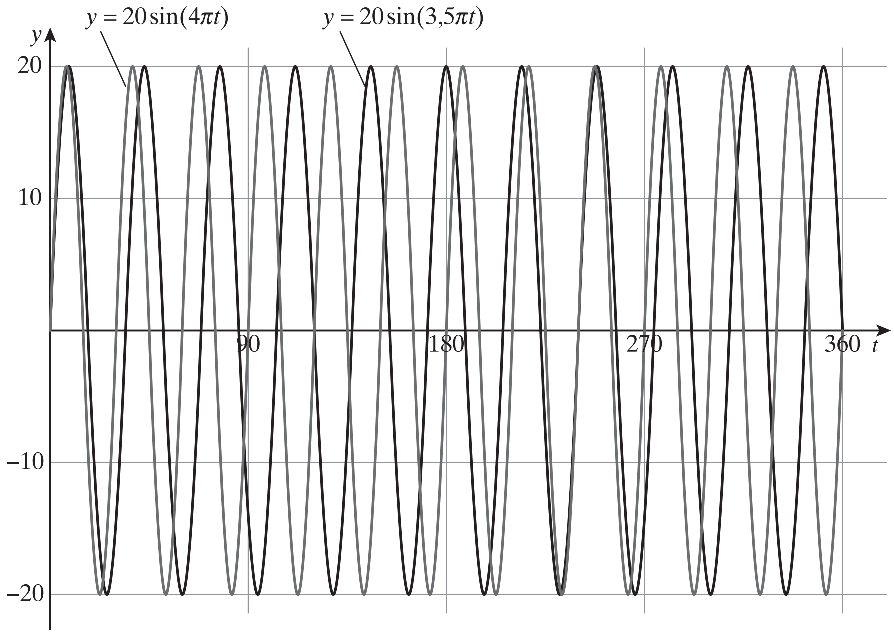
59. Oskarin jalkojen ympyräliikettä kuvaavat koordinaatit

$x = 20\cos(3{,}5\pi t)$ ja $y = 20\sin(3{,}5\pi t)$.

Juuditin jalkojen ympyräliikettä kuvaavat koordinaatit

$x = 20\cos(4\pi t)$ ja $y = 20\sin(4\pi t)$,

missä t on aika sekunteina



Kummankin ympyräliikkeen *x*- ja *y*-koordinaatin pienin arvo on -20 ja suurin arvo on 20, joten ympyräliikkeen säde on 20 cm ja tämä on pedaalin pituus.

Koska Juuditin jalkojen liikefunktiossa muuttujan kerroin on suurempi ($4\pi > 3{,}5\pi$), on funktion perusjakson pituus lyhyempi ja siten Juudit polkee tiuhempaan tahtiin.

Vastaus: Pedaalin varsi on 20 cm pitkä. Juudit polkee tiuhempaan tahtiin.

60. Vuoroveden korkeutta kuvaava funktio $f(x) = 5{,}5\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 7$, missä *x* on aika tunteina ja funktion arvo veden korkeus.

a) Veden korkeuden suurin vaihtelu $2|A| = 2 \cdot 5{,}5$ m = 11 m

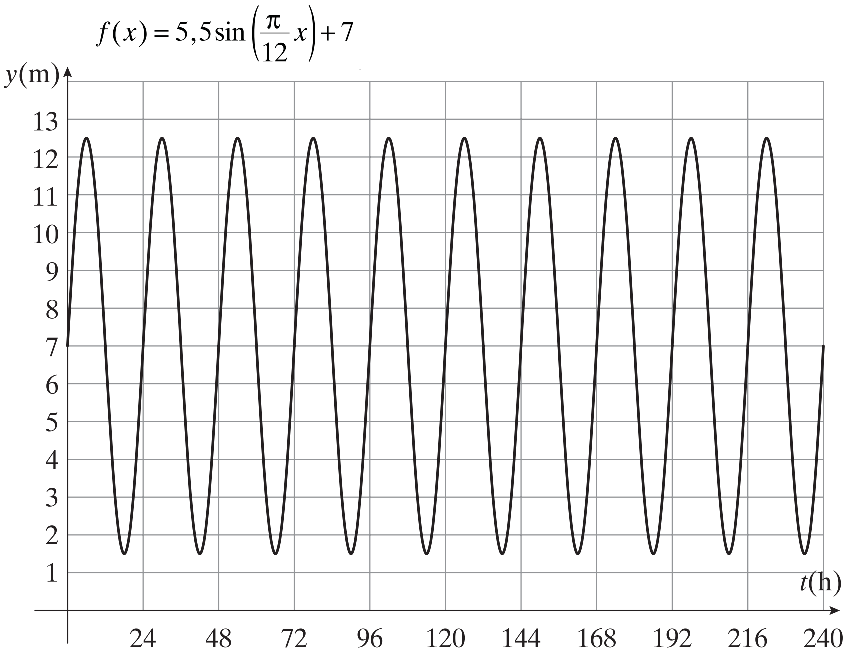
b) Jakson pituus

$$\frac{\pi}{12}x = n \cdot 2\pi \quad \Big| \cdot \frac{12}{\pi}$$

$$x = n \cdot 24$$

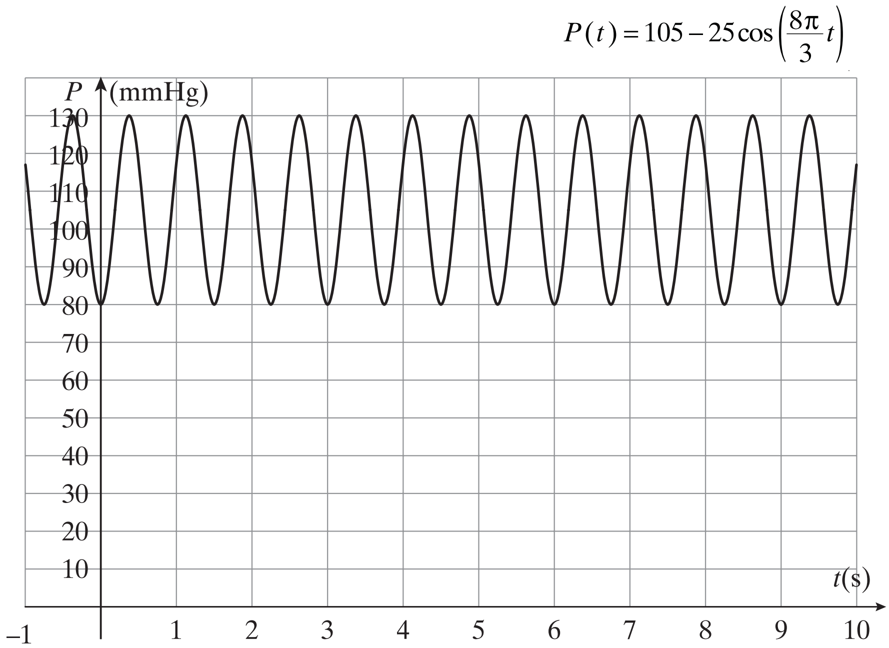
Jakson pituus on 24 tuntia.

c) Piirretään funktion kuvaaja.



<u>Vastaus</u>: a) Veden korkeuden suurin vaihtelu on 11 m. b) Jakson pituus on 24 tuntia.

61.



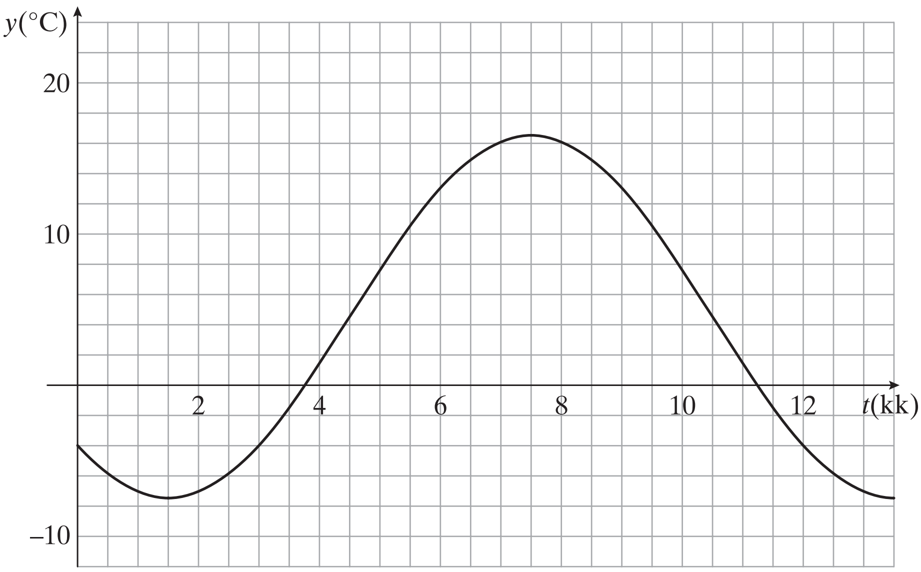
Alpon sydämen yhden lyönnin jakson aika on

$$\frac{8\pi}{3}t = 2\pi \quad |\cdot 3$$
$$8\pi t = 6\pi \quad |:(8\pi)$$
$$t = \frac{3}{4}$$

Lyöntitiheys minuutissa $\dfrac{60}{\frac{3}{4}} = 60 \cdot \dfrac{4}{3} = 80$

Vastaus: Lyöntitiheys minuutissa on 80.

62.



a) Korkein lämpötila on 16,5°C heinäkuun puolivälissä ja matalin –7,5°C helmikuun puolivälissä.

b) Vuoden päiväkohtaisten keskilämpötilojen vaihtelu on siniaallon muotoista, joten funktio on muotoa $f(x) = A\sin(bx + c) + D$

Amplitudi $|A| = \dfrac{16{,}5°\text{C} - (-7{,}5°\text{C})}{2} = 12°\text{C}$

Kuvaaja kulkee pisteen (7,5; 16,5) kautta, joten $f(7{,}5) = 16{,}5$.

$$A\sin(bx + c) + D = 16{,}5 \quad |A = 12,\ \sin(bx + c) = 1$$
$$12 \cdot 1 + D = 16{,}5$$
$$D = 4{,}5$$

Katsottaessa korkeudelta $y = 4{,}5$°C, huomataan ,että sinifunktio on siirtynyt oikealle 4,5 kuukauden verran, joten $c = -4{,}5$.

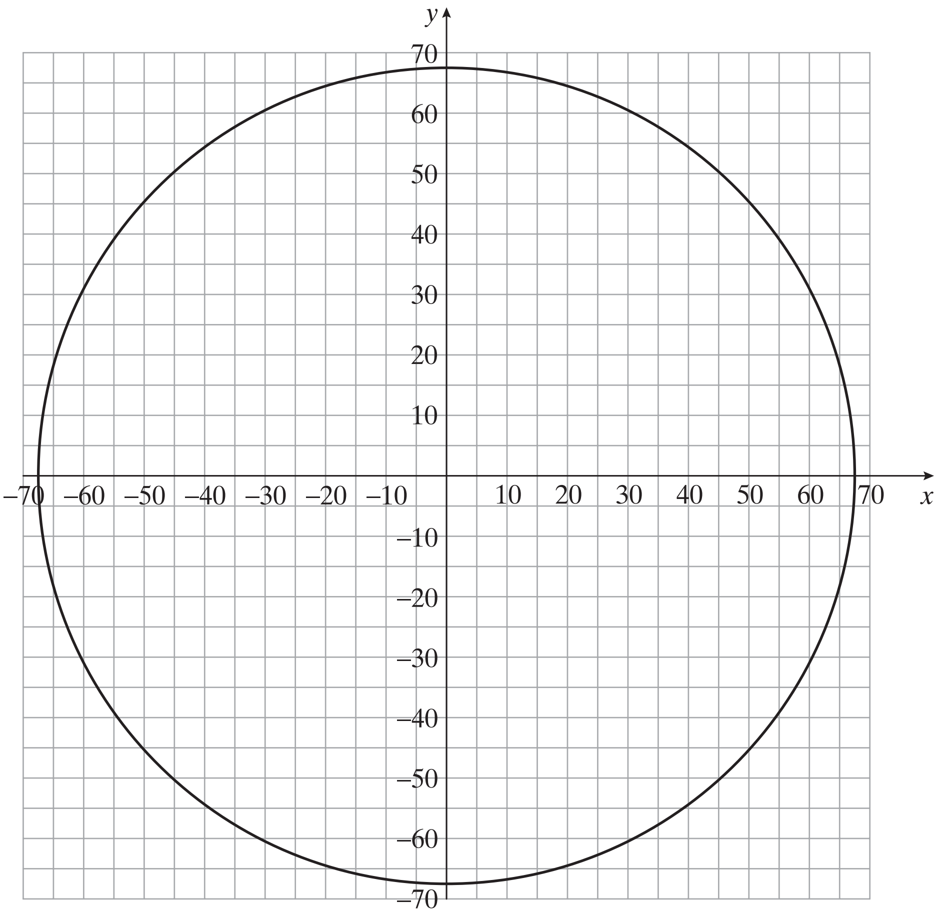
Jakso

$$bx = 2\pi \,|\, x = 12$$
$$12b = 2\pi \,|:5$$
$$b = \frac{\pi}{6}$$

Päivälämpötiloja kuvaava funktio $f(x) = 12\sin[\frac{\pi}{6}(x - 4,5)] + 4,5$

Vastaus: a) Korkein lämpötila on 16,5°C heinäkuun puolivälissä ja matalin –7,5°C helmikuun puolivälissä. b) Funktion lauseke on $f(x) = 12\sin[\frac{\pi}{6}(x - 4,5)] + 4,5$.

63. Maailmanpyörän säde on $\frac{135 \text{ m}}{2} = 67,5 \text{ m}$.



Yksikköympyrän kehäpisteen y-koordinaatti on keskuskulman x sini eli $y = \sin x$.
Maailmanpyörän säde on 67,5, joten maailmanpyörän kehäpisteen y-koordinaatti on $y = 67{,}5\sin x$.
Asetetaan pyörän keskipiste origoon ja lähtöpiste pisteeseen (67,5;0) sekä pyörimissuunta vastapäivään kuten yksikköympyrässä.

Maailmanpyörä kääntyy yhdessä minuutissa $\frac{360°}{30} = 12°$.

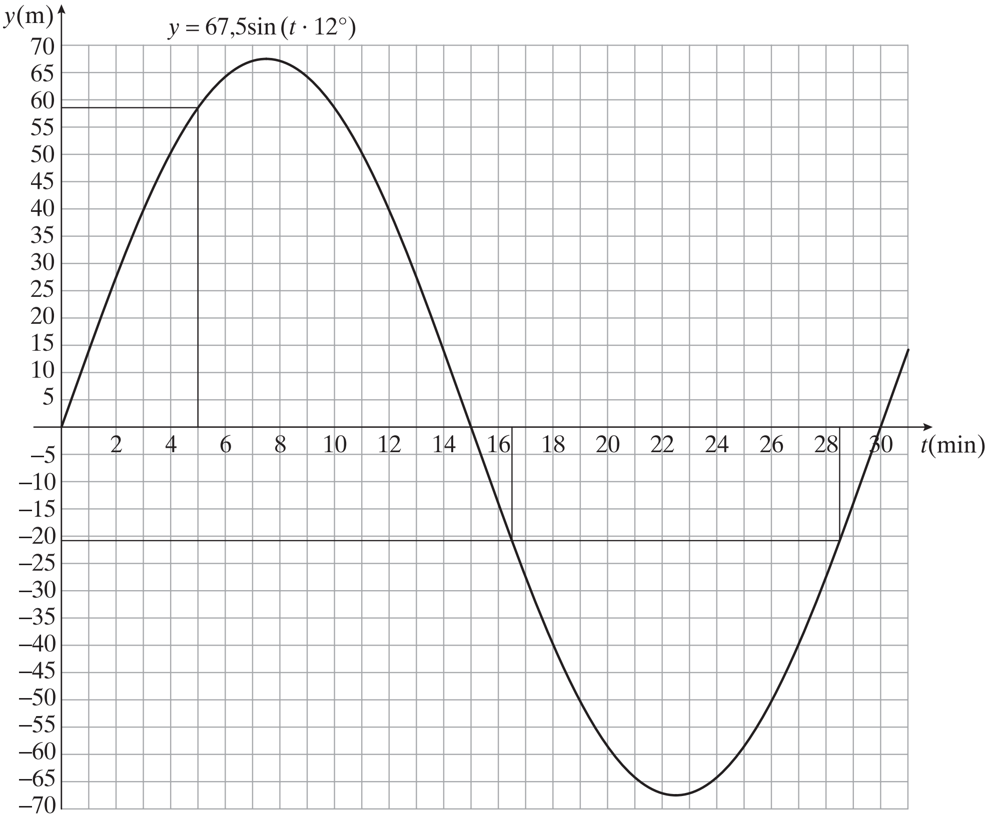
Yhden minuutin kuluttua $y = 67{,}5\sin 12° \approx 27$
Kahden minuutin kuluttua $y = 67{,}5\sin(2 \cdot 12°) \approx 50$
.
.
.
t minuutin kuluttua $y = 67{,}5\sin(t \cdot 12°)$

Korkeimmillaan matkustaja on, kun pyörä on pyörähtänyt $\frac{1}{4}$ kierrosta eli $\frac{30}{4} = 7{,}5$ minuutin kuluttua. Korkeimman kohdan y-koordinaatti on $y = 67{,}5$.
Matalimmillaan matkustaja on $\frac{3}{4}$ kierroksen kuluttua, jolloin aikaa on kulunut $\frac{3}{4} \cdot 30 \text{ min} = 22{,}5 \text{ min}$. Matalimman kohdan y-koordinaatti on $y = -67{,}5$.

Taulukoidaan matkustajan paikka 2 minuutin välein ja piirretään kuvaaja.

Aika t (min)	$y = 67{,}5\sin(t \cdot 12°)$
2	$67{,}5\sin(2 \cdot 12°) \approx 27$
4	50
6	64
7,5	67,5
8	67
10	58
12	40
14	14
16	−14
18	−40
20	−58
22	−67
24	−64
26	−50
28	−27
30	0

Piirretään kuvaaja



a) 5 minuutin kuluttua matkustaja on pisteessä (5,58). Koska *x*–akseli on 67,5 metrin korkeudella maanpinnasta, on matkustajan korkeus 67,5 m + 58 m = 125,5 m.

b) Koska *x*-akseli on 67,5 metrin korkeudella maanpinnasta, on 45 metrin korkeudella olevan pisteen *y*-koordinaatti 45 − 67,5 = −22,5. Suora $y = -22,5$ leikkaa kuvaajan kohdissa $x = 16,5$ ja $x = 28,5$. Matkustaja on 45 metrin korkeudella, kun aikaa on kulunut 16,5 minuuttia tai 28,5 minuuttia.

Vastaus: a) 127,5 metrin korkeudella, b) kun aikaa on kulunut 16,5 minuuttia tai 28,5 minuuttia.

64. Käpytikan lento on siniaallon muotoista, joten funktio on muotoa $f(x) = A\sin(bx)$

Amplitudi $A = \dfrac{2\text{ m}}{2} = 1\text{ m}$

Jakso

$$bx = 2\pi \quad |x = 5$$
$$5b = 2\pi \quad |:5$$
$$b = \frac{2\pi}{5}$$

Vastaus: Lentoa kuvaava funktio on $f(x) = \sin\dfrac{2\pi x}{5}$.

65. a) Funktio $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 2 = \cos 2x + 2$

$$-1 \le \cos 2x \le 1 \quad |+2$$
$$1 \le \cos 2x + 2 \le 3$$

Funktion pienin arvo on 1.
Funktion suurin arvo on 3.

b) Funktio $f(x) = \dfrac{12}{\sin 3x + 5}$

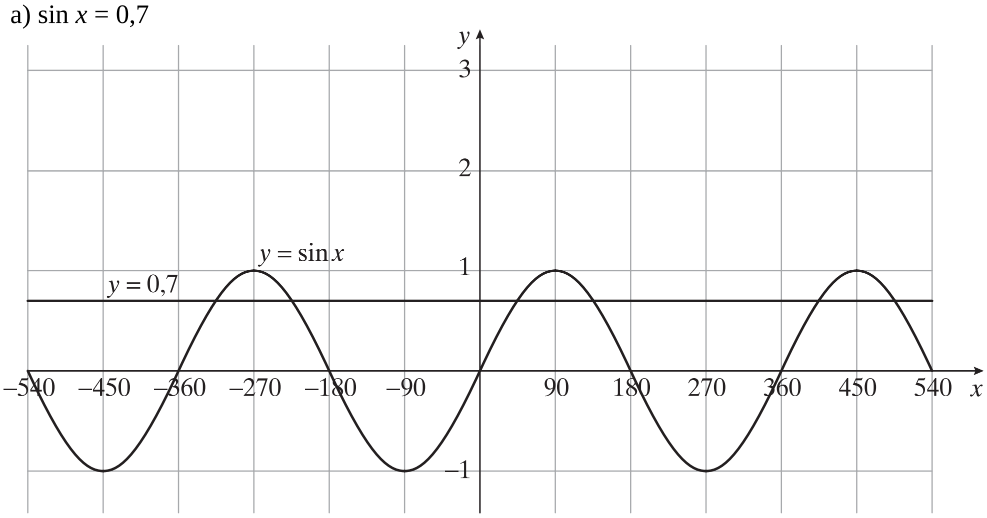
$$-1 \le \sin 3x \le 1 \quad |+5$$
$$4 \le \sin 3x + 5 \le 6$$
$$\frac{1}{6} \le \frac{1}{\sin 3x + 5} \le \frac{1}{4} \quad |\cdot 12$$
$$2 \le \frac{12}{\sin 3x + 5} \le 3$$

Funktion pienin arvo on 2.
Funktion suurin arvo on 3.

Vastaus: a) Funktion pienin arvo on 1 ja suurin 3.
b) Funktion pienin arvo on 2 ja suurin 3.

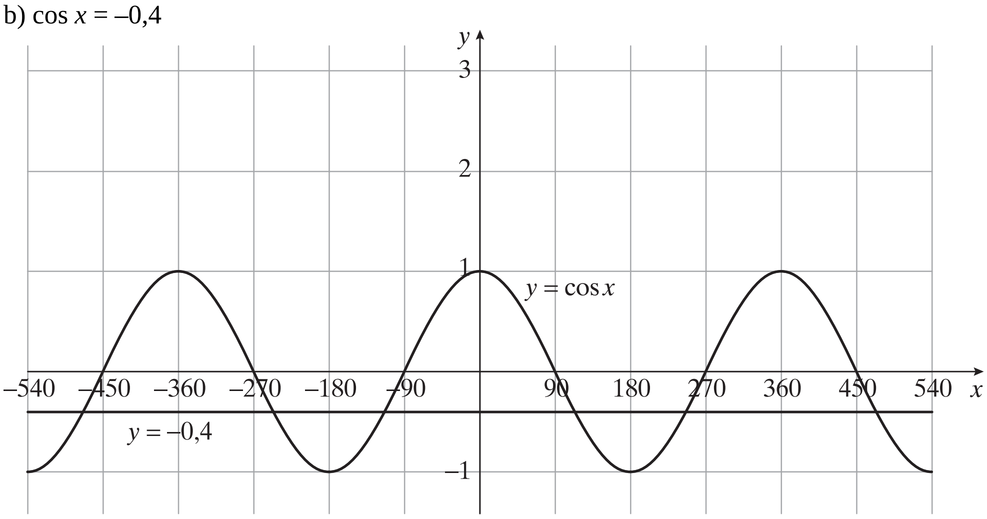
4. Trigonometriset yhtälöt

66. Ratkaistaan graafisesti yhtälöt.
a) $\sin x = 0{,}7$



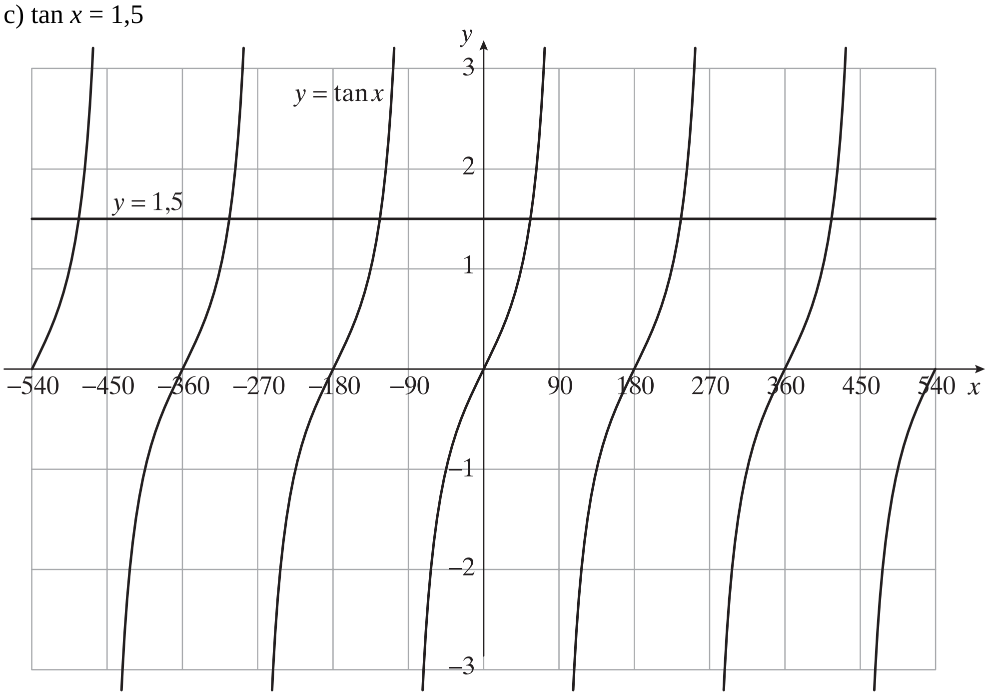
$x \approx 40° + n \cdot 360°$ tai $x \approx 140° + n \cdot 360°$, $n \in \mathbb{Z}$

b) cos x = –0,4



$x \approx \pm 110° + n \cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}$

c) tan x = 1,5

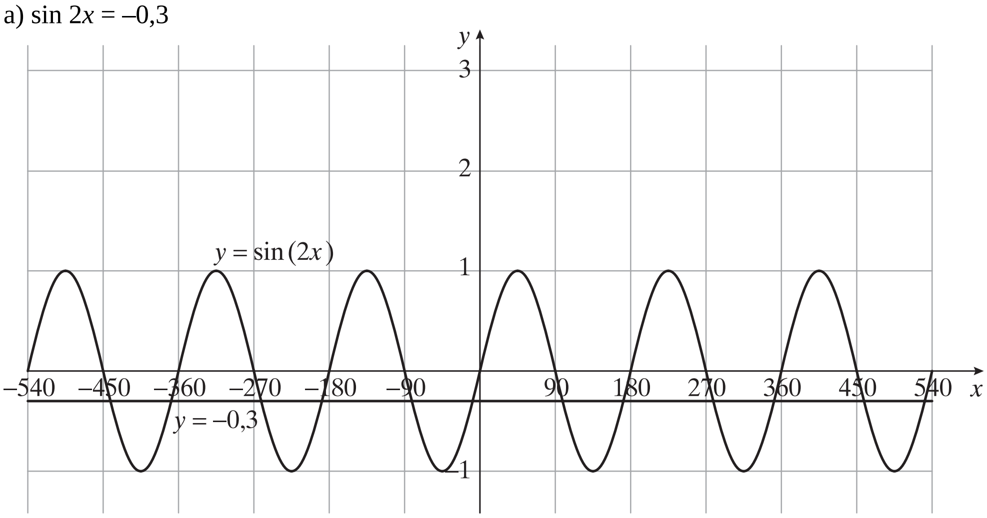


$x \approx 60° + n \cdot 180°,\ n \in \mathbb{Z}$

<u>Vastaus</u>: a) 40° + n·360° tai 140° + n·360° b) ±110° + n·360° c) 60° + n·180°, $n \in \mathbb{Z}$

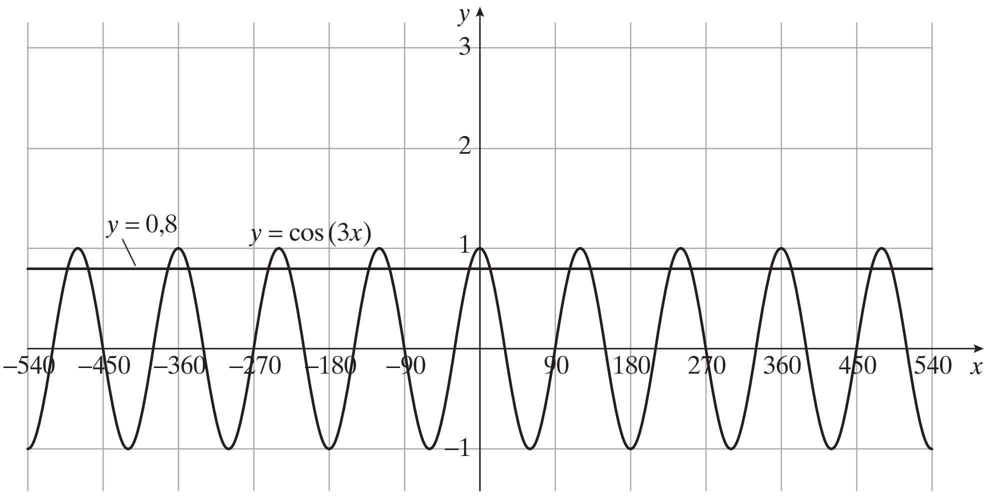
67. Ratkaistaan graafisesti yhtälöt.

a) $\sin 2x = -0{,}3$



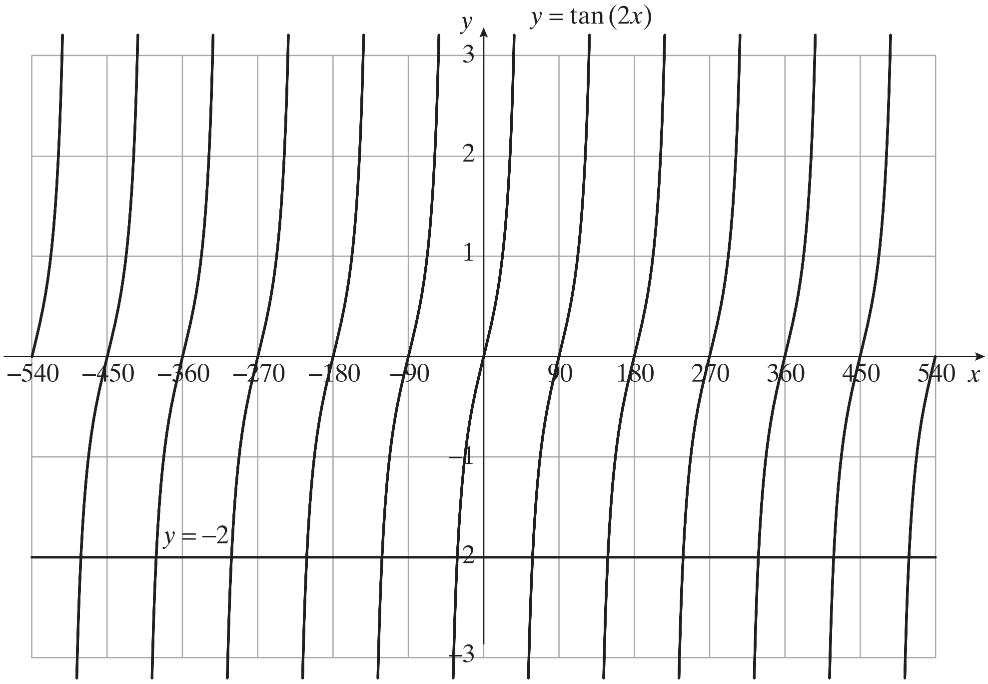
$x \approx -10° + n \cdot 180°$ tai $x \approx -170° + n \cdot 180°$, $n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos 3x = 0{,}8$



$x \approx \pm 10° + n \cdot 120°$, $n \in \mathbb{Z}$

c) tan $2x = –2$.



$x \approx –30° + n·90°$, $n \in \mathbb{Z}$

Vastaus: a) $–10° + n·180°$ tai $–170° + n·180°$ b) $\pm 10° + n·120°$ c) $–30° + n·90°$, $n \in \mathbb{Z}$

68. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin x = 0{,}83$

$\sin x \approx \sin 56°$

$x = 56° + n·360°$ tai $x = 180° – 56° + n·360°$

$x = 124° + n·360°$, $n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = –0{,}15$

$\cos x \approx \cos 99°$

$x = \pm 99° + n·360°$, $n \in \mathbb{Z}$

c) $\tan x = 1{,}25$

$\tan x \approx \tan 51°$

$x = 51° + n·180°$, $n \in \mathbb{Z}$

Vastaus: a) $x = 56° + n·360°$ tai $x = 124° + n·360°$ b) $x = \pm 99° + n·360°$ c) $x = 51° + n·180°$, $n \in \mathbb{Z}$

69. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin 2x = 0{,}25$

$\sin 2x \approx \sin 14{,}5°$

$2x = 14{,}5° + n \cdot 360°$ |:2 tai $2x = 180° - 14{,}5° + n \cdot 360°$

$x \approx 7{,}3° + n \cdot 180°$ $2x = 165{,}5° + n \cdot 360°$ |:2

$x \approx 82{,}8° + n \cdot 180°,\quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\sin 3x = -0{,}64$

$\sin 3x \approx \sin(-39{,}8°)$

$3x = -39{,}8° + n \cdot 360°$ |:3 tai $3x = 180° - (-39{,}8°) + n \cdot 360°$

$x \approx -13{,}3° + n \cdot 120°$ $3x = 219{,}8° + n \cdot 360°$ |:3

$x \approx 73{,}3° + n \cdot 120°,\quad n \in \mathbb{Z}$

c) $\sin(2x - 45°) = 0{,}36$

$\sin(2x - 45°) \approx \sin 21{,}1°$

$2x - 45° = 21{,}1° + n \cdot 360°$ tai $2x - 45° = 180° - 21{,}1° + n \cdot 360°$

$2x = 66{,}1° + n \cdot 360°$ |:2 $2x = 203{,}9° + n \cdot 360°$ |:2

$x = 33{,}1° + n \cdot 180°$ $x = 102° + n \cdot 180°,\quad n \in \mathbb{Z}$

<u>Vastaus</u>: a) $x = 7{,}3° + n \cdot 180°$ tai $x = 82{,}8° + n \cdot 180°$ b) $x = -13{,}3° + n \cdot 120°$ tai $x = 73{,}3° + n \cdot 120°$ c) $x = 33{,}1° + n \cdot 180°$ tai $x = 102° + n \cdot 180°,\quad n \in \mathbb{Z}$

70. Ratkaistaan yhtälöt

a) $\cos 3x = 0{,}86$

$\cos 3x \approx \cos 30{,}7°$

$3x = \pm 30{,}7° + n \cdot 360°$ |:3

$x \approx \pm 10{,}2° + n \cdot 120°,\quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos \frac{1}{2}x = -0{,}48$

$\cos \frac{1}{2}x \approx \cos 118{,}7°$

$\frac{1}{2}x = \pm 118{,}7° + n \cdot 360°$ |·2

$x = \pm 237{,}4° + n \cdot 720°,\quad n \in \mathbb{Z}$

c) $\cos(3x + 60°) = 0{,}27$

$\cos(3x + 60°) \approx \cos 74{,}3°$

$3x + 60° = \pm 74{,}3° + n \cdot 360°$

$3x + 60° = 74{,}3° + n \cdot 360°$ tai $3x + 60° = -74{,}3° + n \cdot 360°$

$3x = 14{,}3° + n \cdot 360°$ |:3 $3x = -134{,}3° + n \cdot 360°$ |:3

$x \approx 4{,}8° + n \cdot 120°$ $x \approx -44{,}8° + n \cdot 120°,\quad n \in \mathbb{Z}$

<u>Vastaus</u>: a) $x = \pm 10{,}2° + n \cdot 120°$ b) $x = \pm 237{,}4° + n \cdot 720°$
c) $x = 4{,}8° + n \cdot 120°$ tai $x = -44{,}8° + n \cdot 120°,\quad n \in \mathbb{Z}$

71. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\tan 6x = 1{,}45$

$\tan 6x \approx \tan 55{,}4°$

$6x = 55{,}4° + n \cdot 180° \quad |:6$

$x \approx 9{,}2° + n \cdot 30°, \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\tan 3x = -1{,}09$

$\tan 3x \approx \tan(-47{,}5°)$

$3x = -47{,}5° + n \cdot 180° \quad |:3$

$x \approx -15{,}8° + n \cdot 60°, \quad n \in \mathbb{Z}$

c) $\tan\left(\frac{1}{2}x + 30°\right) = 0{,}28$

$\tan\left(\frac{1}{2}x + 30°\right) \approx \tan 15{,}64°$

$\frac{1}{2}x + 30° = 15{,}64° + n \cdot 180°$

$\frac{1}{2}x = -14{,}36° + n \cdot 180° \quad |\cdot 2$

$x \approx -28{,}7° + n \cdot 360°, \quad n \in \mathbb{Z}$

<u>Vastaus</u>: a) $x = 9{,}2° + n \cdot 30°$ b) $x = -15{,}8° + n \cdot 60°$ c) $x = -28{,}7° + n \cdot 360°, \quad n \in \mathbb{Z}$

72. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin 2x = \sin x$

$2x = x + n \cdot 2\pi$ tai $2x = \pi - x + n \cdot 2\pi$

$x = n \cdot 2\pi \qquad 3x = \pi + n \cdot 2\pi \quad |:3$

$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\sin x = \sin(x - \pi)$

$x = x - \pi + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - (x - \pi) + n \cdot 2\pi$

$0 = -\pi + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - (x - \pi) + n \cdot 2\pi$

Ei ratkaisua $\qquad 2x = 2\pi + n \cdot 2\pi \quad |:2$

$x = \pi + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

<u>Vastaus</u>: a) $x = n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ b) $x = \pi + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

73. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\tan 3x = \tan x \qquad |x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ ja $3x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ eli $x \neq \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$

$3x = x + n \cdot \pi$

$2x = n \cdot \pi \quad |:2$

$x = n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$

Juurien pitää olla $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, joten ainoastaan juuret $x = n \cdot \pi$ käyvät

b) $\cot 2x = \sqrt{3}$ $\quad | \; 2x \neq n\cdot\pi$ eli $x \neq n \cdot \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{\tan 2x} = \sqrt{3}$$

$$\tan 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \quad |: 2$$

$$x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Vastaus: a) $x = n\cdot\pi$ b) $x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$

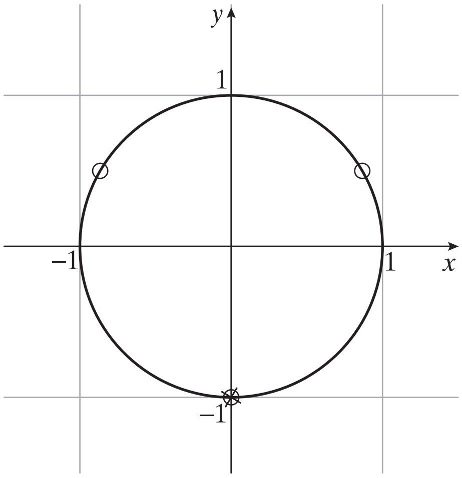
74. Ratkaistaan yhtälö.

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$2x + \frac{\pi}{2} = x + n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 2x + \frac{\pi}{2} = \pi - x + n\cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \qquad\qquad 3x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \quad |:3$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$



Yhdistämällä vastaukset saadaan $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$

Vastaus: $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$

75. Ratkaistaan yhtälöt

a) $\sin 2x = \cos 3x \quad | \sin 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = \cos 3x$$

$$\frac{\pi}{2} - 2x = \pm 3x + n\cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - 2x = 3x + n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{\pi}{2} - 2x = -3x + n\cdot 2\pi$$

$$-5x = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \quad |:(-5) \qquad x = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{10} - n\cdot\frac{2\pi}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{10} + n\cdot\frac{2\pi}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin x = -\sin 4x \quad | -\sin 4x = \sin(-4x)$

$$\sin x = \sin(-4x)$$

$$x = -4x + n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - (-4x) + n\cdot 2\pi$$

$$5x = n\cdot 2\pi \quad |:5 \qquad -3x = \pi + n\cdot 2\pi \quad |:(-3)$$

$$x = n\cdot\frac{2\pi}{5} \qquad x = -\frac{\pi}{3} - n\cdot\frac{2\pi}{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + n\cdot\frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

<u>Vastaus</u>: a) $x = \frac{\pi}{10} + n\cdot\frac{\pi}{5}$ tai $x = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$

b) $x = n\cdot\frac{2\pi}{5}$ tai $x = -\frac{\pi}{3} + n\cdot\frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$

76. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \quad |\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$$

$$\frac{\pi}{2}-2x=\pm\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)+n\cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}-2x=\frac{\pi}{2}-4x+n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{\pi}{2}-2x=-\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)+n\cdot 2\pi$$

$$2x=n\cdot 2\pi \quad |:2 \qquad \frac{\pi}{2}-2x=-\frac{\pi}{2}+4x+n\cdot 2\pi$$

$$x=n\cdot\pi \qquad -6x=-\pi+n\cdot 2\pi \quad |:(-6)$$

$$x=\frac{\pi}{6}-n\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$x=\frac{\pi}{6}+n\cdot\frac{\pi}{3}, \quad n\in\mathbb{Z}$$

b) $\cos 4x = -\sin 5x$ $\quad |-\sin 5x = \sin(-5x)$

$\cos 4x = \sin(-5x)$ $\quad |\ \sin(-5x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)$

$$\cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)$$

$$4x=\pm\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+n\cdot 2\pi$$

$$4x=\frac{\pi}{2}+5x+n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 4x=-\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+n\cdot 2\pi$$

$$-x=\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi \quad |:(-1) \qquad 4x=-\frac{\pi}{2}-5x+n\cdot 2\pi$$

$$x=-\frac{\pi}{2}-n\cdot 2\pi \qquad 9x=-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi \quad |:9$$

$$x=-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi \qquad x=-\frac{\pi}{18}+n\cdot\frac{2\pi}{9}, \quad n\in\mathbb{Z}$$

Vastaus: a) $x = n\cdot\pi$ tai $x=\frac{\pi}{6}+n\cdot\frac{\pi}{3}$ b) $x=-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi$ tai $x=-\frac{\pi}{18}+n\cdot\frac{2\pi}{9}$, $n\in\mathbb{Z}$

77. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin 2x = 2\sin x$ $\quad |\ \sin 2x = 2\sin x\cos x$

$2\sin x\cos x = 2\sin x$

$2\sin x\cos x - 2\sin x = 0$

$2\sin x(\cos x - 1) = 0$

$2\sin x = 0$ $\ |:2$ tai $\cos x - 1 = 0$

$\sin x = 0$ $\qquad \cos x = 1$

$\sin x = \sin 0$ $\qquad \cos x = \cos 0$

$x = 0 + n\cdot 2\pi$ tai $x = \pi - 0 + n\cdot 2\pi$ $\qquad x = \pm 0 + n\cdot 2\pi$

$x = n\cdot\pi$ $\qquad x = n\cdot 2\pi$

b) $\sin 2x = \cos 2x \quad |:\cos 2x$

$\tan 2x = 1$

$$\tan 2x = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi \quad |:2$$

$$x = \frac{\pi}{8} + n\cdot\frac{\pi}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}$$

Vastaus: a) $x = n\cdot\pi$ b) $\frac{\pi}{8} + n\cdot\frac{\pi}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}$

78. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 0 \quad | \sin 2x = 2\sin x\cos x$

$2\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos x = 0$

$\cos x(2\sin x + \sqrt{3}) = 0$

$\cos x = 0$ tai $2\sin x + \sqrt{3} = 0$

$\cos x = \cos\frac{\pi}{2}$ $\qquad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$ $\qquad \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$ $\qquad x = -\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$ tai $x = \pi + \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$

$x = \frac{4\pi}{3} + n\cdot 2\pi$ missä $n\in\mathbb{Z}$.

b) $$\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x + n\cdot\pi$$

$$3x = \frac{3\pi}{4} + n\cdot\pi \quad |:3$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{\pi}{3}, \quad n\in\mathbb{Z}$$

Vastaus: a) $x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$ tai $x = \frac{4\pi}{3} + n\cdot 2\pi$

b) $x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{\pi}{3}, \quad n\in\mathbb{Z}$

79. Ratkaistaan yhtälöt.

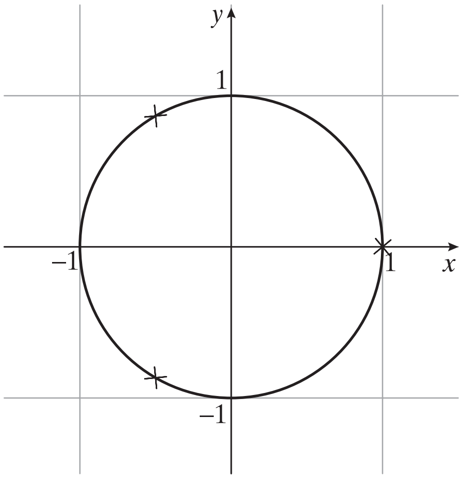
a) $\cos 2x = \cos x$

$2x = \pm x + n\cdot 2\pi$

$2x = x + n\cdot 2\pi$ tai $2x = -x + n\cdot 2\pi$

$x = n\cdot 2\pi$ $\quad 3x = n\cdot 2\pi \quad |:3$

$$x = n\cdot\frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$



Yhdistämällä vastaukset saadaan $x = n\cdot\frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$

Koska $x \in [0, 2\pi]$, ainoastaan ratkaisut $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$ ja $x = 2\pi$ käyvät.

b) $\sin x = \sqrt{3}\cos x \quad |:\cos x$

$\tan x = \sqrt{3}$

$\tan x = \tan\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + n\cdot\pi$

Koska $x \in [0, 2\pi]$, ainoastaan ratkaisut $x = \frac{\pi}{3}$ ja $x = \frac{4\pi}{3}$ käyvät

<u>Vastaus</u>: a) $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$ ja $x = 2\pi$ $\quad n \in \mathbb{Z}$ b) $x = \frac{\pi}{3}$ tai $x = \frac{4\pi}{3}$

80. Ratkaistaan yhtälö.

$$\sin 2x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad \Big| \sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{2}-2x = \pm\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+n\cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}-2x = x+\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{\pi}{2}-2x = -\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+n\cdot 2\pi$$

$$-3x = n\cdot 2\pi \quad \Big|:(-3) \qquad \frac{\pi}{2}-2x = -x-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi$$

$$x = -n\cdot\frac{2\pi}{3} \qquad -x = -\pi+n\cdot 2\pi \quad \Big|:(-1)$$

$$x = n\cdot\frac{2\pi}{3} \qquad x = \pi+n\cdot 2\pi, \quad n\in\mathbb{Z}$$

Ratkaisut, jotka kuuluvat välille [0, 2π]

$x = n\cdot\frac{2\pi}{3}$:

$n = -1$: $x = -1\cdot\frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$ Ei käy

$n = 0$: $x = 0\cdot\frac{2\pi}{3} = 0$

$n = 1$: $x = 1\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$n = 2$: $x = 2\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$n = 3$: $x = 3\cdot\frac{2\pi}{3} = 2\pi$

$n = 4$: $x = 4\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$ Ei käy

$x = \pi+n\cdot 2\pi$:

$n = -1$: $x = \pi-1\cdot 2\pi = -\pi$ Ei käy

$n = 0$: $x = \pi+0\cdot 2\pi = \pi$

$n = 1$: $x = \pi+1\cdot 2\pi = 3\pi$ Ei käy

<u>Vastaus</u>: $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \pi$, $x = \frac{4\pi}{3}$ tai $x = 2\pi$

81. Ratkaistaan yhtälö.

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x+\frac{\pi}{2}=\pm\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+n\cdot 2\pi$$

$$x+\frac{\pi}{2}=x-\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x+\frac{\pi}{2}=-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+n\cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi \qquad x+\frac{\pi}{2}=-x+\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi$$

$$\text{Ei ratkaisua} \qquad 2x=-\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi \quad |:2$$

$$x=-\frac{\pi}{8}+n\cdot\pi$$

Ratkaisut, jotka kuuluvat välille [0, 4π].

$$0\le x\le 4\pi$$

$$0\le -\frac{\pi}{8}+n\cdot\pi\le 4\pi \quad \left|+\frac{\pi}{8}\right.$$

$$\frac{\pi}{8}\le n\cdot\pi\le\frac{33\pi}{8} \quad |:\pi$$

$$\frac{1}{8}\le n\le 4\frac{1}{8}, \qquad n\in\mathbb{Z}$$

Ratkaisut kuuluvat välille [0,4 π], kun $0\le n\le 3$.

$n = 1$: $x=-\frac{\pi}{8}+1\cdot\pi=\frac{7\pi}{8}$

$n = 2$: $x=-\frac{\pi}{8}+2\cdot\pi=\frac{15\pi}{8}$

$n = 3$: $x=-\frac{\pi}{8}+3\cdot\pi=\frac{23\pi}{8}$

$n = 4$: $x=-\frac{\pi}{8}+4\cdot\pi=\frac{31\pi}{8}$

<u>Vastaus</u>: $x=\frac{7\pi}{8}$ tai $x=\frac{15\pi}{8}$ tai $x=\frac{23\pi}{8}$ tai $x=\frac{31\pi}{8}$

82. Funktio $f(x) = 2\cos(3x + \pi)$ on jatkuva, joten se voi vaihtaa merkkinsä ainoastaan nollakohdissaan.

Funktion nollakohdat

$$2\cos(3x+\pi)=0 \quad |:2$$

$$\cos(3x+\pi)=0$$

$$\cos(3x+\pi)=\cos\frac{\pi}{2}$$

$$3x+\pi=\pm\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi$$

$$3x + \pi = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 3x + \pi = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$3x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \qquad 3x = -\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Yhdistämällä yhtälöiden vasemmat puolet saadaan

$$3x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad |:3$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Koska funktio $f(x) = 2\sin(3x + \pi)$ on jaksollinen, perusjaksona $\frac{2\pi}{3}$ riittää tutkia väliä $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$. Välille $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$ kuuluvat nollakohdat

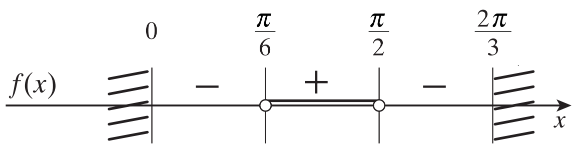
$n = 0$: $x = -\frac{\pi}{6} + 0 \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$ Ei käy

$n = 1$: $x = -\frac{\pi}{6} + 1 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$n = 2$: $x = -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

$n = 3$: $x = -\frac{\pi}{6} + 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ Ei käy

Merkkikaavio



$f(x) = 2\cos(3x + \pi)$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{12} + \pi\right) \approx -1,41 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3} + \pi\right) = 2 > 0$$

$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 2\cos\left(3 \cdot \frac{7\pi}{12} + \pi\right) \approx -0,707 < 0$$

$f(x) > 0$, kun $\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, missä $n \in \mathbb{Z}$

<u>Vastaus</u>: Funktio $f(x) = 2\cos(3x + \pi)$ saa positiivisia arvoja, kun $\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

83. Funktio $f(x)=6,55\sin[\frac{2\pi}{365}(x-81,75)]+12,35$ kuvaa päivän pituutta vuoden aikana Helsingissä.
Muuttuja *x* on vuorokauden järjestysnumero ja funktion arvo on tunteina.

Vuoden psiin päivä on silloin, kun $\sin[\frac{2\pi}{365}(x-81,75)]=1$. Tällöin päivän pituus on 6,55 h + 12,35 h = 18,90 h

Vuoden lyhin päivä on silloin, kun $\sin[\frac{2\pi}{365}(x-81,75)]=-1$. Tällöin päivän pituus on – 6,55 h + 12,35 h = 5,80 h

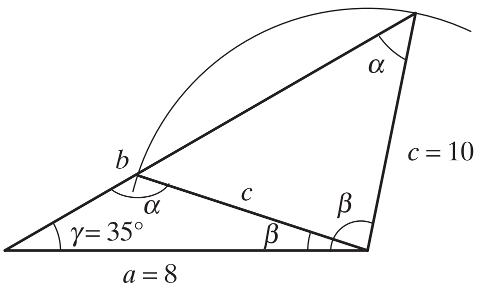
Päivän pituus 14 tuntia

$$f(x)=14$$
$$6,55\sin[\frac{2\pi}{365}(x-81,75)]+12,35=14$$
$$6,55\sin[\frac{2\pi}{365}(x-81,75)]=1,65 \quad |:6,55$$
$$\sin[\frac{2\pi}{365}(x-81,75)]=\frac{33}{131}$$
$$\sin[\frac{2\pi}{365}(x-81,75)]\approx\sin 0,25465$$
$$\frac{2\pi}{365}(x-81,75)=0,25465+n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{2\pi}{365}(x-81,75)=\pi-0,25465+n\cdot 2\pi$$
$$x-81,75\approx 14,79+n\cdot 365 \qquad x-81,75\approx 167,71+n\cdot 365$$
$$x=96,54+n\cdot 365 \qquad x=249,46+n\cdot 365$$

Päivän pituus Helsingissä on 14 tuntia vuoden 97. ja 250. päivä.

Vastaus: Vuoden pisimmän päivän pituus on 18,90 h ja lyhimmän 5,80 h. Päivän pituus on 14 tuntia vuoden 97. ja 250. päivä.

84.



Sinilauseella

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \left| a = 8, c = 10, \gamma = 35° \right.$$

$$\frac{8}{\sin\alpha} = \frac{10}{\sin 35°}$$

$$10\sin\alpha = 8\sin 35° \quad |:10$$

$$\sin\alpha = 0,8\sin 35°$$

$$\sin\alpha = 0,458...$$

$$\sin\alpha \approx \sin 27,3°$$

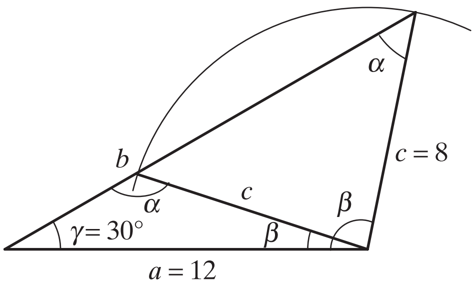
$$\alpha = 27,3° + n\cdot 360° \quad \text{tai} \quad \alpha = 180° - 27,3° + n\cdot 360°$$

$$\alpha = 152,7° + n\cdot 360°$$

Koska kolmion kulmat ovat välillä [0°, 180°], niin kulma α = 27,3° tai α = 152,7°.
Kolmion kolmas kulma β
Jos α = 27,3°, niin β = 180° – 35° – 27,3° = 117,7°
Jos α = 152,7°, niin β = 180° – 35° – 152,7° = –7,7° | Ei käy, koska β > 0°.

Vastaus: Kolmion muut kulmat ovat 27,3° ja 117,7°.

85.



Sinilauseella

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \left| a = 12, c = 8, \gamma = 30° \right.$$

$$\frac{12}{\sin\alpha} = \frac{8}{\sin 30°}$$

$$8\sin\alpha = 12\sin 30° \quad \left| \sin 30° = \frac{1}{2} \right.$$

$$8\sin\alpha = 6 \quad |:8$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin\alpha \approx \sin 48,6°$$

$$\alpha = 48,6° + n\cdot 360° \quad \text{tai} \quad \alpha = 180° - 48,6° + n\cdot 360°$$

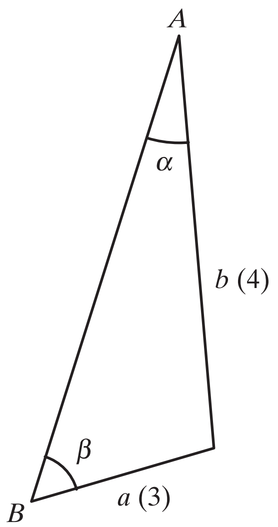
$$\alpha = 48,6° + n\cdot 360° \qquad \alpha = 131,4° + n\cdot 360°$$

Koska kolmion kulmat ovat välillä [0°, 180°], niin kulma α = 48,6° tai α = 131,4°.
Kolmion kolmas kulma β
Jos α = 48,6°, niin β = 180° – 30° – 48,6° = 101,4°

Jos α = 131,4°, niin β = 180° – 30° – 131,4° = 18,6°

Vastaus: Kolmion muut kulmat ovat 48,6° ja 101,4° tai 18,6° ja 131,4°.

86.



Sinilauseella

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \quad \Big| \beta = 2\alpha,\ a=\frac{3}{4}b$$

$$\frac{\frac{3}{4}b}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin 2\alpha} \quad \Big| : b$$

$$\frac{3}{4}\sin 2\alpha = \sin\alpha \quad \Big| \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{3}{2}\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha = 0$$

$$\sin\alpha(\frac{3}{2}\cos\alpha - 1) = 0$$

$$\sin\alpha = 0 \quad \text{tai} \quad \frac{3}{2}\cos\alpha - 1 = 0 \quad \Big| : \frac{3}{2}$$

$$\sin\alpha = \sin 0 \qquad \cos\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = n\cdot 180° \qquad \cos\alpha \approx \cos 48{,}2°$$

Ei käy $\qquad \alpha = \pm 48{,}2° + n \cdot 360°, \quad n \in \mathbb{Z}$

Koska kolmion kulmat ovat välillä [0°, 180°], niin kulma α = 48,2°.

Vastaus: Kulma A on 48,2°.

87. Ratkaistaan yhtälö

$$\sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 3x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$3x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad |:3 \qquad \text{tai} \quad 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \quad 3x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad |:3$$

$$x = \frac{5\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ratkaisut, jotka kuuluvat välille [0, π]

$x = \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$:

$n = -1$: $x = \frac{\pi}{18} - 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = -\frac{11\pi}{18}$ Ei käy

$n = 0$: $x = \frac{\pi}{18} + 0 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{18}$

$n = 1$: $x = \frac{\pi}{18} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{13\pi}{18}$

$n = 2$: $x = \frac{\pi}{18} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{25\pi}{18}$ Ei käy

$x = \frac{5\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

$n = -1$: $x = \frac{5\pi}{18} - 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = -\frac{7\pi}{18}$ Ei käy

$n = 0$: $x = \frac{5\pi}{18} + 0 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{18}$

$n = 1$: $x = \frac{5\pi}{18} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{17\pi}{18}$

$n = 2$: $x = \frac{5\pi}{18} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{29\pi}{18}$ Ei käy

Vastaus: Välille [0, π] kuuluvat ratkaisut ovat $\frac{\pi}{18}$, $\frac{5\pi}{18}$, $\frac{13\pi}{18}$ ja $\frac{17\pi}{18}$.

88. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $(\tan^2 x - 1)(\sqrt{3} + 2\cos x) = 0$

$$\tan^2 x - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad \sqrt{3} + 2\cos x = 0$$

$$\tan^2 x = 1 \quad |\sqrt{\ } \qquad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan x = 1 \quad \text{tai} \quad \tan x = -1 \qquad \cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad x = \pm \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) $$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3} - 2x\right)$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} - 2x + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x + \frac{\pi}{6} = \pi - \left(\frac{5\pi}{3} - 2x\right) + n \cdot 2\pi$$

$$3x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad |:3 \qquad -x = -\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad |\cdot(-1)$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

<u>Vastaus</u>: a) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$ tai $x = \pm \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ b) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ tai $x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

89. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\cot x = 1$

$$\frac{1}{\tan x} = 1$$

$$\tan x = 1$$

$$\tan x = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

b) $\tan x = \cot x$

$$\tan x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan^2 x = 1 \quad \left|\sqrt{}\right.$$

$$\tan x = 1 \quad \text{tai} \quad \tan x = -1$$

$$\tan x = \tan\frac{\pi}{4} \quad \text{tai} \quad \tan x = \tan(-\frac{\pi}{4})$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi \qquad\qquad x = -\frac{\pi}{4} + n\cdot\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

c) $\cot\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

$$\frac{1}{\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}$$

$$\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + n\cdot\pi$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi \quad |:3$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n\cdot\frac{\pi}{3}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Vastaus: a) $x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi$ b) $x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{\pi}{2}$ c) $x = \frac{\pi}{6} + n\cdot\frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$

90. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin x = \cot x$

$$\sin x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad |\cdot \sin x$$

$$\sin^2 x = \cos x \quad |\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Sijoitetaan $\cos x = t$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,6180$$

$$t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,6180 \quad | \text{Ei käy}$$

Sijoitetaan $t = \cos x$

$$\cos x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$\cos x \approx \cos 0{,}91$

$x = \pm 0{,}91 + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos 2x - \tan x = 1 \qquad |\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$1 - 2\sin^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \quad |\cdot \cos x$$

$$-2\sin^2 x \cos x - \sin x = 0$$

$$-\sin x(2\sin x \cos x + 1) = 0 \quad |2\sin x \cos x = \sin 2x$$

$$-\sin x = 0 \quad \text{tai} \quad \sin 2x + 1 = 0$$

$$\sin x = \sin 0 \qquad \sin 2x = -1$$

$$x = n \cdot \pi \qquad \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad |:2$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

c) $\sin(x + 45°) = \sin 2x$

$x + 45° = 2x + n \cdot 360° \qquad \text{tai} \qquad x + 45° = 180° - 2x + n \cdot 360°$

$-x = -45° + n \cdot 360° \quad |:(-1) \qquad 3x = 135° + n \cdot 360° \quad |:3$

$x = 45° + n \cdot 360° \qquad x = 45° + n \cdot 120°, \ n \in \mathbb{Z}$

Yhdistämällä vastaukset saadaan $x = 45° + n \cdot 120°, \quad n \in \mathbb{Z}$

<u>Vastaus</u>: a) $x = \pm 0{,}91 + n \cdot 2\pi$ b) $x = n \cdot \pi$ tai $x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$ c) $x = 45° + n \cdot 120°, \ n \in \mathbb{Z}$

91. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin 2x = -\sin x \quad | -\sin x = \sin(-x)$

$\sin 2x = \sin(-x)$

$2x = -x + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 2x = \pi + x + n \cdot 2\pi$

$3x = n \cdot 2\pi \quad |:3 \qquad x = \pi + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$x = n \cdot \frac{2\pi}{3}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos 3x = -\cos x \quad | -\cos x = \cos(\pi - x)$

$\cos 3x = \cos(\pi - x)$

$3x = \pi - x + n \cdot 2\pi$ tai $3x = -(\pi - x) + n \cdot 2\pi$

$4x = \pi + n \cdot 2\pi \quad |:4$ $\qquad 2x = -\pi + n \cdot 2\pi \quad |:2$

$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$ $\qquad x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$

Yhdistämällä ratkaisut saadaan $x = n \cdot \frac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$

Vastaus: a) $x = \pi + n \cdot 2\pi$ tai $x = n \cdot \frac{2\pi}{3}$ b) $x = n \cdot \frac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$

92. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\tan x = \frac{2}{3} \cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{3} \cos x \quad |: \cos x$$

$$3 \sin x = 2 \cos^2 x \quad |\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

Sijoitetaan $\sin x = t$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2}$$

$$t_1 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{4} \approx -2 \quad |\text{Ei käy}$$

Sijoitetaan $t = \sin x$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

$$x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin^2 x = \cos^2 2x \quad |\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$\sin^2 x = (1 - 2\sin^2 x)^2$$

$$\sin^2 x = 1 - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x$$

$$4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0$$

Sijoitetaan $\sin^2 x = t, \quad t > 0$

$$4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

$$t_1 = \frac{5 + \sqrt{9}}{8} = 1$$

$$t_2 = \frac{5 - \sqrt{9}}{8} = \frac{1}{4}$$

Sijoitetaan $t = \sin^2 x$

1° $\sin^2 x = 1$

$\sin x = 1$ tai $\sin x = -1$

$\sin x = \sin \frac{\pi}{2}$ $\qquad \sin x = \sin (-\frac{\pi}{2})$

$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ $\qquad x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

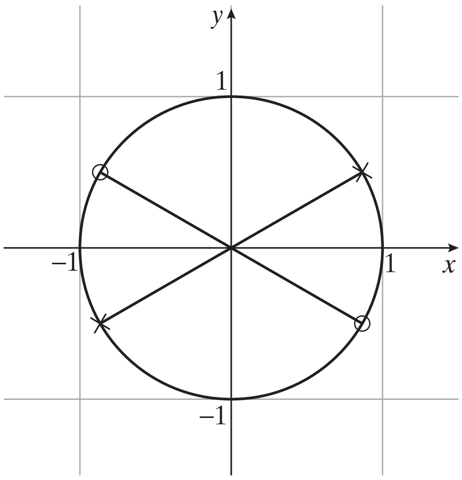
2° $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ tai $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$ $\qquad \sin x = \sin (-\frac{\pi}{6})$

$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ $\qquad x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + n \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ $\qquad x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ $\qquad x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ $\qquad x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$



Yhdistämällä vastaukset saadaan $x = \pm\frac{\pi}{6} + n\cdot\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$.

<u>Vastaus</u>: a) $x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi$ b) $x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$ tai $x = \pm\frac{\pi}{6} + n\cdot\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

93. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $2 - 6\sin^2 x - 5\cos x = 0 \quad | \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$6\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0$

Sijoitetaan $\cos x = t$,

$$6t^2 - 5t - 4 = 0$$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 6\cdot(-4)}}{2\cdot 6}$$

$$t_1 = \frac{5+\sqrt{121}}{12} = \frac{4}{3} \quad |\text{Ei käy}$$

$$t_2 = \frac{5-\sqrt{121}}{12} = -\frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $t = \cos x$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin^2(-2x) = \cos^2 2x - 2 \quad | \sin(-2x) = -\sin 2x$

$\sin^2 2x = \cos^2 2x - 2 \quad | \sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$

$1 - \cos^2 2x = \cos^2 2x - 2$

$2\cos^2 2x = 3 \quad |:2$

$\cos^2 2x = \frac{3}{2}$

Ei ratkaisua, koska $\cos^2 2x < 1$

<u>Vastaus</u>: a) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi$ b) Ei ratkaisua

94. Jousen venymän funktio $f(x) = A\sin(kx)$

Amplitudi $A = 6{,}0$ cm

Jakson pituus 1,0 s

$kx = 2\pi \quad |x = 1$

$k = 2\pi$

Funktio $f(x) = 6\sin(2\pi x)$

Venymä on 2,5 cm

$f(x) = 2{,}5$

$6\sin(2\pi x) = 2{,}5 \quad |:6$

$\sin(2\pi x) = \frac{5}{12}$

$\sin(2\pi x) \approx \sin 0{,}42978$

$2\pi x = 0{,}42978 + n\cdot 2\pi \quad |:(2\pi) \quad$ tai $\quad 2\pi x = \pi - 0{,}42978 + n\cdot 2\pi$

$x \approx 0{,}07 + n \qquad\qquad 2\pi x \approx 2{,}71181 + n\cdot 2\pi \quad |:(2\pi)$

$x \approx 0{,}43 + n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Vastaus: Funktio on $f(x) = 6\sin(2\pi x)$. Venymä on 2,5 cm ajanhetkillä $x = 0{,}07 + n$ ja $x = 0{,}43 + n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

95. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin(\sin x) = 0$

$\sin(\sin x) = \sin 0$

$\sin x = 0 + n\cdot 2\pi \qquad$ tai $\qquad \sin x = \pi - 0 + n\cdot 2\pi \quad$ |Yhdistetään kulmat

$\sin x = n\cdot\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$

Jos $n \neq 0$, yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Jos $n = 0$, niin

$\sin x = 0$

$\sin x = \sin 0$

$x = 0 + n\cdot 2\pi \qquad$ tai $\qquad \sin x = \pi - 0 + n\cdot 2\pi$

$x = n\cdot\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos(\cos x) = 0$

$\cos(\cos x) = \cos \frac{\pi}{2}$

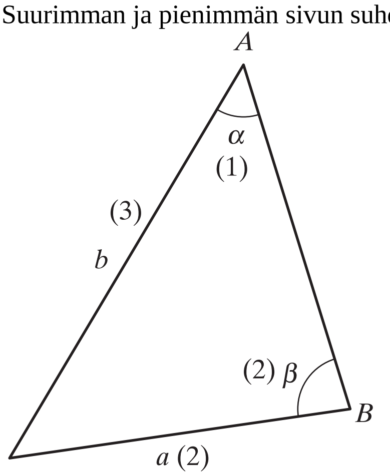
$\cos x = \pm\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$

Ei ratkaisua, koska $|\pm\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi| > 1$

Vastaus: a) $x = n\cdot\pi, n \in \mathbb{Z}$ b) Ei ratkaisua

96. Suurimman ja pienimmän kulman suhde on 2 :1

Suurimman ja pienimmän sivun suhde 3 : 2.



Sinilauseella

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \quad \Big|\, \beta=2\alpha,\ a=\frac{2}{3}b$$

$$\frac{\frac{2}{3}b}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin 2\alpha} \quad \Big|\, :b$$

$$\frac{2}{3}\sin 2\alpha=\sin\alpha \quad \Big|\, \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{4}{3}\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha=0$$

$$\sin\alpha(\frac{4}{3}\cos\alpha-1)=0$$

$$\sin\alpha=0 \quad \text{tai} \quad \frac{4}{3}\cos\alpha-1=0 \quad \Big|\, :\frac{4}{3}$$

$$\sin\alpha=\sin 0 \qquad \cos\alpha=\frac{3}{4}$$

$$\alpha=n\cdot 180° \qquad \cos\alpha\approx\cos 41{,}4°$$

Ei käy $\qquad \alpha = \pm 41{,}4° + n\cdot 360°,\quad n\in\mathbb{Z}$

Koska kolmion kulmat ovat välillä [0°, 180°], niin kulma α = 41,4°.
Muut kulmat $\beta = 2\alpha = 2\cdot 41{,}4° = 82{,}8°$
Kolmas kulma 180° – 41,4° – 82,8° = 55,8°

<u>Vastaus</u>: Kulmat ovat 41,4°, 55,8° ja 82,8°.

97. Ratkaistaan täydellisesti yhtälö.

$$\sin 2x = \operatorname{tg} x - \cot x$$

$$\sin 2x = \tan x - \cot x$$

$$\sin 2x = {}^{2\sin x)}\frac{\sin x}{\cos x} - {}^{2\cos x)}\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin 2x=\frac{2\sin^2 x-2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} \quad \Big|\, 2\sin x\cos x=\sin 2x$$

$$\sin 2x=\frac{-2(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sin 2x} \quad \Big|\, \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

$$\sin 2x=\frac{-2\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$\sin^2 2x=-2\cos 2x \quad \Big|\, \sin^2 2x=1-\cos^2 2x$$

$$\cos^2 2x-2\cos 2x-1=0$$

Sijoitetaan cos 2x = t

$t^2 - 2t - 1 = 0$

$$t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$t_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} \approx 2,414 \quad \Big| \text{Ei käy}$$

$$t_2 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2} \approx -0,414$$

Sijoitetaan $t = \cos 2x$

$\cos 2x = 1-\sqrt{2}$

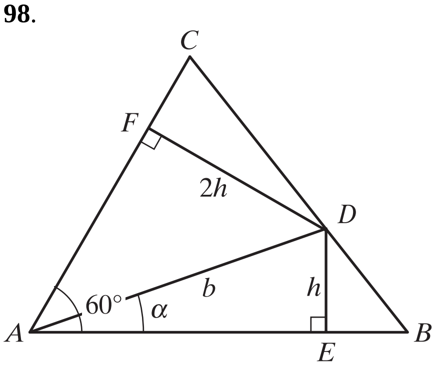
$\cos 2x \approx \cos 1{,}998$

$2x = \pm 1{,}998 + n \cdot 2\pi \quad |:2$

$x = \pm 0{,}9989 + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

Vastaus: $x = \pm 0{,}9989 + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

98.



Kolmiosta *AED* saadaan $\sin\alpha = \frac{h}{b}$

Kolmiosta *ADF* saadaan $\sin(60° - \alpha) = \frac{2h}{b}$

Sijoittamalla ylemmästä yhtälöstä $\frac{h}{b}$ alempaan saadaan

$$\sin(60° - \alpha) = 2\sin\alpha$$

Taulukkokirjasta $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$$\sin 60° \cos\alpha - \cos 60° \sin\alpha = 2\sin\alpha \quad \left| \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60° = \frac{1}{2} \right.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = 2\sin\alpha$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \frac{5}{2}\sin\alpha \quad \left| \cdot \frac{2}{5\cos\alpha} \right.$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\tan\alpha \approx \tan 19{,}1°$$

$$\alpha = 19{,}1° + n \cdot \pi$$

Vastaus: kulma *BAD* on 19,1°.

99. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin x = \sin 5x$

$x = 5x + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - 5x + n \cdot 2\pi$

$-4x = n \cdot 2\pi \quad |:(-4)$ $\qquad 6x = \pi + n \cdot 2\pi \quad |:6$

$x = n \cdot \frac{\pi}{2}$ $\qquad x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = \sin 5x \quad \left| \sin 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \right.$

$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$

$x = \frac{\pi}{2} - 5x + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) + n \cdot 2\pi$

$6x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad |:6$ $\qquad x = -\frac{\pi}{2} + 5x + n \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{3}$ $\qquad -4x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad |:(-4)$

$x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$

Vastaus: a) $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$ tai $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$ b) $x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{3}$ tai $x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$

5. Trigonometristen funktioiden derivaatat

100. a) $D(-\sin x + 2\cos x) = -\cos x + 2\cdot(-\sin x) = -2\sin x - \cos x$

b) $D(-2\sin x - \cos x) = -2\cos x - (-\sin x) = \sin x - 2\cos x$

Vastaus: a) $-2\sin x - \cos x$ b) $\sin x - 2\cos x$

101. a) $D(2\tan x) = 2\cdot(1+\tan^2 x) = 2 + 2\tan^2 x$

b) $D(-\tan x + \cot x) = -(1+\tan^2 x) - 1 - \cot^2 x = -2 - \tan^2 x - \cot^2 x$

Vastaus: a) $2 + 2\tan^2 x$ b) $-2 - \tan^2 x - \cot^2 x$

102. a) $D(\sin x\cdot \sin x) = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2\sin x \cos x = \sin 2x$

b) $D(\sin x\cdot\cos x) = \cos x\cos x + \sin x\cdot(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x\cos x = \cos 2x$

Vastaus: a) $\sin 2x$ b) $\cos 2x$

103. a) $D(\sin x\cdot\tan x) = \underbrace{\cos x\tan x}_{\sin x} + \sin x(1+\tan^2 x) = 2\sin + \sin x\tan^2 x$

b) $D(\cos x\cdot\tan x) = D(\cancelto{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cancelto{1}{\cos x}}) = D(\sin x) = \cos x$

Vastaus: a) $2\sin + \sin x\tan^2 x$ b) $\cos x$

104. a) $D(\frac{1+\sin x}{\cos x}) = \frac{\cos x\cdot\cos x - (1+\sin x)\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1} + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

b) $D(\frac{\cos x - 1}{\sin x}) = \frac{-\sin x\cdot\sin x - (\cos x - 1)\cdot\cos}{\sin^2 x} = \frac{-\overbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}^{1} + \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1+\cos x}{\sin^2 x}$

Vastaus: a) $\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$ b) $\frac{-1+\cos x}{\sin^2 x}$

105. a) $D(\frac{\sin x}{\tan x}) = D(\cancelto{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\cancelto{1}{\sin x}}) = D\cos x = -\sin x$

b) $D(\frac{\tan x}{\cos x}) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x - \tan x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x}}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$

Vastaus: a) $-\sin x$ b) $\frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$

106. a) $D(\sin 2x + \cos 2x) = 2\cos 2x + 2 \cdot (-\sin 2x) = -2\sin 2x + 2\cos 2x$

b) $D(\frac{1}{2}\sin 2x - 3\cos 3x) = \frac{1}{2} \cdot 2\cos 2x - 3 \cdot 3(-\sin 3x) = 9\sin 3x + \cos 2x$

Vastaus: a) $-2\sin 2x + 2\cos 2x$ b) $9\sin 3x + \cos 2x$

107. a) $D(\sin 2x + \sin x + x) = 2\cos 2x + \cos x + 1$

b) $D(\cos 2x + \cos x + x + \pi) = 2(-\sin 2x) - \sin x + 1 = -2\sin 2x - \sin x + 1$

Vastaus: a) $2\cos 2x + \cos x + 1$ b) $-2\sin 2x - \sin x + 1$

108. a) $D(\tan 2x + \tan x) = 2(1 + \tan^2 2x) + 1 + \tan^2 x = 3 + \tan^2 x + 2\tan^2 2x$

b) $D[\frac{4}{\pi}\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \tan\frac{\pi}{17}] = \frac{4}{\pi} \cdot 1 \cdot [1 + \tan^2(\frac{\pi}{4} + x)] + 0 = \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi}\tan^2(\frac{\pi}{4} + x)$

Vastaus: a) $3 + \tan^2 x + 2\tan^2 2x$ b) $\frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi}\tan^2(\frac{\pi}{4} + x)$

109. a)

$D(\frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos x) = \frac{1}{2} \cdot 2\cos 2x \cos x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{2}\sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x$

b) $D(\sin 2x \cdot \cos 2x) = D(\frac{1}{2}\sin 4x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \cos 4x = 2\cos 4x$

Vastaus: a) $-\frac{1}{2}\sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x$ b) $2\cos 4x$

110. a)

$$
\begin{aligned}
D(\sin 2x \cdot \tan 2x) &= 2\cos 2x \tan 2x + \sin 2x \cdot 2 \cdot (1 + \tan^2 2x) \\
&= 2 \overset{1}{\cancel{\cos 2x}} \frac{\sin 2x}{\underset{1}{\cancel{\cos 2x}}} + 2\sin 2x + 2\sin 2x \cdot \tan^2 2x \\
&= 4\sin 2x + 2\sin 2x \tan^2 2x
\end{aligned}
$$

b) $D(\tan\frac{x}{\pi}\cdot\cos\frac{x}{\pi}-\cos\pi\cdot\cot\frac{\pi}{7})=D(\frac{\sin\frac{x}{\pi}}{\cancel{\cos\frac{x}{\pi}}_{1}}\cdot\overset{1}{\cancel{\cos\frac{x}{\pi}}}-\underbrace{\cos\pi\cdot\cot\frac{\pi}{7}}_{\text{vakio}})=\frac{1}{\pi}\cos\frac{x}{\pi}$

Vastaus: a) $4\sin 2x+2\sin 2x\tan^2 2x$ b) $\frac{1}{\pi}\cos\frac{x}{\pi}$

111. a) $D(\frac{\sin 2x}{\cos 2x})==D(\tan 2x)=2\cdot(1+\tan^2 x)=2+2\tan^2 x$

b) $D(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin x})=D(\frac{\overset{1}{\cancel{\cos\frac{x}{2}}}}{2\sin\frac{x}{2}\,\cancel{\cos\frac{x}{2}}_{1}})=\frac{1}{2}D[(\sin\frac{x}{2})^{-1}]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot(-1)(\sin\frac{x}{2})^{-2}=-\frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}$

Vastaus: a) $2+2\tan^2 x$ b) $-\frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}$

112. a) $D(\frac{\sin x}{\cot x})=\frac{\cos x\cdot\cot x-\sin x\cdot(-\frac{1}{\sin^2 x})}{\cot^2 x}=\frac{\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\sin x}}{\cot^2 x}=\frac{\cos^2 x+1}{\sin x\cot^2 x}$

b)

$D(\frac{\pi}{\sin x}-\frac{\sin 2x}{\cos x})=D(\frac{\pi}{\sin x}-\frac{2\sin x\,\overset{1}{\cancel{\cos x}}}{\cancel{\cos x}_{1}})=\pi\cdot\cos x\cdot(-1)\cdot(\sin x)^{-2}-2\cos x=-\frac{\pi\cos x}{\sin^2 x}-2\cos x$

Vastaus: a) $\frac{\cos^2 x+1}{\sin x\cot^2 x}$ b) $-\frac{\pi\cos x}{\sin^2 x}-2\cos x$

113. a)

$D(\frac{\cos x-\sin 2x}{\sin x})=D\frac{\cos x-2\sin x\cdot\cos x}{\sin x}=D(\tan x-2\cos x)$

$=1+\tan^2 x-2\cdot(-\sin x)=1+2\sin x+\tan^2 x$

b) $D(\frac{\pi-\overbrace{\tan\pi}^{0}}{\sin\frac{x}{\pi}})=D(\pi\sin^{-1}\frac{x}{\pi})=\pi\cdot\frac{1}{\pi}\cos\frac{x}{\pi}\cdot(-1)\sin^{-2}(\frac{x}{\pi})=-\frac{\cos\frac{x}{\pi}}{\sin^2(\frac{x}{\pi})}$

Vastaus: a) $1+2\sin x+\tan^2 x$ b) $-\dfrac{\cos\frac{x}{\pi}}{\sin^2(\frac{x}{\pi})}$

114. a) $D(\cos^2 2x) = 2\cdot(-\sin 2x)\cdot 2\cos 2x = -2\sin 4x$

b) $D(\sin^2 x - \sin x) = \cos x\cdot 2\sin x - \cos x = \sin 2x - \cos x$

Vastaus: a) $-2\sin 4x$ b) $\sin 2x - \cos x$

115. a) $D(\sin^2 2x) = 2\cdot(\cos 2x)\cdot 2\sin 2x = 2\sin 4x$

b) $D(\frac{1}{3}\sin^3 x) = \frac{1}{3}\cdot\cos x\cdot 3\sin^2 x = \sin^2 x\cos x$

c) $D[\sin(\cos x)] = -\sin x\cos(\cos x)$

Vastaus: a) $2\sin 4x$ b) $\sin^2 x\cos x$ c) $-\sin x\cos(\cos x)$

116. a) $D[\cos(\sin x)] = \cos x[-\sin(\sin x)] = -\cos x\sin(\sin x)$

b) $D[\cos(\cos x)] = -\sin x\cdot[-\sin(\cos x)] = \sin x\sin(\cos x)$

c) $D[\sin(\tan x)] = (1+\tan^2 x)\cos(\tan x)$

Vastaus: a) $-\cos x\sin(\sin x)$ b) $\sin x\sin(\cos x)$ c) $(1+\tan^2 x)\cos(\tan x)$

117. a) $D[\sin(x+2\pi)^2] = 2\cdot(x+2\pi)\cdot\cos(x+2\pi)^2 = (2x+4\pi)\cos(x+2\pi)^2$

b)

$$D[\sin^2(\pi x-\frac{\pi}{2})] = \pi\cdot[-\cos(\pi x-\frac{\pi}{2})]\cdot 2\sin(\pi x-\frac{\pi}{2}) = -\pi\sin[2\cdot(\pi x-\frac{\pi}{2})] = -\pi\sin(2\pi x-\pi)$$

Vastaus: a) $(2x+4\pi)\cos(x+2\pi)^2$ b) $-\pi\sin(2\pi x-\pi)$

118.

$$D(\cos^2 2x-\frac{\pi}{3}\cos\frac{x}{\pi}+\frac{\pi}{3}) = 2(-\sin 2x)\cdot 2\cos 2x-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\pi}(-\sin\frac{x}{\pi}) = -2\sin 4x+\frac{1}{3}\sin\frac{x}{\pi}$$

Vastaus: $-2\sin 4x+\frac{1}{3}\sin\frac{x}{\pi}$

119. a) $D[(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1})^{-2}] = D1 = 0$

b) $D(\dfrac{\tan x}{\sin\frac{\pi}{6}}\cdot\cot x) = D(\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}) = D2 = 0$

Vastaus: a) 0 b) 0

120.

Funktio $f(x) = 4 + \cos x + \cos^2 x$ on jatkuva ja derivoituva, kun $x \in \mathbb{R}$.

Haetaan ensin kaikki funktion derivaatan nollakohdat.

Derivaatta $f'(x) = -\sin x + (-\sin x)\cdot 2\cos x = -\sin x - 2\sin x \cos x$

Derivaatan nollakohdat

$$-\sin x - 2\sin x\cos x = 0$$

$$-\sin x(1 + 2\cos x) = 0$$

$$-\sin x = 0 \qquad \text{tai} \qquad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin 0 \qquad\qquad \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$x = n\cdot\pi \qquad\qquad x = \pm\frac{2\pi}{3} + n2\pi$$

Haetaan derivaatan nollakohdista ne, jotka kuuluvat välille $]0,\ 2\pi[$ sijoittamalla parametrille n kokonaislukuarvoja.

Taulukoidaan tulokset.

n	$x = n\pi$	$x = \frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi$	$x = -\frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi$
-1	$-1\cdot\pi = -\pi \notin]0, 2\pi[$	$\frac{2\pi}{3} + (-1)\cdot 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \notin]0,\ 2\pi[$	$-\frac{2\pi}{3} + (-1)\cdot 2\pi = -\frac{8\pi}{6} \notin]0,\ 2\pi[$
0	$0\cdot\pi = 0 \notin]0, 2\pi[$	$\frac{2\pi}{3} + 0\cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3} \in]0,\ 2\pi[$	$-\frac{2\pi}{3} + 0\cdot 2\pi = -\frac{2\pi}{3} \notin]0,\ 2\pi[$
1	$1\cdot\pi = \pi \in]0, 2\pi[$	$\frac{2\pi}{3} + 1\cdot 2\pi = \frac{8\pi}{3} \notin]0,\ 2\pi[$	$-\frac{2\pi}{3} + 1\cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3} \in]0,\ 2\pi[$
2	$2\cdot\pi = 2\pi \notin]0, 2\pi[$		$-\frac{2\pi}{3} + 2\cdot 2\pi = \frac{10\pi}{3} \notin]0,\ 2\pi[$

Vastaus: Nollakohdat $\frac{2\pi}{3}$, π ja $\frac{4\pi}{3}$

121. Funktio $f(x) = 4 + \tan x + \tan^2 x$ on derivoituva, kun $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Derivaatta $f'(x) = 1 + \tan^2 x + (1 + \tan^2 x)\cdot 2\tan x = 1 + 2\tan x + \tan^2 x + 2\tan^3 x$

Koska tan$x$ > 0, kun $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, niin $f'(x) = 1 + 2\tan x + \tan^2 x + 2\tan^3 x \geq 1$, kun $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Derivaatalla ei ole nollakohtia, kun $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Vastaus: Ei nollakohtia

122. Funktio $f(x) = \sin 2x - \cos^2 x$ on derivoituva, kun $x \in \left]0, 2\pi\right[$.
Derivaatta $f'(x) = 2\cos 2x - (-\sin x)\cdot 2\cos x = 2\cos 2x + 2\sin x \cos x = 2\cos 2x + \sin 2x$
Derivaatan nollakohdat

$$
\begin{aligned}
&2\cos 2x + \sin 2x = 0 \\
&\sin 2x = -2\cos 2x \qquad \Big| : \cos 2x \neq 0,\ \text{jos } \cos 2x = 0,\ \text{niin } \sin 2x \neq 0,\ \text{ei ratk.} \\
&\tan 2x = -2 \\
&\tan 2x = \tan(-1{,}1071...) \\
&2x = -1{,}1071... + n\cdot\pi \\
&x = -0{,}5535... + n\cdot\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Välille $\left]0, 2\pi\right[$ kuuluvat nollakohdat

$n = 0:\ x = -0{,}5535... + 0\cdot\frac{\pi}{2} \approx -0{,}55 \notin \left]0,\ 2\pi\right[$

$n = 1:\ x = -0{,}5535... + 1\cdot\frac{\pi}{2} \approx 1{,}02 \in \left]0,\ 2\pi\right[$

$n = 2:\ x = -0{,}5535... + 2\cdot\frac{\pi}{2} \approx 2{,}59 \in \left]0,\ 2\pi\right[$

$n = 3:\ x = -0{,}5535... + 3\cdot\frac{\pi}{2} \approx 4{,}16 \in \left]0,\ 2\pi\right[$

$n = 4:\ x = -0{,}5535... + 4\cdot\frac{\pi}{2} \approx 5{,}73 \in \left]0,\ 2\pi\right[$

$n = 5:\ x = -0{,}5535... + 5\cdot\frac{\pi}{2} \approx 7{,}30 \notin \left]0,\ 2\pi\right[$

Jos n < 0, kulma on negatiivinen, eikä kuulu välille. Kun n kasvaa, niin kulma kasvaa, joten muita arvoja ei tarvitse laskea.

Vastaus: 1,02; 2,59; 4,16 ja 5,73

123. Funktio $f(x) = x + \sin 2x$ on jatkuva, kun $x \in \left[0, 2\pi\right]$ ja derivoituva, kun $x \in]0,\ 2\pi[$.
Jatkuvalla funktiolla on suljetulla välillä sekä suurin että pienin arvo. Ne sijaitsevat joko välin päätepisteissä tai vastaavalle avoimelle välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.
Derivaatta $f'(x) = 1 + 2\cos 2x$

Derivaatan nollakohdat

$$1+2\cos 2x=0$$

$$\cos 2x=-\frac{1}{2}$$

$$\cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$2x=\pm\frac{2\pi}{3}+n2\pi \qquad \Big|:2$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+n\pi$$

Välille $\left]0,2\pi\right[$ kuuluvat nollakohdat

$x=\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

$$0<\frac{\pi}{3}+n\pi<2\pi \qquad \Big|-\frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{3}<n\pi<\frac{5\pi}{3} \qquad \Big|:\pi>0$$

$$-\frac{1}{3}<n<\frac{5}{3}$$

$n=0$ tai $n=1$

$x=-\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

$$0<-\frac{\pi}{3}+n\pi<2\pi \qquad \Big|+\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}<n\pi<\frac{7\pi}{3} \qquad \Big|:\pi>0$$

$$\frac{1}{3}<n<\frac{7}{3}$$

$n=1$ tai $n=2$

$x=\frac{\pi}{3},\ x=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$

$x=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3},\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$

Lasketaan funktion $f(x)=x+\sin 2x$ arvo
välin päätepisteissä

$f(0)=0+\sin(2\cdot 0)=0$ (pienin)

$f(2\pi)=2\pi+\sin(2\cdot 2\pi)=2\pi\approx 6,28$ (suurin)

ja derivaatan nollakohdissa

$$f(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}+\sin(2\cdot\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1,91$$

$$f(\frac{4\pi}{3})=\frac{4\pi}{3}+\sin(2\cdot\frac{4\pi}{3})=\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 5,05$$

$$f(\frac{2\pi}{3})=\frac{2\pi}{3}+\sin(2\cdot\frac{2\pi}{3})=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1,23$$

$$f(\frac{5\pi}{3})=\frac{5\pi}{3}+\sin(2\cdot\frac{5\pi}{3})=\frac{5\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 4,37$$

Vastaus: Pienin arvo on 0 ja suurin 2π

124. Funktio $f(x)=x+\tan x$ on jatkuva ja derivoituva, kun $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Derivaatta $f'(x)=1+1+\tan^2 x=2+\tan^2 x$

Koska tan$x$ > 0, kun $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, niin $f'(x) = 2 + \tan^2 x > 0$.

Näin ollen funktio $f(x) = x + \tan x$ on aidosti kasvava, kun $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Aidosti kasvavan funktion pienin arvo sijaitsee välin alkupisteessä ja suurin välin loppupisteessä.
Koska kyseessä on avoin väli, funktiolla ei suurinta eikä pienintä arvoa.
<u>Vastaus:</u> Ei suurinta eikä pienintä arvoa.

125. Funktio $f(x) = 1 - \sin^4 2x$ suutin ja pienin arvo voidaan määrätä ilman derivaattaa.

Haetaan funktion $f(x) = 1 - \sin^2 2x$ suurin ja pienin arvo ilman derivaattaa.

Koska $\sin 2x$ saa kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$, niin $\sin^4 x = (\sin 2x)^4$ saa kaikki arvot väliltä $[0,1]$.

Saadaan epäyhtälö

$$0 \le \sin^4 2x \le 1 \quad \Big| \cdot (-1) < 0$$

$$0 \ge -\sin^4 2x \ge -1$$

$$-1 \le -\sin^4 2x \le 0 \quad \Big| +1$$

$$0 \le 1 - \sin^4 2x \le 1 \quad \Big| \, f(x) = 1 - \sin^4 2x$$

$$0 \le f(x) \le 1$$

<u>Vastaus</u>: Suurin on arvo 1 ja pienin arvo 0.

126. Funktio $f(x) = -2x + \sin 2x$ on jatkuva, kun $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, joten funktiolla on tällä välillä sekä pienin että suurin arvo. Jatkuvana funktiona se saa myös kaikki arvot näiden väliltä. Funktion suurin ja pienin arvo sijaitsevat joko välin päätepisteissä tai vastaavalle avoimelle välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

Derivaatta $f'(x) = -2 + 2\cos 2x$

Derivaatan nollakohdat

$$-2 + 2\cos 2x = 0$$

$$\cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = \cos 0$$

$$2x = n\pi \quad \Big| : 2$$

$$x = n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Välille $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$ kuuluvat nollakohdat

$$-\frac{\pi}{6} < n\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} \qquad \Big|\ :\frac{\pi}{2} > 0$$
$$-\frac{1}{3} < \quad n \quad < \frac{1}{3}$$

Koska n on kokonaisluku, niin $n = 0$, ja välille kuuluva derivaatan nollakohta on

$$x = 0\cdot\frac{\pi}{2} = 0$$

Lasketaan funktion $f(x) = -2x + \sin 2x$ arvo
välin päätepisteissä

$$f(-\frac{\pi}{6}) = -2\cdot(-\frac{\pi}{6}) + \sin[2\cdot(-\frac{\pi}{6})] = \frac{\pi}{3} + \sin(-\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}18 \quad \text{(suurin)}$$

$$f(\frac{\pi}{6}) = -2\cdot\frac{\pi}{6} + \sin(2\cdot\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{3} + \sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{6} \approx -0{,}18 \ \text{(pienin)}$$

ja derivaatan nollakohdassa
$f(0) = -2\cdot 0 + \sin(2\cdot 0) = 0$

Vastaus: Funktion arvojoukko $\left[\frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{6}, \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}\right]$

127. Funktio $f(x) = 2x + \tan 2x$ on jatkuva, kun $x \in [-\frac{\pi}{6}, 0]$, joten funktiolla on tällä välillä sekä pienin että suurin arvo. Jatkuvana funktiona se saa myös kaikki arvot näiden väliltä. Funktion suurin ja pienin arvo sijaitsevat joko välin päätepisteissä tai vastaavalle avoimelle välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

Derivaatta $f'(x) = 2 + 2(1 + \tan^2 2x) = 4 + 2\underbrace{\tan^2 2x}_{\geq 0} \geq 0$

Koska funktion derivaatta on suurempi kuin nolla ja yhtä suuri kuin nolla vain yksittäisissä pisteissä, niin funktio on aidosti kasvava koko välillä. Pienin arvo on tällöin välin alkupisteessä ja suurin loppupisteessä.
Koska n on kokonaisluku, niin $n = 0$, ja välille kuuluva derivaatan nollakohta on

$$x = 0\cdot\frac{\pi}{2} = 0$$

Lasketaan funktion $f(x) = 2x + \tan 2x$ arvo välin päätepisteissä

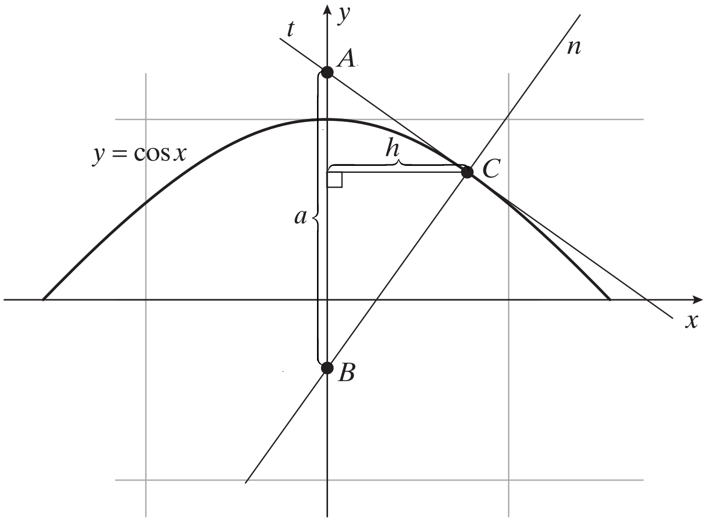
$$f(-\frac{\pi}{6}) = 2\cdot(-\frac{\pi}{6}) + \tan[2\cdot(-\frac{\pi}{6})] = -\frac{\pi}{3} + \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3} + (-\frac{\sqrt{3}}{1}) = -\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \quad \text{(pienin)}$$

$f(0) = 2\cdot 0 + \tan(2\cdot 0) = 0$ (suurin)

Vastaus: Funktion arvojoukko $\left[-\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, 0\right]$

128. Funktio $f(x) = \cos x$

Funktion kohtaan $x = \frac{\pi}{4}$ piirretyn tangentin kulmakerroin on sama kuin funktion derivaatan arvo tässä kohdassa.



Derivaatta $f'(x) = -\sin x$

Tangentti

$$y - y_0 = k_t(x - x_0)$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4},\ y_0 = f(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ k_t = f'(\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})$$

Tangentin ja *y*-akselin leikkauspiste, $x = 0$

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0 - \frac{\pi}{4})$$

$$y = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Normaali

Koska tangentti ja normaali ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, niin kulmakertoimien tulo on –1.

Normaalin kulmakerroin $k_n = \sqrt{2}$

$$y - y_0 = k_t(x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(x - \frac{\pi}{4})$$

Normaalin ja *y*-akselin leikkauspiste, $x = 0$

$$y-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(0-\frac{\pi}{4})$$

$$y=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

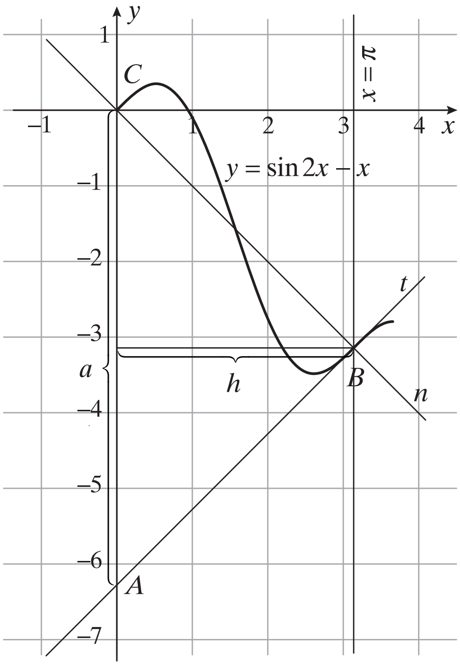
Kolmion *ABC* pinta-ala

$$A=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\left|\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}})\right|\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\left|\frac{-3\pi}{4\sqrt{2}}\right|\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}\pi^2}{64}$$

Vastaus: $\frac{3\sqrt{2}\pi^2}{64}$

129. Funktio $f(x)=\sin 2x-x$

Funktion kohtaan $x=\pi$ piirretyn tangentin kulmakerroin on sama kuin funktion derivaatan arvo tässä kohdassa.



Derivaatta $f'(x)=2\cos 2x-1$

Tangentti

$$y-y_0=k_t(x-x_0)$$

$x_0=\pi,\ y_0=f(\pi)=\sin(2\cdot\pi)-\pi=-\pi,$

$k_t=f'(\pi)=2\cos(2\cdot\pi)-1=2\cdot 1-1=1$

$$y-(-\pi)=1(x-\pi)$$

Tangentin ja *y*-akselin leikkauspiste, x = 0

$$y+\pi=(0-\pi)$$
$$y=2\pi$$

Normaali
Koska tangentti ja normaali ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, niin kulmakertoimien tulo on –1.
Normaalin kulmakerroin $k_n = -1$

$$y-y_0 = k_t(x-x_0)$$
$$y-(-\pi)=-1(x-\pi)$$

Normaalin ja *y*-akselin leikkauspiste, $x = 0$

$$y+\pi=-1\cdot(0-\pi)$$
$$y=0$$

Kolmion *ABC* pinta-ala

$$A=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\left|2\pi-0\right|\cdot\pi=\pi^2$$

Vastaus: π^2

130. Funktio $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x-3$ on jatkuva, kun $x\in[0,\pi]$, joten funktiolla on tällä välillä sekä pienin että suurin arvo. Funktion suurin ja pienin arvo sijaitsevat joko välin päätepisteissä tai vastaavalle avoimelle välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.
Derivaatta $f'(x)=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$
Derivaatan nollakohdat

$$-\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$$
$$-\sin x=-\sqrt{3}\cos x \quad \big| :\cos x\neq 0,\ \text{jos } \cos x = 0,\ \sin x\neq 0,\ \text{ei ratkaisua}$$
$$-\tan x=-\sqrt{3} \quad \big| :(-1)$$
$$\tan x=\sqrt{3}$$
$$\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$$
$$x=\frac{\pi}{3}+n\pi$$

Välille]0, π [kuuluu vain $x=\frac{\pi}{3}$.

Lasketaan funktion $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x-3$ arvo
välin päätepisteissä

$f(0)=\cos 0+\sqrt{3}\sin 0-3=1-3=-2$

$f(\pi)=\cos\pi+\sqrt{3}\sin\pi-3=-1-3=-4$ (pienin)

ja derivaatan nollakohdassa

$f(\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} - 3 = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 3 = -1$ (suurin)

Vastaus: Pienin arvo on –4 ja suurin –1.

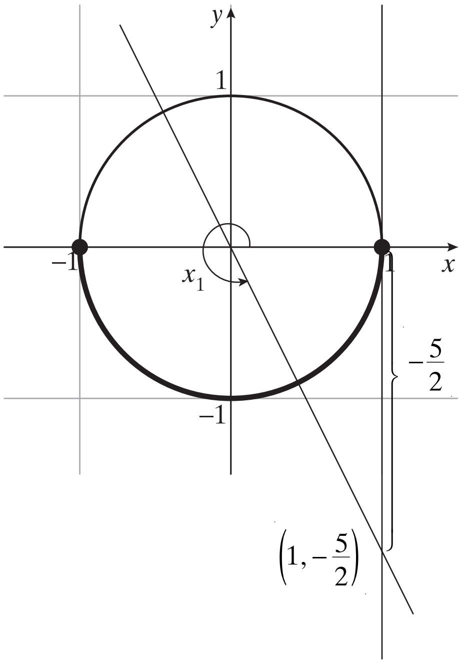
131. Funktio $f(x) = 2\cos x + 5\sin x - 1$ on jatkuva, kun $x \in [\pi,\ 2\pi]$, joten funktiolla on tällä välillä sekä pienin että suurin arvo. Funktion suurin ja pienin arvo sijaitsevat joko välin päätepisteissä tai vastaavalle avoimelle välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.
Derivaatta $f'(x) = -2\sin x + 5\cos x$
Derivaatan nollakohdat

$$2\sin x + 5\cos x = 0$$

$$2\sin x = -5\cos x \quad \Big|\ :\cos x \neq 0,\ \text{jos } \cos x = 0,\ \sin x \neq 0 \text{ ei ratkaisua}$$

$$2\tan x = -5 \quad \Big|\ :2$$

$$\tan x = -\frac{5}{2}$$



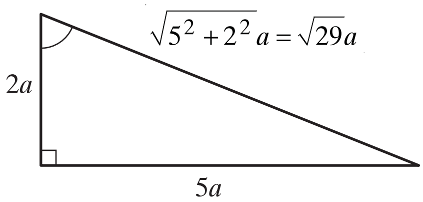
Välille $]\pi, 2\pi[$ kuuluu vain kulma $x = x_0$.

Lasketaan funktion $f(x) = 2\cos x + 5\sin x - 1$ arvo

1. Välin päätepisteissä:
$f(\pi) = 2\cos\pi + 5\sin\pi - 1 = 2\cdot(-1) + 5\cdot 0 - 1 = -3$
$f(2\pi) = 2\cos(2\pi) + 5\sin(2\pi) - 1 = 2\cdot 1 + 5\cdot 0 - 1 = 1$ (suurin)

2. Derivaatan nollakohdassa:

Lasketaan kulmaa $x = x_0$ vastaavan terävän kulman sinin ja kosinin arvot käyttäen suorakulmaista kolmiota, jossa $\tan\alpha = \frac{5}{2}$



$$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

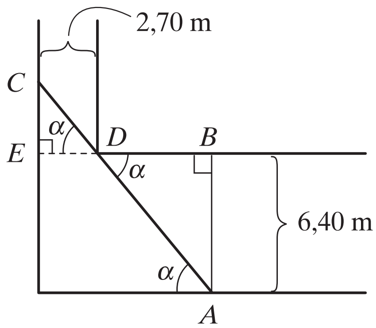
$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

Koska kulman x_0 loppukylki on neljännessä neljänneksessä, niin sekä sini että kosini ovat negatiivisia.

$$f(x_0) = 2\cos x_0 + 5\sin x_0 - 1 = 2\cdot(-\frac{2}{\sqrt{29}}) + 5\cdot(-\frac{5}{\sqrt{29}}) - 1 = -\frac{29}{\sqrt{29}} - 1 = -\sqrt{29} - 1 \text{ (pienin)}$$

<u>Vastaus</u>: Pienin arvo on $-\sqrt{29} - 1$ ja suurin 1.

132. Määritettäessä pisin metallitanko, pitää itse asiassa määrittää kaikkein "kinkkisin kohta" eli lyhin mahdollinen vino etäisyys *AB*.



Määritetään kuvion merkintöjä käyttäen lyhin jana *AB*.
Kolmiot *ABD* ja *DCE* ovat yhdenmuotoiset (kk), sillä

$\sphericalangle E = \sphericalangle B = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ ja ristikulmina $\sphericalangle EDC = \sphericalangle ADB$.

Valitaan muuttujaksi kulma α Määritetään janan $AC = AD + DC$ pituus kulman funktiona.
Kolmiosta DCE

$$\cos\alpha = \frac{ED}{CD} \qquad \Big|\ ED = 2{,}70\text{ m}$$

$$CD = \frac{2{,}7}{\cos\alpha}$$

Kolmiosta ABD

$$\sin\alpha = \frac{AB}{AD} \qquad \Big|\ AB = 6{,}40\text{ m}$$

$$AD = \frac{6{,}4}{\sin\alpha}$$

Haetaan funktion $f(\alpha) = \dfrac{6{,}4}{\sin\alpha} + \dfrac{2{,}7}{\cos\alpha}$ pienin arvo, kun $\alpha \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$.

Funktio $f(\alpha) = \dfrac{6{,}4}{\sin\alpha} + \dfrac{2{,}7}{\cos\alpha}$ on jatkuva ja derivoituva, kun $\alpha \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$.

Derivaatta

$$f'(\alpha) = 6{,}4\cos\alpha\cdot(-1)\cdot\sin^{-2}\alpha + 2{,}7(-\sin\alpha)\cdot(-1)\cdot\cos^{-2}\alpha = -\frac{6{,}4\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{2{,}7\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{-6{,}4\cos^3\alpha + 2{,}}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2}$$

Derivaatan nollakohdat

$$-6{,}4\cos^3\alpha + 2{,}7\sin^3\alpha = 0$$

$$2{,}7\sin^3\alpha = 6{,}4\cos^3\alpha \qquad \Big|\ :(\cos^3\alpha) \neq 0,\ \text{koska } \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$2{,}7\tan^3\alpha = 6{,}4 \qquad \Big|\ :2{,}7$$

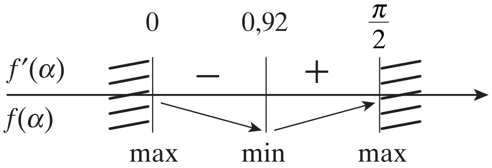
$$\tan^3\alpha = \frac{64}{27} \qquad \Big|\ \sqrt[3]{\ },\ \text{yksikäsitteinen}$$

$$\tan\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = \pm 0{,}92729..... + n\cdot\pi$$

Koska $\alpha \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, saadaan ainoa nollakohta $\alpha_0 = 0{,}92729...$

Kulkukaavio



$$f'(0{,}5) = \frac{-6{,}4\cos^3(0{,}5) + 2{,}7\sin^3(0{,}5)}{\sin^2(0{,}5)\cdot\cos^2(0{,}5)} = -22{,}7... < 0$$

$$f'(1) = \frac{-6{,}4\cos^3(1) + 2{,}7\sin^3(1)}{\sin^2(1)\cdot\cos^2(1)} = 2{,}8... > 0$$

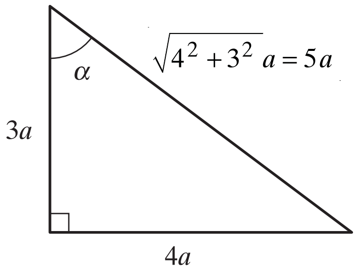
Funktion pienin arvo sijaitsee ainoassa minikohdassa α_0 .

Funktion $f(\alpha)=\dfrac{6,4}{\sin\alpha}+\dfrac{2,7}{\cos\alpha}$ pienin arvo

Koska kulman $\alpha_0 \in]0,\dfrac{\pi}{2}[$ sekä sini että kosini ovat positiivisia.

Käytetään apukolmiota tarkkojen arvojen laskemiseen. Kaikki sellaiset suorakulmaiset kolmiot, joissa toinen teräväkulma α_0 , ovat yhdenmuotoisia.

$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$



Kuviosta

$\sin\alpha=\dfrac{4a}{5a}=\dfrac{4}{5}$

$\cos\alpha=\dfrac{3a}{5a}=\dfrac{3}{5}$

$$f(\alpha_0)=f(\alpha)=\frac{6,4}{\sin\alpha_0}+\frac{2,7}{\cos\alpha_0}=\frac{6,4}{\frac{4}{5}}+\frac{2,7}{\frac{3}{5}}=12,5$$

<u>Vastaus</u>: Tangon pituus on 12,5 m.

133. Käyrien $f(x)=y=\sin x$ ja $g(x)=y=\tan x$ leikkauskulma on sama kuin leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välinen kulma.

Leikkauspiste, kun $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$

$$\begin{cases} y=\sin x \\ y=\tan x \end{cases}$$

$$\sin x = \tan x$$

$$\sin x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \Big| \cdot \cos x \neq 0,\ \text{koska } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \sin x$$

$$\sin x(\cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \qquad \text{tai} \qquad \cos x - 1 = 0$$

$$\sin x = \sin 0 \qquad\qquad \cos x = 1$$

$$x = n \cdot \pi \qquad\qquad \cos x = \cos 0$$

$$x = n \cdot 2\pi$$

Ehdon $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ täyttää ainoastaan $x = \pi$.

Funktion kohtaan $x = \pi$ piirretyn tangentin kulmakerroin on sama kuin funktion derivaatan arvo tässä kohdassa.

Funktio $f(x) = y = \sin x$ ja sen derivaatta $f'(x) = \cos x$

Kohtaan $x = \pi$ piirretyn tangentin kulmakerroin $f'(\pi) = \cos \pi = -1$

Funktio $g(x) = \tan x$ ja sen derivaatta $g'(x) = 1 + \tan^2 x$

Kohtaan $x = \pi$ piirretyn tangentin kulmakerroin $g'(\pi) = 1 + \tan^2 \pi = 1$

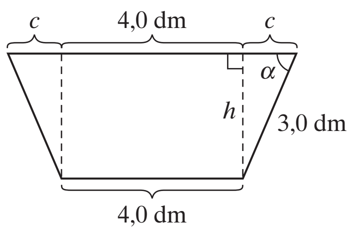
Tangenttien välinen kulma

Koska tangenttien kulmakertoimien tulo on $-1 \cdot 1 = -1$, niin tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.

<u>Vastaus</u>: Käyrien leikkauskulma on 90°.

134. Koska pyydystin on suora särmiö, jonka korkeus on vakio, niin tilavuus on suurin, kun pohjan pinta-ala on suurin. Pohja on tasakylkinen puolisuunnikas, jonka pinta-ala on

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h .$$



Puolisuunnikkaan kylki 30 cm = 3,0 dm

Lyhyempi sivu $b = 4,0$ dm

Pidempi sivu $a = 2c + 4$ (dm)

$$\frac{c}{3} = \cos\alpha$$
$$c = 3\cos\alpha$$

Korkeus *h* (dm)

$$\frac{h}{3} = \sin\alpha$$
$$h = 3\sin\alpha$$

Pinta-alafunktio $A(\alpha) = \dfrac{6\cos\alpha + 4 + 4}{2} \cdot 3\sin\alpha = 9\sin\alpha\cos\alpha + 12\sin\alpha$, $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$.

Funktio on jatkuva, joten suurin arvo sijaitsee joko välin päätepisteissä tai avoimelle välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

Derivaatta

$$A'(\alpha) = 9[\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha(-\sin\alpha)] + 12\cos\alpha \qquad \Big|\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha = 2\cos^2 - 1$$
$$= 18\cos^2\alpha + 12\cos\alpha - 9$$

Derivaatan nollakohdat

$$18\cos^2\alpha + 12\cos\alpha - 9 = 0 \qquad \Big|\ \cos\alpha = d,\ -1 \le d \le 1$$
$$18d^2 + 12d - 9 = 0$$
$$d = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 18\cdot(-9)}}{2\cdot 18}$$
$$d_1 = \frac{-12 + 28{,}1424...}{36} = 0{,}4484...$$
$$d_2 = \frac{-12 - 28{,}1424}{36} = -1{,}1150... < -1,\ \text{ei käy}$$
$$\cos\alpha = 0{,}4484...$$
$$\alpha = \pm 63{,}3587...^\circ + n\cdot 180^\circ$$

Välille kuuluu vain $\alpha = 63{,}3587...^\circ$

Välin päätepisteet $A(0) = 9\sin 0\cdot\cos 0 + 12\sin 0 = 0$,

$A(90^\circ) = 9\sin 90^\circ\cdot\cos 90^\circ + 12\sin 90^\circ = 12$

Derivaatan nollakohta

$A(63{,}3587...^\circ) = 9\sin 63{,}3587...^\circ\cdot\cos 63{,}3587...^\circ + 12\sin 63{,}3587...^\circ \approx 14$, suurin

<u>Vastaus</u>: Tilavuus on suurin, kun kulma on 63°.

135. Funktio $f(x) = A\sin x + B\cos x$, $f(\frac{\pi}{2}) = A\sin\frac{\pi}{2} + B\cos\frac{\pi}{2} = A\cdot 1 + B\cdot 0 = A$

Derivaatta $f'(x) = A\cos x - B\sin x$, $f'(\frac{\pi}{2}) = A\cos\frac{\pi}{2} - B\sin\frac{\pi}{2} = A\cdot 0 - B\cdot 1 = -B$

Yhtälöpari

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{2}) = \pi \\ f'(\frac{\pi}{2}) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \pi \\ -B = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \pi \\ B = -2 \end{cases}$$

Vastaus: $A = \pi,\ B = -2$

136. Funktio $f(x) = \cos\frac{1-x}{x}$ on määritelty ja derivoituva, kun $x \neq 0$.

Derivaatta $f'(x) = \frac{-1\cdot x - (1-x)\cdot 1}{x^2}[-\sin(\frac{1-x}{x})] = \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1-x}{x})$,

Nollakohdat

$$\frac{1}{x^2}\sin(\frac{1-x}{x}) = 0$$

$$\sin(\frac{1-x}{x}) = 0$$

$$\sin(\frac{1-x}{x}) = \sin 0$$

$$\frac{1-x}{x} = n\cdot\pi$$

$$1 - x = x\cdot n\pi$$

$$x(n\pi + 1) = 1$$

$$x = \frac{1}{1+n\pi}$$

Ne nollakohdat, jotka kuuluvat välille $]-1,1[$, kun $n \in \mathbb{Z}$.

Kun $n > 0$, niin $x > 0$ ja $x = \frac{1}{1+n\pi} < \frac{1}{1+\pi} < 1$

Kun $n = 0$, niin $x = \frac{1}{1+n\pi} = 1 \notin]-1,1[$

Kun $n < 0$, niin $x = \frac{1}{1+n\pi} < 0$ ja $x = \frac{1}{1+n\pi} \geq \frac{1}{1-\pi} > -1$

Välille $]-1,1[$ ovat $x = \frac{1}{1+n\pi}$, kun $n \in \mathbb{Z}$ ja $n \neq 0$.

Vastaus: $x = \dfrac{1}{1+n\pi}$, kun $n \in \mathbb{Z}$ ja $n \neq 0$

137. Koska sekä sini- että kosinifunktiot ovat jaksollisia funktioita, jaksona 2π, niin funktion suurin ja pienin arvo löytyvät suljetulta väliltä $[0,\ 2\pi]$. Funktio $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ on jatkuva, kun $x \in \mathbb{R}$, joten se saa sekä suurimman että pienimmän arvonsa suljetulla välillä. Ne sijaitsevat joko välin päätepisteissä tai vastaavalle avoimelle välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

Funktio $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$
Derivaatta $f'(x) = 2\cos x + 2\cdot(-\sin 2x) = 2\cos x - 2\sin 2x$
Derivaatan nollakohdat

$$f'(x) = 0$$
$$2\cos x - 2\sin 2x = 0 \qquad \Big|\ \sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$2\cos - 2\cdot 2\sin x\cos x = 0$$
$$2\cos x(1-2\sin x) = 0$$

$2\cos x = 0$ tai $1-2\sin x = 0$

$\cos x = \cos\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{6}$

$x = \pm\dfrac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$ $\qquad$ $x = \dfrac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$ tai $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$

$x = \dfrac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi$

Välille]0, 2π[kuuluvat derivaatan nollakohdat. Jos $n < 0$, niin $x < 0$.

n	$x = -\dfrac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$	$x = \dfrac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$	$x = \dfrac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$	$x = \dfrac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi$
0	$-\dfrac{\pi}{2} \notin]0, 2\pi[$	$\dfrac{\pi}{2} \in]0, 2\pi[$	$\dfrac{\pi}{6} \in]0, 2\pi[$	$\dfrac{5\pi}{6} \in]0, 2\pi[$
1	$\dfrac{3\pi}{2} \in]0, 2\pi[$	$\dfrac{5\pi}{2} \notin]0, 2\pi[$	$\dfrac{13\pi}{6} \notin]0, 2\pi[$	$\dfrac{17\pi}{6} \notin]0, 2\pi[$
2	$\dfrac{7\pi}{2} \notin]0, 2\pi[$			

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja avoimelle välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.
Funktio $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$

$f(0) = 2\sin 0 + \cos(2\cdot 0) = 1$

$f(2\pi) = 2\sin(2\pi) + \cos(2\cdot 2\pi) = 1$

$f(\dfrac{\pi}{2}) = 2\sin\dfrac{\pi}{2} + \cos(2\cdot\dfrac{\pi}{2}) = -1$

$f(\frac{\pi}{6}) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos(2\cdot\frac{\pi}{6}) = 1\frac{1}{2}$ suurin

$f(0) = 2\sin\frac{5\pi}{6} + \cos(2\cdot\frac{5\pi}{6}) = 1\frac{1}{2}$ suurin

$f(\frac{3\pi}{2}) = 2\sin\frac{3\pi}{2} + \cos(2\cdot\frac{3\pi}{2}) = -2-1 = -3$ pienin

Vastaus : Funktion suurin arvo on 1,5 ja pienin –3

138. Funktio $f(x) = \sin x\cos(x+a)$ on jatkuva ja derivoituva, kun $x \in \mathbb{R}$.

Derivaattafunktio $f'(x) = \cos x\cos(x+a) - \sin x\sin(x+a)$ on jatkuva, kun $x \in \mathbb{R}$, joten suurin arvo on suurin maksimeista ja pienin arvo pienin minimeistä. Ääriarvot sijaitsevat derivaatan nollakohdissa.

Derivaatan nollakohdat

$$\cos x\cos(x+a) - \sin x\sin(x+a) = 0 \qquad \Big|\ \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos(x+x+a) = 0$$

$$\cos(2x+a) = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$2x+a = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} + n\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} - \frac{a}{2} + n\pi$$

Funktio $f(x) = \sin x\cos(x+a)$ on jaksollinen, jaksona 2π, ja funktion jaksoon ei vaikuta vakio a. Näin ollen riittää antaa n:lle arvot 0, 1, 2 ja 3.

$n = 0$:

$$f(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}) = \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2})\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}) \qquad \Big|\ \text{käytetään kaavoja} \sin(\alpha-\beta) \text{ ja } \cos(\alpha+\beta)$$

$$= [\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{a}{2}]\cdot[\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{a}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{a}{2}] \qquad \Big|\ \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{a}{2})^2$$

$$= \frac{1}{2}(\cos^2\frac{a}{2} - 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2}) \qquad \Big|\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin a$$

$n = 1$

$$f(\frac{3\pi}{4}-\frac{a}{2})$$

$$= \sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{a}{2})\cos(\frac{3\pi}{4}+\frac{a}{2}) \quad \Big| \text{ käytetään kaavoja } \sin(\alpha-\beta) \text{ ja } \cos(\alpha+\beta)$$

$$= [\sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{a}{2}]\cdot[\cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{a}{2}] \quad \Big| \sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -1\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{a}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{a}{2})^2$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos^2\frac{a}{2}+2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}) \quad \Big| \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

$$= -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin a$$

$n = 2$

$$f(\frac{5\pi}{4}-\frac{a}{2})$$

$$= \sin(\frac{5\pi}{4}-\frac{a}{2})\cos(\frac{5\pi}{4}+\frac{a}{2}) \quad \Big| \text{ käytetään kaavoja } \sin(\alpha-\beta) \text{ ja } \cos(\alpha+\beta)$$

$$= [\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{5\pi}{4}\sin\frac{a}{2}]\cdot[\cos\frac{5\pi}{4}\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{5\pi}{4}\sin\frac{a}{2}] \quad \Big| \sin\frac{5\pi}{4}=\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= (-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{a}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{a}{2})^2$$

$$= \frac{1}{2}(\cos^2\frac{a}{2}-2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}) \quad \Big| \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin a$$

$n = 3$

$$f(\frac{7\pi}{4}-\frac{a}{2})$$

$$= \sin(\frac{7\pi}{4}-\frac{a}{2})\cos(\frac{7\pi}{4}+\frac{a}{2}) \quad \Big| \text{ käytetään kaavoja } \sin(\alpha-\beta) \text{ ja } \cos(\alpha+\beta)$$

$$= [\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{7\pi}{4}\sin\frac{a}{2}]\cdot[\cos\frac{7\pi}{4}\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{7\pi}{4}\sin\frac{a}{2}] \quad \Big| \sin\frac{7\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{7\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= (-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{a}{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{a}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{a}{2})$$

$$= -1\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{a}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{a}{2})^2$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos^2\frac{a}{2}+2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}) \quad \Big| \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

$$= -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin a$$

Koska $-1 \le \sin a \le 1$, niin $-1 \le -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin a = -\frac{1}{2}(1+\sin a) \le 0$ ja

$0 \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin a = \frac{1}{2}(1-\sin a) \le 1$, niin

suurin arvo on $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin a$ ja pienin arvo on $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin a$

<u>Vastaus:</u> Suurin arvo on $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin a$ ja pienin arvo on $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin a$.

139. Funktio $f(x)=\sin 2(x+\frac{\pi}{4})=\sin(2x+\frac{\pi}{2})=\sin 2x\cos\frac{\pi}{2}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{2}=\cos 2x$ on jatkuva, kun $x \in \mathbb{R}$.

Kosinifunktion suurin mahdollinen arvo on 1.

$$\cos 2x = 1$$
$$\cos 2x = \cos 0$$
$$2x = n\cdot 2\pi$$
$$x = n\cdot\pi \qquad n\in\mathbb{Z}$$

<u>Vastaus</u>: $x = n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

140. Funktio $f(x)=\sin^2 x\cos^4 x$ on jaksollinen, jaksona [0, 2π]. Koska funktio on tällä välillä sekä jatkuva että derivoituva , suurin ja pienin arvo löytyvät tältä väliltä. Ne sijaitsevat joko välin päätepisteissä tai avoimelle välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.
Derivaatta
$f'(x)=\cos x\cdot 2\sin x\cdot\cos^4 x+\sin^2 x\cdot(-\sin x)\cdot 4\cos^3 x=2\sin x\cos^3 x(\cos^2 x-2\sin^2 x)$
Derivaatan nollakohdat

$$2\sin x\cos^3 x(\cos^2 x-2\sin^2 x)=0$$

$$\begin{array}{lllll} \sin x=0 & \text{tai} & \cos^3 x=0 & \text{tai} & \cos^2 x-2\sin^2 x=0 \quad \big|\ \cos^2 x=1-\sin^2 x \\ x=n\cdot\pi & & \cos x=0 & & 1-3\sin^2 x=0 \\ & & x=\dfrac{\pi}{2}+n\cdot\pi & & \sin x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}$$

Funktion $f(x)=\sin^2 x\cos^4 x$ arvot välin päätepisteissä

$f(0)=\sin^2 0\cdot\cos^4 0=0$

$f(2\pi)=\sin^2(2\pi)\cdot\cos^4(2\pi)=0$

Funktion $f(x)=\sin^2 x\cos^4 x$ arvot derivaatan nollakohdissa.
Koska kysytään suurinta ja pienintä arvoa, lasketaan ne ratkaisematta kulmaa.
Kun $\sin x=0$ tai $\cos x=0$, niin $f(x)=\sin^2 x\cos^4 x=0$

Kun $\sin x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, niin $\sin^2 x=\dfrac{1}{3}$ ja $\cos^2 x=1-\sin^2 x=\dfrac{2}{3}$, jolloin

$f(x)=\sin^2 x\cos^4 x=\dfrac{1}{3}\cdot(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{4}{27}$. (suurin)

<u>Vastaus</u>: Suurin arvo on $\dfrac{4}{27}$ ja pienin 0.

141. Määritetään funktion $f(x)=(1-\cos^3 x)^3$ suurin ja pienin arvo käyttämättä derivaattaa.
Kosinifunktio on jatkuva ja sen arvojoukko on [–1, 1] .

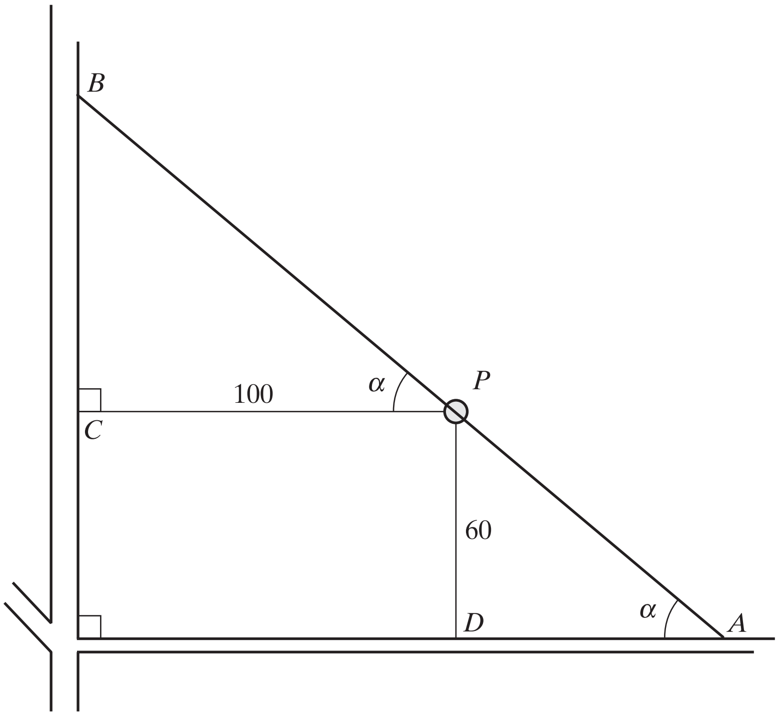
$$\begin{array}{ll} -1\le\cos x\le 1 & \big|\ ()^3,\ y=x^3 \text{ aidosti kasvava eli säilyttää järjestyksen} \\ -1\le\cos^3 x\le 1 & \big|\ \cdot(-1) \\ 1\ge-\cos^3 x\ge -1 & \\ -1\le-\cos^3 x\le 1 & \big|\ +1 \\ 0\le 1-\cos^3\le 2 & \big|\ ()^3,\ y=x^3 \text{ aidosti kasvava eli säilyttää järjestyksen} \\ 0\le(1\text{-}\cos^3 x)^3\le 8 & \end{array}$$

<u>Vastaus</u>: Suurin arvo on 8 ja pienin 0.

142. Kysytty kulma on α $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$. Samankohtaisina kulmina kulma *CPB* = α, koska $PC \parallel AD$.
Haetaan oikopolun $AB = AP + PB$ lyhin mahdollinen pituus.
Kolmiosta *CPB*

$$\cos\alpha = \frac{100}{PB}$$

$$PB = \frac{100}{\cos\alpha}$$



Kolmiosta *DAP*

$$\sin\alpha = \frac{60}{AP}$$

$$AP = \frac{60}{\sin\alpha}$$

Oikopolkufunktio $f(\alpha) = \frac{100}{\cos\alpha} + \frac{60}{\sin\alpha}$ on jatkuva, kun $\alpha \in]0^\circ, 90^\circ[$. Tutkitaan funktion kulkua.

Derivaatta

$$f'(\alpha) = 100(-\sin\alpha)\cdot(-1)\cdot\cos^{-2}\alpha + 60\cos\alpha\cdot(-1)\cdot\sin^{-2}\alpha$$

$$= \frac{100\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{60\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{100\sin^3\alpha - 60\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$$

$$100\sin^3\alpha - 60\cos^3\alpha = 0$$

$$100\sin^3\alpha = 60\cos^3\alpha \qquad \Big| : (\cos^3\alpha) \neq 0, \text{ koska } \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$100\tan^3\alpha = 60 \qquad \Big| : 100$$

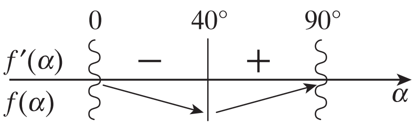
$$\tan^3\alpha = 0,6 \qquad \Big| \sqrt[3]{\ }, \text{yksikäsitteinen}$$

$$\tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

$$\alpha = \pm 40,145...^\circ + n\cdot 180^\circ$$

Välille]0°, 90°[kuuluu vain kulma 40,145...°

Kulkukaavio



$$f'(30^\circ) = \frac{100\sin^3 30^\circ - 60\cos^3 30^\circ}{\sin^2 30^\circ \cdot \cos^2 30^\circ} < 0$$

$$f'(60^\circ) = \frac{100\sin^3 60^\circ - 60\cos^3 60^\circ}{\sin^2 60^\circ \cdot \cos^2 60^\circ} 0$$

Pienin mahdollinen arvo sijaitsee ainoassa minimissä, eli derivaatan nollakohdassa.

<u>Vastaus</u>: Kulma on 40°.

143. Funktio $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Derivaattafunktio $f'(x) = -[-\sin(\frac{\pi}{2} - x)] = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

Yhtälö

$$f'(x) = \sin x$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

$$\frac{\pi}{2} - x = x + n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{\pi}{2} - x = \pi - x + n\cdot 2\pi$$

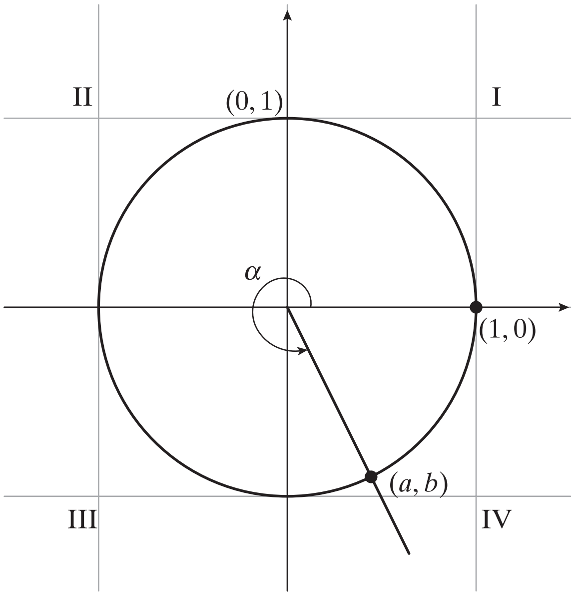
$$2x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \qquad\qquad 0 = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi \qquad\qquad \text{ei ratkaisua, kun } n \in \mathbb{Z}$$

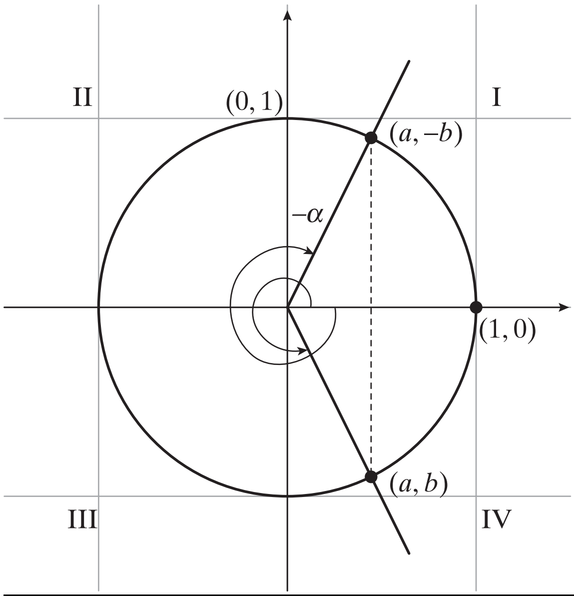
<u>Vastaus</u>: $x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Testaa hyvät taitosi 1

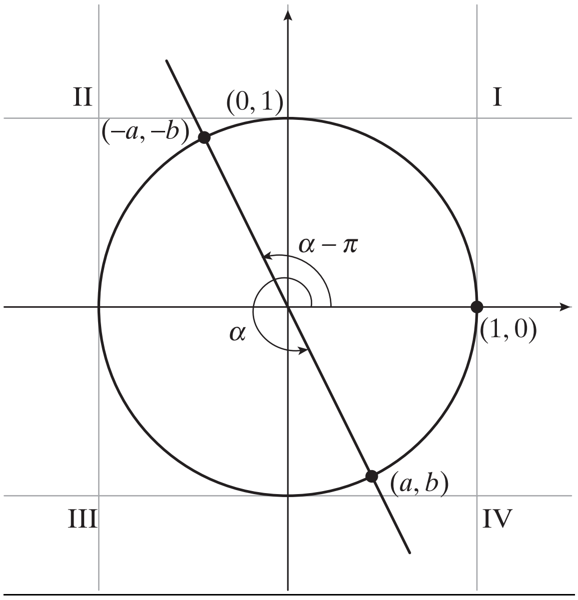
1.



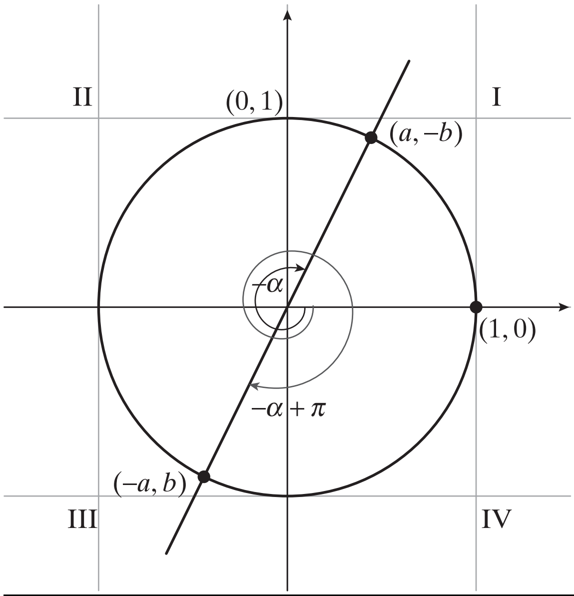
a)
Kulma $-\alpha$ sijaitsee 1. neljänneksessä.
Kulman kehäpiste saadaan peilaamalla kulman α kehäpiste x-akselin suhteen, joten kehäpiste on $(a, -b)$



b)
Kulma $\alpha - \pi$ sijaitsee 2. neljänneksessä.
Kulman kehäpiste saadaan peilaamalla kulman α kehäpiste origon suhteen, joten kehäpiste on $(-a, -b)$



c) Kulma $-\alpha + \pi$ sijaitsee 3. neljänneksessä.
Kulman kehäpiste saadaan peilaamalla kulman –α kehäpiste origon suhteen, joten kehäpiste on $(-a, b)$



Vastaus: a) $(a, -b)$ b) $(-a, -b)$ c) $(-a, b)$

2. a) Kulman sini on kehäpisteen y-koordinaatti: $\sin\alpha = b$

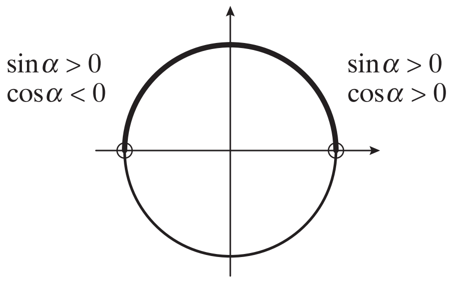
b) Kulman kosini on kehäpisteen x-koordinaatti: $\cos \alpha = a$

c) $\tan(\alpha-\pi) = \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{a}$

d) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{b}$

<u>Vastaus</u>: a) b b) a c) $\dfrac{b}{a}$ d) $\dfrac{a}{b}$

3. $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ ja $\alpha \in]0,\pi[$



$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ja $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

Kun $\alpha \in]0,\pi[$, niin

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\ .$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \pm\frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{\sqrt{1-(\frac{3}{\sqrt{10}})^2}} = \pm\frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \pm 3$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \pm\frac{1}{3}$$

<u>Vastaus</u>: $\tan\alpha = \pm 3$, $\cot\alpha = \pm\dfrac{1}{3}$

4. Koska $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha)^2 - (\cos^2\alpha)^2$, niin käytetään muistikaavaa

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,

$$\begin{aligned}\sin^4\alpha - \cos^4\alpha &= (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) && \mid \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\\ &= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha && \mid \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = -\cos 2c\\ &= -\cos 2\alpha \ \square\end{aligned}$$

5. a) Funktio $f(x) = \sin 10x$

Funktion $\sin\alpha$ perusjakso on 2π .Kun kulma kymmenkertaistuu jakso menee kymmenesosaan, joten funktion $f(x) = \sin 10x$ perusjakso on $\dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5}$.

b) Funktio $f(x) = \tan\dfrac{\pi + x}{5} = \tan(\dfrac{1}{5}x + \dfrac{\pi}{5})$

Tangentin perusjakso on π. Vakion lisääminen kulmaan siirtää kuvaajan paikkaa, mutta ei vaikuta perusjakson pituuteen. Kun kulma on viidesosa alkuperäisestä, niin jakso on viisinkertainen, eli 5π

Vastaus: a) $\dfrac{\pi}{5}$ b) 5π

6. a) Funktio $f(x) = 3\cos x + 3$ on määritelty ja jatkuva, kun $x \in \mathbb{R}$. Määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko.
Arvojoukko
Koska $-1 \le \cos x \le 1$ ja cos*x* saa kaikki arvot tältä väliltä, niin

$$-1 \le \cos x \le 1 \quad \Big| \cdot 3$$
$$-3 \le 3\cos x \le 3 \quad \Big| +3$$
$$0 \le 3\cos x + 3 \le 6$$

Funktion arvojoukko on [0, 6].

b) Funktio $f(x) = 3 - 3\sin^3\dfrac{x}{7}$ on määritelty ja jatkuva, kun $x \in \mathbb{R}$. Määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko.
Arvojoukko
Koska $-1 \le \sin x \le 1$ ja sin*x* saa kaikki arvot tältä väliltä, niin

$$-1 \le \sin x \le 1 \quad \Big| ()^3,\ y = x^3 \text{ aidosti kasvava, järjestys säilyy}$$
$$(-1)^3 \le \sin^3 x \le 1^3 \quad \Big| \cdot(-3) < 0$$
$$3 \ge -3\sin^3 x \ge -3 \quad \Big| +3$$
$$0 \le 3 - 3\sin^3 x \le 6$$

Funktion arvojoukko on [0, 6].
Vastaus: a) Määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$ ja arvojoukko on [0, 6] b) Määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$ ja arvojoukko on [0, 6]

7. a)

$$\cos x = \cos 2x$$
$$x = 2x + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -2x + n \cdot 2\pi$$
$$-x = n \cdot 2\pi \qquad 3x = n \cdot 2\pi$$
$$x = n \cdot 2\pi \qquad x = n \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Koska $n \in \mathbb{Z}$, voidaan vastaukset yhdistää, eli $x = n \cdot \dfrac{2}{3}\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

b)

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$$

$$\sqrt{3}\sin x = -\cos x \qquad \Big| :(-\cos x) \neq 0,\ \text{jos } \cos x = 0,\ \text{niin } \sin x \neq 0,\ \text{joten yhtälö ei toteudu}$$

$$-\sqrt{3}\tan x = 1$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan x = \tan\frac{5\pi}{6}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + n\cdot\pi$$

c)

$$\sin^2 x = \cos x - \cos^2 x$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} = \cos x$$

$$\cos x = 1$$

$$\cos x = \cos 0$$

$$x = n\cdot 2\pi$$

<u>Vastaus</u>: a) $x = n\cdot\frac{2}{3}\pi,\ n\in\mathbb{Z}$ b) $x = \frac{5\pi}{6} + n\cdot\pi\ ,\ n\in\mathbb{Z}$ c) $x = n\cdot 2\pi\ ,\ n\in\mathbb{Z}$

8.

a) $D(\frac{1}{8}\sin x + \frac{1}{8}\cos 8x) = \frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\cdot 8\cdot(-\sin 8x) = \frac{1}{8}\cos x - \sin 8x$

b)

$$D(\frac{\cos^2 x}{8\sin x}) = \frac{-\sin x\cdot 2\cos x\cdot 8\sin x - \cos^2 x\cdot 8\cos x}{(8\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-16\sin^2 x\cos x - 8\cos^2 x\cos x}{64\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{4}\cos x - \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{8\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{4}\cos x - \frac{\cos x - \sin^2 x\cos x}{8\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{4}\cos x - \frac{\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{1}{8}\cos x$$

$$= -\frac{1}{8}\cos x - \frac{\cos x}{8\sin^2 x}$$

c) $D(\frac{8}{9}\tan^9 x) = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 9\tan^8 x = \frac{8\tan^8 x}{\cos^2 x}$

Vastaus: a) $\frac{1}{8}\cos x - \sin 8x$ b) $-\frac{1}{8}\cos x - \frac{\cos x}{8\sin^2 x}$ c) $\frac{8\tan^8 x}{\cos^2 x}$

9. Funktio $f(x) = \frac{10\cos^2 x - 1}{\underbrace{1-\sin^2 x}_{\cos^2 x}} = 10 - \frac{1}{\cos^2 x}$ on jatkuva, kun $x \in [-1, 1]$ ja derivoituva, kun $x \in]-1, 1[$

Jatkuva funktio saa suljetulla välillä sekä suurimman että pienimmän arvonsa. Ne sijaitsevat joko välin päätepisteissä, derivaatan nollakohdissa tai kohdissa, joissa derivaatta ei ole olemassa.

Derivaatta $f'(x) = -(-\sin x)\cdot(-2)\cdot(\cos x)^{-3} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, derivaattafunktio on jatkuva, kun $x \in]-1, 1[$

Derivaatan nollakohdat

$$\frac{2\sin x}{\cos^3 x} = 0$$
$$\sin x = 0$$
$$\sin x = \sin 0$$
$$x = n\cdot\pi$$

Välille]–1, 1[kuuluu vain $x = 0$.

Funktion arvot välin päätepisteissä

$$f(-1) = 10 - \frac{1}{\cos^2(-1)} = 6{,}574...$$

$$f(1) = 10 - \frac{1}{\cos^2 1} = 6{,}574...$$

Funktion arvo derivaatan nollakohdassa $f(0) = 10 - \frac{1}{\cos^2 0} = 10 - 1 = 9$ Suurin

Vastaus: Funktion suurin arvo on 9.

10. Funktio $f(x) = -8\cos x + 8\cos x\sin^2 x - 2 = -8\cos x(\underbrace{1-\sin^2 x}_{\cos^2 x}) - 2 = -8\cos^3 x - 2$,

$x \in \mathbb{R}$.

Funktion pienin arvo saadaan myös ilman derivaattaa. Käytetään tässä derivaattaa.
Funktio on jatkuva ja derivoituva, kun $x \in \mathbb{R}$.

Myös derivaattafunktio $f'(x) = -8\cdot(-\sin x)\cdot 3\cos^2 x = 24\sin x\cos^2 x$ on määritelty ja jatkuva, kun $x \in \mathbb{R}$, joten pienin arvo on pienin minimeistä. Ääriarvot sijaitsevat derivaattafunktion nollakohdissa.

Derivaatan nollakohdat

$$24\sin x\cos^2 x = 0$$

$$\sin x = 0 \qquad \text{tai} \qquad \cos x = 0$$

$$\sin x = \sin 0 \qquad\qquad \cos x = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$x = n\cdot\pi \qquad\qquad x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$$

Lasketaan funktion arvot ääriarvokohdissa.

Kun $x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$, niin $\cos x = 0$, joten $f(x) = -8\cos^3 x - 2 = -2$.

Kun $x = n\cdot\pi$, niin $\cos x = 1$ tai $\cos x = -1$, joten $f(x) = -8\cdot 1 - 2 = -10$ tai $f(x) = -8\cdot(-1) - 2 = 6$

Pienin arvo on -10

<u>Vastaus</u>: -10

6. Lukujono

144. Ratkaisuesimerkkejä
a) lisäämällä edelliseen termiin 6 saadaan seuraava termi eli 2, 8, 14, 20, ...
b) vähentämällä edellisestä termistä 7 saadaan seuraava termi eli 9, 2, –5, –12, ...
c) kertomalla edellinen termi 0,1 :llä saadaan seuraava termi eli 1; 0,1; 0,01; 0,001; ...
d) kertomalla edellinen termi 0,6 :llä saadaan seuraava termi eli 0,3; 0,18; 0,108; 0,0648; ...
e) korottamalla termin järjestysluku potenssiin 3 saadaan seuraava termi eli $1^3 = 1$, $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, ...
f) laskemalla kahden edellisen termin summa saadaan seuraava termi
eli –1, –1, –2, –3, –5, –8, ...
g) ottamalla ensimmäisestä alkaen jonon joka toinen termi saadaan jono 12, 11, 10, 9, 8, 7, ... ja ottamalla toisesta termistä alkaen jonon joka toinen termi saadaan jono –11, –12, –13, –14, –15, ... ja
alkuperäinen jono jatkuisi 12, –11, 11, –12, 10, –13, 9, –14, 8, –15, 7, ...

145. Ratkaisuesimerkkejä
a) lisäämällä edellisen termin osoittajaan ja nimittäjään 1 saadaan seuraava termi eli
$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$
b) lisäämällä edellisen termin osoittajaan 1 saadaan seuraava termi eli $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots$
c) kertomalla edellinen termi luvulla $\frac{1}{2}$ saadaan seuraava termi eli $-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$
d) korottamalla termin järjestysluku potenssiin 3 ja vähentämällä luvun 1 saadaan seuraava termi
eli $1^3 - 1 = 0$, $2^3–1=7$, $3^3–1=26$, $4^3–1=63$, $5^3–1=124$, $6^3–1=215$, ...
e) korottamalla termin järjestysluvun vastaluku potenssiin 3 saadaan seuraava termi
eli $(–1)^3 = –1$, $(–2)^3= –8$,$(– 3)^3= –27$, $(–4)^3= –64$, ...
f) kun ensimmäiseen termiin lisätään 5, saadaan toinen termi ja kun edelliseen termiin lisättävää lukua kasvatetaan joka kerta luvulla 2, saadaan seuraava termi eli
3, 3+5=8, 8+5+2=15, 15+7+2=24, 24+9+2=35, ...
g) kun ensimmäiseen termiin lisätään 2, saadaan toinen termi ja kun edelliseen termiin lisättävä luku kerrotaan joka kerta luvulla 2, saadaan seuraava termi eli
1, 1+2=3, 3+4=7, 7+8=15, 15+16=31, 31+32=63, ...
h) kun ensimmäiseen termiin lisätään 1, saadaan toinen termi ja kun edelliseen termiin lisättävää lukua kasvatetaan joka kerta luvulla 1, saadaan seuraava termi eli
3, 3+1=4, 4+2=6, 6+3=9, 9+4=13, 13+5=18, ...

146.

a)

$a_n = 5n - 1$

$a_1 = 5 \cdot 1 - 1 = 4$

$a_2 = 5 \cdot 2 - 1 = 9$

$a_3 = 5 \cdot 3 - 1 = 14$

$a_4 = 5 \cdot 4 - 1 = 19$

b)

$a_n = n^2$

$a_1 = 1^2 = 1$

$a_2 = 2^2 = 4$

$a_3 = 3^2 = 9$

$a_4 = 4^2 = 16$

c)

$a_n = 20 - 2^n$

$a_1 = 20 - 2^1 = 18$

$a_2 = 20 - 2^2 = 16$

$a_3 = 20 - 2^3 = 12$

$a_4 = 20 - 2^4 = 4$

d)

$a_n = 3^{-n}$

$a_1 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$a_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

$a_3 = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

$a_4 = 3^{-4} = \frac{1}{81}$

Vastaus: a) 4,9,14,19 b) 1,4,9,16 c) 18,16,12,4 d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$

147.

a) $a_1 = 10, a_n = a_{n-1} + 20$

$a_2 = a_1 + 20 = 10 + 20 = 30$

$a_3 = a_2 + 20 = 30 + 20 = 50$

$a_4 = a_3 + 20 = 50 + 20 = 70$

$a_5 = a_4 + 20 = 70 + 20 = 90$

b)

$a_1 = 5, a_n = 3 \cdot a_{n-1}$

$a_2 = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 5 = 15$
$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 15 = 45$
$a_4 = 3 \cdot a_3 = 3 \cdot 45 = 135$
$a_5 = 3 \cdot a_4 = 3 \cdot 135 = 405$

c)
$a_1 = 0, a_n = 6 \cdot a_{n-1} + 1$
$a_2 = 6 \cdot a_1 + 1 = 6 \cdot 0 + 1 = 1$
$a_3 = 6 \cdot a_2 + 1 = 6 \cdot 1 + 1 = 7$
$a_4 = 6 \cdot a_3 + 1 = 6 \cdot 7 + 1 = 43$
$a_5 = 6 \cdot a_4 + 1 = 6 \cdot 43 + 1 = 259$

d)
$a_1 = 16, a_n = \sqrt{a_{n-1}}$
$a_2 = \sqrt{a_1} = \sqrt{16} = 4$
$a_3 = \sqrt{a_2} = \sqrt{4} = 2$
$a_4 = \sqrt{a_3} = \sqrt{2}$
$a_5 = \sqrt{a_4} = \sqrt{\sqrt{2}}$

<u>Vastaus</u>: a) 10,30,50,70,90 b) 5,15,45,135,405
c) 0,1,7,43,259 d) 16, 4, 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$

148.
a) $a_n = (-3)^n$
$a_1 = (-3)^1 = -3$
$a_2 = (-3)^2 = 9$
$a_3 = (-3)^3 = -27$
$a_4 = (-3)^4 = 81$
$a_5 = (-3)^5 = -243$

b) $a_n = n(n-1)$
$a_1 = 1 \cdot (1-1) = 0$
$a_2 = 2 \cdot (2-1) = 2$
$a_3 = 3 \cdot (3-1) = 6$
$a_4 = 4 \cdot (4-1) = 12$
$a_5 = 5 \cdot (5-1) = 20$

c) $a_n = 1 - (\frac{1}{2})^n$
$a_1 = 1 - (\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}$

$$a_2 = 1-(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

$$a_3 = 1-(\frac{1}{2})^3 = \frac{7}{8}$$

$$a_4 = 1-(\frac{1}{2})^4 = \frac{15}{16}$$

$$a_5 = 1-(\frac{1}{2})^5 = \frac{31}{32}$$

d) $a_n = \frac{2}{n+3}$

$$a_1 = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$

$$a_3 = \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{2}{4+3} = \frac{2}{7}$$

$$a_5 = \frac{2}{5+3} = \frac{1}{4}$$

e) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

f) $1 - n^{(-1)^n}$

$$a_1 = 1-1^{(-1)^1} = 0$$

$$a_2 = 1-2^{(-1)^2} = -1$$

$$a_3 = 1-3^{(-1)^3} = \frac{2}{3}$$

$a_4 = 1 - 4^{(-1)^4} = -3$

$a_5 = 1 - 5^{(-1)^5} = \frac{4}{5}$

<u>Vastaus</u>: a) −3; 9; −27; 81 ja −243 b) 0; 2; 6; 12 ja 20

c) $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\ \frac{7}{8}; \frac{15}{16}$ ja $\frac{31}{32}$ d) $\frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{1}{3}; \frac{2}{7}$ ja $\frac{1}{4}$

e) 1; $\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{\sqrt{5}}$ f) 0; −1 ; $\frac{2}{3}$; −3 ja $\frac{4}{5}$

149. a) 0,7; 0,7+8 = 8,7; 8,7+8=16,7; 16,7+8=24,7; 24,7+8=32,7
rekursiivinen sääntö on $a_n = a_{n-1} + 8$
b) –1,3 · 2 +4 =1,4; 1,4 · 2+4 = 6,8; 6,8 · 2+4 =17,6; 17,6 · 2 +4 = 39,2; 39,2 · 2 + 4 = 82,4
rekursiivinen sääntö on $a_n = a_{n-1} \cdot 2 + 4$
c) 2, 3, 2–3 = –1, 3–(–1) = 4, –1–4 = –5
rekursiivinen sääntö on $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

<u>Vastaus</u>: a) 0,7; 8,7; 16,7; 24,7; 32,7 $a_n = a_{n-1} + 8$, $n \geq 2$
b) –1,3 ;1,4; 6,8; 17,6; 39,2; 82,4 $a_n = a_{n-1} \cdot 2 + 4$, $n \geq 2$
c) 2, 3, –1, 4, –5 $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$, $n \geq 3$

150.
a) 3,7,11,…

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	3	3	3
2	7	3 + 4	7 = 4 · 2 − 1
3	11	7 + 4	11 = 4 · 3 − 1
:			
n	a_n	$a_{n-1} + 4$	$a_n = 4n - 1$

Rekursiivinen sääntö:
$a_1 = 3$
$a_n = a_{n-1} + 4$, kun $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö:
$a_n = 4n - 1$, $n \geq 1$

b) 3, 1, −1,…

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	3	3	3
2	1	3 − 2 = 1	3 – 1 · 2 = 1
3	−1	1 −2 = −1	3 – 2 · 2 = –1
:			
n	a_n	$a_{n-1} - 2$	$3 - (n-1) \cdot 2 = -2n + 5$

Rekursiivinen sääntö:
Lukujonon termit saadaan vähentämällä edellisestä termistä luku 2.
$a_1 = 3$
$a_n = a_{n-1} - 2$, kun $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö:
$a_n = -2n + 5,\ n \geq 1$

c) 2,6,18,…

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	2	2	2
2	6	$2 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 3 = 6$
3	18	$6 \cdot 3 = 18$	$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$
:			
n	a_n	$a_{n-1} \cdot 3$	$2 \cdot 3^{n-1}$

Rekursiivinen sääntö:
Lukujonon termit saadaan kertomalla edellinen termi luvulla3.
$a_1 = 2$
$a_n = a_{n-1} \cdot 3$, kun $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö:
n:nen termin laskemiseksi ensimmäinen termi pitää kertoa $(n - 1)$ kertaa luvulla 3.
$a_n = 2 \cdot 3^{n-1},\ n \geq 1$

d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^2$
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$	$\frac{1}{27} = (\frac{1}{3})^3$
:			
n	a_n	$a_{n-1} \cdot \frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3})^n$

Rekursiivinen sääntö:
Lukujonon termit saadaan jakamalla edellinen termi luvulla 2 eli kertomalla luvulla 0,5.
$a_1 = \frac{1}{3}$

$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{3}$, kun $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö:

$a_n = (\frac{1}{3})^n$, $n \geq 1$

e) 2,−10,50,−250,…

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	2	2	2
2	−10	$2 \cdot (-5) = -10$	$-10 = 2 \cdot (-5)$
3	50	$-10 \cdot (-5) = 50$	$50 = 2 \cdot (-5) \cdot (-5)$
4	−250	$50 \cdot (-5) = -250$	$-250 = 2 \cdot (-5)^3$
:			
n	a_n	$a_{n-1} \cdot (-5)$	$2 \cdot (-5)^{n-1}$

Rekursiivinen sääntö:
Lukujonon seuraava termi saadaan kertomalla edellinen luvulla −5.
$a_1 = 2$
$a_n = a_{n-1} \cdot (-5)$, kun $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö:
$a_n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$, $n \geq 1$

Vastaus:
a) Rekursiivinen sääntö: $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 4$, kun $n \geq 2$
Analyyttinen sääntö: $a_n = 4n - 1$, $n \geq 1$

b) Rekursiivinen sääntö: $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} - 2$, kun $n \geq 2$
Analyyttinen sääntö: $a_n = -2n + 5$, $n \geq 1$

c) Rekursiivinen sääntö: $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} \cdot 3$, kun $n \geq 2$
Analyyttinen sääntö: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, $n \geq 1$

d) Rekursiivinen sääntö: $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{3}$, kun $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö: $a_n = (\frac{1}{3})^n$, $n \geq 1$

e) Rekursiivinen sääntö: $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} \cdot (-5)$, kun $n \geq 2$
Analyyttinen sääntö: $a_n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$, $n \geq 1$

151. a) lisäämällä edelliseen termiin 1 saadaan seuraava termi eli $a_n = a_{n-1} + 1$
b) kertomalla edellinen termi luvulla 3 saadaan seuraava termi eli $a_n = a_{n-1} \cdot 3$
c) $1 \quad 1 \cdot 2 \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ ….

Kertomalla edellinen termi n:n termin järjestysluvulla n saadaan seuraava termi eli $a_n = a_{n-1} \cdot n,\ n \geq 2$

Vastaus: a) $a_n = a_{n-1} + 1,\ n \geq 2$ b) $a_n = a_{n-1} \cdot 3,\ n \geq 2$ c) $a_n = a_{n-1} \cdot n,\ n \geq 2$

152.
a) 17,28,39,…

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	17	17	17
2	28	17 + 11	28 = 11 · 2 + 6
3	39	28 + 11	39 = 11 · 3 + 6
:			
n	a_n	$a_{n-1} + 11$	$a_n = 11n + 6$

rekursiivinen sääntö
$a_1 = 17$, $a_n = a_{n-1} + 11$, kun $n \geq 2$
analyyttinen sääntö
$a_n = 6 + 11n$

b) 98; 90,5 ; 83 ; 75,5 ; …

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	98	98	98
2	90,5	98 − 7,5 = 90,5	98 – 1 · 7,5 = 90,5
3	83	90,5 − 7,5 = 83	98 – 2 · 7,5 = 83
:			
n	a_n	$a_{n-1} - 7{,}5$	$98 - (n-1) \cdot 7{,}5 = 105{,}5 - 7{,}5n$

Rekursiivinen sääntö:
$a_1 = 98$, $a_n = a_{n-1} - 7{,}5$, kun $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö:
$a_n = 105{,}5 - 7{,}5n,\ n \geq 1$

c) −8,20, −50, 125, …

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	−8	−8	−8
2	20	−8 · (−2,5) = 20	−8 · (−2,5) = 20
3	−50	20 · (−2,5) = −50	−8 · (−2,5) · (−2,5) = −50
:			
n	a_n	$a_{n-1} \cdot (-2{,}5)$	$-8 \cdot (-2{,}5)^{n-1}$

Rekursiivinen sääntö:
$a_1 = -8$, $a_n = a_{n-1} \cdot (-2{,}5)$, kun $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö:
$a_n = –8 \cdot (–2,5)^{n-1}$, $n \geq 1$

d) 3; 0,75; 0,1875; 0,046875; …

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	3	3	3
2	0,75	$3 \cdot 0,25 = 0,75$	$3 \cdot 0,25 = 0,75$
3	0,1875	$0,75 \cdot 0,25 = 0,1875$	$3 \cdot 0,25 \cdot 0,25 = 0,1875$
:			
n	a_n	$a_{n–1} \cdot 0,25$	$3 \cdot (0,25)^{n–1}$

Rekursiivinen sääntö:
$a_1 = 3$, $a_n = a_{n–1} \cdot 0,25$, kun $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö:
$a_n = 3 \cdot (0,25)^{n–1}$, $n \geq 1$

e) $12, -\frac{12}{13}, \frac{12}{169}, -\frac{12}{2197}, \ldots$

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	12	12	12
2	$-\frac{12}{13}$	$12 \cdot (-\frac{1}{13}) = -\frac{12}{13}$	$12 \cdot (-\frac{1}{13}) = -\frac{12}{13}$
3	$\frac{12}{169}$	$-\frac{12}{13} \cdot (-\frac{1}{13}) = \frac{12}{169}$	$12 \cdot (-\frac{1}{13}) \cdot (-\frac{1}{13}) = \frac{12}{169}$
:			
n	a_n	$a_{n–1} \cdot -\frac{1}{13}$	$12 \cdot (-\frac{1}{13})^{n–1}$

Rekursiivinen sääntö:
$a_{n–1} \cdot -\frac{1}{13}$, kun $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö:
$a_n = 12 \cdot \left(-\frac{1}{13}\right)^{n–1}$, $n \geq 1$

f) $\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{4}{13} \ldots$

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$
2	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{1+2 \cdot 3} = \frac{2}{7}$

3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{1+3\cdot 3}=\frac{3}{10}$
:			
n	a_n	ei rekursiivista sääntöä	$\frac{n}{1+n\cdot 3}=\frac{n}{3n+1}$

Ei rekursiivinen sääntöä

Analyyttinen sääntö:

$a_n = \dfrac{n}{3n+1}$, $n \geq 1$

<u>Vastaus</u>:
a) $a_1 = 17$, $a_n = a_{n-1} + 11$, $n \geq 2$
$a_n = 6 + 11n$, $n \geq 1$
b) $a_1 = 98$, $a_n = a_{n-1} - 7{,}5$, $n \geq 2$
$a_n = 105{,}5 - 7{,}5n$, $n \geq 1$
c) $a_1 = -8$, $a_n = a_{n-1} \cdot (-2{,}5)$, $n \geq 2$
$a_n = -8 \cdot (-2{,}5)^{n-1}$, $n \geq 1$
d) $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} \cdot 0{,}25$, $n \geq 2$
$a_n = 3 \cdot 0{,}25^{n-1}$, $n \geq 1$
e) $a_1 = 12$, $a_n = a_{n-1} \cdot \left(-\dfrac{1}{13}\right)$, $n \geq 2$

$a_n = 12 \cdot \left(-\dfrac{1}{13}\right)^{n-1}$, $n \geq 1$

f) Ei rekursiivinen sääntöä

Analyyttinen sääntö: $a_n = \dfrac{n}{3n+1}$, $n \geq 1$

153.
a) Lisättävä luku puolittuu joka vaiheessa. 5; 5+2,5=7,5; 7,5 + 0,5 $\cdot$ 2,5 = 8,75; 8,75+0,5 $\cdot$ 1,25 = 9,375; 9,375 + 0,5 $\cdot$ 0,625= 9,6875
$a_5 = 9{,}6875$, $a_n = a_{n-1} + 0{,}5 \cdot (a_{n-1} - a_{n-2})$, $n \geq 2$

b) Jono on 1, 1 + 4 = 5, 5 + 9 = 14, ... eli 1, 1 + 2^2, 5 + 3^2, ... Lisättävä luku saadaan, kun kahden edeltävän luvun erotuksen neliöjuureen lisätään 1 ja korotetaan toiseen potenssiin eli $a_n = a_{n-1} + (\sqrt{(a_{n-1} - a_{n-2})} + 1)^2$, $n \geq 2$

<u>Vastaus</u>: a) $a_n = a_{n-1} + 0{,}5 \cdot (a_{n-1} - a_{n-2})$, $n \geq 2$ b) $a_n = a_{n-1} + (\sqrt{(a_{n-1} - a_{n-2})} + 1)^2$, $n \geq 2$

154. Jonon termien lukumäärä saadaan summasta 1+2+3+4+5+...+n
Lasketaan millä n:n arvolla summa $\geq$ 100
kun n = 13 1+2+3+...+13=91
kun n = 14 1+2+3+...+14=105
eli jonon 91.termi on luku 13 ja näin ollen 100. termi on luku 14

155.
a) seuraava jäsen on 3,14159, kyseessä on piin tarkentuva likiarvo
b) seuraava jäsen on 23, kyseessä on alkulukujen jono

156.
a)
$a_n = n^2 + 7$

$$\begin{aligned} n^2+7 &= 44\,528 \\ n^2 &= 44\,521 \quad \big|\ n>0 \\ n &= \sqrt{44\,521} \\ n &= 211 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} n^2+7 &= 96\,727 \\ n^2 &= 96\,720 \quad \big|\ n>0 \\ n &= \sqrt{96\,720} \\ n &= 310{,}998... \end{aligned}$$

Koska n ei ole luonnollinen luku, ei luku 96 727 kuulu jonoon.

<u>Vastaus</u>: a) 211. termi b) ei kuulu

157. a) 1, 3, 1+3 = 4, 3+4 = 7, 4+7 = 11
b) $a, b, a+b, b+a+b = a+2b, a+b+a+2b = 2a+3b$

<u>Vastaus:</u> . a) 1, 3, 1+3 = 4, 3+4 = 7, 4+7 = 11
b) $a, b, a+b, b+a+b = a+2b, a+b+a+2b = 2a+3b$

158. Fibonaccin jonossa
$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = 2$
$a_4 = 3$
$a_5 = 5$
$a_6 = 8$
n=2, $a_2^{\,2} - a_{2-1}a_{2+1} = a_2^{\,2} - a_1a_3 = 1^2 - 1\cdot 2 = -1$
n=3, $a_3^{\,2} - a_{3-1}a_{3+1} = a_3^{\,2} - a_2a_4 = 2^2 - 1\cdot 3 = 1$
n=4, $a_4^{\,2} - a_{4-1}a_{4+1} = a_4^{\,2} - a_3a_5 = 3^2 - 2\cdot 5 = -1$
n=5, $a_5^{\,2} - a_{5-1}a_{5+1} = a_5^{\,2} - a_4a_6 = 5^2 - 3\cdot 8 = 1$

159.

a)

$a_n = 8n + 7$

Seuraava jäsen

$a_{n+1} = 8(n+1) + 7 = 8n + 15 > 8n + 7 = a_n$

Lukujono on aidosti kasvava, koska $a_{n+1} > a_n$ kaikilla $n \geq 1$.

b)

n:s jäsen

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Seuraava jäsen

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$$

Lukujono on aidosti vähenevä, koska murtoluvun nimittäjä kasvaa ($n + 2 > n + 1$) ja osoittaja on vakio eli $a_{n+1} < a_n$, kaikilla $n \geq 1$.

c)

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$$

Seuraava jäsen

$$a_{n+1} = \frac{n+1+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n+2}{n^2+2n+2}$$

Peräkkäisten jäsenten erotus

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= {}^{n^2+1)}\frac{n+2}{n^2+2n+2} - {}^{n^2+2n+2)}\frac{n+1}{n^2+1} \\
&= \frac{(n^2+1)(n+2)-(n+1)(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} \\
&= \frac{n^3+2n^2+n+2-n^3-2n^2-2n-n^2-2n-2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} \\
&= \frac{-n^2-3n}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} \\
&< 0,
\end{aligned}$$

kaikilla $n \geq 1$, koska osoittaja $-n^2 - 3n < 0$ ja nimittäjä on positiivinen kaikilla $n \geq 1$.

Lukujono on aidosti vähenevä, koska $a_{n+1} < a_n$, kaikilla $n \geq 1$.

d)

$a_n = 4^n$

Laajennetaan määrittelyjoukkoa siten, että $n \in \mathbb{R}$, jolloin lukujonon monotonisuutta voidaan tutkia funktion $f(x) = 4^x$ avulla. Lukujonon jäsenet saadaan tällöin funktion f arvoista, kun muuttuja on positiivinen kokonaisluku. Koska funktio $f(x) = 4^x$ on eksponenttifunktiona aidosti kasvava, kaikilla x, on lukujono $a_n = 4^n$ aidosti kasvava kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

e)
n:s jäsen

$$a_n = \frac{n+1!}{3^n}$$

Seuraava jäsen

$$a_{n+1} = \frac{[(n+1)+1]!}{3^{n+1}} = \frac{(n+2)!}{3^{n+1}}$$

Peräkkäisten jäsenten suhde

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+2)!}{3^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{3^n}} = \frac{(n+2)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{(n+1)!} = \frac{(n+2)\cdot \overset{1}{\cancel{(n+1)!}} \cdot \overset{1}{\cancel{3^n}}}{\underset{1}{\cancel{(n+1)!}}\, \underset{1}{\cancel{3^n}} \cdot 3} = \frac{n+2}{3} \geq 1$$, kaikilla

$n \geq 1$.

Lukujono on kasvava, koska $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \geq 1$.

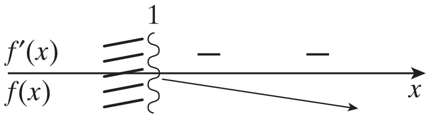
f)
n:s jäsen
$a_n = (-4)^n$
Kolme ensimmäistä jäsentä
$a_1 = (-4)^1 = -4$
$a_2 = (-4)^2 = 16$
$a_3 = (-4)^3 = -64$

Koska $a_1 < a_2$ ja $a_2 > a_3$ ei lukujono ole kasvava eikä vähenevä eikä myöskään monotoninen.

g)
n:s jäsen
$a_n = (n^2 + 1)e^{-n}$, $n \geq 1$
Tutkitaan funktion $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ monotonisuutta, kun $x \geq 1$.
Funktion derivaatta
$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x} = x^2e^{-x} + e^{-x}$
$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} - e^{-x}$

Derivaatan nollakohdat
$2xe^{-x} - x^2e^{-x} - e^{-x} = 0$
$e^{-x}(2x - x^2 - 1) = 0$
$-x^2 + 2x - 1 = 0$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x-1)^2 = 0$
$x = 1$

Kulkukaavio



$f'(2) = 2 \cdot 2e^{-2} - 2^2e^{-2} - e^{-2} < 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on aidosti vähenevä, kun $x \geq 1$, joten lukujono $a_n = (n^2 + 1)e^{-n}$, $n \geq 1$ on aidosti vähenevä.

Vastaus: Lukujono a) on aidosti kasvava b) on aidosti vähenevä c) on aidosti vähenevä d) on aidosti kasvava e) on kasvava f) ei ole monotoninen g) on aidosti vähenevä.

160.
a) 3 = ANS + 5 = = = = = = = =
b) 8 = ANS − 12 = = = = = = = =
c) 4 = ANS X 2 = = = = = = = =
d) 6 = ANS X (−)5 = = = = = = = =
e) 1 = ANS X 5 + 2 = = = = = = = =
f) 12 = ANS X (1 a b/c 3) = = = = = = = =
Vastaus:
a) 3,8,13,18,23,28,33,38,43,48
b) 8,−4,−16,−28,−40,−52,−64,−76,−88,−100
c) 4,8,16,32,64,128,256,512,1 024, 2 048
d) 6, −30, 150, −750, 3750, −18 750, 93 750, −468 750, 2 343 750, −11 718 750
e) 1, 7, 37, 187, 937, 4 687, 23 437, 117 187, 585 937, 2 929 687
f) 12, 4, $\frac{4}{3}, \frac{4}{27}, \frac{4}{81}, \frac{4}{243}, \frac{4}{729}, \frac{4}{2\,187}, \frac{4}{6\,561}$

161.

$$a_1 = \frac{(1+\sqrt{5})^1 - (1-\sqrt{5})^1}{2^1\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$$

$$a_2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^2}{2^2\sqrt{5}} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-(1-2\sqrt{5}+5)}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1$$

$$a_3 = \frac{(1+\sqrt{5})^3 - (1-\sqrt{5})^3}{2^3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})^2(1-\sqrt{5})}{2^3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1+2\sqrt{5}+5)(1+\sqrt{5}) - (1-2\sqrt{5}+5)(1-\sqrt{5})}{8\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1+2\sqrt{5}+5+\sqrt{5}+2\cdot 5+5\sqrt{5}-(1-2\sqrt{5}+5-\sqrt{5}+2\cdot 5-5\sqrt{5})}{8\sqrt{5}}$$

$$= \frac{16\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}$$

$$= 2$$

Vastaus: 1,1 ja2.

162.
a)

$$a_1 = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi\cdot 1}}\right) = \sin(\pi) = 0$$

$$a_2 = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi\cdot 2}}\right) = \sin(2\pi) = 0$$

$$a_3 = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi\cdot 3}}\right) = \sin(3\pi) = 0$$

$$a_4 = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi\cdot 4}}\right) = \sin(4\pi) = 0$$

$$a_5 = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi\cdot 5}}\right) = \sin(5\pi) = 0$$

b)

$$a_1 = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi\cdot 1+\frac{\pi}{2}}}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$a_2 = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi\cdot 2+\frac{\pi}{2}}}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$$

$$a_3 = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi\cdot 3+\frac{\pi}{2}}}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -1$$

$$a_4 = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi\cdot 4+\frac{\pi}{2}}}\right) = \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 1$$

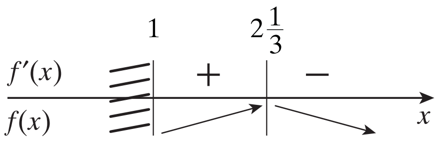
$$a_5 = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi\cdot 5+\frac{\pi}{2}}}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{2}\right) = -1$$

Vastaus: a) Kaikki jäsenet ovat nollia, b) −1, 1, −1, 1 ja −1

163.
Tarkastellaan funktiota $f(x) = -2x^3 + 7x^2,\ x \in \mathbb{R}$
Derivaatta

$f'(x) = -6x^2 + 14x$
Derivaatan nollakohdat
$-6x^2 + 14x = 0$
$2x(-3x + 7) = 0$
$2x = 0$ tai $-3x + 7 = 0$
$x = 0$ $\quad\quad\quad x = 2\frac{1}{3}$

Kulkukaavio



$f'(2) > 0$
$f'(3) < 0$

Joten lasketaan lukujonon niiden jäsenten arvot, joiden järjestysluku on maksimikohtaa lähinnä eli

$a_2 = -2\cdot 2^3 + 7\cdot 2^2 = 12$ suurin

$a_3 = -2\cdot 3^3 + 7\cdot 3^2 = 9$

Vastaus: 12

164. Ratkaistaan epäyhtälö

$$\left|\frac{3\cdot 4^n - 1}{4^n - 1} - 3\right| < 10^{-12}$$

$$\left|\frac{3\cdot 4^n - 1 - 3\cdot 4^n + 3}{4^n - 1}\right| < 10^{-12}$$

$$\left|\frac{2}{4^n - 1}\right| < 10^{-12} \quad\quad \Big| \; \frac{2}{4^n - 1} > 0, \text{ kun } n \geq 1$$

$$\frac{2}{4^n - 1} < 10^{-12} \quad\quad \Big| \; \cdot(4^n - 1) > 0$$

$$2 < 10^{-12}\cdot 4^n - 10^{-12}$$

$$\frac{2 + 10^{-12}}{10^{-12}} < 4^n$$

$$2\cdot 10^{12} + 1 < 4^n \quad\quad \Big| \; \ln()$$

$$\ln(2\cdot 10^{12} + 1) < \ln 4^n$$

$$\ln(2\cdot 10^{12} + 1) < n\ln 4 \quad\quad \Big| \; : \ln 4 > 0$$

$$\frac{\ln(2\cdot 10^{12} + 1)}{\ln 4} < n$$

$n > 20{,}43...$

Vastaus: Arvosta 21 lähtien.

165.

n	a_n	rekursiivinen sääntö
0	1	1
1	1	1
2	$2\cdot 1 = 2$	$2\cdot 1$
3	$3\cdot 2\cdot 1 = 6$	$3\cdot 2$
4	$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$	$4\cdot 6 = 6\cdot (\frac{6}{2}+1)$
:		
n	a_n	$a_{n-1}\cdot(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}+1)$

Vastaus: $a_0 = 1, a_1 = 1$ ja $a_n = a_{n-1}\cdot(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}+1)$, kun $n \geq 2$

166. Kättelyjen määrä voidaan laskea kombinaation avulla. Lasketaan kuinka monella tavalla kättelijöiden kokonaismäärästä voidaan muodostaa kättelypari eli

$1, \binom{3}{2}=3, \binom{4}{2}=6, \binom{5}{2}= 10,..., \binom{n}{2}$

Jonon lisäysluku kasvaa joka vaiheessa yhdellä, joten yleinen termi rekursiivisen säännön mukaan on $a_n = a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2} + 1) = 2a_{n-1} - a_{n-1} + 1$

Vastaus**:** 1,3,6, $\binom{n}{2}$ ja $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-1} + 1$

167.

järjestysluku n	tolppien välimatka (km)	matkaa yhteensä (km)
1	10	10
2	10	20
3	20	40
4	30	70
5	50	120
6	80	200
7	130	330
8	210	540
9	340	880
10	550	1 430
11	890	2 320
12	1 440	3 760
13	2 340	6 100
14	3 780	9 880
15	6 120	16 000
16	9 900	25 900
17	16 020	41 920

Taulukosta nähdään, että 17. tolppa menisi jo pohjoisnavan yli, joten tolppia on pystytettävä 16.

Vastaus: 16

168. $a_1 = 1$, $a_2 = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $a_3 = 4\cdot\frac{1}{9} = \frac{4}{9}$, $a_4 = 8\cdot\frac{1}{27} = \frac{8}{27}$

$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27} = 2\frac{11}{27}$

Vastaus: $2\frac{11}{27}$

169. Lasketaan taulukon arvot laskimen ANS-toiminnolla
650 = ANS x 1,12 – 75 =

kulunut aika (a)	hirviä
0	650
1	653
2	656,36
3	660,12...
4	664,33...
5	669,05...
6	674,35...

Vastaus: 670

170. Lasketaan taulukon arvot laskimen ANS-toiminnolla
120 = ANS x 0,60 + 60 =

kulunut aika (d)	lääkettä (mg)
0	120
1	132
2	139,2
3	143,52
4	146,112
5	147,66...
6	148,60...
7	149,16...
8	149,49... ≈ 150

Vastaus: 150

171.

$a_1 = 0$ ja $a_n = \dfrac{n}{n-1}$, $n > 1$

Tutkitaan funktion $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ monotonisuutta, kun $x > 1$.

Funktion derivaatta

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$f\,'(x) = \frac{1\cdot(x-1)-1\cdot x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$$

Koska derivaatta on negatiivinen, on funktio $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ ja lukujono $a_n = \dfrac{n}{n-1}$ aidosti vähenevä, kun $x > 1$.

Ratkaistaan epäyhtälö

$$\left|\frac{n}{n-1}-1\right| < 10^{-9}$$

$$\left|\frac{n-n+1}{n-1}\right| < 10^{-9}$$

$$\left|\frac{1}{n-1}\right| < 10^{-9} \qquad \Big|\ \frac{1}{n-1} > 0,\ \text{kun } n > 1$$

$$\frac{1}{n-1} < 10^{-9} \qquad \Big|\ \cdot(n-1) > 0$$

$$1 < 10^{-9}\cdot n - 10^{-9}$$

$$\frac{1+10^{-9}}{10^{-9}} < n$$

$$1\cdot 10^{9} + 1 < n$$

$$n > 1000\,000\,001$$

<u>Vastaus</u>: $a_1 = 0$ ja $a_n = \dfrac{n}{n-1}$, $n > 1$, lukujono on aidosti vähenevä ja n = 1 000 000 002.

172.

$P(x) = x^5 + x + 1$

$P'(x) = 5x^4 + 1$

Nollakohdan likiarvo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P\,'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\,5} + x_n + 1}{5x_n^{\,4} + 1}, \quad n = 1,2,3,...$$

Nollakohdan laskeminen

$x_0 = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^{\ 5} + x_0 + 1}{5x_0^{\ 4} + 1} = 0 - \frac{0^5 + 0 + 1}{5 \cdot 0^4 + 1} = -1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^{\ 5} + x_1 + 1}{5x_1^{\ 4} + 1} = -1 - \frac{(-1)^5 + (-1) + 1}{5 \cdot (-1)^4 + 1} = -0{,}8333333333$$

$x_3 = -0{,}7643821157$
$x_4 = -0{,}7550248672$
$x_5 = -0{,}7548777018$
$x_6 = -0{,}7548776662$
Laskuihin perustuen voi arvioida, että likiarvo on oikein 5 tai 6 desimaalin tarkkuudella.

173.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{2 \cdot 2 - 1}{2} x \cdot P_{2-1}(x) - \frac{2-1}{2} \cdot P_{2-2}(x) \\ &= \frac{3}{2} x \cdot P_1(x) - \frac{1}{2} \cdot P_0(x) \\ &= \frac{3}{2} x \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{2 \cdot 3 - 1}{3} x \cdot P_{3-1}(x) - \frac{3-1}{3} \cdot P_{3-2}(x) \\ &= \frac{5}{3} x \cdot P_2(x) - \frac{2}{3} \cdot P_1(x) \\ &= \frac{5}{3} x \cdot \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{3} \cdot x \\ &= \frac{5}{2} x^3 - \frac{5}{6} x - \frac{2}{3} x \\ &= \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \end{aligned}$$

Derivaatat

$$P_2{}'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2} x = 3x$$

$$P_3{}'(x) = 3 \cdot \frac{5}{2} x^2 - \frac{3}{2} = \frac{15}{2} x^2 - \frac{3}{2}$$

Koska $P_3{}'(x) - x \cdot P_2{}'(x) = \frac{15}{2} x^2 - \frac{3}{2} - x \cdot (3x) = \frac{15}{2} x^2 - \frac{3}{2} - 3x^2 = \frac{9}{2} x^2 - \frac{3}{2}$

ja $3P_2(x) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{2} x^2 - \frac{3}{2}$ kyseinen yhtälö on voimassa.

<u>Vastaus</u>: $P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$ ja $P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$ ja derivaatat

$P_2{}'(x) = 3x$

$P_3{}'(x) = \frac{15}{2} x^2 - \frac{3}{2}$

174.

$a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$, $n \geq 1$

Tutkitaan funktion $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x}$ monotonisuutta, kun $x \geq 1$.

Funktion derivaatta

$f(x) = \dfrac{x^2}{2^x}$

$f\,'(x) = \dfrac{2x \cdot 2^x - x^2 \cdot 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \dfrac{2x - x^2 \cdot \ln 2}{2^x}$

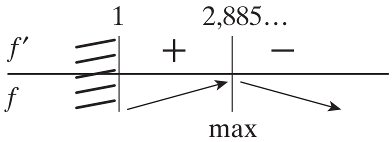
Derivaatan nollakohdat

$2x - x^2 \cdot \ln 2 = 0$

$x(2 - x\ln 2) = 0$

$x = 0$ tai $x = \dfrac{2}{\ln 2} = 2{,}885...$

Kulkukaavio



$f\,'(2) > 0$
$f\,'(3) < 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on aidosti kasvava, kun $x < 2{,}885...$ ja aidosti vähenevä, kun $x > 2{,}885...$. Lasketaan jonon 7 ensimmäistä jäsentä.

$a_1 = \dfrac{1^2}{2^1} = \dfrac{1}{2}$

$a_2 = \dfrac{2^2}{2^2} = 1$

$a_3 = \dfrac{3^2}{2^3} = \dfrac{9}{8}$

$a_4 = \dfrac{4^2}{2^4} = \dfrac{16}{16} = 1$

$a_5 = \dfrac{5^2}{2^5} = \dfrac{25}{32}$

$a_6 = \dfrac{6^2}{2^6} = \dfrac{36}{64} = \dfrac{9}{16} > \dfrac{1}{2}$

$a_7 = \dfrac{7^2}{2^7} = \dfrac{49}{128} < \dfrac{1}{2}$

Joten 5 suurinta lukua ovat $\dfrac{9}{8}, 1, \dfrac{25}{32}, \dfrac{9}{16}$ ja $\dfrac{1}{2}$

<u>Vastaus</u>: $\dfrac{9}{8}, 1, \dfrac{25}{32}, \dfrac{9}{16}$ ja $\dfrac{1}{2}$

175.

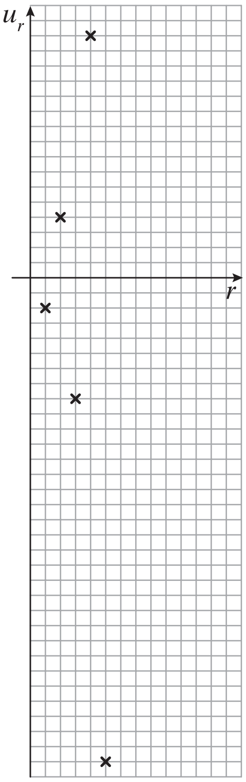
$u_1 = (-1)^1 \cdot 2^1 = -2$

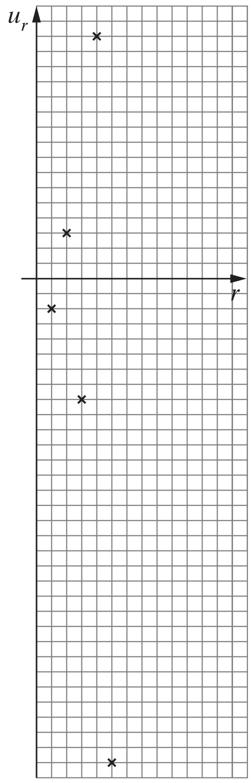
$u_2 = (-1)^2 \cdot 2^2 = 4$

$u_3 = (-1)^3 \cdot 2^3 = -8$

$u_4 = (-1)^4 \cdot 2^4 = 16$

$u_5 = (-1)^5 \cdot 2^5 = -32$





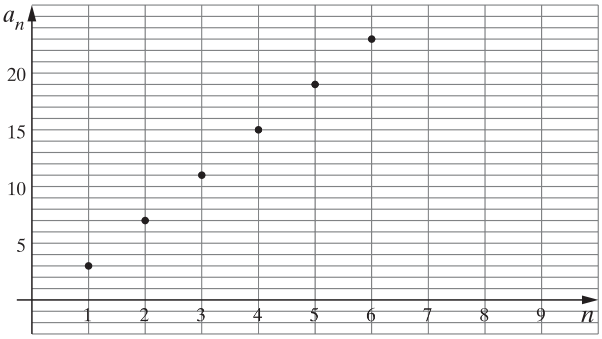
7. Aritmeettinen ja geometrinen lukujono

176.
Esimerkkijonoja 0, 10, 20, 30 ,40, ... ja 100, 0, –100, –200, –300,... sekä
$8, 7\frac{1}{2}, 7, 6\frac{1}{2}, 6, \ldots$

177. $a_{15} = a_1 + (15-1) \cdot d = 95 + 14 \cdot (-5) = 25$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 95 + (n-1) \cdot (-5) = 95 - 5n + 5 = 100 - 5n$

178. $a_1 = 3$
$a_2 = 7 = 3+4$
$a_3 = 11 = 7+4$
rekursiivinen sääntö $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 4$, $n \geq 2$
analyyttinen sääntö $a_n = a_1 + (n-1)\cdot 4 = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$, $n \geq 1$



179.
a)
$d = 8{,}5 - 6 = 2{,}5$
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$
$19\,543{,}5 = 6 + (n-1)\cdot 2{,}5$
$19\,543{,}5 = 6 + 2{,}5n - 2{,}5$
$-2{,}5n = -19\,540 \quad \Big| :(-2{,}5)$
$n = 7\,816$

b)
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$
$6\,398 = 6 + (n-1)\cdot 2{,}5$
$6\,398 = 6 + 2{,}5n - 2{,}5$
$-2{,}5n = -6\,394{,}5 \quad \Big| :(-2{,}5)$
$n = 2\,557{,}8$
Koska 2 557,8 ei ole luonnollinen luku, ei luku 6 398 kuulu jonoon.

Vastaus: a) 7 816. termi b) ei kuulu.

180.
a) $a_7 = 0 + 6\cdot 4 = 24$
$a_n = 0 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 4$

b) $a_7 = 1 + 6\cdot(-2{,}5) = -14$
$a_n = 1 + (n-1)\cdot(-2{,}5) = 1 - 2{,}5n + 2{,}5 = -2{,}5n + 3{,}5$

c) $a_{13} = a_1 + 12\cdot d$
$29 = 20 + 12d$
$-12d = -9$
$d = 0{,}75$
$a_7 = 20 + 6\cdot 0{,}75 = 24{,}5$

$a_n = 20 + (n - 1) \cdot 0{,}75 = 20 + 0{,}75n - 0{,}75 = 0{,}75n + 19{,}25$

<u>Vastaus</u>: a) $a_7 = 24$, $a_n = 4n - 4$, $n \geq 1$ b) $a_7 = -14$, $a_n = -2{,}5n + 3{,}5$, $n \geq 1$
c) $a_7 = 24{,}5$ $a_n = 0{,}75n + 19{,}25$, $n \geq 1$

181.
a)
$a_{16} = a_{11} + 5d$
$-4{,}5 = 7 + 5d$
$-5d = 11{,}5$
$d = -2{,}3$

$a_{11} = a_1 + 10d$
$7 = a_1 + 10 \cdot (-2{,}3)$
$-a_1 = -23 - 7$
$a_1 = 30$
$a_n = 30 + (n-1) \cdot (-2{,}3) = 30 - 2{,}3n + 2{,}3 = 32{,}3 - 2{,}3n$
$a_n = 32{,}3 - 2{,}3n$

b)
$-409{,}3 = 32{,}3 - 2{,}3n$
$2{,}3n = 441{,}6$
$n = 192$

c)
$-1\,203{,}5 = 32{,}3 - 2{,}3n$
$2{,}3n = 1\,235{,}8$
$n = 537{,}304\ldots$ei ole luonnollinen luku, joten ei kuulu jonoon

<u>Vastaus</u>: a) $a_1 = 30$, $a_n = 32{,}3 - 2{,}3n$ b) 192. termi c) ei kuulu.

182. $a_{21} = 3 + 20 \cdot d$
$3 + 20 \cdot d = 213$
$20d = 210$
$d = 10{,}5$
$a_{21} = 213$
$a_{20} = 213 - 10{,}5 = 202{,}5$
$a_{19} = 213 - 2 \cdot 10{,}5 = 192$
$a_{18} = 213 - 3 \cdot 10{,}5 = 181{,}5$

183. $a_1 = 1$
$a_7 = 5a_2$ sijoitetaan $a_7 = 1 + 6d$
$1 + 6d = 5a_2$ sijoitetaan $a_2 = 1 + d$
$1 + 6d = 5(1 + d)$
$1 + 6d = 5 + 5d$
$d = 4$
$a_{18} = 1 + 17 \cdot 4 = 69$
<u>Vastaus</u>: $d = 4$ ja $a_{18} = 69$

184. $a_2 = a_1 + d$
$a_4 = a_1 + 3d$
$a_5 = a_1 + 4d$

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 3d = 20 \\ a_1 \cdot (a_1 + 4d) = 84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 4d = 20, \text{ josta } a_1 = -2d + 10 \text{ sijoitetaan alempaan} \\ a_1^2 + 4a_1 d = 84 \end{cases}$$

$$(-2d + 10)^2 + 4 \cdot (-2d + 10) \cdot d = 84$$

$$4d^2 - 40d + 100 - 8d^2 + 40d - 84 = 0$$

$$-4d^2 + 16 = 0$$

$$-4d^2 = -16$$

$$d^2 = 4$$

$$d = \pm\sqrt{4}$$

$$d = \pm 2$$

$a_1 = -2 \cdot 2 + 10 = 6$ tai $a_1 = -2 \cdot (-2) + 10 = 14$

jono on 6, 8, 10, 12 14, ... tai 14, 12, 10, 8, 6, ...
eli
$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 4$ tai $a_n = 14 + (n - 1) \cdot (-2) = -2n + 16$

Vastaus: $a_n = 2n + 4$ tai $a_n = -2n + 16$

185. a) peräkkäisten termien suhde on vakio $q = 1{,}5$, joten kyseessä on geometrinen jono
b) peräkkäisten termien erotus on vakio $d = 0{,}45$, joten kyseessä on aritmeettinen jono
c)) peräkkäisten termien suhde ei ole vakio eikä myöskään erotus, joten kyseessä ei ole geometrinen eikä aritmeettinen lukujono
d) peräkkäisten termien suhde on vakio $q = 0{,}6$, joten kyseessä on geometrinen jono
e) peräkkäisten termien suhde on vakio $q = -1$, joten kyseessä on geometrinen jono
f) peräkkäisten termien suhde on vakio $q = 1$, joten kyseessä on geometrinen lukujono ja koska peräkkäisten termien eorus on vakio $d = 0$, kyseessä on myös aritmeettinen lukujono

186. Esimerkkijonoja 3, –30, 300, –3 000, 30 000, ...
36; 18; 9; 4,5 ; 2,25; ...

187. $q = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

$$a_7 = \frac{1}{3} \cdot 3^6 = 243$$

Vastaus: 243

188. $q = -1 : 1 = -1$

$a_{100} = 1 \cdot (-1)^{99} = -1$

Vastaus: −1

189. $q = -\frac{1}{32} : \left(-\frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{32} \cdot \left(-\frac{16}{1}\right) = \frac{1}{2}$

$a_8 = -\frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{2\,048}$

Vastaus: $-\frac{1}{2\,048}$

190. a) $a_n = 100 \cdot 1{,}05^{n-1}$

$a_1 = 100 \cdot 1{,}05^{1-1} = 100$

$a_2 = 100 \cdot 1{,}05^{2-1} = 105$

$a_3 = 100 \cdot 1{,}05^{3-1} = 110{,}25$

b) $a_{10} = 250 \cdot 1{,}1^9$ toisaalta geometrisessa lukujonossa $a_{10} = a_1 \cdot q^9$, joten $a_1 = 250$ ja $q = 1{,}1$

$a_2 = 250 \cdot 1{,}1 = 275$

$a_3 = 275 \cdot 1{,}1 = 302{,}5$

191. peräkkäisten termien suhde on vakio $q = \frac{3{,}36}{3} = \frac{3{,}7632}{3{,}6} = 1{,}12$, joten kyseessä on geometrinen lukujono.

Rekursiivinen sääntö $a_n = a_{n-1} \cdot 1{,}12$, $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö $a_n = 3 \cdot 1{,}12^{n-1}$, $n \geq 1$

192. $a_6 = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{2}{3}$

$a_n = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $n \geq 1$

193. a) $a_5 = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-1} = \frac{1}{256}$

$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

b) $a_5 = 4 \cdot (-2{,}5)^4 = 156{,}25$

$a_n = 4 \cdot (-2{,}5)^{n-1}$

c) $a_4 = a_1 \cdot q^3$

$0{,}16 = 20 \cdot q^3 \quad \vert :20$

$q^3 = 0{,}008$

$q = \sqrt[3]{0{,}008}$

$q = 0{,}2$

$a_5 = 20 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}032$

$a_n = 20 \cdot 0{,}2^{n-1}$

<u>Vastaus</u>: a) $a_5 = \frac{1}{256}$, $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, $n \geq 1$ b) $a_5 = 156{,}25$;$a_n = 4 \cdot (-2{,}5)^{n-1}$, $n \geq 1$

c) $a_5 = 0{,}032$; $a_n = 20 \cdot 0{,}2^{n-1}$, $n \geq 1$

194. $a_6 = a_3 \cdot q^3$

$0{,}054 = 2 \cdot q^3 \quad \vert :2$

$q^3 = 0{,}027$

$q = \sqrt[3]{0{,}027}$

$q = 0{,}3$

$a_3 = a_1 \cdot q^2$

$2 = a_1 \cdot 0{,}3^2$

$2 = a_1 \cdot 0{,}09 \quad \vert :0{,}09$

$a_1 = 22\frac{2}{9}$

$a_n = 22\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

<u>Vastaus</u>: $a_1 = 22\frac{2}{9}$, $a_n = 22\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$, $n \geq 1$

195. $a_1 = 0{,}5$ ja $q = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$0{,}5 \cdot 3^{n-1} = 2\,391\,484{,}5 \quad \vert :0{,}5$

$3^{n-1} = 4\,782\,969$

$n - 1 = \frac{\lg 4\,782\,969}{\lg 3}$

$n - 1 = 14$

$n = 15$

<u>Vastaus</u>: 15. jäsen

196.

$a_1 = -17$ ja $q = \dfrac{119}{-17} = -7$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$\begin{aligned} -98\ 001\ 617 &= -17 \cdot (-7)^{n-1} \qquad \Big| : (-17) \\ 5\ 764\ 801 &= (-7)^{n-1} \\ (-7)^8 &= (-7)^{n-1} \\ 8 &= n-1 \\ n &= 9 \end{aligned}$$

Vastaus: 9. jäsen

197.

a)

$a_1 = 576$ ja $q = \dfrac{4\ 608}{576} = 8$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Luku 77 309 411 328 on niin suuri, että laskimen suorituskyky ei riitä tarkkoihin arvoihin, joten jakolasku on suoritettava jakokulmassa. Laskimen likiarvoa voidaan hyödyntää laskun alussa.

Laskin antaa osamäärän arvoksi $\dfrac{77\ 309\ 411\ 328}{576} \approx 134\ 217\ 728$. Tulos on likiarvo, koska laskin antaa tulon arvoksi $134\,217\,728 \cdot 576 = 7{,}730941133 \cdot 10^{10}$. Laskimen tarkkuus riittää tuloon $134\,217\,700 \cdot 576 = 77\,309\,395\,200$, joten

$$\begin{array}{r|l} & 134\,217\,700 + 28 \\ \hline 576) & 77\,309\,411\,328 \\ & \underline{77\,309\,395\,200} \\ & 16128 \\ & \underline{16128} \end{array}$$

Joten

$$\begin{aligned} 77\ 309\ 411\ 328 &= 576 \cdot 8^{n-1} \qquad \Big| : 576 \\ 134\ 217\ 728 &= 8^{n-1} \\ 8^9 &= 8^{n-1} \\ 9 &= n-1 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

b)

$4\ 947\ 802\ 324\ 984 = 576 \cdot 8^{n-1}$

Luku 4 947 802 324 984 on niin suuri, että laskimen suorituskyky ei riitä tarkkoihin arvoihin, joten lukua on tutkittava allekkain kertomalla.

$$\begin{array}{r} 77\ 309\ 411\ 328 \\ \cdot \qquad\qquad 8 \\ \hline 618\ 475\ 290\ 624 \\ \cdot \qquad\qquad 8 \\ \hline 4\ 947\ 802\ 324\ 992 \end{array}$$

Lukujonon luku on 8 suurempi kuin tutkittava luku, joten kysytty luku ei kuulu lukujonoon.

Vastaus: a) 10. jäsen b) ei kuulu

198. a) aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten termien erotus *d* on vakio, joten

$$x - 3 = 8 - x$$
$$2x = 11$$
$$x = 5{,}5$$

b) geometrisessa lukujonossa peräkkäisten termien suhde *q* on vakio, joten

$$\frac{x}{3} = \frac{8}{x}$$
$$x^2 = 24$$
$$x = \pm\sqrt{24} = \pm\sqrt{4 \cdot 6} = \pm 2\sqrt{6}$$

Vastaus: a) 5,5 b) $2\sqrt{6}$ tai $-2\sqrt{6}$

199.

aika alusta lukien (aikayksikköä)	etäisyys (m)
0	100
1	50
2	25
3	12,5
4	6,25
5	3,125
...	...
10	$100 \cdot 0{,}5^n \approx 0{,}098$

0,098 m = 9,8 cm

etäisyys pienenee, mutta ei tule nollaksi koskaan

Vastaus: 3,125 m ;9,8 cm ; $100 \cdot 0{,}5^n$ cm ja eivät kosketa koskaan

200. 8 h = 480 min

aikaa kulunut (min)	termi	bakteereja
0	a_1	5
20	a_2	10
40	a_3	20
...		
480	a_{25}	$5 \cdot 2^{24}$ ≈ 84 miljoonaa

Vastaus: 84 miljoonaa

201. vuorokausia 31 + 30 + 31 = 92
alussa flunssatapauksia a kpl

aikaa kulunut (vrk)	termi	flunssatapauksia
0	a_1	a
1	a_2	$1{,}02a$
2	a_3	$1{,}02^2 a$
...		
92	a_{93}	$1{,}02^{92} \cdot a \approx 6{,}2a$

Vastaus: 6,2 -kertaiseksi

202. alussa hinnat a

aikaa kulunut (a)	termi	hinnat
0	a_1	a
1	a_2	$1{,}04a$
2	a_3	$1{,}04^2 a$
...		
12	a_{13}	$1{,}04^{12} \cdot a \approx 1{,}60a$

$$a \cdot 1{,}04^n = 2a \quad \Big| :a$$
$$1{,}04^n = 2$$
$$n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}04}$$
$$n = 17{,}67\ldots \approx 18$$

Vastaus: hinnat tulivat 1,60 -kertaisiksi eli nousivat 60 % ja 18 vuotta

203. välin pituus $d = \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{5} = \dfrac{1}{12}$

Luku $D = \dfrac{1}{4} + 3 \cdot \dfrac{1}{12} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

<u>Vastaus</u>: $\dfrac{1}{2}$

204. tolppia on yhteensä 44 kpl ja tolppien välejä myös 44 kpl ja piiri on $44 \cdot 3{,}0 = 132$

<u>Vastaus</u>: 44 kpl ja 132 m

205. a) aritmeettisen lukujonon peräkkäisten termien erotus *d* on vakio.

$$\begin{aligned} x - 16 - x &= 0{,}5x + 4 - (x - 16) \\ -16 &= -0{,}5x + 20 \\ 0{,}5x &= 36 \\ x &= 72 \end{aligned}$$

b) geometrisen lukujonon peräkkäisten termien suhde *d* on vakio

$$\frac{x - 16}{x} = \frac{0{,}5x + 4}{x - 16}$$

$$(x - 16)(x - 16) = x(0{,}5x + 4)$$

$$x^2 - 32x + 256 = 0{,}5x^2 + 4x$$

$$0{,}5x^2 - 36x + 256 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-36) \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 256}}{2 \cdot 0{,}5} \\ &= \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 512}}{1} \\ &= 36 \pm 28 \end{aligned}$$

$x_1 = 8$

$x_2 = 64$

<u>Vastaus</u>: a) 72 b) 8 tai 64

206.

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{3(x-2)}{x+1}$$
$$x^2+2x+1=3x^2-9x+6$$
$$-2x^2+11x-5=0$$
$$x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot(-2)\cdot(-5)}}{2\cdot(-2)}$$
$$x_1=5$$
$$x_2=\frac{1}{2}$$

Saadaan 2 jonoa

1)

$$q_1=\frac{5+1}{5-1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$a_6=a_1\cdot q^5=(5-1)\cdot(\frac{3}{2})^5=\frac{243}{8}$$

2)

$$q_2=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}=-3$$
$$a_6=a_1\cdot q^5=(\frac{1}{2}-1)\cdot(-3)^5=\frac{243}{2}$$

Vastaus: $\frac{243}{8}$ tai $\frac{243}{2}$

207.

a)

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{9^{2-(n+1)}\cdot 4^{n+1+1}}{9^{2-n}\cdot 4^{n+1}}=9^{2-n-1-2+n}\cdot 4^{n+1+1-n-1}=9^{-1}\cdot 4=\frac{4}{9}$. Koska peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, on jono geometrinen.

b)

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4^{2(n+1)-1}}{3^{3(n+1)+1}}:\frac{4^{2n-1}}{3^{3n+1}}=\frac{4^{2(n+1)-1}}{3^{3(n+1)+1}}\cdot\frac{3^{3n+1}}{4^{2n-1}}=4^{2n+2-1-2n+1}\cdot 3^{3n+1-3n-3-1}=4^2\cdot 3^{-3}=\frac{16}{27}$. Koska peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, on jono geometrinen.

c)

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(-4)^{3(n+1)}}{5^{n+1-1}}:\frac{(-4)^{3n}}{5^{n-1}}=\frac{(-4)^{3(n+1)}}{5^{n+1-1}}\cdot\frac{5^{n-1}}{(-4)^{3n}}=(-4)^{3n+3-3n}\cdot 5^{n-1-n}=(-4)^3\cdot 5^{-1}=-\frac{64}{5}$. Koska peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, on jono geometrinen.

208.

a)

$$q=\frac{(3x-2)^{n+1}}{(3x-2)^n}=3x-2$$

$$|3x-2|<1$$

$$-1<3x-2<1 \quad \Big| +2$$

$$1<3x<3 \quad \Big| :3$$

$$\frac{1}{3}<x<1$$

b)

$$q=\frac{(4x^2+3x)^{n+1}}{(4x^2+3x)^n}=4x^2+3x$$

$$|4x^2+3x|<1$$

$4x^2+3x>-1$ ja $4x^2+3x<1$

$4x^2+3x+1>0$ $\quad$ $4x^2+3x-1<0$

Nollakohdat

$4x^2+3x+1=0$ $\quad$ $4x^2+3x-1=0$

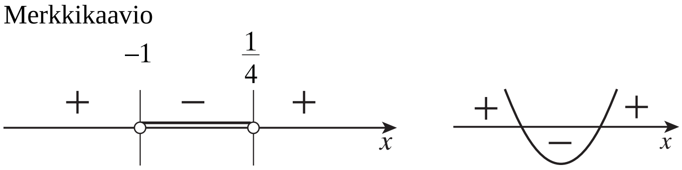
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4} \qquad x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot4\cdot(-1)}}{2\cdot4}$$

ei juuria, joten $\quad$ $x_1=-1$

$4x^2+3x+1>0$ kaikilla x $\quad$ $x_2=\dfrac{1}{4}$

Lausekkeen $4x^2+3x-1$

Merkkikaavio



Vastaus: a) $\frac{1}{3}<x<1$ $\quad$ b) $-1<x<\frac{1}{4}$

209.

Kulmat

A, *A* + *d*, *A* +2*d* ja *A* + 3*d*

Kulmien summa

A + *A* + *d* + *A* +2*d* + *A* + 3*d* = 360°

4*A* + 6*d* = 360°

$$A=-\frac{3}{2}d+90°$$

Geometrisen jonon perusteella saadaan verranto

$$\frac{A+d}{A}=\frac{A+3d}{A+d}$$

$$A^2+2Ad+d^2=A^2+3Ad$$

$$-Ad+d^2=0 \qquad \Big| \; A=-\frac{3}{2}d+90°$$

$$-(-\frac{3}{2}d+90°)d+d^2=0$$

$$\frac{5}{2}d^2-90°d=0$$

$$d(\frac{5}{2}d-90°)=0$$

$d=0$ tai $\frac{5}{2}d-90°=0$

ei käy $\qquad d=36°$

Kulmat

$A=-\frac{3}{2}\cdot 36°+90°=36°$

$B=36°+36°=72°$

$C=72°+36°=108°$

$D=108°+36°=144°$

Vastaus: $36°, 72°, 108°$ ja $144°$

210.

Ensimmäisen asteen polynomi $P(x)=ax+b$, missä $a,b\in\mathbf{R}$ vakioita.

$$\begin{aligned}P(n+1)-P(n)&=a(n+1)+b-(an+b)\\&=an+a+b-an-b\\&=a\end{aligned}$$

Joten kahden peräkkäisen luvun erotus on vakio (ei riipu muuttujan *x* arvosta).

211.

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases}20-x=y-20 \text{ eli } y=-x+40 \text{ sijoitetaan alempaan}\\ \frac{16}{x}=\frac{y}{16}\end{cases}$$

$$\frac{16}{x} = \frac{-x+40}{16}$$

$$-x^2 + 40x - 256 = 0$$

$$x = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-256)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 32$$

$$y_1 = -8 + 40 = 32$$

$$y_2 = -32 + 40 = 8$$

<u>Vastaus</u>: $x = 8$ ja $y = 32$ tai $x = 32$ ja $y = 8$

212. Luvut x,y ja z

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \\ (y+8) - x = z - (y+8) \text{ eli } z = -x + 2y + 16 \text{ sijoitetaan muihin yhtälöihin} \\ \frac{y+8}{x} = \frac{z+64}{y+8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{-x+2y+16}{y} \\ \frac{y+8}{x} = \frac{-x+2y+16+64}{y+8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = -x^2 + 2xy + 16x \text{ sijoitetaan alempaan} \\ y^2 + 16y + 64 = -x^2 + 2xy + 80x \end{cases}$$

$$-x^2 + 2xy + 16x + 16y + 64 = -x^2 + 2xy + 80x$$

$$y = 4x - 4 \text{ sijoitetaan edellisen yhtälöparin ylempään yhtälöön}$$

$$(4x-4)^2 = -x^2 + 2x(4x-4) + 16x$$

$$16x^2 - 32x + 16 = -x^2 + 8x^2 - 8x + 16x$$

$$9x^2 - 40x + 16 = 0$$

$$x = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16}}{2 \cdot 9}$$

$$x_1 = \frac{4}{9} \notin \mathbb{Z}, \text{ ei käy}$$

$$x_2 = 4$$

$$y = 4 \cdot 4 - 4 = 12$$

$$z = -4 + 2 \cdot 12 + 16 = 36$$

<u>Vastaus</u>: 4,12 ja 36

213.
Perättäiset kokonaisluvut $n - 1$, n ja $n + 1$
Neliöt $(n - 1)^2$, n^2 ja $(n + 1)^2$
Neliöiden erotukset
$n^2 - (n - 1)^2$ ja $(n + 1)^2 - n^2$
Näiden erotus
$(n + 1)^2 - n^2 - [n^2 - (n - 1)^2] = n^2 + 2n + 1 - n^2 - (n^2 - n^2 + 2n - 1) = 2$, joten koska perättäisten kokonaislukujen erotusten neliöiden erotus on vakio, on kyseinen jono aritmeettinen.

214.
Sivut *a, b* ja 7. Pisin sivu on 7, koska kolmion suurinta kulmaa vastapäätä oleva sivu on pisin.
Käyttämällä aritmeettisen lukujonon ominaisuutta ja kosinilausetta, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} b - a = 7 - b \quad \text{eli } a = 2b - 7 \text{ sijoitetaan alempaan} \\ 7^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120° \end{cases}$$

$$7^2 = (2b - 7)^2 + b^2 - 2\cdot(2b - 7)b\cos 120°$$

$$49 = 4b^2 - 28b + 49 + b^2 - 2\cdot(2b - 7)b\cdot(-\frac{1}{2})$$

$$49 = 4b^2 - 28b + 49 + b^2 + 2b^2 - 7b$$

$$7b^2 - 35b = 0$$

$$b(7b - 35) = 0$$

$$b = 0 \quad \text{tai} \quad b = 5$$

Joten sivut ovat 3 cm , 5 cm ja 7 cm.

Vastaus: 3 cm ja 5 cm

215.
Juuret a ja b
Aritmeettisesta jonosta saadaan

$$a + b - (a - b) = ab - (a + b)$$

$$ab - a - 3b = 0$$

$$b = \frac{a}{a - 3}$$

Geometrisesta jonosta saadaan

$$\frac{ab}{a-b} = \frac{a+b}{ab}$$

$$a^2b^2 = a^2 - b^2 \qquad \Big| \; b = \frac{a}{a-3}$$

$$a^2\left(\frac{a}{a-3}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{a}{a-3}\right)^2$$

$$\frac{a^4 - a^2(a-3)^2 + a^2}{(a-3)^2} = 0$$

$$\frac{a^2[a^2 - (a-3)^2 + 1]}{(a-3)^2} = 0$$

$$\frac{a^2(6a-8)}{(a-3)^2} = 0$$

$$a^2(6a-8) = 0$$

$a^2 = 0$ tai $6a - 8 = 0$

$a = 0$ $\qquad a = \frac{4}{3}$

ei käy $\qquad b = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3} - 3} = -\frac{4}{5}$

Yhtälö on

$(x - \frac{4}{3})(x + \frac{4}{5}) = 0$ eli $x^2 - \frac{8}{15}x - \frac{16}{15} = 0$ eli $15x^2 - 8x - 16 = 0$

<u>Vastaus</u>: $15x^2 - 8x - 16 = 0$

216.

$f(x) = e^{-x}\sin x$

$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$

Derivaatan nollakohdat

$-e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = 0$

$e^{-x}(-\sin x + \cos x) = 0$

$e^{-x} = 0$ tai $-\sin x + \cos x = 0$

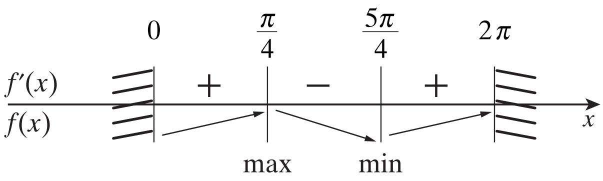
ei ratkaisua $\qquad \sin x = \cos x \qquad \Big| \; : \cos x \neq 0$ eli $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

Koska tangentin perusjakso on π, riittää tarkastella funktion kulkua välillä $[0, 2\pi]$
Kulkukaavio



$f'(\frac{\pi}{5}) > 0$

$f'(\pi) < 0$

$f'(\frac{7\pi}{4}) > 0$

maksimiarvot $f(\frac{\pi}{4} + n2\pi) = e^{-(\frac{\pi}{4}+n2\pi)} \sin(\frac{\pi}{4} + n2\pi) = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}+n2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}+n2\pi}}$

minimiarvot $f(\frac{5\pi}{4} + n2\pi) = e^{-(\frac{5\pi}{4}+n2\pi)} \sin(\frac{5\pi}{4} + n2\pi) = \frac{1}{e^{\frac{5\pi}{4}+n2\pi}} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{4}+n2\pi}}$

Peräkkäisten maksimiarvojen suhde

$$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}+(n+1)2\pi}} : \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}+n2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}+(n+1)2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}+n2\pi}}{1} = e^{\frac{\pi}{4}+n2\pi-(\frac{\pi}{4}+(n+1)2\pi)} = e^{-2\pi}$$

Koska suhde on vakio, on maksimiarvojen muodostama lukujono geometrinen.

<u>Vastaus</u>: maksimiarvot $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}+n2\pi}}$, minimiarvot $-\frac{1}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{4}+n2\pi}}$, n = 0,1,2,3...

217.
1. bounce $0{,}65 \cdot 2{,}2$
2. bounce $0{,}65^2 \cdot 2{,}2$
3. bounce $0{,}65^3 \cdot 2{,}2$
4. bounce $0{,}65^4 \cdot 2{,}2$
5. bounce $0{,}65^5 \cdot 2{,}2 \approx 0{,}26$

<u>Vastaus</u>: 0,26 m

8. Aritmeettinen summa

218.

a) Lukujonon viimeinen termi $a_{50} = 3 + (50 - 1) \cdot 5 = 248$

Summa $S_{50} = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 50 \cdot \dfrac{3 + 248}{2} = 6\,275$

b) Lukujonon viimeinen Termi $a_{50} = 12 + (50 - 1) \cdot 1{,}5 = 85{,}5$

Summa $S_{50} = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 50 \cdot \dfrac{12 + 85{,}5}{2} = 2\,437{,}5$

Vastaus: a) 6 275 b) 2 437,5

219.

a) Lukujonon viimeinen termi $a_{30} = -24 + 29 \cdot (-3) = -111$

Summa $S_{30} = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 30 \cdot \dfrac{-24 + (-111)}{2} = -2\,025$

b) Lukujonon viimeinen termi $a_{30} = \dfrac{1}{6} + 29 \cdot 2 = 58\dfrac{1}{6}$

Summa $S_{30} = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 30 \cdot \dfrac{\frac{1}{6} + 58\frac{1}{6}}{2} = 875$

Vastaus: a) –2 025 b) 875

220.

Ensimmäinen termi $a_1 = 108$

Termien erotus $d = 99 - 108 = -9$

Viimeinen termi

$$a_n = 108 + (n - 1) \cdot (-9)$$

$$108 - 9n + 9 = 0$$
$$-9n = -117 \quad |:(-9)$$
$$n = 13$$

Summa $S_{13} = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 13 \cdot \dfrac{108 + 0}{2} = 702$

Vastaus: Summa on 702.

221.

a)

$d = 6n + 6 - (6n - 1) = 6$

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{5 + 5 + 99 \cdot 6}{2} = 30\,200$$

b)

$d = -5n - 5 + 125 - (-5n + 125) = -5$

$$S_{101} = 101 \cdot \frac{125 + 125 + 100 \cdot (-5)}{2} = -12\,625$$

c)
$d = -20n - 20 + 11 - (-20n + 11) = -20$

$$S_{80} = 80 \cdot \frac{-20 \cdot 21 + 11 + [-20 \cdot 21 + 11 + 79 \cdot (-20)]}{2} = -95\,920$$

Vastaus: 30 200 b) −12 625 c) −95 920

222.
a)
$$\sum_{n=1}^{5} \frac{n+1}{n+2} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} = \frac{547}{140}$$

b)
$$\sum_{i=1}^{99} 2i = 2 + 4 + 6 + ... + 198 = 99 \cdot \frac{2+198}{2} = 9\,900$$

c)
$$\sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

d)
$$\sum_{i=1}^{4} a_k = a_k + a_k + a_k + a_k = 4a_k$$

Vastaus: a) $\frac{547}{140}$ b) 9 900 c) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ c) $4a_k$

223.
Luvut ovat 1 000, 1 001, ..., 9 999
Lukuja on 9 999 – 999 = 9 000

$$S_{9000} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 9\,000 \cdot \frac{1000 + 9\,999}{2} = 49\,495\,500$$

Vastaus: Summa on 49 495 500.

224.
Luvut ovat 0 ,4, 8, 12, ..., 296
Lukujen lukumäärä n
Yhteenlaskettavien lukumäärä

$$a_n = 0 + (n-1) \cdot 4$$
$$4n - 4 = 296$$
$$4n = 300 \qquad |:4$$
$$n = 75$$

Summa $S_{99} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 75 \cdot \frac{0 + 296}{2} = 11\,100$

Vastaus: Summa on 11 100.

225.

$$\sum_{i=1}^{101}(-1)^{n-1}i$$

Sievennetään ja lasketaan summa.

$1-2+3-4+\ldots+99-100+101=-1-1-1-\ldots-1+101=-1\cdot 50+101=51$

Vastaus: Summa on $\sum_{i=1}^{101}(-1)^{n-1}i$ = 51.

226.

Lukujonon ensimmäinen jäsen

$$S_{30}=n\cdot\frac{a_1+a_n}{2}$$

$$1500=30\cdot\frac{a_1+5}{2} \quad |\cdot 2$$

$$30\cdot(a_1+5)=3000 \quad |:30$$

$$a_1+5=100$$

$$a_1=95$$

Viimenen jäsen a_{30} = 95 +29 $\cdot$ d = 5

Termien erotus

$$29d = -90 \quad |:29$$

$$d=-\frac{90}{29}$$

Lukujonon kolmas jäsen $a_3=95+2\cdot\left(-\frac{90}{29}\right)=88\frac{23}{29}$

Summa $S_3=n\cdot\frac{a_1+a_n}{2}=3\cdot\frac{95+88\frac{23}{29}}{2}=275\frac{20}{29}$

Vastaus: Lukujonon ensimmäinen jäsen on 95 ja kolmen ensimmäisen jäsenen summa on $275\frac{20}{29}$.

227.

a) Lukujonon ensimmäinen termi

$$a_5 = 4$$

$$a_1 + 4\cdot 0{,}3 = 4$$

$$a_1 = 2{,}8$$

Lukujonon viimeinen termi a_{100} = 2,8 + 99 $\cdot$ 0,3 = 32,5

Summa $S_{100}=n\cdot\frac{a_1+a_n}{2}=100\cdot\frac{2{,}8+32{,}5}{2}=1765$

b) Lukujonon termien erotus

$$a_{28} = a_{23} + 5d$$

$$22{,}5 = 10 + 5d$$

$$5d = 12{,}5 \quad |:5$$

$$d = 2{,}5$$

Ensimmäinen termi

$a_{23} = 10$

$a_1 + 22 \cdot 2{,}5 = 10$

$a_1 = –45$

Lukujonon viimeinen termi $a_{100} = –45 + 99 \cdot 2{,}5 = 202{,}5$

Summa $S_{100} = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 100 \cdot \dfrac{-45 + 202{,}5}{2} = 7875$

<u>Vastaus</u>: Summa on a) 1 765 b) 7 875.

228.

$a_1 = 8$

$a_9 = -4$

$-4 = 8 + (9 - 1)d$

$-8d = 12$

$d = -\dfrac{3}{2}$

<u>Vastaus</u>: Puuttuvat jäsenet ovat $6\frac{1}{2}, 5, 3\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, -1$ ja $-2\frac{1}{2}$, summa on 18.

229.

$a_{16} = a_1 + 15d = 10\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{a_1 + 10\frac{3}{4}}{2} \cdot 16 = 142$

$8a_1 + 86 = 142$

$a_1 = 7$

$7 + 15d = 10\dfrac{3}{4}$

$d = \dfrac{1}{4}$

<u>Vastaus</u>: $\dfrac{1}{4}$

230.

Yhtälön vasemmalla puolella on aritmeettinen summa, jossa $a_1 = 5$, $d = 2$ ja

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 5 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 3$

Lasketaan millä n:n arvolla summa on 2 300.

$$n \cdot \frac{5 + 2n + 3}{2} = 2300 \qquad \Big| \cdot 2$$

$$n(2n+8)=4\,600$$
$$2n^2+8n-4\,600=0$$
$$n=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot2\cdot(-4\,600)}}{2\cdot2}$$
$$=\frac{-8\pm192}{4}$$
$$n_1=\frac{-8-192}{4}<0 \quad \text{ei käy}$$
$$n_2=\frac{-8+192}{4}=46$$

Kun n = 46, $x=a_{46}=3+2\cdot46=95$

Vastaus: x = 95

231.

Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa a_1 = 1, d = 0,2 ja

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d=1+(n-1)\cdot0{,}2=0{,}2n+0{,}8$

Lasketaan millä n:n arvolla summa on 40.

$$n\cdot\frac{1+0{,}2n+0{,}8}{2}=40 \qquad |\cdot2$$
$$n(2+0{,}2n-0{,}2)=80$$
$$0{,}2n^2+1{,}8n-80=0$$
$$n=\frac{-1{,}8\pm\sqrt{1{,}8^2-4\cdot0{,}2\cdot(-80)}}{2\cdot0{,}2}$$
$$=\frac{-1{,}8\pm8{,}2}{0{,}4}$$
$$n_1=\frac{-1{,}8-8{,}2}{4}<0 \quad \text{ei käy}$$
$$n_2=\frac{-1{,}8+8{,}2}{4}=16$$

Vastaus: 16 termiä

232.

Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa a_1 = –3, d = –5–(–3)=–2 ja

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d=-3+(n-1)\cdot(-2)=-2n-1$

Lasketaan millä n:n arvolla summa on pienempi kuin –800.

$$n\cdot\frac{-3+(-2n-1)}{2}<-800 \qquad |\cdot2$$
$$n(-2n-4)<-1600$$
$$-2n^2-4n+1600<0$$

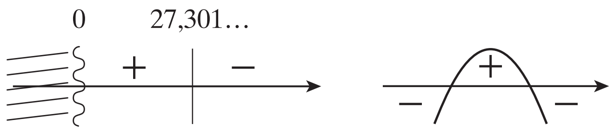
Nollakohdat

$$n = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1600}}{2 \cdot (-2)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{12816}}{-4}$$

$$n_1 = \frac{4 + \sqrt{12816}}{-4} < 0 \quad \text{ei käy}$$

$$n_2 = \frac{4 - \sqrt{12816}}{-4} = 27{,}301\ldots$$



$-2n^2 - 4n + 1600 < 0$

$n > 27{,}301...$ eli vähintään 28 termiä

Vastaus: Tarvitaan vähintään 28 termiä.

233.
Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa $a_1 = x$, $d = a_n - a_{n-1} = nx - (n-1)x = x$ ja $n = 20$

$$S_{20} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 20 \cdot \frac{x + 20x}{2} = 210x$$

Vastaus: Summa on $210x$.

234.
1. rivillä 18 paikkaa $a_1 = 18$
20. rivillä 18 +19 = 37 paikkaa $a_{20} = 37$

Paikkoja yhteensä $S_{20} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 20 \cdot \frac{18 + 37}{2} = 550$

Paikkoja ennen viimeistä riviä 550 – 37 = 513, joten viimeisen rivin paikat ovat 514., 515., ..., 550.

Vastaus: Yhteensä 550 paikkaa ja viimeisen rivin paikat ovat 514., 515., ..., 550.

235.
Sisimmän uran pituus $a_1 = \pi \cdot 0{,}8$
Uloimman uran pituus $a_\mathrm{n} = \pi \cdot 2{,}5$
Uria $n = 2\,100$

Urien yhteispituus $S_{2100} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 2100 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}8 + \pi \cdot 2{,}5}{2} = 10885{,}618...$

Yksikön muunnos 10 885,618... tuumaa = $10\,885{,}618 \cdot 25{,}40$ mm ≈ 280 m

Vastaus: Urien yhteispituus on 280 m.

236.

Taulukoidaan luetut sivumäärät

päivä	sivuja päivässä	sivuja yhteensä
1	15	15
2	17	32
3	19	51
4	21	72
5	23	95
6	25	120
7	27	147
8	29	176
9	31	207
10	33	240

Kirjan lukemiseen kuluu 10 päivää

Ratkaisu yhtälön avulla:
Luetut sivut 15 + 17 + 19 +...+ n
Viimeisenä päivänä luetut sivut $a_n = 15 + (n-1)\cdot 2 = 15 + 2n - 2 = 13 + 2n$

$$S_n \geq 223$$

$$n\cdot\frac{15+13+2n}{2} \geq 223$$

$$n\cdot\frac{28+2n}{2} \geq 223 \quad |\cdot 2$$

$$n\cdot(14+n) \geq 223$$

$$n^2 + 14n - 223 \geq 0$$

Nollakohdat

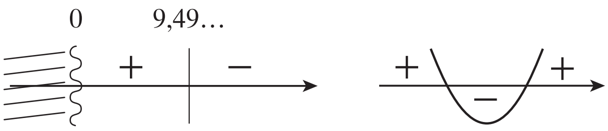
$$n^2 + 14n - 223 = 0$$

$$n = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 1\cdot(-223)}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{-14 \pm \sqrt{1088}}{2}$$

$$n_1 = \frac{-14-\sqrt{1088}}{2} < 0 \text{ ei käy}$$

$$n_2 = \frac{-14+\sqrt{1088}}{2} = 9{,}49\ldots$$



9 päivää ei riitä, joten aikaa kuluu vähintään 10 päivää

<u>Vastaus</u>: kirjan lukemiseen kuluu 10 päivää

237.

a) Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa

$d = a_{k+1} - a_k = (k+1) + 2 - (k+2) = 1$

$a_1 = 1 + 2 = 3$

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 1$

$$\sum_{k=1}^{n} (k+2) = \frac{3 + 3 + (n-1) \cdot 1}{2} \cdot n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$$

b) Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa

$d = a_{k+1} - a_k = 2 - 3(k+1) - (2 - 3k) = 2 - 3k - 3 - 2 + 3k = -3$

$a_1 = 2 - 3 \cdot 1 = -1$

$a_n = -1 + (n - 1) \cdot (-3)$

$$\sum_{k=1}^{4n} (2 - 3k) = \frac{-1 + (-1) + (4n-1) \cdot (-3)}{2} \cdot 4n = -24n^2 + 2n$$

Vastaus: a) $\frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$ b) $-24n^2 + 2n$

238.

$S_n = 2n^2 + 6n$

$S_1 = 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 8$

$S_2 = 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 20$

Joten $a_1 = 8$ ja $a_2 = 20 - 8 = 12$ ja $d = 12 - 8 = 4$

$a_5 = 8 + 4 \cdot 4 = 24$

$a_n = 8 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 4$

Vastaus: 24 ja $4n + 4$

239.

Keskimmäiset termit

$a_{50} = a_1 + 49d$

$a_{51} = a_1 + 50d$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} (a_1 + 49d)(a_1 + 50d) = 26\ 892 \\ \dfrac{a_1 + a_1 + 99d}{2} \cdot 100 = 16\ 400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} {a_1}^2 + 99a_1 d + 2\,450d^2 = 26\ 892 \\ 100a_1 + 4\ 950d = 16\ 400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} {a_1}^2 + 99a_1 d + 2\,450d^2 = 26\ 892 \\ a_1 = 164 - 49{,}5d \quad \text{sijoitus ylempään} \end{cases}$$

$$(164-49{,}5d)^2+99\cdot(164-49{,}5d)\cdot d+2\,450d^2=26\;892$$
$$-0{,}25d^2=-4$$
$$d^2=16$$
$$d=\pm4$$
$a_1=164-49{,}5d=164-49{,}5\cdot(-4)=362$

tai

$a_1=164-49{,}5d=164-49{,}5\cdot4=-34$

Vastaus: a_1 = 362 ja d = −4 tai a_1 = −34 ja d = 4

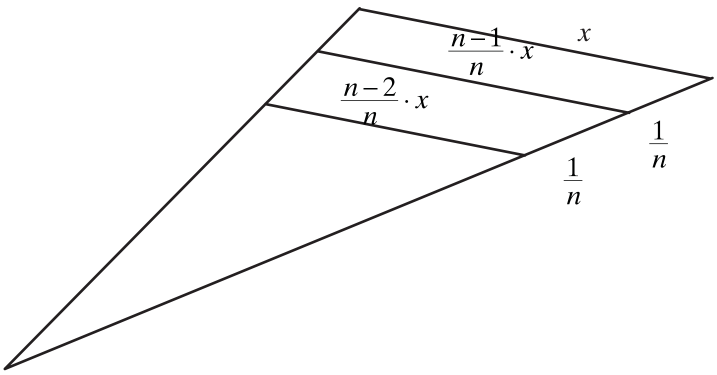
240.

Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa $d=a_n-a_{n-1}=\frac{n}{n^2}-\frac{n-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}$

$$S_n=\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+(n-1)\cdot\frac{1}{n^2}}{2}\cdot n=\frac{(2+n-1)n}{2n^2}=\frac{1+n}{2n}$$

Vastaus: $\frac{1+n}{2n}$

241.



Kolmion sivun suuntaiset janat jakavat kolmion yhdenmuotoisiin kolmioihin, joissa yhdenmuotoisuussuhde on $\frac{n-1}{n},\frac{n-2}{n},\frac{n-3}{n},...,\frac{n-(n-1)}{n}=\frac{1}{n}$, jolloin janojen pituudet ovat $\frac{n-1}{n}\cdot x,\frac{n-2}{n}\cdot x,\frac{n-3}{n}\cdot x...,\frac{1}{n}\cdot x$ eli $x-\frac{1}{n}\cdot x,x-\frac{2}{n}\cdot x,x-\frac{3}{n}\cdot x...,\frac{1}{n}\cdot x$

Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa

$d=a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n}x-\frac{n-(n-2)}{n}\cdot x=\frac{1-[n-(n-2)]}{n}\cdot x=-\frac{1}{n}x$

Janojen pituuksien summa

$$S_n = \frac{x - \frac{1}{n}x + x - \frac{1}{n}x + (n-1)\cdot(-\frac{1}{n}x)}{2} \cdot n = \frac{1}{2}\cdot(nx - x + nx - nx + x) = \frac{1}{2}nx$$

<u>Vastaus</u>: $\frac{1}{2}nx$

242.
Oskarin kulkema matka *n* tunnissa

$$2 + n\cdot\frac{4 + 4 + (n-1)\cdot(-\frac{1}{5})}{2} = 4 + (8\frac{1}{5} - \frac{1}{5}n)n = -\frac{1}{5}n^2 + 8\frac{1}{5}n + 4$$

Oonan kulkema matka *n* tunnissa

$$n\cdot\frac{3 + 3 + (n-1)\cdot\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}n^2 + 5\frac{2}{3}n$$

Saadaan yhtälö

$$-\frac{1}{5}n^2 + 8\frac{1}{5}n + 4 = \frac{1}{3}n^2 + 5\frac{2}{3}n$$

$$-\frac{8}{15}n^2 + 2\frac{8}{15}n + 4 = 0$$

$$-8n^2 + 38n + 60 = 0$$

$$n = \frac{-38 \pm \sqrt{38^2 - 4\cdot(-8)\cdot 60}}{2\cdot(-8)}$$

$n_1 = -1,25$ ei käy

$n_2 = 6$

<u>Vastaus</u>: 6 tunnin kuluttua.

243. Etsitään taulukoimalla oikea asunnon numero.

Villen asunnon numero	summa ennen V:n asuntoa	summa V:n asunnon jälkeen
30	1+2+3+...+29= $29\cdot\frac{1+29}{2}=435$	31+32+...+42= $12\cdot\frac{31+42}{2}=438$
31	435 + 31 = 465	32+33+...+44= $13\cdot\frac{32+44}{2}=494$
32	465 + 32 = 496	33+34+...+45= $13\cdot\frac{33+45}{2}=507$
33	496 + 33 = 528	34+35+...+46= $13\cdot\frac{34+46}{2}=520$
34	528 + 34 = 561	35+36+...+48= $14\cdot\frac{35+48}{2}=581$
35	561 + 35 = 595	36+37+...+49= $14\cdot\frac{36+49}{2}=595$

Vastaus: Asunnon numero on 35

244.
a) Kolmion alimmalla rivillä on ympyröitä järjestysluvun ilmoittama määrä n.
Rivejä on n kpl ja ylimmällä rivillä on 1 ympyrä.
Ympyröitten määrä saadaan aritmeettisesta summasta, jossa $a_1 = 1$, $d = 1$, $a_n = n$ ja

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

10. kolmiluku on $S_{10} = n\cdot\frac{a_1+a_n}{2} = 10\cdot\frac{1+10}{2} = 55$

100. kolmiluku on $S_{100} = n\cdot\frac{a_1+a_n}{2} = 100\cdot\frac{1+100}{2} = 5\,050$

n. kolmiluku on $S_n = n\cdot\frac{a_1+a_n}{2} = n\cdot\frac{1+n}{2} = \frac{n+n^2}{2}$

b) Sijoitetaan $t = \frac{n+n^2}{2}$

$$a_n = 8\cdot\frac{n+n^2}{2} + 1 = 4n^2 + 4n + 1$$

c)
Kolmioluku $b_n = \frac{n+n^2}{2}$
Kolmilukujen erotusten jono

$$a_n = b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)+(n+1)^2}{2} - \frac{n+n^2}{2} = \frac{n^2+3n+2-n-n^2}{2} = n+1$$

Vastaus: a) Kymmenes kolmioluku on 55 ja sadas 5 050 ja n. kolmiluku on $\frac{n+n^2}{2}$

b) $a_n = 4n^2 + 4n + 1$ c) $a_n = n + 1$

245.

Kokonaismatkasta muodostuu summa $2\cdot\left(10+20+30+...+190\right) = 2\cdot\frac{10+190}{2}\cdot 19 = 3800$

<u>Vastaus</u>: 3,8 km

246.
$a_1 = -12$
$S_{10} = 0$

$$S_{10} = 10\cdot\frac{-12+(-12)+(10-1)d}{2}$$

$$10\cdot\frac{-12+(-12)+(10-1)d}{2} = 0$$

$$45d = 120$$

$$d = \frac{8}{3}$$

10 seuraavan jäsenen summa

$$S_{20} - S_{10} = 20\cdot\frac{-12+(-12)+(20-1)\cdot\frac{8}{3}}{2} - 0 = 266\frac{2}{3}$$

<u>Vastaus</u>: $266\frac{2}{3}$

247.
$a_1 = 10$
$a_9 = 7$

$$10 + 8d = 7$$

$$d = -\frac{3}{8}$$

Lasketaan millä n:n arvolla summa on nolla:

$$n\frac{10+10+(n-1)(-\frac{3}{8})}{2} = 0$$

$$-\frac{3}{16}n^2 + \frac{163}{16}n = 0$$

$$\frac{1}{16}n(-3n+163) = 0$$

$$n = 0 \quad \text{tai} \quad -3n + 163 = 0$$

$$n = 54\frac{1}{3}$$

Joten pienin n, jolla summa on negatiivinen, on 55.

$$S_{55} = 55 \cdot \frac{10+10+54\cdot(-\frac{3}{8})}{2} = -\frac{55}{8} = -6,875$$

Vastaus: 55 ja −6 875

248.
Summa

$$n \cdot \frac{1+2m-1}{2} = m^2$$

$$2mn = 2m^2 \quad \Big| :(2m) \neq 0$$

$$n = m$$

n:s termi

$$1+(n-1)d = 2n-1$$

$$(n-1)d = 2(n-1) \quad \Big| :(n-1) \neq 0$$

$$d = 2$$

Joten summan 5 ensimmäistä termiä ovat 1,3,5,7 ja 9

Vastaus: 1,3,5,7 ja 9

249.
Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 5 \cdot \dfrac{a_1 + a_1 + 4d}{2} = 0 \\ 10 \cdot \dfrac{a_1 + a_1 + 9d}{2} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 4d = 0 \text{ eli } a_1 = -2d \text{ sijoitetaan alempaan} \\ a_1 + \dfrac{9}{2}d = 1 \end{cases}$$

$$-2d + \frac{9}{2}d = 1$$

$$d = \frac{2}{5}$$

$$a_1 = -2 \cdot \frac{2}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$a_2 = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$a_3 = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 0$$

Vastaus: $-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}$ ja 0

250.

Summa $S_n = 3n^2 + 2n$

$a_1 = S_1 = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$

$a_2 = S_2 - S_1 = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 5 = 11$

$a_3 = S_3 - S_2 = 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 16 = 17$

Näiden peräkkäisten termien erotus on 6.
Lasketaan saadun aritmeettisen lukujonon 5,11,17,... n:n ensimmäisen termin summa
$S_n = n \cdot \dfrac{5 + (n-1) \cdot 6}{2} = 3n^2 + 2n$, joten on olemassa aritmeettinen lukujono, jonka n:n ensimmäisen termin summa on $S_n = 3n^2 + 2n$. Jonon 3 ensimmäistä termiä ovat 5,11 ja 17

Vastaus: 5, 11 ja 17

251.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2}$$

$$S_{2n} = 2n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (2n-1)d}{2}$$

$$S_{3n} = 3n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (3n-1)d}{2} = \frac{6na_1 + 9n^2d - 3nd}{2}$$

$$\begin{aligned}
3(S_{2n} - S_n) &= 3[2n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (2n-1)d}{2} - n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2}] \\
&= 3 \cdot \frac{4na_1 + 4n^2d - 2nd - 2na_1 - n^2d + nd}{2} \\
&= \frac{6na_1 + 9n^2d - 3nd}{2} \\
&= S_{3n}
\end{aligned}$$

Geometrinen summa

252.

a) Ensimmäinen termi $a_1 = 2$
Suhdeluku $q = 3$

Summa $S_{10} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{1 \cdot \left(1 - 3^{10}\right)}{1-3} = 29\,524$

b) Tiedot $a_1 = 1{,}5$ ja $q = 4$

Summa $S_{10} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{1{,}5 \cdot \left(1 - 4^{10}\right)}{1-4} = 524\,287{,}5$

Vastaus: Summa on a) 29 524 b) 524 287,5.

253.

a) Ensimmäinen termi $a_1 = 2$

Suhdeluku $q = 3$

Lasketaan kuinka monta termiä summassa on.

$$a_n = 13\,122$$

$$2 \cdot 3^{n-1} = 13122 \quad |: 2$$

$$3^{n-1} = 6\,561$$

$$3^{n-1} = 3^8 \text{ Kantaluvut samat, eksponentit samat}$$

$$n - 1 = 8$$

$$n = 9$$

Summa $S_9 = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{2 \cdot \left(1-3^9\right)}{1-3} = 19\,682$

b) Ensimmäinen termi $a_1 = \dfrac{2}{3}$

Suhdeluku $q = \dfrac{1}{2}$

Lasketaan kuinka monta termiä summassa on.

$$a_n = \frac{1}{96}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{96} \quad \Big|: \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \text{ Kantaluvut samat, eksponentit samat}$$

$$n - 1 = 6$$

$$n = 7$$

Summa $S_7 = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{127}{96} = 1\dfrac{31}{96}$

c) Ensimmäinen termi $a_1 = \dfrac{3}{5}$

Suhdeluku $q = \dfrac{1}{3}$

Lasketaan kuinka monta termiä summassa on.

$$a_n = \frac{1}{1215}$$

$$\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1215} \quad \Big| : \frac{3}{5}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{729}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{6}$$ Kantaluvut samat, eksponentit samat

$$n - 1 = 6$$
$$n = 7$$

Summa

$$S_7 = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^7\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1093}{1215}$$

<u>Vastaus</u>: Summa on a) 19 682 b) $1\frac{31}{96}$ c) $\frac{1093}{1215}$.

254.

a)

Kyseessä on geometrinen summa, jossa $q = \frac{4^{n-1+1}}{4^{n-1}} = 4^{n-n+1} = 4$

$$S_7 = \frac{1\cdot(1-4^7)}{1-4} = 5\ 461$$

b)

Kyseessä on geometrinen summa, jossa $q = \frac{4\cdot 3^{n-1+1}}{4\cdot 3^{n-1}} = 3^{n-n+1} = 3$

$$S_{12} = \frac{4\cdot(1-3^{12})}{1-3} = 1062\ 880$$

c)

Kyseessä on geometrinen summa, jossa $q = \frac{0,3\cdot(-2)^{n-1+1}}{0,3\cdot(-2)^{n-1}} = (-2)^{n-n+1} = -2$

$$S_{12} = \frac{0,3\cdot(1-(-2)^{12})}{1-(-2)} = -409,5$$

<u>Vastaus</u>: a) 5 461 b) 1 062 880 c) −409,5

255.

a)

Summa 0,2+ 0,02 + 0,002+... +0,000002

q = 0,1

Lasketaan kuinka monta termiä summassa on.

$$a_n = 0,0000002$$

$$0,2 \cdot 0,1^{n-1} = 0,0000002 \quad |: 0,2$$

$$0,1^{n-1} = 0,000001$$

$$0,1^{n-1} = 0,1^6 \text{ Kantaluvut samat, eksponentit samat}$$

$$n - 1 = 6$$

$$n = 7$$

Summa $\sum_{n=1}^{7} 0,2 \cdot 0,1^{n-1} = S_7 = \dfrac{0,2 \cdot \left(1 - 0,1^7\right)}{1 - 0,1} = 0,2222222$

b) Summa $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-10} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{1024}$

Ensimmäinen termi $a_1 = \dfrac{1}{2}$

Suhdeluku $q = \dfrac{1}{2}$

Summassa on 10 termiä

Summa $\sum_{n=1}^{10} 2^{-n} = S_{10} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \dfrac{1}{1024} = \dfrac{1023}{1024}$

c)

Ensimmäinen termi $a_1 = -9$

Suhdeluku $q = -\dfrac{1}{3}$

Lasketaan kuinka monta termiä summassa on.

$$a_n = -\frac{1}{6561}$$

$$-9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{6561} \quad |: (-9)$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{59\,049}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{10} \text{ Kantaluvut samat, eksponentit samat}$$

$$n - 1 = 10$$

$$n = 11$$

$$\sum_{n=1}^{11} -9\cdot(-\frac{1}{3})^{n-1} = S_{11} = \frac{-9\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{11}\right)}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{-\frac{177\ 148}{19\ 683}}{\frac{4}{3}} = -\frac{44\ 287}{6561}$$

Vastaus: a) $\sum_{n=1}^{7} 0,2\cdot 0,1^{n-1} = \ 0{,}222222$ b) $\sum_{n=1}^{10} 2^{-n} = \frac{1023}{1024}$ c) $\sum_{n=1}^{11} -9\cdot(-\frac{1}{3})^{n-1} = -\frac{44\ 287}{6561}$

256.

$a_1 = 1$ ja $q = \frac{e}{1} = \frac{e^2}{e} = e$

$$S_{11} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1\cdot\left(1-e^{11}\right)}{1-e} = \frac{1-e^{11}}{1-e} \approx 34844{,}774$$

Vastaus: Summa on $\frac{1-e^{11}}{1-e} \approx 34844{,}774$.

257.

$a_1 = 1$ ja $q = \frac{x}{1} = \frac{x^2}{x} = x$

$$S_{100} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1\cdot\left(1-x^{100}\right)}{1-x} = \frac{1-x^{100}}{1-x},\ x \neq 1$$

Vastaus: Summa on $\frac{1-x^{100}}{1-x}$, $x \neq 1$.

258.

a) Lukujonon ensimmäinen termi

$$a_6 = 4$$
$$a_1\cdot(-2)^5 = 4$$
$$a_1\cdot(-32) = 4 \quad \big| : (-32)$$
$$a_1 = -\frac{1}{8}$$

Summa

$$S_9 = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{-\frac{1}{8}\cdot\left(1-(-2)^9\right)}{1-2} = -21{,}375$$

b) Lukujonon suhdeluku

$$a_7 = a_4\cdot q^3$$
$$-1792 = 28\cdot q^3 \quad \big| :28$$
$$q^3 = -64$$
$$q = \sqrt[3]{-64} = -4$$

Lukujonon ensimmäinen termi

$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$28 = a_1 \cdot (-4)^3$$
$$28 = -64a_1 \quad |: (-64)$$
$$a_1 = -\frac{7}{16}$$

Summa

$$S_9 = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{-\frac{7}{16} \cdot \left(1-(-4)^9\right)}{1-(-4)} = -22\,937,6875$$

<u>Vastaus</u>: Summa on a) –21,375 b) –22 937,6875.

259.

a) Suhdeluku $q = \frac{2}{1} = 2$

Yhteenlaskettavien lukumäärä

$$S_n = 8191 \quad \left| S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \right.$$
$$\frac{1 \cdot \left(1-2^n\right)}{1-2} = 8191$$
$$-1 + 2^n = 8\,191$$
$$2^n = 8\,192$$
$$2^n = 2^{13}$$
$$n = 13$$

b) Suhdeluku $q = \frac{-\frac{3}{4}}{-1} = \frac{3}{4}$

$$S_n = -\frac{175}{64} \quad \left| S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \right.$$
$$\frac{-1 \cdot \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{3}{4}} = -\frac{175}{64}$$
$$-4 \cdot \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = -\frac{175}{64} \quad |:(-4)$$
$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{175}{256}$$

$$-\left(\frac{3}{4}\right)^n = -\frac{81}{256}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{81}{256}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$n = 4$$

Vastaus: a) $n = 13$ b) $n = 4$.

260.

$a_1 = 4$

$a_6 = 67\,228$

$$4q^5 = 67\,228$$

$$q = 7$$

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{4\cdot\left(1-7^6\right)}{1-7} = 78\,432$$

Vastaus: 78 432

261.

$$\frac{5\cdot\left(1-1,2^n\right)}{1-1,2} > 10^9$$

$$1-1,2^n < -\frac{10^9}{25}$$

$$-1,2^n < -\frac{10^9}{25} - 1$$

$$1,2^n > \frac{10^9}{25} + 1$$

$$n > \frac{\ln(\frac{10^9}{25}+1)}{\ln 1,2} = 96,068...$$

Vastaus: 97

262.

10 termin tulo

$$a_1 \cdot a_1q \cdot a_1q^2 \cdot \ldots \cdot a_1\ q^9 = a_1^{10}q^{1+2+\ldots+9} = a_1^{10}q^{45}$$

$$a_1^{10}q^{45} = 32 \qquad \left| q = \frac{1}{2} \right.$$

$$a_1^{10} \cdot (\frac{1}{2})^{45} = 32$$

$$a_1^{10} = 32 \cdot 2^{45}$$

$$a_1 = \pm\sqrt[10]{2^{50}}$$

$$a_1 = \pm 2^5$$

$$a_1 = \pm 32$$

$$a_{10} = -32 \cdot (\frac{1}{2})^9 = -\frac{1}{16} \quad \text{tai} \quad a_{10} = 32 \cdot (\frac{1}{2})^9 = \frac{1}{16}$$

Vastaus: $a_1 = -32$ ja $a_{10} = -\frac{1}{16}$ tai $a_1 = 32$ ja $a_{10} = \frac{1}{16}$

263.

Suhdeluku $q = \dfrac{\frac{1}{3}}{1} = \dfrac{1}{3}$

$$\left| \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{3}{2} \right| < 0,001$$

$$\left| \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \right| < 0,001$$

$$\left| \frac{3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3}{2} \right| < 0,001$$

$$\left| \frac{-3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} \right| < 0,001 \qquad \left| \frac{-3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} < 0 \right.$$

$$\frac{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} < 0{,}001$$

$$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0{,}002 \qquad \Big|:3$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{2}{3\ 000} \qquad \Big|\ln()$$

$$\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n < \ln\frac{2}{3\ 000}$$

$$n\ln(\frac{1}{3}) < \ln\frac{2}{3\ 000} \qquad \Big|:\ln(\frac{1}{3}) < 0$$

$$n > \frac{\ln\frac{2}{3\ 000}}{\ln\frac{1}{3}} = 6{,}6567...$$

Vastaus: Vähintään 7 jäsentä

264.
Kuulijoiden määrä $1+4+4^2+4^3+4^5+...+4^{10}$ muodostaa geometrisen summan.
Ensimmäinen termi $a_1 = 1$
Suhdeluku $q = 4$

$$S_{11} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1\cdot\left(1-4^{11}\right)}{1-4} = 1398101$$

Vastaus: Kuulijoita on 1 398 101.

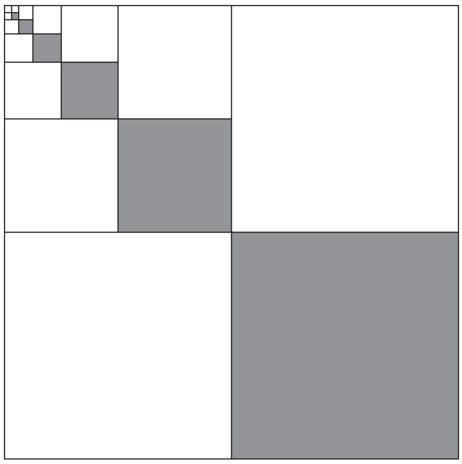
265.
Varjostettujen neliöiden ala yhteensä

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{16}\right)^2+\left(\frac{1}{32}\right)^2+\left(\frac{1}{64}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{4096}$$

$$=\frac{1365}{4\,096}$$

Alojen suhde $\frac{\frac{1365}{4\,096}}{1} \approx 0{,}333 = 33{,}3\%$



Vastaus: Varjostettu alue on $\frac{1365}{4\,096}$ = 33,3 % alkuperäisestä neliöstä.

266.
Pallon liikkuma matka

$S = 2+0{,}8\cdot 2+0{,}8\cdot 2+0{,}8^2\cdot 2+0{,}8^2\cdot 2+\ldots+0{,}8^7\cdot 2+0{,}8^7\cdot 2$

$= 2+4\cdot 0{,}8+4\cdot 0{,}8^2+\ldots+4\cdot 0{,}8^7$

$= 2+4\cdot\left(0{,}8+0{,}8^2+\ldots+0{,}8^7\right) \quad \Big| S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

$= 2+4\cdot\dfrac{0{,}8\cdot\left(1-0{,}8^7\right)}{1-0{,}8}$

$= 2 + 4\cdot 3{,}1611392$

$\approx 14{,}6$

Vastaus: Pallo on liikkunut pystysuunnassa 14,6 m.

267.
Äänimerkkien välissä oleva aika 1s + 2s + 4s + 8s + ...
Kyseessä on geometrinen summa, jonka suhdeluku on $q = 2$
a) Vuorokaudessa on $24\cdot 3\,600$ s = 86 400 s
Lasketaan milloin äänimerkkien välissä oleva yhteisaika ylittää vuorokauden.

$S_{16} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{1\cdot\left(1-2^{16}\right)}{1-2} = 65\,535$ eli 17. äänimerkin kuuluessa on kulunut aikaa 65 535 s

$S_{17} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{1\cdot\left(1-2^{17}\right)}{1-2} = 131\,071$ eli 18. äänimerkin kuuluessa on kulunut aikaa yli vuorokausi

b) Vuodessa on $365\cdot 24\cdot 3\,600$ s = 31 536 000 s
Lasketaan milloin äänimerkkien välissä oleva yhteisaika ylittää vuoden.

$S_{24} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{1\cdot\left(1-2^{24}\right)}{1-2} = 16\,777\,215$ eli 25. äänimerkin kuuluessa on kulunut aikaa alle vuoden

$S_{25} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{1\cdot\left(1-2^{25}\right)}{1-2} = 33\,554\,431$ eli 26. äänimerkin kuuluessa on kulunut aikaa yli vuoden

Vastaus: Laite antaisi a) 17 äänimerkkiä vuorokaudessa b) 25 äänimerkkiä vuodessa.

268. Kyseessä on geometrinen summa.
Ensimmäinen termi a_1 = 68 000
Suhdeluku q = 1,05

Summa $S_5 = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{68\,000\cdot\left(1-1{,}05^5\right)}{1-1{,}05} \approx 380\,000$

Vastaus: Asiakkaita oli 380 000.

269.
a) Taulukoidaan tiedot

kulunut aika (d)	sairaiden kokonaismäärä
0	12
1	$12 \cdot 2 = 24$
2	$12 \cdot 2^2 = 48$
...	
7	$12 \cdot 2^6 = 768$

b) Taulukoidaan tiedot

kulunut aika (d)	sairaiden kokonaismäärä
0	12
1	$12+2 \cdot 12$
2	$12+2 \cdot 12+2 \cdot 2 \cdot 12 = 12 \cdot (1+2+2^2)$
...	
7	$12 \cdot (1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6) = 12 \cdot \dfrac{1 \cdot \left(1-2^7\right)}{1-2} = 1\,524$

Vastaus: Sairaiden määrä a) 768   b) 1 524.

270.
Annin palkka $S = 1+3+9+...$
Suhdeluku $q = \dfrac{3}{1} = 3$
Ensimmäinen termi $a_1 = 1$
Summa $S_{14} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{1 \cdot \left(1-3^{14}\right)}{1-3} = 2\,391\,484$
Yksikön muunnos 2 391 484 snt = 23 914,84 €
Vastaus: Anni tienasi 23 914,84 €.

271.

$$S_n = 600 - 600 \cdot (\frac{1}{2})^n$$

$$a_1 = S_1 = 600 - 600 \cdot (\frac{1}{2})^1 = 300$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = 600 - 600 \cdot (\frac{1}{2})^2 - 300 = 150$$

$$a_3 = S_3 - S_2 = 600 - 600 \cdot (\frac{1}{2})^3 - [600 - 600 \cdot (\frac{1}{2})^2] = 75$$

Vastaus: 300, 150 ja 75

272.
Lasketaan funktion arvoja.
$f(1) = 0$
$f(2) = 2 \cdot f(1) + 1 = 1$
$f(3) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
$f(4) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
$f(5) = 2 \cdot 7 + 1 = 15$
Peräkkäisten termien erotus noudattaa geometrista lukujonoa 0,1,2,4,8,... eli 2^0, 2^1, 2^2, 2^3,...
Funktio muodostuu tämän jonon summasta. $f(n)$ saadaan, kun lasketaan jonon n ensimmäistä termiä yhteen
$f(1) = 0$
$f(2) = 0+2^0=1$
$f(3) = 0 + 2^0 + 2^1 = 3$
...

$$f(19) = 0+ 2^0 + 2^1 +...+ 2^{17} = \frac{1\cdot\left(1-2^{18}\right)}{1-2} = 262\,143$$

$f(20) = 2 \cdot f(19) +1 = 524\,287$
$f(20) - f(19) = 262\,144$

<u>Vastaus</u>: 262 144

273.

$$\begin{cases} \dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 14 & \Big| \cdot \dfrac{1-q}{1-q^3} \\ \dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q} = -364 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 14 \cdot \dfrac{1-q}{1-q^3} \\ \dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q} = -364 \end{cases}$$

$$\frac{14 \cdot \dfrac{1-q}{1-q^3}(1-q^6)}{1-q} = -364$$

$$\frac{14 \cdot (1-q)(1-q^6)}{(1-q^3)(1-q)} = -364$$

$$\frac{14(1-q^6)}{1-q^3} = -364 \qquad \Big| \cdot (1-q^3)$$

$$14 - 14q^6 = -364 + 364q^3$$

$$-14q^6 - 364q^3 + 378 = 0 \qquad \Big| \text{sij.} \, t = q^3$$

$-14t^2 - 364t + 378 = 0$

$$t = \frac{-(-364) \pm \sqrt{(-364)^2 - 4 \cdot (-14) \cdot 378}}{2 \cdot (-14)}$$

$$t_1 = \frac{364 - \sqrt{153664}}{-28} = 1$$

$$t_2 = \frac{364 + \sqrt{153664}}{-28} = -27$$

Sijoitus $t = q^3$

$q_1^{\,3} = 1$

$q_1 = 1$

$q = 1$ eli vakiojono ei toteuta alkuperäisiä ehtoja

$q_2^{\,3} = -27$

$q_1 = -3$

$$a_1 = 14 \cdot \frac{1-(-3)}{1-(-3)^3} = 2$$

$$S_9 = \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{2(1-(-3)^9)}{1-(-3)} = 9842$$

Vastaus: 9 842

274.

Lääkettä jäljellä 12 tunnin kuluttua 100 % – 60 % = 40 % = 0,40

kulunut aika (vrk)	lääkettä (mg)
0	0,050
0,5	$0{,}40 \cdot 0{,}050 + 0{,}050$
1	$0{,}40 \cdot (0{,}40 \cdot 0{,}050 + 0{,}050) + 0{,}050$
1,5	$0{,}40 \cdot (0{,}40 \cdot 0{,}050 + 0{,}050) + 0{,}050) + 0{,}050$
2	$0{,}40^4 \cdot 0{,}050 + 0{,}40^3 \cdot 0{,}050 + 0{,}40^2 \cdot 0{,}050 + 0{,}40 \cdot 0{,}050 + 0{,}050 = \dfrac{0{,}050 \cdot \left(1 - 0{,}40^5\right)}{1 - 0{,}40} \approx 0{,}082$
⋮	
12	$\dfrac{0{,}050 \cdot \left(1 - 0{,}40^{25}\right)}{1 - 0{,}40} \approx 0{,}083$

Vastaus: Lääkettä jäljellä a) 0,082 mg   b) 0,083 mg.

275.

P(1.heitolla kuutonen tai 2.heitolla 2 kuutosta tai ... tai 6.heitolla 6 kuutosta)

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\ldots+\frac{1}{6^6}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{6}}\approx 0{,}20=20\%$$

<u>Vastaus</u>: Todennäköisyys on 20 %.

276.

a) Reikien määrä $0+1+8+8^2+8^3+\ldots+8^9=\dfrac{1\cdot\left(1-8^{10}\right)}{1-8}=153\ 391\ 689$

b) Neliöiden sivut pienenevät joka vaiheessa kolmanteen osaan, joten alat pienenevät yhdeksänteen osaan $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

Poistettujen neliöiden alat yhteensä

$$1\cdot\frac{1}{9}+8\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2+8^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3+8^3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3+\ldots+8^9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^9=\frac{1}{9}\cdot\left(1+\frac{8}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\ldots+\left(\frac{8}{9}\right)^9\right)$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{8}{9}\right)^{10}\right)}{1-\frac{8}{9}}=0{,}6920\ldots$$

Poistettujen alan osuus alkuperäisestä neliöstä $\dfrac{0{,}6920\ldots}{1}\approx 69{,}2\,\%$

<u>Vastaus</u>: a) Matossa on 153 391 689 reikää b) Ala pienentynyt 69,2 %.

277.

$$\begin{array}{r|l}
 & \overline{1+x+x^2+x^3} \\
1-x & 1 \\
 & \underline{x-1} \\
 & x \\
 & \underline{x-x^2} \\
 & x^2 \\
 & \underline{x^2-x^3} \\
 & x^3 \\
 & \underline{x^3-x^4} \\
 & x^4
\end{array}$$

Saadaan jakoyhtälö

$$1=(1-x)(1+x+x^2+x^3)+x^4 \qquad \Big| :(1-x)\neq 0$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\frac{x^4}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x}-\frac{x^4}{1-x}=1+x+x^2+x^3$$

$$\frac{1-x^4}{1-x}=1+x+x^2+x^3 \quad \square$$

278.

$$\sum_{n=2}^{x}(-5)^n=203450525$$

$$\frac{(-5)^2[1-(-5)^{x-1}]}{1-(-5)}=203450525$$

$$25-25(-5)^{x-1}=1220703150$$

$$(-5)^{x-1}=-48828125$$

$$(-5)^{x-1}=-5^{11}$$

$$x-1=11$$

$$x=12$$

Vastaus: $x = 12$

279.

Väite: $S_n\cdot\left(S_{3n}-S_{2n}\right)=\left(S_{2n}-S_n\right)^2$

Geometrinen summa

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_{2n}=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$$

$$S_{3n}=\frac{a_1(1-q^{3n})}{1-q}$$

$$\begin{aligned}S_n\cdot\left(S_{3n}-S_{2n}\right)&=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}[\frac{a_1(1-q^{3n})}{1-q}-\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}]\\&=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}[\frac{a_1(1-q^{3n})-a_1(1-q^{2n})}{1-q}]\\&=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}[\frac{a_1(1-q^{3n}-1+q^{2n})}{1-q}]\\&=\frac{a_1{}^2(q^{4n}-2q^{3n}+q^{2n})}{(1-q)^2}\end{aligned}$$

$$\left(S_{2n}-S_n\right)^2=[\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}-\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}]^2$$
$$=[\frac{a_1(1-q^{2n})-a_1(1-q^n)}{1-q}]^2$$
$$=[\frac{a_1(1-q^{2n}-1+q^n)}{1-q}]^2$$
$$=\frac{a_1{}^2(q^{4n}-2q^{3n}+q^{2n})}{(1-q)^2}$$

m.o.t.

280.

$$\begin{cases}a_2=a_1q=20\\ a_5=a_1q^4=160\end{cases}$$
$$\begin{cases}a_1=\dfrac{20}{q}\\ a_1q^4=160\end{cases}$$
$$\frac{20}{q}\cdot q^4=160$$
$$q^3=8$$
$$q=2$$
$$a_1=\frac{20}{2}=10$$
$$S_{10}=\frac{10(1-2^{10})}{1-2}=10\,230$$

<u>Vastaus</u>: 10 230

281.

$$\begin{cases}S_4=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=217,6\\ a_1-a_1q^2=64\end{cases}$$
$$\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=217,6\\ a_1=\dfrac{64}{1-q^2}\end{cases}$$

$$\frac{\frac{64}{1-q^2}\cdot(1-q^4)}{1-q}=217,6$$

$$\frac{\frac{64}{1-q^2}\cdot(1-q^2)(1+q^2)}{1-q}=217,6$$

$$\frac{64(1+q^2)}{1-q}=217,6$$

$$64q^2+217,6q-153,6=0$$

$$q=\frac{-217,6\pm\sqrt{217,6^2-4\cdot 64\cdot(-153,6)}}{2\cdot 64}$$

$$q_1=-4$$

$$q_2=0,6$$

$$a_1=\frac{64}{1-(-4)^2}=4\frac{4}{15}\quad\text{tai}\quad a_1=\frac{64}{1-0,6^2}=100$$

<u>Vastaus</u>: Luvut ovat 100; 60;36;21,6 tai $-4\frac{4}{15};17\frac{1}{15};-68\frac{4}{15};273\frac{1}{15}$

282.

$$1,3+1,3q+1,3q^2=9,1$$

$$1,3q^2+1,3q-7,8=0 \qquad |:1,3$$

$$q^2+q-6=0$$

$$q=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2}$$

$$q_1=\frac{-1-5}{2}=-3$$

$$q_2=\frac{-1+5}{2}=2$$

Kun q = -3, termit ovat 1,3; -3,9; 11,7; -35,1 ja 105,3
Kun q = 2, termit ovat 1,3; 2,6 ; 5,2; 10,4 ja 20,8
<u>Vastaus</u>: Termit ovat 1,3; -3,9; 11,7; -35,1 ja 105,3 tai 1,3; 2,6 ; 5,2; 10,4 ja 20,8

283.

$a_1=\frac{2}{3}a_2$ josta $a_2=\frac{3}{2}a_1$

$a_2=\frac{3}{4}a_3$ josta $a_3=\frac{4}{3}a_2=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}a_1=2a_1$

$a_3=\frac{4}{5}a_4$ josta $a_4=\frac{5}{4}a_3=\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}a_1=\frac{5}{2}a_1$

$$u = a_n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} a_1 = \frac{n+1}{2} a_1$$

Josta

$$\frac{n+1}{2} a_1 = u$$

$$a_1 = \frac{2u}{n+1}$$

$$S_n = a_1 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{4}{2}a_1 + \frac{5}{2}a_1 + \ldots + u \quad \Big| \text{aritmeettinen summa}, d = \frac{1}{2}a_1$$

$$= n \cdot \frac{a_1 + u}{2} \quad \Big| a_1 = \frac{2u}{n+1}$$

$$= n \cdot \frac{\frac{2u}{n+1} + u}{2}$$

$$= n \cdot \frac{\frac{2u + u(n+1)}{n+1}}{2}$$

$$= \frac{n \cdot u(2+n+1)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{nu(n+3)}{2(n+1)}$$

<u>Vastaus</u>: $S_n = \dfrac{nu(n+3)}{2(n+1)}$

284.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2 = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + (x-a_3)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$$

$$f'(x) = 2(x-a_1) + 2(x-a_2) + 2(x-a_3) + \ldots + 2(x-a_n)$$

Derivaatan nollakohta

$$2(x-a_1) + 2(x-a_2) + 2(x-a_3) + \ldots + 2(x-a_n) = 0 \quad \Big| :2$$

$$nx = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \Big| :n$$

$$x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Funktion *f* kuvaaja

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x^2 - 2xa_k + a_k{}^2) = nx^2 - 2x\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2$$

Havaitaan, että funktio on toisen asteen polynomifunktio ja sen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Funktion ainoa ääriarvokohta on minimikohta, joten se saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Pienin arvo

$$f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k) = nx^2 - 2x\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2$$

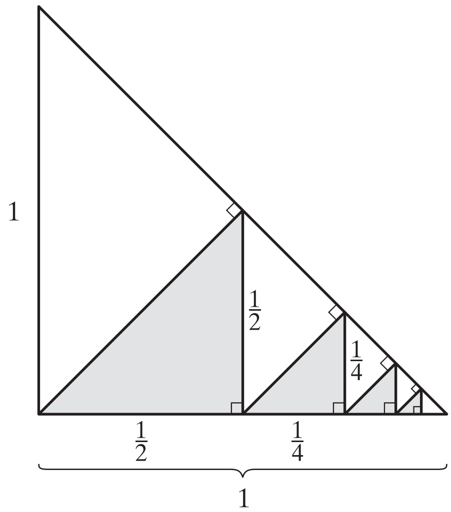
$$= n(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 - 2\cdot(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2$$

$$= \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 - \frac{2}{n}(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 - \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$$

<u>Vastaus</u>: Pienin arvo on $\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 - \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$

285.



Kolmen suurimman kolmion pinta-alat

$$A_1 = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}, \quad A_2 = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{32}, \quad A_3 = \frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{128}$$

Alat muodostavat geometrisen jonon, jossa suhdeluku

$$q = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{128}}{\frac{1}{32}} = \frac{1}{4}$$

Alojen summa $S_6 = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{8}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1365}{8192}$

<u>Vastaus</u>: Alojen summa on $\frac{1365}{8192}$.

10. Summien ja lukujonojen sovelluksia

286. Alle korkokauden talletus, joten yksinkertainen korko.

$$r = kit \quad \Big| \; k = 800\text{ €}, i = 0{,}0225,\ t = \frac{5}{12}$$

$$r = 800\text{ €} \cdot 0{,}0225 \cdot \frac{5}{12} = 7{,}50\text{ €}$$

Vastaus: 7,50 €

287. Alle korkokauden talletus, joten yksinkertainen korko.

$$r = kit \quad \Big| \; k = 4\,800\text{ €}, i = 0{,}0115,\ t = \frac{7}{12}$$

$$r = 4\,800\text{ €} \cdot 0{,}0115 \cdot \frac{7}{12} = 32{,}20\text{ €}$$

Lopullinen pääoma 4 800 € + 32,20 € = 4 832,20 €

Vastaus: 4 832,20 €

288. Ensimmäinen talletus on tilillä 12 kuukautta, toinen 11, kolmas 10 ja niin edelleen. Alle korkokauden talletus, joten yksinkertainen korko.

$$r = kit \quad \Big| \; k = x\text{ €}, i = 0{,}015,\ t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, \frac{12}{12}$$

$$r = x \cdot 0{,}015 \cdot \frac{12}{12} + x \cdot 0{,}015 \cdot \frac{11}{12} + \ldots + x \cdot 0{,}015 \cdot \frac{1}{12} = x \cdot 0{,}015 \cdot \frac{1}{12}(\underbrace{12 + 11 + \ldots + 1}_{\text{aritmeettinen summa}}) \quad \Big| \; S = n \cdot \frac{a_n + a_1}{2}$$

$$= x \cdot 0{,}015 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{12+1}{2} \cdot 12 = 0{,}0975\,x$$

Lopullinen pääoma on 1000 €

$$12\,x + 0{,}0975\,x = 1\,000$$

$$12{,}0975\,x = 1\,000$$

$$x \approx 82{,}66$$

Vastaus: 82,66 €

289. Ensimmäinen talletus on tilillä 12 kuukautta, toinen 11, kolmas 10 ja niin edelleen. Alle korkokauden talletus, joten yksinkertainen korko.

$$r = kit \quad \Big| \; k = x\text{ €}, i = 0{,}025,\ t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, \frac{12}{12}$$

$$r = x \cdot 0{,}025 \cdot \frac{12}{12} + x \cdot 0{,}025 \cdot \frac{11}{12} + \ldots + x \cdot 0{,}025 \cdot \frac{1}{12} = x \cdot 0{,}025 \cdot \frac{1}{12}(\underbrace{12 + 11 + \ldots + 1}_{\text{aritmeettinen summa}}) \quad \Big| \; S = n \cdot \frac{a_n + a_1}{2}$$

$$= x \cdot 0{,}025 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{12+1}{2} \cdot 12 = 0{,}16255\,x$$

Koska tilillä oli jo 4 000 €, saadaan säästettävä summa vähentämällä 4 500 eurosta 4 000 euroa sekä siitä kertynyt vuoden korko.

Lopullinen pääoma on $4\ 500\ € - 4\ 000\ € - 0,025 \cdot 4\ 000\ € = 400\ €$

$$
\begin{aligned}
12x + 0,1625x &= 400 \\
12,1625x &= 400 \\
x &\approx 32,89
\end{aligned}
$$

<u>Vastaus</u>: 32,89 €

290. Koska talletus on tilillä useita korkokausia, kyseessä on korkoa korolle.

$K = k\,q^t \quad \big|\ k = 10\ 000\ €,\ q = 100\ \% + 1,25\ \% = 1,0125,\ t = 5\ \text{a}$

$K = 10\ 000\ € \cdot 1,0125^5 \approx 10\ 640,82\ €$

<u>Vastaus</u>: 10 640,82 €

291. Koska talletus on tilillä useita korkokausia, kyseessä on korkoa korolle.

$K = k\,q^t \quad \big|\ k = 15\ 000\ €,\ q = 100\ \% + 3,50\ \% = 1,035,\ t = 4\ \text{a}$

$K = 15\ 000\ € \cdot 1,035^4 \approx 17\ 212,85\ €$

<u>Vastaus</u>: 17 212,85 €

292. Koska talletus on tilillä useita korkokausia, kyseessä on korkoa korolle.

$$
\begin{aligned}
K &= k\,q^t && \big|\ K = 5\ 500\ €,\ k = 5\ 000\ €,\ t = 5\ \text{a} \\
5\ 500 &= 5\ 000 \cdot q^5 \\
q^5 &= 1,1 && \big|\ \sqrt[5]{\ } \\
q &= 1,01924...
\end{aligned}
$$

Korkoprosentti 101,1924... % − 100 % ≈ 1,92 %

<u>Vastaus</u>: 1,92 %

293. Koska talletus on tilillä useita korkokausia, kyseessä on korkoa korolle.

$$
\begin{aligned}
K &= k\,q^t && \big|\ K = 2\ 500\ € + 100\ € = 2\ 600\ €,\ k = 2\ 500\ €,\ t = 3\ \text{a} \\
2\ 600 &= 2\ 500 \cdot q^3 \\
q^3 &= 1,04 && \big|\ \sqrt[3]{\ } \\
q &= 1,01315...
\end{aligned}
$$

Korkoprosentti 101,1315... % − 100 % ≈ 1,32 %

<u>Vastaus</u>: 1,32 %

294. Koska korko on 2,8 %, niin talletus on tilillä useita korkokausia, joten kyseessä on korkoa korolle.

$$K = k\,q^t \qquad \mid K = 1\,000\text{ €} + 100\text{ €} = 1\,100\text{ €},\ k = 1\,000\text{ €},\ q = 100\text{ \%} + 2{,}80\text{ \%} = 1{,}028$$

$$1\,100 = 1\,000 \cdot 1{,}028^t$$

$$1{,}028^t = 1{,}1 \qquad \mid \lg()$$

$$\lg 1{,}028^t = \lg 1{,}1$$

$$t \cdot \lg 1{,}028 = \lg 1{,}1$$

$$t = \frac{\lg 1{,}1}{\lg 1{,}028}$$

$$t \approx 3{,}5$$

Vastaus: 3,5 vuotta

295. Koska talletus on tilillä useita korkokausia, kyseessä on korkoa korolle.

$$K = k\,q^t \qquad \mid K = 2k,\ q = 100\text{ \%} + 3{,}5\text{ \%} = 1{,}035$$

$$2k = k \cdot 1{,}035^t$$

$$1{,}035^t = 2 \qquad \mid \lg()$$

$$\lg 1{,}035^t = \lg 2$$

$$t \lg 1{,}035 = \lg 2$$

$$t = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}035}$$

$$t \approx 20{,}2$$

Aika 20,1 vuotta ei riitä.

Vastaus: 20,2 vuotta

296. Koska talletus on tilillä ainakin yhden korkokauden, kyseessä on korkoa korolle.

1. talletus tilillä 5 vuotta, 2. talletus 4 vuotta, ... , viimeinen talletus nolla vuotta

$$K = \sum_{i=0}^{5} k\,q^{t_i} \qquad \mid k = 2\,500\text{ €},\ q = 100\text{ \%} + 1{,}75\text{ \%} = 1{,}0175$$

$$K = \underbrace{2\,500\text{ €} + 2\,500\text{ €} \cdot 1{,}0175 + \ldots + 2\,500\text{ €} \cdot 1{,}0175^5}_{\text{geometrinen summa}} \qquad \mid S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q},\ n = 6$$

$$= 2\,500\text{ €} \cdot \frac{1-1{,}0175^6}{1-1{,}0175}$$

$$\approx 15\,671{,}76\text{ €}$$

Vastaus: 15 671,76 €

297. Koska talletus on tilillä ainakin yhden korkokauden, kyseessä on korkoa korolle.

1. talletus tilillä 8 vuotta, 2. talletus 7 vuotta, ... , viimeinen talletus 3 vuotta

$$K = \sum_{i=3}^{8} k_i\, q^{t_i} \qquad \mid k_3 = k_4 = ... = k_8 = k,\; q = 100\ \% + 2,900\,\% = 1,029$$

$$K = \underbrace{\overbrace{k \cdot 1,029^3}^{a_1} + k \cdot 1,0175^4 + ... + k \cdot 1,029^8}_{\text{geometrinen summa}} \qquad \mid S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, n = 6$$

$$= k \cdot 1,029^3 \cdot \frac{1-1,029^6}{1-1,029}$$

Talletuksen pitää olla niin suuri, että kahdeksan vuoden kuluttua korko on ainakin 500 €, jotta pääoma ei pienene, eli

$$0,029 \cdot K = 500$$

$$0,029 \cdot k \cdot 1,029^3 \cdot \frac{1-1,029^6}{1-1,029} = 500$$

$$k = \frac{500 \cdot (1-1,029)}{(1-1,029^6) \cdot 0,029 \cdot 1,029^3}$$

$$k \approx 2\ 452,554....$$

Vastaus: Summan pitää olla ainakin 2 452,56 €.

298. Koska talletus on tilillä ainakin yhden korkokauden, kyseessä on korkoa korolle.

1. talletus tilillä 19 vuotta, 2. talletus 18 vuotta, ... , viimeinen talletus 1 vuotta

$$K = \sum_{i=1}^{19} k\, q^{t_i} \qquad \mid q = 100\ \% + 2,500\,\% = 1,025$$

$$K = \underbrace{\overbrace{k \cdot 1,025^1}^{a_1} + k \cdot 1,0175^2 + ... + k \cdot 1,029^{19}}_{\text{geometrinen summa}} \qquad \mid S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, n = 18$$

$$= k \cdot 1,025^1 \cdot \frac{1-1,029^{18}}{1-1,029}$$

Talletuksen pitää olla niin suuri, että yhdeksäntoista vuoden kuluttua korko on ainakin 1 200 €, jotta pääoma ei pienene

$$0,025 \cdot K = 1\ 200$$

$$0,025 \cdot k \cdot 1,025 \cdot \frac{1-1,025^{18}}{1-1,025} = 1\ 200$$

$$k = \frac{1\ 200 \cdot (1-1,025)}{(1-1,025^{18}) \cdot 0,025 \cdot 1,025}$$

$$k \approx 2\ 091,867....$$

Vastaus: Summan pitää olla ainakin 2 091,87 €.

299. Jokaisena kuutena vuotena talletus tapahtuu kuukausittain, joten vuoden aikana kyseessä on yksinkertainen korko.
Vuoden aikana kertynyt pääoma on aina sama. Tämän jälkeen vuotuinen talletus on tilillä yli korkokauden, joten kyseessä on korkoa korolle.
Lasketaan vuotuinen pääoma.

$$r = kit \qquad \Big| \; k = 150\text{ €}, i = 0{,}0200,\; t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, \frac{12}{12}$$

$$r = 150\text{ €} \cdot 0{,}02 \cdot \frac{12}{12} + 150\text{ €} \cdot 0{,}02 \cdot \frac{11}{12} + \ldots + 150\text{ €} \cdot 0{,}02 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= 150\text{ €} \cdot 0{,}022 \cdot \frac{1}{12}(\underbrace{12 + 11 + \ldots + 1}_{\text{aritmeettinen summa}}) \qquad \Big| \; S = n \cdot \frac{a_n + a_1}{2}$$

$$= 150\text{ €} \cdot 0{,}02 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{12+1}{2} \cdot 12 = 19{,}5\text{ €}$$

Vuotuinen pääoma $12 \cdot 150\text{ €} + 19{,}5\text{ €} = 1\,819{,}50\text{ €}$

1. talletus tilillä 9 vuotta, 2. talletus 8 vuotta, ... , viimeinen talletus 4 vuotta

$$K = \sum_{i=4}^{9} k\, q^{t_i} \qquad \Big| \; k = 1\,819{,}50\text{ €},\; q = 100\ \% + 2{,}00\ \% = 1{,}02$$

$$K = \underbrace{\overbrace{1\,819{,}50\text{ €} \cdot 1{,}02^4}^{a_1} + 1\,819{,}50\text{ €} \cdot 1{,}02^5 + \ldots + 1\,819{,}50\text{ €} \cdot 1{,}0175^9}_{\text{geometrinen summa}} \qquad \Big| \; S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, n = 6$$

$$= 1\,819{,}50\text{ €} \cdot 1{,}02^4 \cdot \frac{1 - 1{,}02^6}{1 - 1{,}02}$$

$$\approx 12\,423{,}75\text{ €}$$

<u>Vastaus:</u> 12 423,75 €

300. Lasketaan ensimmäisen vuoden pääoma. Ensimmäinen talletus on tilillä 12 kuukautta, toinen 11, ..., viimeinen 7 kuukautta. Alle korkokauden talletus, joten yksinkertainen korko.

$$r = kit \qquad \Big| \; k = 30\text{ €}, i = 0{,}02,\; t = \frac{12}{12}, \frac{11}{12}, \ldots, \frac{7}{12}$$

$$r = 30\text{ €} \cdot 0{,}02 \cdot \frac{12}{12} + 30\text{ €} \cdot 0{,}02 \cdot \frac{11}{12} + \ldots + 30\text{ €} \cdot 0{,}02 \cdot \frac{7}{12}$$

$$= 30\text{ €} \cdot 0{,}02 \cdot \frac{1}{12}(\underbrace{12 + 11 + \ldots + 7}_{\text{aritmeettinen summa}}) \qquad \Big| \; S = n \cdot \frac{a_n + a_1}{2}$$

$$= 30\text{ €} \cdot 0{,}02 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{12+7}{2} \cdot 6 = 2{,}85\text{ €}$$

Vuoden lopussa rahaa $6 \cdot 30\text{ €} + 2{,}85\text{ €} = 182{,}85\text{ €}$

Summa on tilillä viisi kuukautta

Pääoma lopussa $182{,}85\text{ €} + 182{,}85\text{ €} \cdot 0{,}02 \cdot \frac{5}{12} \approx 184{,}37\text{ €}$

<u>Vastaus:</u> 184,37 €

301. Lainaa lyhennetään joka kerta sama summa neljästi vuodessa kahden vuoden ajan.
Lyhennyksiä 8 kpl, joten lyhennyksen suuruus $15\ 000\ € : 8 = 1\ 875\ €$

Korkokausi on vuosi.
Korko on yksinkertainen korko $r = kit$, missä k on jäljellä oleva pääoma, i = 0,045 ja t = $\frac{1}{4}$

1. maksu

lyhennys + korko = $1\ 875\ € + 15\ 000\ € \cdot 0,045 \cdot \frac{1}{4} = 2\ 043,75\ €$

Viimeinen maksu
Jäljellä oleva pääoma 1 875 €

lyhennys + korko = $1\ 875\ € + 1\ 875\ € \cdot 0,045 \cdot \frac{1}{4} \approx 1\ 896,10\ €$

Vastaus: 1. maksu 2 043,75 € ja viimeinen 1 896,10 €

302. Lainaa lyhennetään joka kerta sama summa 12 kertaa vuodessa neljän vuoden ajan.
Lyhennyksiä 48 kpl, joten lyhennyksen suuruus $10\ 000\ € : 48 = 208,33...\ €$

Korkokausi on vuosi.
Korko on yksinkertainen korko $r = kit$, missä k on jäljellä oleva pääoma, i = 0,056 ja t = $\frac{1}{12}$

1. maksu

lyhennys + korko = $208,33...€ + 10\ 000\ € \cdot 0,056 \cdot \frac{1}{12} = 255\ €$

2. maksu
Jäljellä oleva pääoma 10 000 € – 203,33... € = 9 792,33... €

lyhennys + korko = $208,33...€ + 9\ 792,33...\ € \cdot 0,056 \cdot \frac{1}{12} \approx 254,03\ €$

Viimeinen maksu
Jäljellä oleva pääoma 208,33... €

lyhennys + korko = $208,33...€ + 208,33...\ € \cdot 0,056 \cdot \frac{1}{12} \approx 209,31\ €$

Vastaus: 1. maksu 255 €, 2. 254,03 € ja viimeinen 209,31 €

303. Annuiteetti

$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$ $\quad \Big|\ K = 80\ 000\ €,\ n = 8,\ q = 100\ \% + 5\ \% = 1,05$

$A = 80\ 000\ € \cdot 1,05^8 \cdot \frac{1-1,05}{1-1,05^8} \approx 12\ 377,75\ €$

Vastaus: 12 377,75 €

304. a) Annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \Big| \; K = 200\ 000\ €,\ n = 15 \cdot 12 = 180,\ q = 100\ \% + \frac{4,5\ \%}{12} = 1,00375$$

$$A = 200\ 000\ € \cdot 1,00375^{180} \cdot \frac{1-1,00375}{1-1,00375^{180}} \approx 1\ 529,99\ €$$

b) Lainaa jäljellä 10 vuoden jälkeen

$$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q} \quad \Big| \; K = 200\ 000\ €,\ k = 10 \cdot 12 = 120,\ q = 1,00375,\ A = 1\ 529,99\ €$$

$$V_{10} = 200\ 000\ € \cdot 1,00375^{120} - 1\ 529,99\ € \cdot \frac{1-1,00375^{120}}{1-1,00375} \approx 82\ 067,01\ €$$

Vastaus: a) Annuiteetti 1 529,99 € b) Kymmenen vuoden jälkeen lainaa $82\ 067,01\ €$

305. Korko kuukaudessa $\frac{6\ \%}{12} = 0,5\ \%$ Tasalyhennyslainassa lyhennys on aina sama ja korko lasketaan jäljellä olevasta pääomasta. Lasketaan, mistä pääomasta 0,5 % on 400 €.

$$0,005 \cdot x = 400$$

$$x = 80\ 000$$

Ennen lyhennystä on jäljellä 80 000 €, joten lyhennyskertoja on tämän jälkeen jäljellä $\frac{80\ 000 - 500}{500} = 159$.

Vastaus: Lyhennyksiä vielä 159 kpl.

306.

Korosta ja veron jälkeen 100 % − 29 % = 71 % = 71

Korkokerroin $q = 1 + 0,71i$ (missä i on korkokanta eli korkoprosentti desimaalilukuna)

Ensimmäinen sijoitus korkoineen 3. vuoden alussa $5\ 000 \cdot q \cdot q$

Toinen sijoitus korkoineen 3. vuoden alussa $4\ 500 \cdot q$

Saadaan yhtälö

$5\ 000k^2 + 4\ 500k = 9\ 894,85$

$5\ 000k^2 + 4\ 500k - 9\ 894,85 = 0$

$$q = \frac{-4\ 500 \pm \sqrt{4\ 500^2 - 4 \cdot 5000 \cdot (-9894,5)}}{2 \cdot 5\ 000}$$

$q_1 = -1,926... < 0$ ei käy

$q_2 = 1,02698002...$

Korkoprosentti i

$q = 1 + 0,71i$

$0,71i = q - 1$

$$i=\frac{q-1}{0{,}71}$$

$$i=\frac{1{,}02698002...-1}{0{,}71}$$

$$i\approx 0{,}038=3{,}8\,\%$$

<u>Vastaus</u>: Korkokanta on 3,8 %.

307. Jokaisena vuotena talletus tapahtuu kuukausittain, joten vuoden aikana kyseessä on yksinkertainen korko.
Vuoden aikana kertynyt pääoma on aina sama. Tämän jälkeen vuotuinen talletus on tilillä yli korkokauden, joten kyseessä on korkoa korolle.
Lasketaan vuotuinen pääoma.

$$r=kit \qquad \Big|\ k=200\text{ €}, i=0{,}015,\ t=\frac{1}{12},\frac{2}{12},...,\frac{12}{12}$$

$$r=200\text{ €}\cdot 0{,}015\cdot\frac{12}{12}+200\text{ €}\cdot 0{,}015\cdot\frac{11}{12}+...+200\text{ €}\cdot 0{,}015\cdot\frac{1}{12}$$

$$=200\text{ €}\cdot 0{,}015\cdot\frac{1}{12}(\underbrace{12+11+...+1}_{\text{aritmeettinen summa}}) \qquad \Big|\ S=n\cdot\frac{a_n+a_1}{2}$$

$$=200\text{ €}\cdot 0{,}015\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{12+1}{2}\cdot 12=19{,}5\text{ €}$$

Vuotuinen pääoma $12\cdot 200\text{ €}+19{,}5\text{ €}=2\ 419{,}50\text{ €}$

a) 1. talletus tilillä 17 vuotta, 2. talletus 16 vuotta, ... , viimeinen talletus 0 vuotta

$$K=\sum_{i=0}^{17}k\,q^{t_i} \qquad \Big|\ k=2\ 419{,}50\text{ €},\ q=100\ \%+1{,}50\ \%=1{,}015$$

$$K=\underbrace{\overbrace{2\ 419{,}50\text{ €}\cdot 1{,}015^{17}}^{a_1}+1\ 419{,}50\text{ €}\cdot 1{,}015^{16}+...+2\ 419{,}50\text{ €}}_{\text{geometrinen summa}} \qquad \Big|\ S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q},n=18$$

$$=2\ 419{,}50\text{ €}\cdot\frac{1-1{,}015^{18}}{1-1{,}015}$$

$$\approx 49\ 574{,}04\text{ €}$$

b) Tilillä ainakin 135 000 €
1. talletus tilillä n vuotta, 2. talletus $n - 1$ vuotta, ... , viimeinen talletus 0 vuotta

$$S_n \geq 135\ 000 \qquad \Big|\ S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$2\ 419,50 \cdot \frac{1-1,015^n}{1-1,015} \geq 135\ 000 \qquad \Big|\ : \frac{2\ 419,50}{1-1,015} < 0$$

$$1-1,015^n \leq -0,8369...$$

$$1,015^n \geq 1,8369... \qquad \Big|\ \lg(),\ \text{lg aidosti kasvava. säilyttää järjestyksen}$$

$$\lg 1,015^n \geq \lg 1,8369...$$

$$n \cdot \lg 1,015 \geq \lg 1,8369... \qquad \Big|\ : \lg 1,1015 > 0$$

$$n \geq \frac{\lg 1,8369...}{\lg 1,015}$$

$$n \geq 40,843...$$

Vähintään 41 vuotta

Vastaus: a) 49 574,04 € b) Vähintään 41 vuotta

308. Lainapääoma K = 40 000 €
Korkokerroin q = 100 % + 4 % = 104 % = 1,04
Korkokausien määrä n = 10
Tasaerälainan koron ja lyhennyksen summa eli annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$$

$$A = 40\ 000\ € \cdot 1,04^{10} \frac{1-1,04}{1-1,04^{10}} \approx 4\ 931,64\ €$$

Jäljellä oleva lainan määrä viiden vuoden kuluttua, k = 5

$$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q}$$

$$V_5 = 40\ 000\ € \cdot 1,04^5 - 4\ 931,64\ € \cdot \frac{1-1,04^5}{1-1,04} \approx 21\ 954,76\ €$$

Annuiteetin suuruus ei muutu ja lainaa on jäljellä 21 954,76 €
Uusi korkokerroin q = 100 % + 6 % = 1,06
Lainaa on jäljellä 10 vuoden kuluttua

$$V_{10} = V_5 \cdot q^5 - A\frac{q^5-1}{q-1} = 21\ 954,76\ € \cdot 1,06^5 - 4\ 931,64\ € \cdot \frac{1,06^5-1}{1,06-1} = 1580,308...\ € \approx 1\ 580,31\ €$$

Tämä summa kasvaa seuraavana vuonna 1,06-kertaiseksi
Viimeinen erä $1,06 \cdot 1580,31\ € \approx 1675,13\ €$

Erä on vähemmän kuin annuiteetti, joten laina maksetaan pois 11. lainavuonna eli vuoden 2013 lopussa.

Vastaus: Erän suuruus 4 931,64 €, viimeinen erä 1 675,13 € ja maksetaan vuoden 2013 lopussa.

309. Kyseessä on yli korkokauden talletus eli korkoa korolle.
Korkokerroin q
Pääoma 50 000 mk
Aika 4 a

$$\begin{aligned} K &= kq^t & \\ 64\ 082 &= 50\ 000 \cdot q^4 & \quad \big| :50\ 000 \\ q^4 &= 1,28164 & \quad \big| \sqrt[4]{\ } \\ q &= \pm\sqrt[4]{1,28164} & \quad \big| q > 0 \\ q &= 1,06399... & \end{aligned}$$

Korkokanta 106,399... % – 100 % $\approx$ 6,40 %

Vastaus: 6,40 %

310. Lainapääoma K = 100 000 mk
Korkokerroin q = 100 % + 10 % = 1,10
Korkokausien määrä n = 10
Tasaerälainan koron ja lyhennyksen summa eli annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$$

$$A = 100\ 000 \text{ mk} \cdot 1,10^{10} \frac{1-1,10}{1-1,10^{10}} \approx 16\ 274,5 \text{ mk}$$

Jäljellä oleva lainan määrä yhdeksän vuoden kuluttua, k = 9

$$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q}$$

$$V_9 = 100\ 000 \text{ mk} \cdot 1,10^9 - 16\ 274,50 \text{ mk} \cdot \frac{1-1,10^9}{1-1,10} \approx 14\ 795,57 \text{ mk}$$

Korko $0,10 \cdot 14\ 795,57 \text{ mk} = 1\ 479,56 \text{ mk}$

Vastaus: Vakioerä 16 274,54 mk ja viimeinen korko on 1 479,56 mk

311. Kyse on tasalyhennyslainasta. Maksuerä muodostuu lyhennyksestä ja korosta, joka maksetaan aina jäljellä olevasta pääomasta.

1. vuosi $\frac{K}{n}+0{,}15K$

2. vuosi $\frac{K}{n}+0{,}15\cdot(K-\frac{K}{n})=\frac{K}{n}+0{,}15K-0{,}15\frac{K}{n}$

3. vuosi $\frac{K}{n}+0{,}15\cdot(K-2\frac{K}{n})=\frac{K}{n}+0{,}15K-2\cdot 0{,}15\frac{K}{n}$

4. vuosi $\frac{K}{n}+0{,}15\cdot(K-3\frac{K}{n})=\frac{K}{n}+0{,}15K-3\cdot 0{,}15\frac{K}{n}$

.

.

n. vuosi $\frac{K}{n}+0{,}15\cdot[K-(n-1)\frac{K}{n}]=\frac{K}{n}+0{,}15K-0{,}15\cdot(n-1)\frac{K}{n}$

i) Korkoa maksetaan

$$0{,}15K+(0{,}15K-0{,}15\frac{K}{n})+(0{,}15K-2\cdot 0{,}15\frac{K}{n})+(0{,}15K-3\cdot 0{,}15\frac{K}{n})+...+[0{,}15K-(n-1)\cdot 0{,}15\frac{K}{n}]$$

$$=n\cdot 0{,}15K-0{,}15\frac{K}{n}[\underbrace{1+2+...+(n-1)}_{\text{aritmeettinen summa}}]$$

$$=n\cdot 0{,}15K-0{,}15\frac{K}{n}\cdot(n-1)\frac{1+n-1}{2}$$

$$=0{,}075K(n+1)$$

ii) Korko suurempi kuin pääoma

$$\begin{aligned} 0{,}075K(n+1)&>K & &\mid :K>0 \\ 0{,}075n&>0{,}925 & &\mid 0{,}075 \\ n&>12{,}33... \\ n&\geq 13 \end{aligned}$$

iii) Korkomenot alussa 0,15 a

Korkomenot nousun jälkeen 0,17a

Korkomenojen muutos $\frac{0{,}17a-0{,}15a}{0{,}15a}=\frac{2}{15}\approx 13\ \%$

Vastaus: i) Korkoa kaiken kaikkiaan 0,075K(n + 1) ii) 13 iii) 13 %

312. Pääoma alussa k = 45 000

Korkokerroin q = 100 % + 8 % = 1,08

Aika t = 20 vuotta

Lopullinen pääoma $K=k\cdot q^t=45\,000\cdot 1{,}08^{20}\approx 209\,740$

Vastaus: Value of the land is approximately $ 209 740.

313. Lainan maksu tapahtuu annuiteettiperiaatteella, annuiteetti 10 000 kr.
Lainaa jäljellä kahden vuoden kuluttua

$$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q} \qquad \mid k = 2, K = 40\ 000 \text{ kr}, A = 10\ 000 \text{ kr}, q = 100\ \% + 7,5\ \% = 1,075$$

$$V_2 = 40\ 000 \text{ kr} \cdot 1,075^2 - 10\ 000 \text{ kr} \cdot \frac{1-1,075^2}{1-1,075} = 25\ 475 \text{ kr}$$

Vastaus: Efter två år 25 475 kr

Testaa hyvät taitosi 2

1. Ilmaise $\sum$ - merkinnällä aritmeettinen summa 36 +29 +... + 8 + 1 ja laske summan arvo.

Aritmeettinen summa 36 + 29 + 22 + 15 + 8 + 1

$$a_n = 36 + (n-1)\cdot(-7) = 43 - 7n$$

$$S_6 = \sum_{n=1}^{6}(43-7n) = 6\cdot\frac{36+1}{2} = 111$$

Vastaus: $\sum_{n=1}^{6}(43-7n) = 111$

2. Laske summa $\sum_{n=1}^{10}(\frac{1}{2})^{n-1}$ kahden desimaalin tarkkuudella.

Kyseessä on geometrinen summa, jossa $q = \dfrac{(\frac{1}{2})^{n+1-1}}{(\frac{1}{2})^{n-1}} = \dfrac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{10}(\frac{1}{2})^{n-1} = 1\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 1\frac{511}{512} = 1,9980... \approx 2,00$$

Vastaus: 2,00

3. Huhu kulkee koulussa siten, että Tarmo kertoo huhun kolmelle ja nämä kolme kertovat tunnin sisällä taas kolmelle. Milloin koulun kaikki 363 oppilasta ovat kuulleet huhun, kun Tarmo panee huhun liikkeelle klo 9?

Kyseessä on geometrinen summa

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q} \qquad \mid S_n = 363, a_1 = 3, q = 3$$

$$363 = 3 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} \quad \Big| : \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$1-3^n = -242$$

$$3^n = 243$$

$$3^n = 3^5$$

$$n = 5$$

Huhun ovat kuulleet kaikki oppilaat 5 – 1 = 4 tunnin kuluttua eli klo 9 + 4 = 13.

Vastaus: Kaikki ovat kuulleet huhun klo 13.

4. Anselmi rakentaa kaupassa seinän viereen säilykepurkeista pinon, jossa ylimpänä on yksi tölkki ja alemmissa kerroksissa on aina yksi tölkki enemmän kuin ylemmässä kerroksessa. Tölkkejä on yhteensä 105. Kuinka monta kerrosta pinossa on?

Tölkkien määrä muodostaa aritmeettisen summan.

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2} \quad \Big| \; S_n = 105, a_1 = 1, a_n = n$$

$$105 = n\frac{1+n}{2} \quad \Big| \cdot 2$$

$$n(1+n) = 210$$

$$n^2 + n - 210 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-210)}}{2\cdot 1}$$

$$n_1 = \frac{-1+\sqrt{841}}{2} = 14$$

$$n_2 = \frac{-1-\sqrt{841}}{2} = -15 \quad \text{Ei käy}$$

Vastaus: Pinossa on 14 kerrosta.

5. Lukujonon n:s jäsen on muotoa $a_n = n^2 - 6n$. Kuinka mones lukujonon jäsen on 135?

Lukujonon $a_n = n^2 - 6n$ jäsen

$$a_n = n^2 - 6n \quad \big| a_n = 135$$
$$135 = n^2 - 6n$$
$$n^2 - 6n - 135 = 0$$
$$n = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-135)}}{2 \cdot 1}$$
$$n_1 = \frac{6 - \sqrt{576}}{2} = -9 \quad \big|\text{Ei käy}$$
$$n_2 = \frac{6 + \sqrt{576}}{2} = 15$$

Vastaus: Kyseessä on lukujonon 15. jäsen.

6. Monesko jäsen luku $12\sqrt{2}$ on geometrisessa lukujonossa, jossa $a_3 = 6$ ja $q = \sqrt{2}$?

Geometrisen lukujonon yleinen jäsen $a_n = a_1 q^{n-1}$

Koska $a_3 = a_1 q^2$, niin $a_1 = \dfrac{a_3}{q^2}$.

Tällöin geometrisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 q^{n-1} = \dfrac{a_3}{q^2} \cdot q^{n-1} = a_3 q^{n-1-2} = a_3 q^{n-3}$.

Jäsenen indeksi

$$a_n = a_3 q^{n-3} \quad \big| a_n = 12\sqrt{2},\ a_3 = 6,\ q = \sqrt{2}$$
$$12\sqrt{2} = 6 \cdot (\sqrt{2})^{n-3} \quad \big| : 6$$
$$2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^{n-3} \quad \big| 2 = (\sqrt{2})^2$$
$$(\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^{n-3}$$
$$3 = n - 3$$
$$n = 6$$

Vastaus: Kyseessä on lukujonon 6. jäsen.

7. Anni tallettaa jokaisen vuoden alussa 1 400 euroa tilille, jonka korkokanta on 2,4 %. Kuinka paljon tilillä on viiden vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta?

Korkokanta i = 2,4 % = 0,024
Korkokerroin q = 1 + 0,024 = 1,024

Ensimmäinen talletus tehdään heti alussa ja se on tilillä 4vuotta
Seuraava talletus vuoden päästä ja se on tilillä 3 vuotta.
Näin jatketaan viisi kertaa.
Viimeinen talletus on tilillä 1 vuoden.
Talletuksien määrät talletusajan lopussa $K = kq^t$

Talletus	Pääoma talletusajan lopussa
Talletus 1. vuoden alussa 2 000 €	$1400\cdot 1,024^5$
Talletus 2. vuoden alussa 2 000 €	$1400\cdot 1,024^4$
Talletus 3. vuoden alussa 2 000 €	$1400\cdot 1,024^3$
Talletus 4. vuoden alussa 2 000 €	$1400\cdot 1,024^2$
Talletus 5. vuoden alussa 2 000 €	$1400\cdot 1,024$

Pääoma yhteensä viiden vuoden jälkeen

$$K = 1400\cdot 1,024 + 1400\cdot 1,024^2 + \ldots + 1400\cdot 1,024^5$$

$$= 1400\cdot(1,024 + 1,024^2 + \ldots + 1,024^5) \qquad \left| \begin{array}{l} S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} \\ a_1 = 1,024,\ q = 1,024,\ n = 5 \end{array} \right.$$

$$= 1400\cdot 1,024\cdot \frac{1-1,024^5}{1-1,024}$$

$$\approx 7520,42$$

Vastaus: Tilillä on rahaa 7 520,42 €.

8. Geometrisen lukujonon viides jäsen on 24 ja $q = \dfrac{1}{3}$. Määritä a_{10}.

Geometrisen lukujonon yleinen jäsen $a_n = a_1 q^{n-1}$

Koska $a_5 = a_1 q^4$, niin $a_1 = \dfrac{a_5}{q^4}$.

Tällöin geometrisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 q^{n-1} = \dfrac{a_5}{q^4}\cdot q^{n-1} = a_5 q^{n-1-4} = a_5 q^{n-4}$.

Kymmenes jäsen

$$a_{10} = a_5 q^{n-5} = 24\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10-5} = 24\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{8}{81}$$

Vastaus: $a_{10} = \dfrac{8}{81}$

9. Mikä on aritmeettisen lukujonon yhdeksäs jäsen, kun ensimmäinen jäsen on 27 ja yhdestoista jäsen on 117?

Aritmeettisen lukujonon yleinen termi $a_n = a_1 + (n-1)d$
Erotusluku

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad \left| a_n = 117,\ a_1 = 27,\ n = 11 \right.$$
$$117 = 27 + (11-1)d$$
$$10d = 90 \quad |:10$$
$$d = 9$$

Yhdeksäs termi $a_9 = 27 + (9-1)\cdot 9 = 99$

Vastaus: Yhdeksäs jäsen on 99.

10. Aritmeettisesta lukujonosta tiedetään, että $S_n = n^2 - 3n$. Mikä on lukujonon 7. ja n:s jäsen?

$S_n = n^2 - 3n$
$a_7 = S_7 - S_6 = 7^2 - 3\cdot 7 - (6^2 - 3\cdot 6) = 10$

$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 3n - [(n-1)^2 - 3(n-1)] = 2n - 4$

Vastaus: 10 ja $2n - 4$

Kertausharjoituksia

1. Suunnattu kulma

314. Kulman alkukylki on aina positiivisella x-akselilla.
a) Kulma $\alpha = 180°$
Kulman kiertosuunta on vastapäivään.
Kulman loppukylki sijaitsee negatiivisella x-akselilla, joten loppukylki leikkaa yksikköympyrän pisteessä (–1,0).

b) Kulma $\alpha = 630° = 360° + 270°$
Kulman kiertosuunta on vastapäivään.
Kulman loppukylki sijaitsee negatiivisella y-akselilla, joten loppukylki leikkaa yksikköympyrän pisteessä (0,–1).

c) Kulma $\alpha = –450° = –360° – 90°$
Kulman kiertosuunta on myötäpäivään.
Kulman loppukylki sijaitsee negatiivisella y-akselilla, joten loppukylki leikkaa yksikköympyrän pisteessä (0,–1).

d) Kulma $\alpha = –11\,250° = –31\cdot 360° – 90°$
Kulman kiertosuunta on myötäpäivään.
Kulman loppukylki sijaitsee negatiivisella y-akselilla, joten loppukylki leikkaa yksikköympyrän pisteessä (0,–1).

Vastaus: Loppukylki leikkaa yksikköympyrän pisteessä a) (–1,0) b) (0,–1) c) (0,–1) d) (0,–1).

315. Asteen ja radiaanin välinen yhteys 180° = π
Muunnetaan asteet radiaaneiksi.

a) $180° = \pi \quad |:18$

$10° = \frac{\pi}{18}$

b) $180° = \pi \quad |:180$

$1° = \frac{\pi}{180} \quad |\cdot 50$

$50° = \frac{5\pi}{18}$

c) $180° = \pi \quad |:180$

$1° = \frac{\pi}{180} \quad |\cdot(-110)$

$-110° = -\frac{11\pi}{18}$

d) $180° = \pi \quad |:180$

$1° = \frac{\pi}{180} \quad |\cdot(-490)$

$-490° = -\frac{49\pi}{18}$

e) $180° = \pi \quad |:180$

$1° = \frac{\pi}{180} \quad |\cdot(-765)$

$-765° = -\frac{17\pi}{4}$

<u>Vastaus</u>: Kulma radiaaneina on a) $\frac{\pi}{18}$ b) $\frac{5\pi}{18}$ c) $-\frac{11\pi}{18}$ d) $-\frac{49\pi}{18}$ e) $-\frac{17\pi}{4}$.

316. Asteen ja radiaanin välinen yhteys π = 180°
Muunnetaan radiaanit asteiksi .

a) $\pi = 180° \quad |\cdot 6$

$6\pi = 1\,080°$

b) $\pi = 180° \quad |\cdot \frac{3}{4}$

$\frac{3\pi}{4} = 135°$

c) $\pi = 180° \quad |:16$

$\frac{\pi}{16} = 11{,}25°$

d) $\pi = 180° \quad |\cdot -\frac{4}{9}$

$-\frac{4\pi}{9} = –80°$

e) $\pi = 180° \quad |\cdot -\frac{9}{4}$

$-\frac{9\pi}{4} = –405°$

Vastaus: Kulma asteina on a) 1 080° b) 135° c) 11,25° d) –80° e) –405°.

317. a) Eräs kulma, jonka loppukylki on negatiivisella *x*-akselilla, on 180°.
Kulmat toistuvat 360° välein.
Kaikki kulmat asteina $180° + n\cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}$
Kaikki kulmat radiaaneina $\pi + n\cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

b) Eräs kulma, jonka loppukylki puolittaa positiivisten koordinaattiakseleiden välisen kulman , on 45°.
Kulmat toistuvat 360° välein.
Kaikki kulmat asteina $45° + n\cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}$
Kaikki kulmat radiaaneina $\frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
Vastaus: Kaikki kulmat saadaan lausekkeesta a) $180° + n\cdot 360°$ tai $\pi + n\cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
b) $45° + n\cdot 360°$ tai $\frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

318. Suoran yhtälö $x + 3y = 7$

$3y = –x + 7 \quad |:3$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

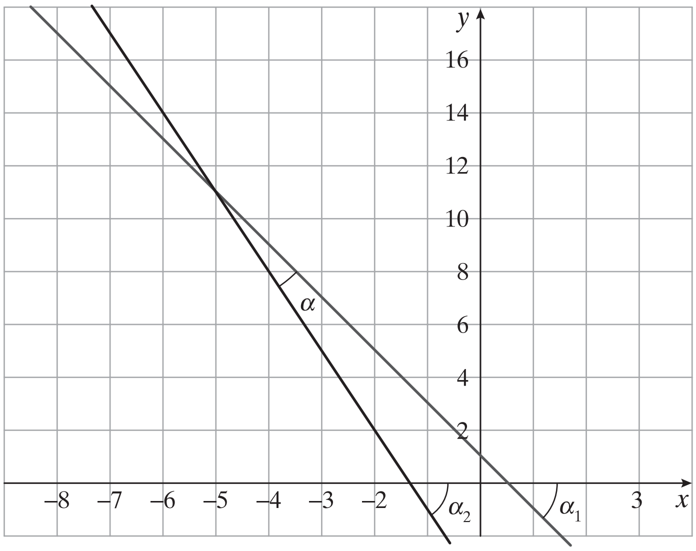
Suoran kulmakerroin $k = -\frac{1}{3}$
Suoran suuntakulma $\tan \alpha = k$

$\tan\alpha = -\frac{1}{3}$

$\alpha \approx -18{,}4°$

Vastaus: Suoran suuntakulma on -18,4°.

319.



Suoran 1 yhtälö $y = –2x + 1$
Suoran kulmakerroin $k_1 = –2$
Suoran 1 suuntakulma $\tan \alpha_1 = k$
$\tan \alpha_1 = –2$
$\alpha_1 = –63{,}43...°$
Suoran 2 yhtälö $y = –3x – 4$
Suoran kulmakerroin $k_1 = –3$
Suoran 1 suuntakulma $\tan \alpha_1 = k$
$\tan \alpha_2 = –3$
$\alpha_2 = –71{,}56...°$
Suorien välinen kulma $\alpha = \alpha_1 – \alpha_2 = 63{,}43...° – (–71{,}56...°) \approx 8{,}1°$
<u>Vastaus</u>: Suorien välinen kulma on 8,1°.

320. Auton nopeus 80 km/h

Kuljettu matka sekunnissa $80\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{3600}\text{h} = \frac{1}{45}\text{km} = \frac{200}{9}\text{m}$

Renkaan kehä $p = \pi d = \pi \cdot 20'' = \pi \cdot 20 \cdot 0{,}0254 \text{ m} = 0{,}508\pi \text{ m}$

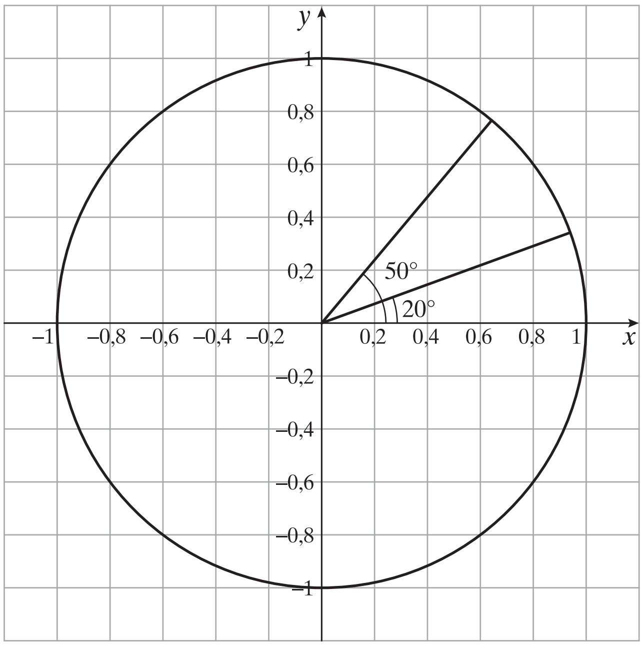
Kierroksia sekunnissa $\dfrac{\frac{200}{9}}{0{,}508\pi} = \dfrac{200}{4{,}572\pi}$

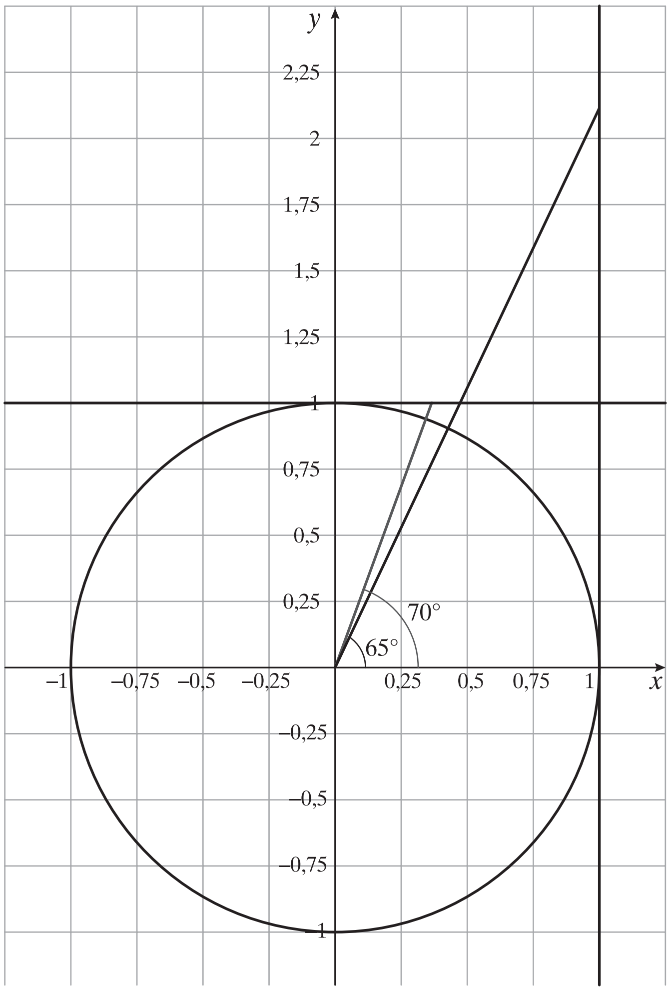
Renkaan pyörimisnopeus $\dfrac{200}{4{,}572\pi} \cdot 2\pi : 1 \text{ s} = \dfrac{400}{4{,}572}\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 87\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

<u>Vastaus</u>: Renkaan pyörimisnopeus on 87 rad/s.

2.Trigonometriset funktiot

321. Piirretään kulmat yksikköympyrään.





a) sin 20° = 0,34
b) cos 50° = 0,64
c) tan 65° = 2,1
d) cot 70° = 0,36

<u>Vastaus</u>: Trigonometristen funktioiden arvot ovat a) 0,34 b) 0,64 c) 2,1 d) 0,36.

322. Kulman sini sin $\alpha = \dfrac{3}{5}$

Lasketaan kulman kosini

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad | \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

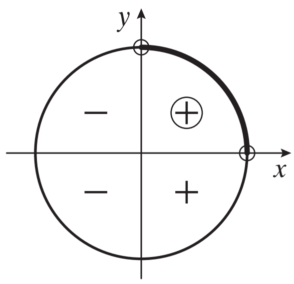
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \quad \bigg| \sqrt{}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{4}{5} \quad \bigg| \cos \alpha > 0,\ \text{kun } 0° < \alpha < 90°$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$



Kulman tangentti $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{4}$

Kulman kotangentti $\cot \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha} = 1 : \dfrac{3}{4} = \dfrac{4}{3}$

<u>Vastaus</u>: $\cos \alpha = \dfrac{4}{5}$, $\tan \alpha = \dfrac{3}{4}$ ja $\cot \alpha = \dfrac{4}{3}$

323. Kulman sini $\sin \alpha = -\dfrac{24}{25}$

Lasketaan kulman kosini

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \bigg| \sin \alpha = -\frac{24}{25}$$

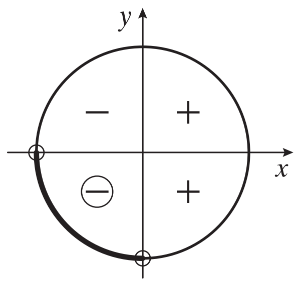
$$\left(-\frac{24}{25}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{576}{625}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{49}{625} \quad \bigg| \sqrt{}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{7}{25} \quad \bigg| \cos \alpha < 0,\ \text{kun } 180° < \alpha < 270°$$

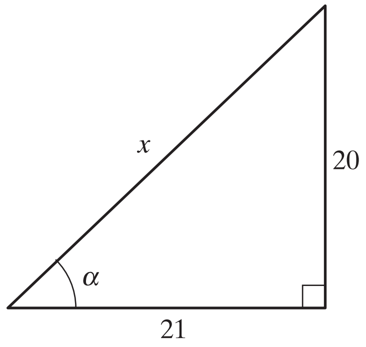
$$\cos \alpha = -\frac{7}{25}$$



Kaksinkertaisen kulman kosini $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(-\dfrac{7}{25}\right)^2 - 1 = -\dfrac{527}{625}$

<u>Vastaus</u>: Kysytyt arvot ovat $\cos \alpha = -\dfrac{7}{25}$ ja $\cos 2\alpha = -\dfrac{527}{625}$.

324.



Kolmion hypotenuusa

$x^2 = 21^2 + 20^2$

$x^2 = 841 \quad |\sqrt{\ }, x > 0$

$x = 29$

Kolmiosta ja koska kulma $0 < \alpha < 90°$ saadaan

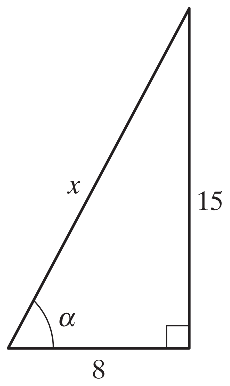
$\sin \alpha = \dfrac{20}{29}$

$\cos \alpha = \dfrac{21}{29}$

Kaksinkertaisen kulman sini $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \dfrac{20}{29} \cdot \dfrac{21}{29} = \dfrac{840}{841}$

<u>Vastaus</u>: Kysytyt arvot ovat $\cos \alpha = \dfrac{20}{29}$ ja $\sin 2\alpha = \dfrac{840}{841}$.

325.



Kolmion hypotenuusa

$x^2 = 15^2 + 8^2$

$x^2 = 289 \quad |\sqrt{\ }, x > 0$

$x = 17$

Kolmiosta ja koska kulma 270 < α < 360° saadaan

$\sin \alpha = -\frac{15}{17}$

$\cos \alpha = \frac{8}{17}$

Kysytyt arvot

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2\cdot\left(-\frac{15}{17}\right)\cdot\frac{8}{17} = -\frac{240}{289}$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{8}{17}\right)^2 - \left(-\frac{15}{17}\right)^2 = -\frac{161}{289}$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)}{1-\left(-\frac{15}{8}\right)^2} = -\frac{30}{8}:\left(-\frac{161}{64}\right) = \frac{30}{8}\cdot\frac{64}{161} = \frac{240}{161}$

Vastaus: Kysytyt arvot ovat $\sin 2\alpha = -\frac{240}{289}$, $\cos 2\alpha = -\frac{161}{289}$ ja $\tan 2\alpha = \frac{240}{161}$.

326. Muotoillaan lausekkeita peruskaavoja käyttäen.

a) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$, kun $\alpha \neq n\cdot 180°$

b)

$\sin^2\alpha\cot^2\alpha + \cos^2\alpha\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, kun $\alpha \neq n\cdot 90°$

327.

$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$, kun $\alpha \neq n\cdot 90°$

328. Muotoillaan lauseketta peruskaavoja käyttäen.

$6\sin^5 x \cos x - 6\cos^5 x \sin x = 3\cdot 2\sin x \cos x(\sin^4 x - \cos^4 x)$ | $2\sin x \cos x = \sin 2x$

$= 3\sin 2x(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$ | $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$= 3\sin 2x(\sin^2 x - \cos^2 x)$ | $\cos^2 x - \sin^2 x = -2\cos 2x$

$= 3\sin 2x(-\cos 2x)$ | $\cos^2 x - \sin^2 x = -\cos 2x$

$= -\frac{3}{2}\cdot 2\sin 2x \cos 2x$ | $2\sin 2x \cos 2x = \sin 4x$

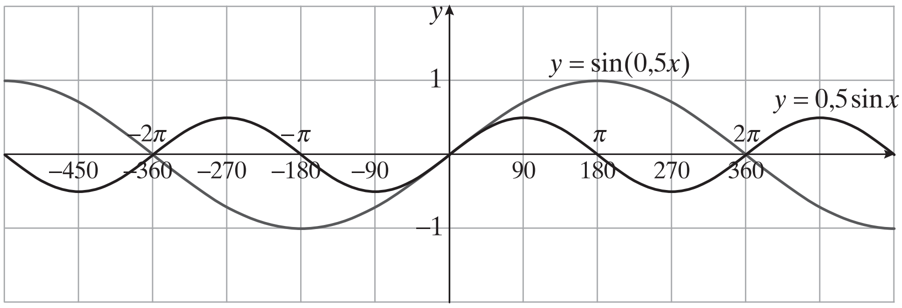
$= -\frac{3}{2}\sin 4x$

Koska $6\sin^5 x \cos x - 6\cos^5 x \sin x = -\frac{3}{2}\sin 4x = A + B\cos 4x$, niin $A = 0$ ja $B = -\frac{3}{2}$.

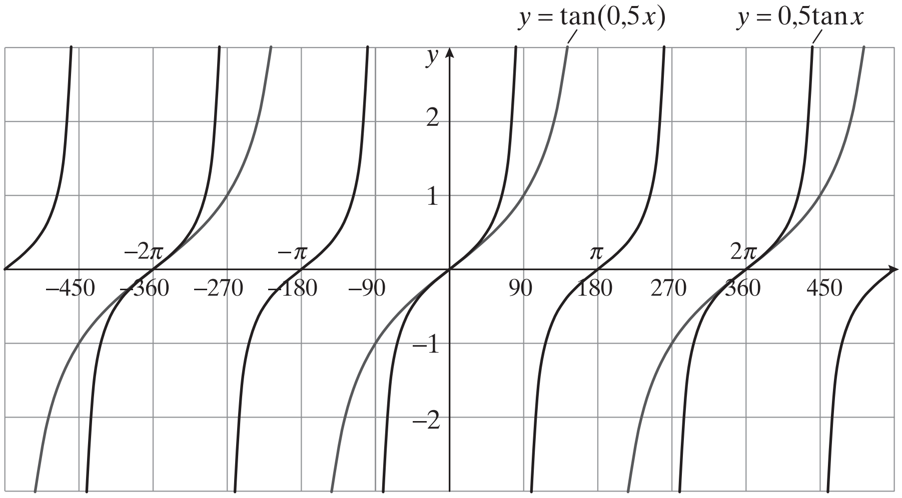
Vastaus: Vakiot ovat $A = 0$ ja $B = -\frac{3}{2}$.

3. Trigonometristen funktioiden kuvaajat

329. Piirretään funktioiden $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ ja $g(x) = \frac{1}{2}\sin x$ kuvaajat.



330. Piirretään funktioiden $f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ ja $g(x) = \frac{1}{2}\tan x$ kuvaajat.



331. a) Funktio $13\sin(15x + 1)$

Funktion amplitudi $|A| = 13$

Perusjakso $\quad 15x = n \cdot 2\pi \quad |:15$

$$x = n \cdot \frac{2\pi}{15}$$

Perusjakso on $\frac{2\pi}{15}$.

b) Funktio $-3\cos(2 - 6x)$

Funktion amplitudi $|A| = 3$

Perusjakso $\quad 6x = n \cdot 2\pi \quad |:6$

$x = n \cdot \dfrac{\pi}{3}$

Perusjakso on $\dfrac{\pi}{3}$.

c) Funktio $-3\dfrac{1}{2}\tan(3x + \pi)$
Ei amplitudia
Perusjakso $\quad 3x = n \cdot \pi \quad |:3$

$x = n \cdot \dfrac{\pi}{3}$

Perusjakso on $\dfrac{\pi}{3}$.

<u>Vastaus</u>: a) Amplitudi on $|A| = 13$ ja perusjakso $\dfrac{2\pi}{15}$. b) Amplitudi on $|A| = 3$ ja perusjakso $\dfrac{\pi}{3}$. c) Ei amplitudia. Perusjakso on $\dfrac{\pi}{3}$.

332. a) Funktio $4\sin 3x$

$-1 \le \sin 3x \le 1 \quad |\cdot 4$
$-4 \le 4\sin 3x \le 4$

Funktion arvojoukko on $-4 \le y \le 4$.

b) Funktio $14\cos 3x - 13$

$-1 \le \cos 3x \le 1 \quad |\cdot 14$
$-14 \le 14\cos 3x \le 14 \quad | -13$
$-27 \le 4\cos 2x - 13 \le 1$

Funktion arvojoukko on $-27 \le y \le 1$.

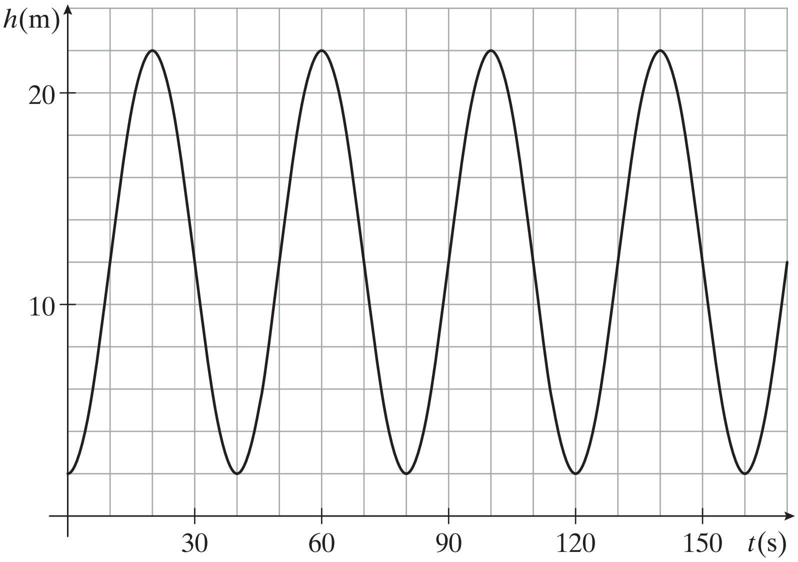
c) Funktio $4\sin^2 x - 6$

$0 \le \sin^2 x \le 1 \quad |\cdot 4$
$0 \le 4\sin^2 x \le 4 \quad | -6$
$-6 \le 4\cos^2 x - 6 \le -2$

Funktion arvojoukko on $-6 \le y \le -2$.

<u>Vastaus</u>: Funktion arvojoukko on a) $-4 \le y \le 4$ b) $-27 \le y \le 1$ c) $-6 \le y \le -2$.

333.



a) Korkein kohta on 22 m.

b) Alimmillaan Oona on 2 metrin korkeudella.

Maailmanpyörän halkaisija 22 m − 2 m = 20 m

Säde $\frac{20\text{ m}}{2} = 10\text{ m}$

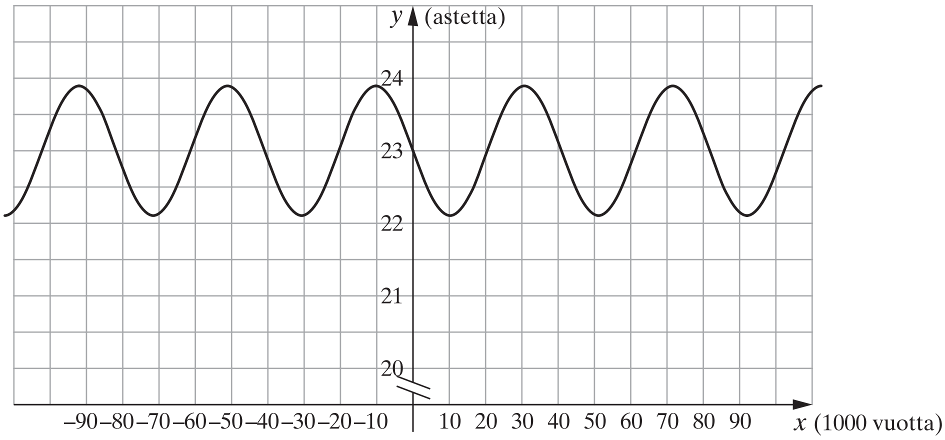
c) Kyydissä oleva on alimmassa kohdassa, kun $t = 0$ ja seuraavan kerran hän on alimmassa kohdassa, kun $t = 40$ s, joten yksi kierros kestää 40 sekuntia.

d) $f(x) = 12 - 10\cos\left(\frac{\pi t}{20}\right)$

Vastaus: a) Korkein kohta on 22 m. b)Säde on 10 m. c) Kierros kestää 40 s.

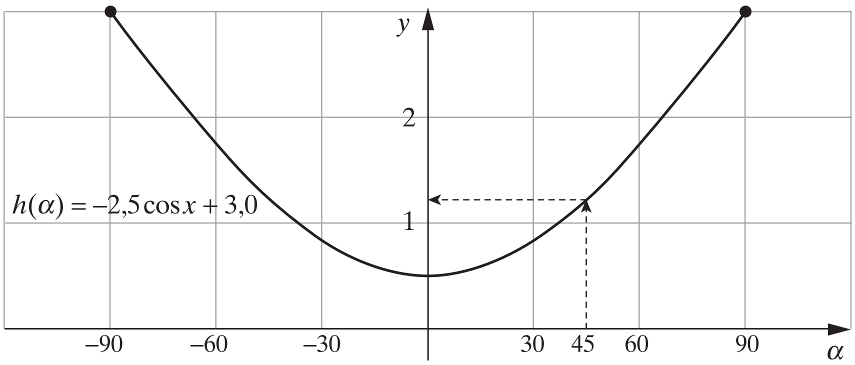
d) $f(x) = 12 - 10\cos\left(\frac{\pi t}{20}\right)$

334.



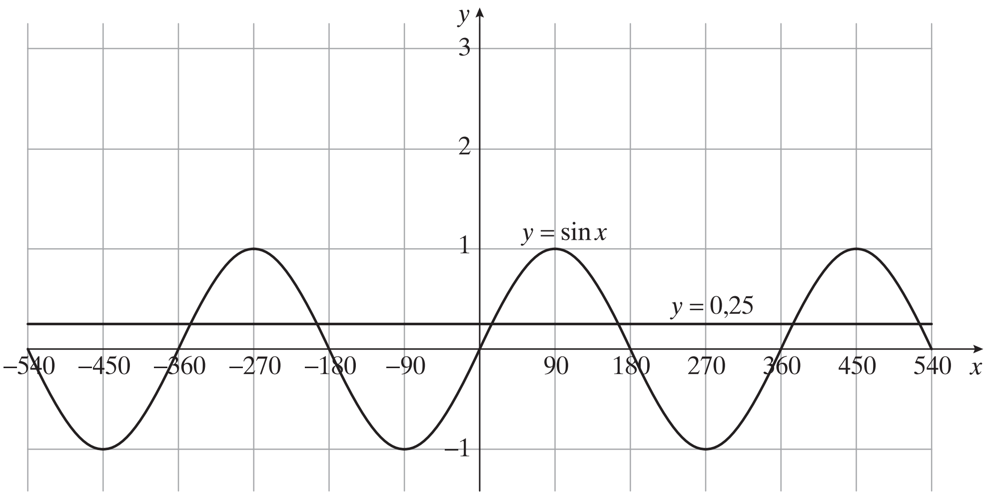
Vastaus: a) Kaltevuus on tällä hetkellä 23°
b) Kulma on loivenemassa.
c) Seuraava minimikulma saavutetaan 10 000 ja maksimikulma 30 000 vuoden kuluttua.
d) Vaihtelun jakson pituus on 40 000 vuotta

335. Funktio $h(\alpha) = -2,5\cos\alpha + 3,0$, kun α on keinun kulma pystysuoraan nähden.
a) Piirretään funktion kuvaaja välillä $[-90°, 90°]$



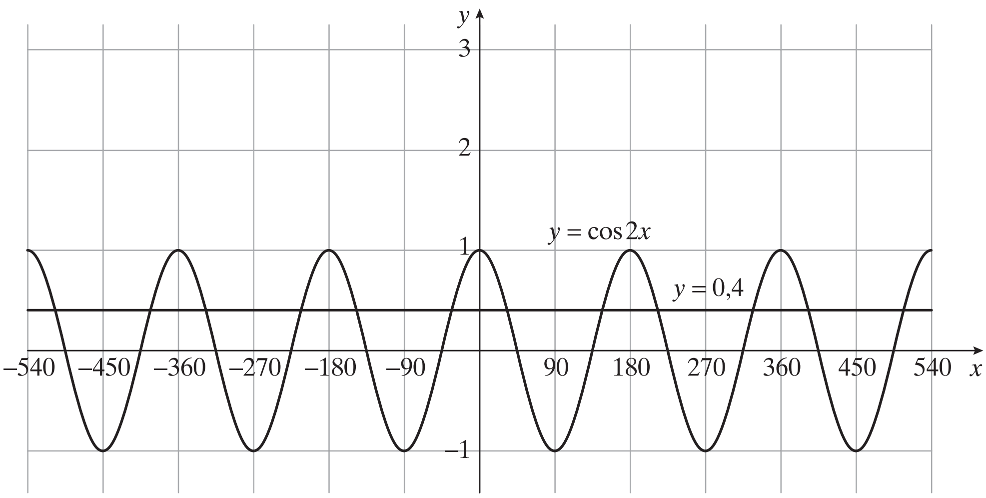
Vastaus: b) Keinuja on 1,2 metrin korkeudessa, kun kulma on 45°. c) Keinujan suurin etäisyys maanpinnasta on 3,0 m ja pienin 0,5 m.

336. Ratkaistaan yhtälöt piirtämällä kuvaaja.
a)



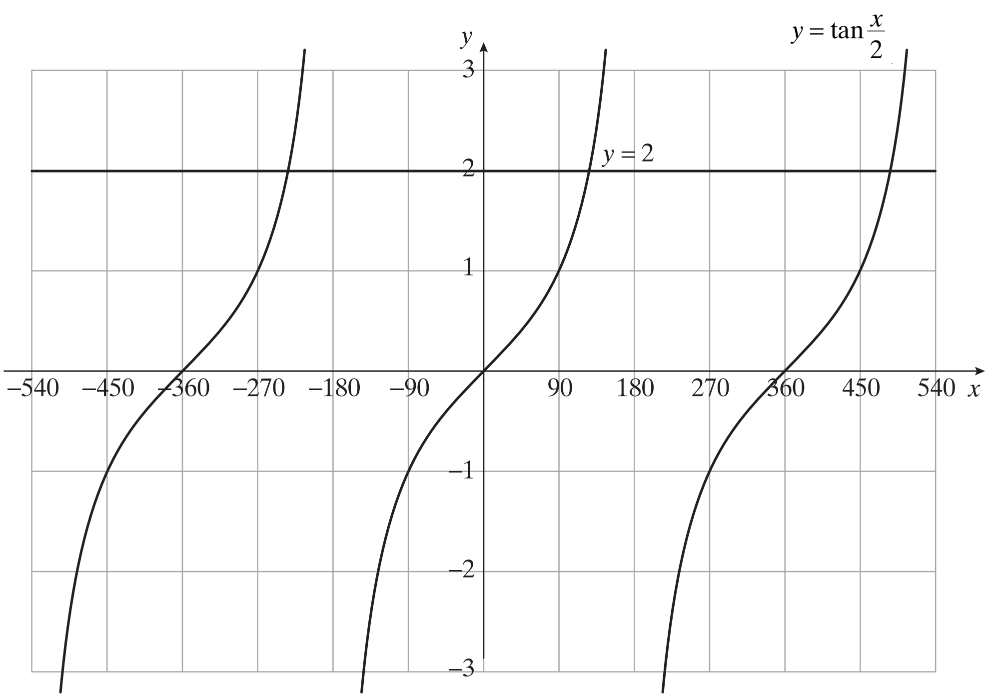
$\sin x = 0{,}25$
$x = 15° + n \cdot 360°$ tai $x = 165° + n \cdot 360°$, $n \in \mathbb{Z}$

b)



$\cos 2x = 0{,}4$
$x = \pm 30° + n \cdot 180°$, $n \in \mathbb{Z}$

c)



$\tan \frac{x}{2} = 2$

$x = 130° + n \cdot 180°,\ \ n \in \mathbb{Z}$

<u>Vastaus</u>: Yhtälön ratkaisu on a) $x = 15° + n \cdot 360°$ tai $x = 165° + n \cdot 360°$
b) $x = \pm 30° + n \cdot 180°$ c) $x = 130° + n \cdot 180°,\ \ n \in \mathbb{Z}$.

337. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x = \sin 60°$

$x = 60° + n \cdot 360°$ tai $x = 180° – 60° + n \cdot 360°$

$x = 120° + n \cdot 360°,\ \ n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\cos x = \cos 120°$

$x = \pm 120° + n \cdot 360°,\ \ n \in \mathbb{Z}$

c) $\tan x = 3$

$\tan x \approx \tan 71{,}6°$

$x = 71{,}6° + n \cdot 180°,\ \ n \in \mathbb{Z}$

<u>Vastaus</u>: Yhtälön ratkaisu on a) $x = 60° + n \cdot 360°$ tai $x = 120° + n \cdot 360°$
b) $x = \pm 120° + n \cdot 360°$ c) $x = 71{,}6° + n \cdot 180°,\ \ n \in \mathbb{Z}$. $n \in \mathbb{Z}$

338. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin 4x = -\frac{1}{2}$

$\sin 4x \approx \sin(-30°)$

$4x = -30° + n \cdot 360° \quad |:4$ tai $4x = 180° - (-30°) + n \cdot 360°$

$x = -7{,}5° + n \cdot 90° \qquad 4x = 210° + n \cdot 360° \quad |:4$

$x = 52{,}5° + n \cdot 90°, \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \frac{x}{2} = \cos 30°$

$\frac{x}{2} = \pm 30° + n \cdot 360° \quad |\cdot 2$

$x = \pm 60° + n \cdot 720°, \quad n \in \mathbb{Z}$

c) $\tan 3x = 1$

$\tan 3x = \tan 45°$

$3x = 45° + n \cdot 180° \quad |:3$

$x = 15° + n \cdot 60°, \quad n \in \mathbb{Z}$

<u>Vastaus</u>: Yhtälön ratkaisu on a) $x = -7{,}5° + n \cdot 90°$ tai $x = 52{,}5° + n \cdot 90°$
b) $x = \pm 60° + n \cdot 720°$ c) $x = 15° + n \cdot 60°, \quad n \in \mathbb{Z}$.

339. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin 3x = \sin 2x$

$3x = 2x + n \cdot 2\pi$ tai $3x = \pi - 2x + n \cdot 2\pi$

$x = n \cdot 2\pi \qquad 5x = \pi + n \cdot 2\pi \quad |:5$

$x = \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos \frac{x}{2} = \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$

$\frac{x}{2} = \pm\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + n \cdot 2\pi$

$\frac{x}{2} = \left(\frac{x}{2} + \pi\right) + n \cdot 2\pi$ tai $\frac{x}{2} = -\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + n \cdot 2\pi$

$0 = \pi + n \cdot 2\pi \qquad \frac{x}{2} = -\frac{x}{2} - \pi + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

Ei ratkaisua. $\qquad x = -\pi + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

c) $\tan x = \tan 6x$

$x = 6x + n\cdot\pi$

$-5x = n\cdot\pi \quad |:(-5)$

$x = n\cdot\frac{\pi}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$

<u>Vastaus</u>: Yhtälön ratkaisu on a) $x = n\cdot 2\pi$ tai $x = \frac{\pi}{5} + n\cdot\frac{2\pi}{5}$ b) $x = -\pi + n\cdot 2\pi$

c) $x = n\cdot\frac{\pi}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

340. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\sin x = -\sin 10x \quad | -\sin 10x = \sin(-10x)$

$\sin x = \sin(-10x)$

$x = -10x + n\cdot 2\pi$ tai $x = \pi + 10x + n\cdot 2\pi$

$11x = n\cdot 2\pi \quad |:11$ $\qquad -9x = \pi + n\cdot 2\pi \quad |:(-9)$

$x = n\cdot\frac{2\pi}{11}$ $\qquad x = -\frac{\pi}{9} + n\cdot\frac{2\pi}{9}, \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\sin 3x = \cos(x - \pi) \quad | \sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(x - \pi)$$

$$\frac{\pi}{2} - 3x = \pm(x - \pi) + n\cdot 2\pi$$

$\frac{\pi}{2} - 3x = x - \pi + n\cdot 2\pi$ tai $\qquad \frac{\pi}{2} - 3x = -(x - \pi) + n\cdot 2\pi$

$-4x = -\frac{3\pi}{2} + n\cdot 2\pi \quad |:(-4)$ $\qquad \frac{\pi}{2} - 3x = -x + \pi + n\cdot 2\pi$

$x = \frac{3\pi}{8} - n\cdot\frac{\pi}{2}$ $\qquad -2x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \quad |:(-2)$

$x = \frac{3\pi}{8} + n\cdot\frac{\pi}{2}$ $\qquad x = -\frac{\pi}{4} + n\cdot\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

c) $\sin 2x = -\cos(x + \pi) \quad |:(-1)$

$-\sin 2x = \cos(x + \pi) \quad | -\sin 2x = \sin(-2x)$

$\sin(-2x) = \cos(x + \pi) \quad | \sin(-2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\cos(x+\pi)$$

$$\frac{\pi}{2}+2x=\pm(x+\pi)+n\cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}+2x=x+\pi+n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{\pi}{2}+2x=-(x+\pi)+n\cdot 2\pi$$

$$x=\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi \qquad \frac{\pi}{2}+2x=-x-\pi+n\cdot 2\pi$$

$$3x=-\frac{3\pi}{2}+n\cdot 2\pi \quad |:3$$

$$x=-\frac{\pi}{2}+n\cdot\frac{2\pi}{3}, \qquad n\in\mathbb{Z}$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisu on a) $x = n\cdot\frac{2\pi}{11}$ tai $x = -\frac{\pi}{9}+n\cdot\frac{2\pi}{9}$

b) $x=\frac{3\pi}{8}+n\cdot\frac{\pi}{2}$ tai $x = -\frac{\pi}{4}+n\cdot\pi$ c) $x=\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{2}+n\cdot\frac{2\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$

341. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\cos 2x = 2\cos x \quad | \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$2\cos^2 x - 1 = 2\cos x$

$2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$

Sijoitetaan $\cos x = t$

$$2t^2-2t-1=0$$

$$t=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}$$

$$t_1=\frac{2+\sqrt{12}}{4}=\frac{2+2\sqrt{3}}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\approx 1{,}366 \quad |\text{Ei käy}$$

$$t_2=\frac{2-\sqrt{12}}{4}=\frac{2-2\sqrt{3}}{4}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\approx -0{,}366$$

Sijoitetaan $t = \cos x$

$\cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\cos x \approx \cos 1{,}95$

$x = \pm 1{,}95 + n\cdot 2\pi, \quad n\in\mathbb{Z}$

b) $\sin 3x = -\cos 3x \quad |: \cos 3x$

$\tan 3x = -1$

$\tan 3x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad |:3$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

c) $\sin 2x + \cos x = 0 \quad | \sin 2x = 2\sin x \cos x$

$2\sin x \cos x + \cos x = 0$

$\cos x(2\sin x + 1) = 0$

$\cos x = 0$ tai $2\sin x + 1 = 0$

$\cos x = \cos \frac{\pi}{2}$ tai $2\sin x = -1 \quad |:2$

$x = \pm \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \qquad \sin x = -\frac{1}{2}$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi + \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

<u>Vastaus</u>: Yhtälön ratkaisu on a) $x = \pm 1{,}95 + n \cdot 2\pi$ b) $x = -\frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{3}$

c) $x = \pm \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

342. Ratkaistaan yhtälö.

$$\tan x = \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \cos x \quad |\cdot \cos x$$

$$\sin x = \cos^2 x \quad |\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Sijoitetaan $\sin x = t$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$$

$$t_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1{,}618 \quad |\text{Ei käy}$$

Sijoitetaan $t = \sin x$

$$\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$\sin x = \sin 38{,}2°$

$x = 38{,}2° + n \cdot 360°$ tai $x = 180° - 38{,}2° + n \cdot 360°$

$x = 141{,}8° + n \cdot 360°, \quad n \in \mathbb{Z}$

Kovera kulma on 141,8°

Vastaus: Kovera kulma on 141,8°.

343. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\cot x = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2}$$

$\tan x = 2$

$\tan x \approx \tan 1{,}11$

$x = 1{,}11 + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\tan x + \cot x = 3$

$$^{2\sin x)}\frac{\sin x}{\cos x} + {}^{2\cos x)}\frac{\cos x}{\sin x} = 3$$

$$\frac{2\sin^2 x + 2\cos^2 x}{2\sin x \cos x} = 3 \quad |2\sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\frac{2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\sin 2x} = 3 \quad |\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{2}{\sin 2x} = 3$$

$$3\sin 2x = 2 \quad |:3$$

$$\sin 2x = \frac{2}{3}$$

$\sin 2x \approx \sin 0{,}73$

$2x = 0{,}73 + n \cdot 2\pi \quad |:2$ tai $2x = \pi - 0{,}73 + n \cdot 2\pi$

$x \approx 0{,}36 + n \cdot \pi$ $\qquad 2x = 2{,}41 + n \cdot 2\pi \quad |:2$

$x \approx 1{,}21 + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

Vastaus: Yhtälön ratkaisu on a) $x = 1{,}11 + n \cdot \pi$
b) $x = 0{,}36 + n \cdot \pi$ tai $x = 1{,}21 + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$.

344. Funktio $f(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{x}{4} - \pi\right)$ on jatkuva, joten se voi vaihtaa merkkinsä ainoastaan nollakohdissaan.

Funktion nollakohdat

$$1 - 2\sin\left(\frac{x}{4} - \pi\right) = 0$$

$$2\sin\left(\frac{x}{4} - \pi\right) = 1 \quad |:2$$

$$\sin\left(\frac{x}{4}-\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{x}{4}-\pi\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{x}{4}-\pi = \frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{x}{4}-\pi = \pi-\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi$$

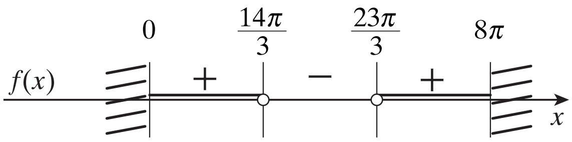
$$\frac{x}{4} = \frac{7\pi}{6}+n\cdot 2\pi \quad |\cdot 4 \qquad \frac{x}{4} = \frac{11\pi}{6}+n\cdot 2\pi \quad |\cdot 4$$

$$x = \frac{14\pi}{3} + n\cdot 8\pi \qquad x = \frac{22\pi}{3} + n\cdot 8\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$$

Merkkikaavio

Koska funktio $f(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{x}{4}-\pi\right)$ on jaksollinen, perusjaksona 8π riittää tutkia väliä $0 \le x \le 8\pi$.

Välille $0 \le x \le 8\pi$ kuuluvat nollakohdat ovat $x = \frac{14\pi}{3}$ ja $x = \frac{22\pi}{3}$



$$f(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{x}{4}-\pi\right)$$

$$f(\pi) = 1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\pi\right) \approx 2{,}41 > 0$$

$$f(6\pi) = 1 - 2\sin\left(\frac{6\pi}{4}-\pi\right) = -1 < 0$$

$$f\left(\frac{47\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin\left(\frac{\frac{47\pi}{6}}{4}-\pi\right) \approx 0{,}74 > 0$$

Välin alaraja $\frac{23\pi}{3} - 8\pi = -\frac{2\pi}{3}$

$f(x) > 0$, kun $-\frac{2\pi}{3} + n\cdot 8\pi < x < \frac{14\pi}{3} + n\cdot 8\pi$, missä $n\in\mathbb{Z}$.

<u>Vastaus</u>: Funktio $f(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{x}{4}-\pi\right)$ saa positiivisia arvoja,

kun $-\frac{2\pi}{3} + n\cdot 8\pi < x < \frac{14\pi}{3} + n\cdot 8\pi$, missä $n\in\mathbb{Z}$.

345. Surmanajajan korkeutta maanpinnasta metreinä $h(t) = 6 - 5\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, kun t on aika sekunteina.

a) Ajajan korkeus ajanhetkellä $t = 3$ s on

$h(3) = 6 - 5\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = = 6 - 5\sin\left(\pi \cdot 3 + \frac{\pi}{2}\right) = 11$

b) Ajajan suurin etäisyys maanpinnasta saadaan, kun $\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Tällöin korkeus $h = 6 - 5\cdot(-1) = 11$.

Ajajan pienin etäisyys maanpinnasta saadaan, kun $\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Tällöin korkeus $h = 6 - 5\cdot 1 = 1$.

d) Ajaja 3,0 metrin korkeudella maanpinnasta

$h(t) = 3{,}0$

$6 - 5\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 3$

$5\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \quad |:5$

$\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}6$

$\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \approx \sin 0{,}6435$

$\pi t + \frac{\pi}{2} = 0{,}6435 + n\cdot 2\pi$ tai $\pi t + \frac{\pi}{2} = \pi - 0{,}6435 + n\cdot 2\pi$

$\pi t \approx -0{,}9273 + n\cdot 2\pi \quad |:\pi$ $\qquad \pi t \approx 0{,}9273 + n\cdot 2\pi \quad |:\pi$

$t \approx -0{,}30 + n\cdot 2$ $\qquad t \approx 0{,}30 + n\cdot 2, \quad n \in \mathbb{Z}$

Ajaja on 3,0 metrin korkeudella ajanhetkinä $t = -0{,}30 + n\cdot 2$ ja $t = 0{,}30 + n\cdot 2, \quad n \in \mathbb{Z}$
.

Vastaus: a) Ajajan korkeus on 11 m. b) Ajajan suurin etäisyys maanpinnasta on 11 m ja pienin 1,0 m. c) Ajaja on 3,0 metrin korkeudella ajanhetkinä $t = -0{,}30 + n\cdot 2$ ja $t = 0{,}30 + n\cdot 2, \quad n \in \mathbb{Z}$.

346. Vaihtovirran suuruus noudattaa sinifunktiona $f(x) = A\sin(kx)$

Amplitudi $A = 60$ mA

Jakson pituus 10 ms

$kx = 2\pi \quad |x = 10$

$10k = 2\pi \quad |:10$

$k = 0{,}2\pi$

Funktio $f(x) = 60\sin(0{,}2\pi x)$

Virran suuruus on 20 mA

$f(x) = 20$

$60\sin(0{,}2\pi x) = 20 \quad |:60$

$\sin(0{,}2\pi x) = \frac{1}{3}$

$\sin(0{,}2\pi x) \approx \sin 0{,}3398$

$0{,}2\pi x = 0{,}3398 + n \cdot 2\pi \quad |:(0{,}2\pi)$ tai $\quad 0{,}2\pi x = \pi - 0{,}3398 + n \cdot 2\pi$

$x \approx 0{,}54 + n \cdot 10 \qquad 0{,}2\pi x \approx 2{,}8018 + n \cdot 2\pi \quad |:(0{,}2\pi)$

$x \approx 4{,}46 + n \cdot 10, \quad n \in \mathbb{Z}$

Vastaus: Virran suuruus on 20 mA ajanhetkillä $x = 0{,}54 + n \cdot 10$ ja $x = 4{,}46 + n \cdot 10$, $n \in \mathbb{Z}$.

347. Peltomyyrien (Microtus agrestis) määrä noudattaa sinifunktiota $f(x) = A\sin(kx)$
Amplitudi $A = 200:2 = 100$
Jakson pituus 3 vuotta

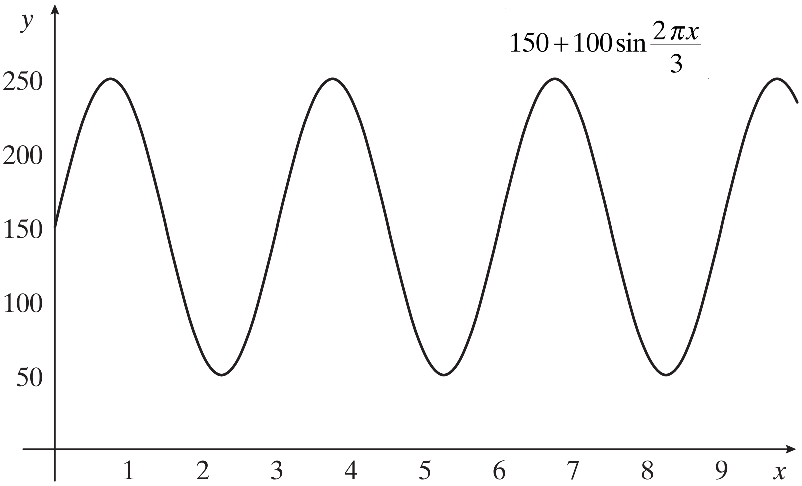
$kx = 2\pi \quad |x = 3$

$3k = 2\pi \quad |:3$

$k = \dfrac{2\pi}{3}$

Funktio $f(x) = 150 + 100\sin\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right)$

Funktion kuvaaja



Myyrien määrä 200 myyrää/ha

$f(x) = 200$

$150 + 100\sin\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right) = 200$

$100\sin\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right) = 50 \quad |:100$

$\sin\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$\sin\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6}$

$$\frac{2\pi x}{3} = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \quad |: \frac{2\pi}{3} \quad \text{tai} \quad \frac{2\pi x}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4} + n\cdot 3 \qquad\qquad \frac{2\pi x}{3} = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi \quad |: \frac{2\pi}{3}$$

$$x = 1\frac{1}{4} + n\cdot 3, \quad n \in \mathbb{Z}$$

<u>Vastaus</u>: Funktio on $150 + 100\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$. Myyrien määrä 200 myyrää/ha ajanhetkillä $x = \frac{1}{4} + n\cdot 3$ ja $x = 1\frac{1}{4} + n\cdot 3$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Trigonometristen funktioiden derivaatat

348. a) Funktio $f(x) = \sin 2x - 2\cos 2x$
Derivaatta $f'(x) = 2\cos 2x - 2\cdot 2(-\sin 2x) = 2\cos 2x + 4\sin 2x$

b) Funktio $f(x) = \sin 2x \cdot \frac{1}{2}\cos 3x$

Derivaatta $f'(x) = 2\cos 2x \cdot \frac{1}{2}\cos 3x + \sin 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot 3(-\sin 3x)$

$= \cos 2x \cos 3x - \frac{3}{2}\sin 2x \sin 3x$

c) Funktio $f(x) = (\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x = 1 + \sin 2x$
Derivaatta $f'(x) = 2\cos 2x$
<u>Vastaus</u>: Derivaatta on a) $f'(x) = 2\cos 2x + 4\sin 2x$
b) $f'(x) = \cos 2x \cos 3x - \frac{3}{2}\sin 2x \sin 3x$ c) $f'(x) = 2\cos 2x$.

349. Funktio $f(x) = 2\sin^2 x - \sin^2 2x - 2x + 2$
Derivaatta $f'(x) = 2\cos x\cdot 2\sin x - 2\cdot\cos 2x\cdot 2\sin 2x - 2 = 2\sin 2x - 2\sin 4x - 2$
<u>Vastaus</u>: Derivaatta on a) $f'(x) = 2\sin 2x - 2\sin 4x - 2$.

350. a) Funktio $f(x) = \frac{\sin x - x}{\cos x}$

Derivaatta $f'(x) = \frac{(\cos x - 1)\cos x - (\sin x - x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x - \cos x + \sin^2 x - x\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos x - x\sin x}{\cos^2 x}$

b) Funktio $f(x) = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin \pi x + 1}$

Derivaatta $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{x}{2}\right)(\sin \pi x + 1) - \cos\frac{x}{2}\cdot \pi\cos \pi x}{(\sin \pi x + 1)^2}$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\pi x - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} - \pi\cos\frac{x}{2}\cos\pi x}{(\sin\pi x + 1)^2}$$

<u>Vastaus</u>: Derivaatta on a) $f'(x) = \dfrac{1-\cos x - x\sin x}{\cos^2 x}$

b) $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\pi x - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} - \pi\cos\frac{x}{2}\cos\pi x}{(\sin\pi x + 1)^2}$.

351. a) Funktio $f(x) = \tan 2x$

Derivaatta $f'(x) = 2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 2x} = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

Derivaatta toisin $f'(x) = 2(1 + \tan^2 2x) = 2 + 2\tan^2 2x$

b) Funktio $f(x) = \tan^2 x - 2\tan x$

Derivaatta $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot 2\tan x - 2\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2\tan x - 2}{\cos^2 x}$

Derivaatta toisin $f'(x) = (1 + \tan^2 x)\cdot 2\tan x - 2(1 + \tan^2 x) = 2\tan x + 2\tan^3 x - 2 - 2\tan^2 x$

$= 2\tan^3 x - 2\tan^2 x + 2\tan x - 2$

<u>Vastaus</u>: Derivaatta on a) $f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2 2x} = 2 + 2\tan^2 2x$

b) $f'(x) = 2\tan^3 x - 2\tan^2 x + 2\tan x - 2 = \dfrac{2\tan x - 2}{\cos^2 x}$

352. a) Funktio $f(x) = \dfrac{1}{\cot x} = \tan x$

Derivaatta $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

a) Funktio $f(x) = \cot^2 2x \cdot \tan 2x$

Derivaatta $f'(x) = 2(-1 - \cot^2 2x)\cdot 2\cot 2x \cdot \tan 2x + \cot^2 2x \cdot 2(1 + \tan^2 2x)$

$= -4\cot 2x \tan 2x - 4\cot^3 2x \tan 2x + 2\cot^2 2x + 2\cot^2 2x \tan^2 2x$

$= -4 - 4\cot^2 2x + 2\cot^2 2x + 2$

$= -2 - 2\cot^2 2x$

<u>Vastaus</u>: Derivaatta on a) $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ b) $f'(x) = -2 - 2\cot^2 2x$.

353. Funktio $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + x$

Derivaatta $f'(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + x = \cos x + \frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x + 1 = \cos x + \cos 2x + 1$

$= \cos x + 2\cos^2 x - 1 + 1 = 2\cos^2 x + \cos x$

Derivaatan nollakohdat

$$2\cos^2 x + \cos x = 0$$

Sijoitetaan $\cos x = t$

$$2t^2 + t = 0$$

$t(2t+1)=0$

$t=0 \quad$ tai $\quad 2t+1=0$

$t=-\frac{1}{2}$

Sijoitetaan takaisin $t = \cos x$

$$\begin{aligned} t &= 0 \\ \cos x &= 0 \\ \cos x &= \cos\frac{\pi}{2} \\ x &= \pm\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{2} \\ \cos x &= -\frac{1}{2} \\ \cos x &= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ x &= \pm\frac{2\pi}{3}+n\cdot 2\pi \end{aligned}$$

Välille $-\pi \le x \le 0$ nollakohdista kuuluvat $-\frac{\pi}{2}$ ja $-\frac{2\pi}{3}$

<u>Vastaus</u>: Nollakohdat ovat $-\frac{\pi}{2}$ ja $-\frac{2\pi}{3}$.

354. Funktio $f(x) = 1 - \cos^2 2x$

Suurin ja pienin arvo

$$\begin{aligned} 0 &\le \cos^2 2x \le 1 \\ -1 &\le -\cos^2 2x \le 0 \quad \big| +1 \\ 0 &\le 1-\cos^2 2x \le 1 \end{aligned}$$

<u>Vastaus</u>: Suurin arvo on 1 ja pienin 0.

355. Funktio $f(x) = sx + \cos x$

Derivaatta $f'(x) = s - \sin x$

Funktio on aidosti vähenevä, kun $f'(x) \le 0$.

Koska $-1 \le \sin x \le 1$, niin $f'(x) \le 0$, kun $s \le 1$.

<u>Vastaus</u>: Funktio on aidosti vähenevä, kun $s \le 1$.

356. Funktio $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Derivaatta $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos x$

Kuvaaja leikkaa y-akselin, kun $x = 0$.

Derivaatan arvo $f'(0) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos 0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$

Derivaatan kuvaajan ja x-akselin suuntaisen suoran välinen kulma α kohdassa $x = 0$.

$$\tan\alpha = f'(0)$$
$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$
$$\alpha = 24,235...°$$

Kuvaajan ja y-akselin välinen kulma $90° - \alpha \approx 65,76°$

Vastaus: Funktion kuvaaja leikkaa y-akselin 65,76° kulmassa.

Lukujonot

357.
$a_1 = 3$

Rekursiivinen sääntö $a_{n+1} = \frac{1}{n} \cdot a_n$

$$a_2 = \frac{1}{1} \cdot a_1 = \frac{1}{1} \cdot 3 = 3$$
$$a_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$
$$a_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$
$$a_5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Vastaus: $a_2 = 3$, $a_3 = \frac{3}{2}$, $a_4 = \frac{1}{2}$ ja $a_5 = \frac{1}{8}$

358.
a) Lukujono $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$

Lukujonon analyyttinen sääntö $a_n = \frac{n}{n+1}$

$a_{10} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$, $a_{100} = \frac{100}{100+1} = \frac{100}{101}$, $a_{10\ 000} = \frac{10\,000}{10\,000+1} = \frac{10\ 000}{10\ 001}$,

$a_{1000\ 000} = \frac{1000\,000}{1000\,000+1} = \frac{1000\,000}{1000\,001}$

b) Lukujono $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, ... = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, ...$

Lukujonon analyyttinen sääntö $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

$a_{10} = \frac{10-1}{10+1} = \frac{9}{11}$, $a_{100} = \frac{100-1}{100+1} = \frac{99}{101}$, $a_{10\,000} = \frac{10\,000-1}{10\,000+1} = \frac{9\,999}{10\,001}$,

$a_{1\,000\,000} = \frac{1\,000\,000-1}{1\,000\,000+1} = \frac{999\,999}{1\,000\,001}$

<u>Vastaus:</u> a) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $a_{10} = \frac{10}{11}$, $a_{100} = \frac{100}{101}$, $a_{10\,000} = \frac{10\,000}{10\,001}$,

$a_{1\,000\,000} = \frac{1\,000\,000}{1\,000\,001}$ b) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ ja $\frac{9}{11}, \frac{99}{101}, \frac{9\,999}{10\,001}, \frac{999\,999}{1\,000\,001}$

359. a)

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	3	3	3
2	5	5 = 3+2	5 = 3+2
3	7	7 = 5+2	7 = 3+2+2
...			
n	a_n	$a_{n-1}+2$	$3+(n-1)\cdot 2=2n+1$

b)

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	1,1	1,1	1,1
2	0,77	0,77 = 1,1 · 0,7	0,77 = 1,1 · 0,7
3	0,539	0,539 = 0,77 · 0,7	0,539 = 1,1 · 0,7 · 0,7
...			
n	a_n	$a_{n-1}\cdot 0{,}7$	$1{,}1\cdot 0{,}7^{n-1}$

<u>Vastaus:</u> a) rekursiivinen sääntö $a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1}+2$ ja $n \geq 2$, analyyttinen sääntö $a_n = 2n + 1$ b) rekursiivinen sääntö $a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1}\cdot 0{,}7$ ja $n \geq 2$, analyyttinen sääntö $a_n = 1{,}1\cdot 0{,}7^{n-1}$.

360.

a) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = (\frac{1}{4})^2$
3	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{64} = (\frac{1}{4})^3$
:			
n	a_n	$a_{n-1}\cdot\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4})^n$

Rekursiivinen sääntö:

Lukujonon termit saadaan kertomalla edellinen termi luvulla $\frac{1}{4}$.

$a_1 = \frac{1}{4}$

$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{4}$, kun $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö:

$a_n = (\frac{1}{4})^n$, $n \geq 1$

b)

n	a_n	rekursiivinen sääntö	analyyttinen sääntö
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} = \frac{1+2}{2+2}$	$\frac{3}{4} = \frac{1+2}{2+2}$
3	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6} = \frac{3+2}{4+2}$	$\frac{5}{6} = \frac{1+2+2}{2+2+2}$
...			
n	a_n	Ei sääntöä	$\frac{1+(n-1)\cdot 2}{2+(n-1)\cdot 2} = \frac{2n-1}{2n}$

Ei rekursiivista sääntöä, analyyttinen sääntö $a_n = \frac{2n-1}{2n}$, $n \geq 1$

<u>Vastaus</u>: a) Rekursiivinen sääntö $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{4}$, $n \geq 2$

Analyyttinen sääntö $a_n = (\frac{1}{4})^n$, $n \geq 1$

b) Ei rekursiivista sääntöä, analyyttinen sääntö $a_n = \frac{2n-1}{2n}$, $n \geq 1$

361. Lukujonon n:s jäsen $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$

a)

$a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$

$$1+\frac{1}{2^n}=\frac{8\,193}{8\,192}$$
$$\frac{1}{2^n}=\frac{1}{8\,192}$$
$$(\frac{1}{2})^n=(\frac{1}{2})^{13}$$ | kantaluvut samat, eksponentit samat
$$n=13$$

b)
$$1+\frac{1}{2^n}=\frac{2\,097\,155}{2\,097\,154}$$
$$\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2\,097\,154}$$

Koska nimittäjä 2 097 154 ei ole kakkosen potenssi ($2^{21}=2\,097\,152$), ei luku $\frac{2\,097\,155}{2\,097\,154}$ kuulu jonoon.

Vastaus: a) 13. termi b) ei kuulu

362. Lukujonon n:s jäsen $a_n=\frac{3n-1}{n+7}$, $n\geq 1$

a) Lasketaan kahden perättäisen termin erotus

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{3(n+1)-1}{n+1+7}-\frac{3n-1}{n+7}\\&=\frac{3n+2}{n+8}-\frac{3n-1}{n+7}\\&=\frac{3n^2+21n+2n+14-3n^2-24n+n+8}{n^2+15n+56}\\&=\frac{22}{n^2+15n+56}>0,\ \text{kun } n\geq 1\end{aligned}$$

koska osoittaja 22 > 0 ja nimittäjä (n + 7)(n + 8) > 0, kun $n \geq 1$. Tällöin lukujono on kasvava.

b)

Koska jono on kasvava, on jonon ensimmäinen jäsen pienin eli $a_1=\frac{3\cdot 1-1}{1+7}=\frac{1}{4}$

c) Jäsenten eroavuus luvusta 3

$$\left|3-\frac{3n-1}{n+7}\right|<10^{-6}$$

$$\left|\frac{3n+21-3n+1}{n+7}\right|<10^{-6}$$

$$\left|\frac{22}{n+7}\right|<10^{-6} \qquad \left|\frac{22}{n+7}>0,\ \text{kun } n\geq 1\right.$$

$$\frac{22}{n+7}<10^{-6}$$

$$22<n\cdot 10^{-6}+7\cdot 10^{-6}$$

$$n>\frac{22-7\cdot 10^{-6}}{10^{-6}}$$

$$n>21\,999\,993$$

Jäsenet eroavat luvusta 3 vähemmän kuin 10^{-6} alkaen *n*:n arvosta 21 999 994.

<u>Vastaus</u>:b) $a_1=\frac{1}{4}$ c) Alkaen *n*:n arvosta 21 999 994.

363. Lukujonon *n*:s jäsen $a_n=\frac{n+(-1)^n}{n}$, $n\geq 1$

Jäsenten eroavuus luvusta 1

$$|a_n-1|<10^{-9}$$

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n}-{}^{n)}1\right|<10^{-9}$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<10^{-9} \qquad \left|\cdot\right. |n|>0 \text{ aina}$$

$$1<10^{-9}n \qquad \left|:10^{-9}\right.$$

$$n>1000\,000\,000$$

Jäsenet eroavat luvusta 1 vähemmän kuin 10^{-9} alkaen *n*:n arvosta 1000 000 001.

<u>Vastaus</u>: b) Pienin jäsen on $\frac{1}{4}$. c) Alkaen *n*:n arvosta 1000 000 001.

Aritmeettinen ja geometrinen lukujono

364.

a) $a_{100}=a_1+(100-1)d=10+99\cdot 5=505$

b) $a_{100}=a_1+(100-1)d=7+99\cdot 12=1\,195$

c) $a_{100}=a_1+(100-1)d=135+99\cdot(-15)=-1\,350$

<u>Vastaus:</u> a) 505 b) 1 195 c) −1 350

365.

a)

$a_{20} = a_{15} + 5d$
$10\ 000 = 27\ 760 + 5d$
$-5d = 17\ 760$
$d = -3\ 552$

$a_{20} = a_1 + 19d$
$10\ 000 = a_1 + 19 \cdot (-3\ 552)$
$-a_1 = -10\ 000 - 67\ 488$
$a_1 = 77\ 488$

$$a_n = 77\,488 + (n-1)\cdot(-3552) = 81040 - 3552n$$

$$a_n = 81040 - 3552n$$

b)

$-3\ 467\ 408 = 81\ 040 - 3\ 552n$
$3\ 552n = 3\ 548\ 448$
$n = 999$

c)

$-13\ 065\ 638\ 384 = 81\ 040 - 3\ 552n$
$3\ 552n = 13\ 065\ 719\ 424$

Luku 13 065 719 424 on niin suuri, että laskimen suorituskyky ei riitä tarkkoihin arvoihin, joten jakolasku on suoritettava jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r}
3678412\\
3552\overline{)13065719424}\\
\underline{10656}\\
24097\\
\underline{21312}\\
27851\\
\underline{24864}\\
29879\\
\underline{28416}\\
14634\\
\underline{14208}\\
4262\\
\underline{3552}\\
7104\\
\underline{7104}
\end{array}
$$

Joten

$n = \dfrac{13065719424}{3552}$

$n = 3678412$

eli luku on 3 678 412. jäsen ja kuuluu jonoon

Vastaus: a) a_1 = 77 488, $a_n = 81040 - 3552n$ b) 999. jäsen c) kuuluu.

366. $a_{53} = 1\,234 + 52 \cdot d$

1 234 + 52 $\cdot$ d = 220

52d = −1 014

d = −19,5

a_{52} = 220

a_{51} = 220 −(−19,5) = 239,5

a_{50} = 220 + 2 $\cdot$ 19,5 = 259

a_{49} = 220 + 3 $\cdot$ 19,5 = 278,5

Vastaus: 278,5; 259; 239,5 ja 220

367.

a)

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = 10 \cdot 4^4 = 2\ 560$

b)

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = 2 \cdot (-3)^4 = 162$

c)

$a_n = 162 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}, \ n \geq 1$

$a_5 = 162 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = 2$

Vastaus: a) 2 560 b) 162 c) 2

368.

$q = \dfrac{1,2}{2,0} = 0,6$

Halkaisijat 2,0 ; 1,2; 1,2 $\cdot$ 0,6 = 0,72; 0,72 $\cdot$ 0,6 = 0,432; 0,432 $\cdot$ 0,6 = 0,2592 ja 0,2592 $\cdot$ 0,6 = 0,15552

Yhteistilavuus

$$\frac{4}{3}\pi[(\frac{2,0}{2})^3+(\frac{1,2}{2})^3+(\frac{0,72}{2})^3+(\frac{0,432}{2})^3+(\frac{0,2592}{2})^3+(\frac{0,15552}{2})^3]\approx 5,34$$

Vastaus: 5,34 dm^3

369.

$$a_1+a_1+d+a_1+2d=24$$

$$a_1=8-d$$

geometrisessa jonossa

$$\frac{a_1+d-2}{a_1-1}=\frac{a_1+2d}{a_1+d-2} \qquad \Big| \; a_1=8-d$$

$$\frac{8-d+d-2}{8-d-1}=\frac{8-d+2d}{8-d+d-2}$$

$$\frac{6}{7-d}=\frac{8+d}{6} \qquad \Big| \; d\neq 7$$

$$d^2+d-20=0$$

$$d=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1(-20)}}{2\cdot 1}$$

$$d=-5 \quad \text{tai} \quad d=4$$

$$a_1=13 \quad \text{tai} \quad a_1=4$$

$$a_n=13+(n-1)\cdot(-5)=18-5n$$

tai

$$a_n=4+(n-1)\cdot 4=4n$$

Vastaus: $a_n=18-5n$ tai $a_n=4n$

370.

a)

$$a_1=4$$

$$a_5=1$$

Aritmeettisen lukujonon viides termi $a_5=a_1+\left(5-1\right)d$. Ratkaistaan *d*.

$$4+4d=1$$

$$4d=-3 \qquad \Big| :4$$

$$d=-\frac{3}{4}$$

Lasketaan kysytyt termit

$a_2 = 4 + \left(-\frac{3}{4}\right) = 3\frac{1}{4}$

$a_3 = 4 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 2\frac{1}{2}$

$a_4 = 4 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 1\frac{3}{4}$

$a_{10} = 4 + 9 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -2\frac{3}{4}$

b)

$a_1 = 4$

$a_5 = 1$

Geometrisen lukujonon viides termi $a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = a_1 \cdot q^4$. Ratkaistaan q.

$4 \cdot q^4 = 1 \quad | :4$

$q^4 = \frac{1}{4}$

$q = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$

Lasketaan kysytyt termit, kun $q = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$

$a_2 = \pm 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \pm\sqrt[4]{4^4 \cdot \frac{1}{4}} = \pm\sqrt[4]{64}$

$a_3 = \pm 4 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\right)^2 = \pm 4 \cdot \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 = \pm 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm 4 \cdot \frac{1}{2} = \pm 2$

$a_4 = \pm 4 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\right)^3 = \pm 4 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \pm\sqrt[4]{4^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3} = \pm\sqrt[4]{\frac{4^4}{4^3}} = \pm\sqrt[4]{4}$

$a_{10} = \pm 4 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\right)^9 = \pm 4 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^9} = \pm\sqrt[4]{4^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9} = \pm\sqrt[4]{\frac{4^4}{4^9}} = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{4^5}} = \pm\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$

Vastaus: a) $a_2 = 3\frac{1}{4}, a_3 = 2\frac{1}{2}, a_4 = 1\frac{3}{4}, a_{10} = -2\frac{3}{4}$

b) $a_2 = \pm\sqrt[4]{64}, a_3 = \pm 2, a_4 = \pm\sqrt[4]{4}, a_{10} = \pm\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$

371.
1) Aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten termien erotus on vakio
Kun valitaan ikäluokkien väliksi 20 vuotta, saadaan ikäluokat
1-20
21-40
41-60
61-80
81-100

2) Geometrisessa lukujonossa peräkkäisten termien suhde q on vakio.
$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \Big| \; a_n = 81, a_1 = 1, n = 5$
$81 = 1 \cdot q^{5-1}$
$q^4 = 81$
$q = 3$
Luokkien alarajat
$a_n = a_1 q^{n-1}$
$a_1 = 1$
$a_2 = 1 \cdot 3^{2-1} = 3$
$a_3 = 1 \cdot 3^{3-1} = 9$
$a_4 = 1 \cdot 3^{4-1} = 27$
$a_5 = 81$

Vastaus:
1)
1-20
21-40
41-60
61-80
81-100

2)
1-2
3-8
9-26
27-80
81-

Aritmeettinen summa

372. a)
$d = 2(n + 1) - 2n = 2$
$$\sum_{n=1}^{1800} 2n = 1800 \cdot \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1800}{2} = 3\ 241\ 800$$

b)

$$d=\frac{1}{2}(n+1)+7\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}n+7\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{20}(\frac{1}{2}n+7\frac{1}{2})=21\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 0+7\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 20+7\frac{1}{2}}{2}=262\frac{1}{2}$$

c)

$$d=\frac{17(n+1)}{3}-10\frac{2}{3}-(\frac{17n}{3}-10\frac{2}{3})=\frac{17}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{15}(\frac{17n}{3}-10\frac{2}{3})=15\cdot\frac{\frac{17\cdot 1}{3}-10\frac{2}{3}+\frac{17\cdot 15}{3}-10\frac{2}{3}}{2}=520$$

Vastaus: a) 3 241 800 b) $262\frac{1}{2}$ c) 520

373.

$a_7 = a_3 + 4d$

$14 = 8 + 4d$

$d = \frac{3}{2}$

$a_3 = a_1 + 2d$

$8 = a_1 + 2\cdot\frac{3}{2}$

$a_1 = 5$

$$a_{99}=5+(99-1)\cdot\frac{3}{2}=152$$

$$S_{99}=99\cdot\frac{5+152}{2}=7\ 771\frac{1}{2}$$

Vastaus: 152 ja $7\ 771\frac{1}{2}$

374.

$$1+2+3+\ldots+m\le 462\ 241$$

$$m\frac{1+m}{2}\le 462\ 241 \quad \Big|\cdot 2$$

$$m^2+m-924\ 482\le 0$$

Nollakohdat

$$m^2 + m - 924\,482 = 0$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-924\,482)}}{2 \cdot 1}$$

$$m = \frac{-1 \pm 1\,923}{2}$$

$$m_1 = \frac{-1 + 1\,923}{2} = 961$$

$$m_2 = \frac{-1 - 1\,923}{2} = -962$$

Summa kasvaa kun siihen lisätään positiivisia yhteenlaskettavia. Lisäksi $m \geq 0$, joten luku $m \leq 961$.

<u>Vastaus</u>: Suurin luku on 961.

375.

Aritmeettisen lukujonon *n*:n ensimmäisen termin summa $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

Lukujonon *n*:s termi $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Peräkkäisten termien erotus $d = 2$

$$a_{999} = 2 + (999 - 1) \cdot 2 = 2 + 998 \cdot 2 = 1\,998$$

$$S_{999} = 999 \cdot \frac{2 + 1\,998}{2} = 999\,000$$

$$a_{888} = 2 + (888 - 1) \cdot 2 = 1\,776$$

$$S_{888} = 888 \cdot \frac{2 + 1\,776}{2} = 789\,432$$

$$\frac{S_{999}}{S_{888}} = \frac{999\,000}{789\,432} = 1,265\ ...$$

Suurempi $126,5\ ...\ \% - 100\ \% \approx 26,5\ \%$

<u>Vastaus</u>: 26,5 % suurempi

376.

$S_n = n^2$
$S_1 = 1^2 = 1$
$S_2 = 2^2 = 4$
$S_3 = 3^2 = 9$
.
.
.
$a_1 = S_1 = 1$
$a_2 = S_2 - S_1 = 4 - 1 = 3$

$d = 3 - 1 = 2$
$a_n = a_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$

Vastaus: $a_n = 2n - 1,\ n \geq 1$

377.

Pylväitä $\frac{10\,000}{50} + 1 = 201$ kappaletta.

Urakoitsija joutuu hakemaan $\frac{201}{3} = 67$ kuormaa.

Kuljettu matka

$$\begin{aligned} s &= 2 \cdot (2+0{,}1) + 2 \cdot (2+0{,}25) + 2 \cdot (2+0{,}4) + ... + 2 \cdot (2+10) \\ &= 2 \cdot (2{,}1 + 2{,}25 + 2{,}4 + ... + 12) \\ &= 2 \cdot 67 \cdot \frac{2{,}1+12}{2} \\ &= 945 \end{aligned}$$

Vastaus: Urakoitsija joutuu kulkemaan 945 kilometrin matkan.

378.

Halkaisijoita vastaavat säteet ovat 2,25 cm ja 6,0 cm.

Kerrosten määrä on $\frac{6{,}0 - 2{,}25}{0{,}01} = 375$

Sisimmässä kerroksessa on paperia $\pi \cdot 4{,}5$ cm
2. kerroksessa " " $\pi \cdot 4{,}52$ cm
3. " " " $\pi \cdot 4{,}54$ cm
4. " " " $\pi \cdot 4{,}56$ cm
.
.
.
Viimeisessä kerroksessa " " $\pi \cdot 12$ cm

Paperin määrä muodostaa aritmeettisen lukujonon, jossa erotusluku
$d = \pi \cdot 4{,}52 - \pi \cdot 4{,}5 = \pi \cdot (4{,}52 - 4{,}5) = \pi \cdot 0{,}02$

Jonon termien määrä on sama kuin paperikerrosten määrä 375.
Paperin määrä saadaan lukujonon termien summana:

$$s_{375} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 375 \cdot \frac{\pi \cdot 4{,}5 + \pi \cdot 12}{2} \text{ cm} \approx 9\,700 \text{ cm} = 97 \text{ m}$$

Vastaus: Rullassa on 97 m paperia.

379.
Kävelymatkat muodostavat aritmeettisen lukujonon.
Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen termi $a_1 = 50$
Kahden peräkkäisen termin erotus $d = 100$
Yhteenlaskettavien määrä $n = 30$
Viimeisen päivän kävely matka $a_{30} = a_1 + (n-1)d = 50 + 29 \cdot 100 = 2950$
Summa $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_{30}}{2} = 30 \cdot \frac{50 + 2950}{2}$ m = 45000 m = 45 km

Vastaus: Toipilas käveli 45 km.

Geometrinen summa

380. a)

$$q = \frac{32 \cdot (\frac{1}{2})^{n+1-1}}{32 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{5} 32 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = 32 \cdot (\frac{1}{2})^{1-1} \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^5}{1-\frac{1}{2}} = 62$$

b)

$$q = \frac{3 \cdot (-2)^{n+1-1}}{3 \cdot (-2)^{n-1}} = -2$$

$$\sum_{n=1}^{7} 3 \cdot (-2)^{n-1} = 3 \cdot (-2)^{1-1} \cdot \frac{1-(-2)^7}{1-(-2)} = 129$$

c)

$$q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$S_9 = 8 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^9}{1-\frac{1}{2}} = 15\frac{31}{32}$$

Vastaus: a) 62 b) 129 c) $15\frac{31}{32}$

381.

$$S_n = \frac{3367}{64}$$

$$\frac{16\cdot[1-(\frac{3}{4})^n]}{1-\frac{3}{4}}=\frac{3\ 367}{64}$$

$$1\ 024\cdot[1-(\frac{3}{4})^n]=\frac{3\ 367}{4}$$

$$1-(\frac{3}{4})^n=\frac{3\ 367}{4\ 096}$$

$$(\frac{3}{4})^n=\frac{729}{4\ 096}$$

$$(\frac{3}{4})^n=(\frac{3}{4})^6 \qquad \Big|\ \text{sama kantaluku, eksponentit yhtä suuret}$$

$$n=6$$

Vastaus: 6

382. Geometrisen lukujonon 1. jäsen on 6 ja 8. jäsen on 98 304. Laske S_8.

$$a_8=a_1q^7$$

$$98\ 304=6\cdot q^7$$

$$q=\sqrt[7]{16\ 384}$$

$$q=4$$

$$S_8=\frac{6\cdot(1-4^8)}{1-4}=131\ 070$$

Vastaus: 131 070

383.

$$q=\frac{5\cdot 3^{n+1-1}}{5\cdot 3^{n-1}}=3$$

$$\sum_{n=1}^{k}5\cdot 3^{n-1}>1000\,000$$

$$\frac{5\cdot 3^{1-1}\cdot(1-3^k)}{1-3}>1000\,000 \qquad \Big|\ \cdot(-2)$$

$$5\cdot(1-3^k)<-2\,000\,000$$

$$1-3^k<-400\,000$$

$$-3^k<-400\,001$$

$$3^k>400\,001 \qquad \Big|\ \ln(\,)$$

$$\ln 3^k>\ln 400\,001$$

$$k\ln 3>\ln 400\,001 \qquad \Big|\ :\ln 3>0$$

$$k>\frac{\ln 400\,001}{\ln 3}=11,74...$$

Vastaus: 12

384.

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 \cdot (1-q^3)}{1-q} = 84 \quad \text{eli} \quad a_1 = \dfrac{84(1-q)}{1-q^3} \\ \dfrac{a_1 \cdot (1-q^6)}{1-q} = 756 \end{cases}$$

$$\frac{\dfrac{84(1-q)}{1-q^3} \cdot (1-q^6)}{1-q} = 756$$

$$\frac{1-q^6}{1-q^3} = 9$$

$$1-q^6 = 9-9q^3$$

$$-q^6 + 9q^3 - 8 = 0$$

Sijoitus $t = q^3$

$$-t^2 + 9t - 8 = 0$$

$$t = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$t = 1 \text{ tai } t = 8$$

Sijoitus $t = q^3$

$q^3 = 1$

$q = 1$

ei käy

$q^3 = 8$

$q = 2$

$$a_1 = \frac{84(1-2)}{1-2^3} = 10\frac{1}{2}$$

$$S_9 = \frac{10\frac{1}{2}(1-2^9)}{1-2} = 5\ 365\frac{1}{2}$$

<u>Vastaus</u>: $5\ 365\frac{1}{2}$

385.
a) Taulukoidaan särmän pituuksia.

Kuution järjestysnumero	Särmän pituus (m)
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$
…	
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b) Kuutioiden särmät muodostavat geometrisen jonon $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots,\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Peräkkäisten termien suhde $q=\frac{1}{2}$

Kymmenen ensimmäisen kuution pinon korkeus on geometrinen summa

$$S_{10}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}=\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1024}{1024}-\frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1\,023}{1024}}{\frac{1}{2}}=\frac{1023}{1024}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1023}{512}\approx 1{,}998$$

Taulukoidaan pinon korkeudet.

Kuutioiden määrä	Pinon korkeus (m)
11	$S_{11}=\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right)}{\frac{1}{2}}\approx 1{,}9990$
12	1,9995
13	1,9998
14	1,9999

Taulukosta nähdään, että pinon korkeus näyttää lähestyvän arvoa 2 m.

Vastaus: a) Pituudet ovat metreinä 1, $\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ ja $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. b) Pino on 1,998 m korkea ja pinon korkeus näyttää lähestyvän arvoa 2 m, kun kuutioiden määrä kasvaa rajatta.

386. Kumpanakin vuotena talletus tapahtuu kuukausittain, joten vuoden aikana kyseessä on yksinkertainen korko.
Vuoden aikana kertynyt pääoma on aina sama. Lasketaan vuotuinen pääoma.

$$r = kit \qquad \Big| \; k = 25 \text{ €}, i = 0,0112,\; t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, \frac{12}{12}$$

$$r = 25 \text{ €} \cdot 0,0112 \cdot \frac{12}{12} + \ldots + 25 \text{ €} \cdot 0,012 \cdot \frac{1}{12} = 25 \text{ €} \cdot 0,0112 \cdot \frac{1}{12}(\underbrace{12 + 11 + \ldots + 1}_{\text{aritmeettinen summa}}) \qquad \Big| \; S = n \cdot \frac{a_n + a_1}{2}$$

$$= 25 \text{ €} \cdot 0,0112 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{12+1}{2} \cdot 12 = 1,82 \text{ €}$$

Vuotuinen pääoma $12 \cdot 25 \text{ €} + 1,82 \text{ €} = 301,82 \text{ €}$

Tämä talletus on tilillä vielä vuoden, joten se tulee 100 %+1,12 % = 1,0112-kertaiseksi.
Lopullinen pääoma $1,0112 \cdot 301,82 \text{ €} + 301,82 \text{ €} = 607,02 \text{ €}$

Vastaus: 607,02 €

387. Kyseessä on yksinkertainen korko.
Talletetta summa x €
Korkokanta 0,0245
Pääoma vuoden lopussa 2 000 €
Vero 29 %, joten korosta saa 100 %–29 % = 71 %
Pääoma

$$K = 0,71 \cdot \sum_{j=1}^{12} kit_j + 12k$$

$$= 0,71x \cdot 0,0245 \cdot (\underbrace{\frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \ldots + \frac{12}{12}}_{\text{aritmeettinen summa}}) + 12x$$

$$= x \cdot 0,0245 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1+12}{2} \cdot 12 + 12x = 12,1130675x$$

Saadaan yhtälö

$$12,1130675x = 2\,000$$
$$x = 165,11$$

Vastaus: 165,11 €

388. Tasalyhennyslaina eli lyhennys joka kerta sama.
Aika korkokausina 1

Lyhennyskertoja 5, joten lyhennys $\frac{5\ 000 \text{ €}}{5} = 1\ 000 \text{ €}$.

Korko maksetaan aina jäljellä olevasta pääomasta, $r = kit$, $i = 0,045$

Erä	Lainaa jäljellä (€)	Korko $r = kit$ (€)	Lyhennys (€)	Maksuerä (€)
1	5 000	$5\ 000 \cdot 0,045 \cdot 1 = 225$	1 000	1 000 + 225 = 1 225
2	5 000 – 1 000 = 4 000	$4\ 000 \cdot 0,045 \cdot 1 = 180$	1 000	1 000 + 180 = 1 180
3	4 000 – 1 000 = 3 000	$3\ 000 \cdot 0,045 \cdot 1 = 135$	1 000	1 000 + 135 = 1 135
4	3 000 – 1 000 = 2 000	$2\ 000 \cdot 0,045 \cdot 1 = 90$	1 000	1 000 + 90 = 1 090
5	2 000 – 1 000 = 1 000	$1\ 000 \cdot 0,045 \cdot 1 = 45$	1 000	1 000 + 45 = 1 045

389. a) Annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \Big|\ K = 5\ 000\ €, q = 100\ \% + 4,5\ \% = 1,045, n = 5$$

$$A = 5\ 000\ € \cdot 1,045^5 \frac{1-1,045}{1-1,045^5} \approx 1\,138,96\ €$$

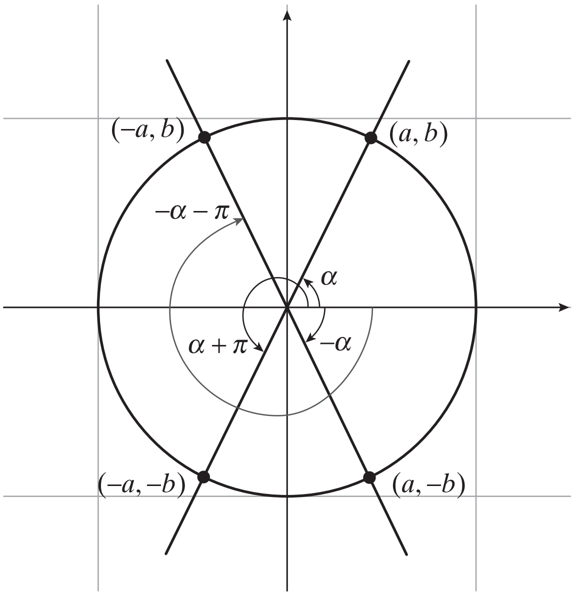
b) Tasalyhennyslainan kokonaiskorkoprosentti $\frac{225+180+135+90+45}{5\ 000} = 13,5\ \%$

c) Tasaerälainan kokonaiskorko $\frac{5 \cdot A - K}{K} = \frac{5 \cdot 1\,138,96\ € - 5\ 000\,€}{5\ 000\,€} \approx 13,9\ \%$

Vastaus: a) Annuiteetti 1 138,96 € b) Kokonaiskorko 13,5 % c) Kokonaiskorko 13,9 %

Harjoituskoe 1

1.



Kulman sini on kehäpisteen *y*-koordinaatti, eli $\sin\alpha = b$
Kulman kosini on kehäpisteen *x*-koordinaatti, eli $\cos\alpha = a$

$$\tan(-\alpha - \pi) = \frac{\sin(-\alpha - \pi)}{\cos(-\alpha - \pi)} = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$$

<u>Vastaus</u>: $\sin\alpha = b$, $\cos\alpha = a$, $\tan(-\alpha - \pi) = -\frac{b}{a}$

2. a)

$$\sin x = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$x = x + \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - (x + \frac{\pi}{4}) + n \cdot 2\pi$

$0 = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ | epätosi, $n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $2x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$

ei ratkaisua $\quad$ $x = \frac{3\pi}{8} + n \cdot \pi$

b)

$$\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos x = 0$$

$$\cos x(\cos x - \frac{1}{2}) = 0$$

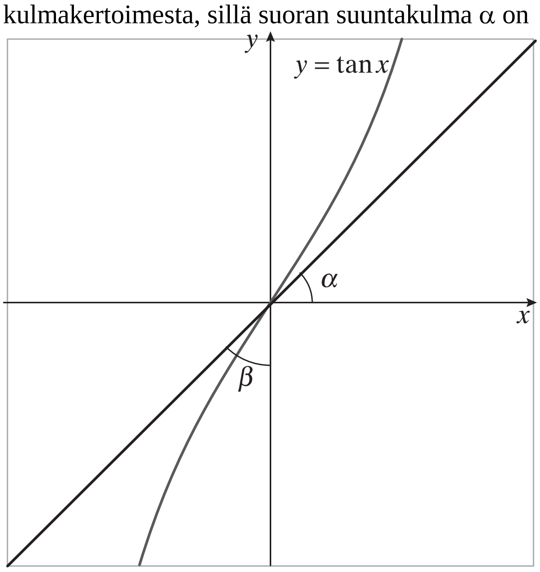
$$\cos x = 0 \quad \text{tai} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{2} \qquad \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi \qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$$

Vastaus: a) $x = \frac{3\pi}{8} + n\cdot\pi$, $n\in\mathbb{Z}$ b) $x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$ tai $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$, $n\in\mathbb{Z}$

3. Funktio $f(x) = \tan x$ ja y-akselin leikkauspiste on $\tan 0 = 0$, eli (0, 0).
Kuvaajan ja x-akselin leikkauskulma saadaan kuvaajalle piirretyn sivuajan (tangentin) kulmakertoimesta, sillä suoran suuntakulma α on $k = \tan\alpha$ ko. kohdassa.



Funktion kohtaan x = 0 piirretyn tangentin kulmakerroin on $k_t = f'(0)$

Funktion $f(x) = \tan x$ derivaatta $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

Kulmakerroin $k_t = f'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1$

Sivuajan suuntakulma $k_t = \tan\alpha = 1$, eli $\alpha = 45^\circ$

Näin ollen funktio $f(x) = \tan x$ leikkaa y-akselin 45 asteen kulmassa.

Vastaus: 45°

4. Lukujono $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$.

Lukujonon termin osoittaja alkaa luvusta 1 ja seuraava on aina yhtä isompi. Termin nimittäjä alkaa luvusta 2 ja seuraava on aina yhtä isompi. Yleinen termi $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Poikkeaminen luvusta 1

$$
\begin{aligned}
|a_n - 1| &< \frac{1}{10\ 000} \\
\left|\frac{n}{n+1} - {}^{n+1)}1\right| &< \frac{1}{10\ 000} \\
\left|\frac{-1}{n+1}\right| &< \frac{1}{10\ 000} && \Big|\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ |-1| = 1,\ |n+1| = n+1,\ n \geq 1 \\
\frac{1}{n+1} &< \frac{1}{10\ 000} && \Big|\ \cdot 10\ 000(n+1) > 0 \\
n+1 &> 10\ 000 \\
n &> 10\ 000 - 1 && \Big|\ n \in \mathbb{Z}_+ \\
n &\geq 10\ 000
\end{aligned}
$$

<u>Vastaus</u>: Yleinen termi $a_n = \frac{n}{n+1}$, n:n arvosta 10 000 lähtien.

5. Lukujono $a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, sisältyy funktioon $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Haetaan kohta, jossa funktio $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = \frac{x-1}{x^3}$ saavutaan suurimman arvonsa.

Funktio $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ on jatkuva ja derivoituva, kun $x \in \mathbb{R}_+$. Sen suurin arvo sijaitsee joko derivaatan nollakohdassa tai kohdassa, jossa derivaatta ei ole määritelty.

Derivaattafunktio $f'(x) = \frac{1 \cdot x^3 - (x-1) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-2x^3 + 3x^2}{x^6}$ on määritelty, kun $x \in \mathbb{R}_+$.

Derivaatan nollakohdat

$$\frac{-2x^3+3x^2}{x^6}=0$$

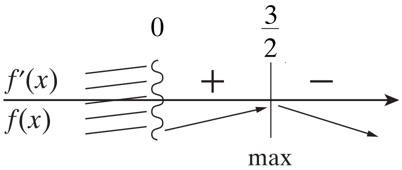
$$-2x^3+3x^2=0$$

$$x^2(-2x+3)=0$$

$$x^2=0 \qquad \text{tai} \qquad -2x+3=0$$

$$x=0 \quad \Big| \text{ ei käy, } x\in\mathbb{R}_+ \qquad\qquad x=\frac{3}{2}$$

Kulkukaavio

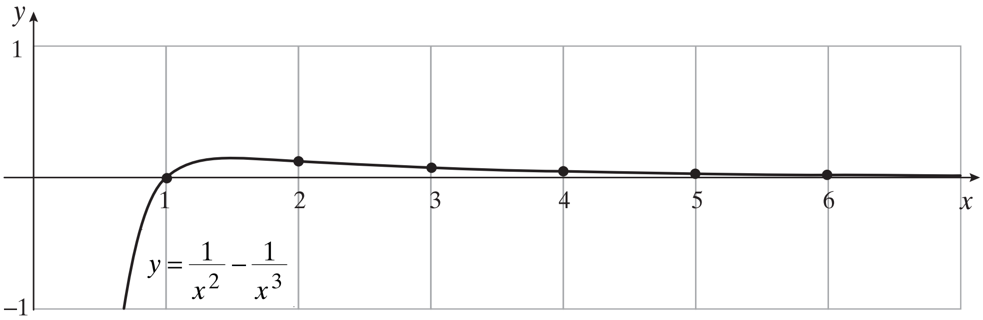


$$f'(x)=\frac{-2x^3+3x^2}{x^6}$$

$$f'(1)=\frac{-2\cdot 1^3+3\cdot 1^2}{1^6}=1>0$$

$$f'(2)=\frac{-2\cdot 2^3+3\cdot 2^2}{2^6}=-0,0625<0$$

Funktion $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$ suurin arvo sijaitsee ainoassa maksimikohdassa $x=\frac{3}{2}$.



Koska lukujono sisältyy funktioon, sen suurin termi saavutetaan, kun n = 1 tai n =2.

$$a_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}$$

$$a_1=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{1^3}=0$$

$$a_2=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

<u>Vastaus</u>: Suurin jäsen on $\frac{1}{8}$

6. a) Ensimmäinen talletus on tilillä 12 kuukautta, toinen 11, kolmas 10 ja niin edelleen. Alle korkokauden talletus, joten yksinkertainen korko.

$r = kit \quad \Big| \; k = 10\text{ €}, i = 0{,}03,\; t = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, \frac{12}{12}$

$$r = 10\text{ €} \cdot 0{,}03 \cdot \frac{12}{12} + 10\text{ €} \cdot 0{,}03 \cdot \frac{11}{12} + \ldots + 10\text{ €} \cdot 0{,}03 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= 10\text{ €} \cdot 0{,}03 \cdot \frac{1}{12}(\underbrace{12 + 11 + \ldots + 1}_{\text{aritmeettinen summa}}) \qquad \Big| \; S = n \cdot \frac{a_n + a_1}{2}$$

$$r = 10\text{ €} \cdot 0{,}03 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{12+1}{2} \cdot 12 = 1{,}95\text{ €}$$

Pääoma on $12 \cdot 10\text{ €} + 1{,}95\text{ €} = 121{,}95\text{ €}$

b) Ensimmäisen vuoden pääoma on tilillä vielä neljä vuotta, joten kyseessä korkoa korolle. Lopullinen pääoma

$K = kq^t \quad \Big| \; k = 121{,}95\text{ €},\; q = 100\text{ \%} + 3\text{ \%} = 1{,}03,\; tg = 4$

$$K = 121{,}95\text{ €} \cdot 1{,}03^4 \approx 137{,}26\text{ €}$$

<u>Vastaus</u>: a) 121,95 € b) 137,26€

7. Ruokapussi p

Alussa päivittäinen annos keskimäärin $\frac{p}{10}$

Kulutus tuli kasvoi 5 % joka päivä, eli tuli 100 % + 5 % = 1,05-kertaiseksi joka päivä. Uudella kulutuksella ruokapussi kestää x päivää

$$\underbrace{\frac{p}{10} + 1{,}05 \cdot \frac{p}{10} + 1{,}05^2 \cdot \frac{p}{10} + \ldots + 1{,}05^x \cdot \frac{p}{10}}_{\text{geometrinen summa}} = p \qquad \Big| \; S = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\frac{p}{10} \cdot \frac{1 - 1{,}05^{x+1}}{1 - 1{,}05} = p \qquad \Big| \; : \frac{p}{10(1-1{,}05)}$$

$$1 - 1{,}05^{x+1} = -0{,}5$$

$$1{,}05^{x+1} = 1{,}5 \qquad \Big| \; \lg()$$

$$\lg 1{,}05^{x+1} = \lg 1{,}5$$

$$(x+1)\lg 1{,}05 = \lg 1{,}5$$

$$x = \frac{\lg 1{,}5}{\lg 1{,}05} - 1$$

$$x = 7{,}310\ldots$$

<u>Vastaus</u>: 7 päivää

8. On osoitettava, että $\cos x+\frac{1}{2}x^2>1$, kun $x\neq 0$

Tarkastellaan funktiota $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$. Funktio on jatkuva ja derivoituva, kun $x\in\mathbb{R}$.

Derivaatta $f'(x)=-\sin x+x$.

Koska derivaatan kaikkia nollakohtia on vaikea löytää, tarkastellaan derivaattafunktion kulkua.

Merkitään derivaattafunktiota $g(x)=f'(x)=-\sin x+x$.

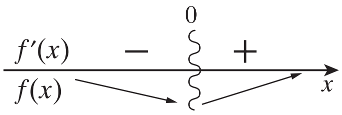
Funktion $g(x)$ derivaatta $g'(x)=-\cos x+1$. Koska $-1\leq\cos x\leq 1$ aina, niin $g'(x)\geq 0$ ja yhtä suuruus on voimassa vain yksittäisissä pisteissä. Näin ollen funktio $g(x)=f'(x)=-\sin x+x$ on aidosti kasvava, kun $x\in\mathbb{R}$.

Koska derivaattafunktio $f'(x)=-\sin x+x$ on aidosti kasvava, niin sillä on korkeitaan yksi nollakohta.

Huomataan, että $f'(0)=\sin 0+0=0$, joten ainoa nollakohta on $x = 0$.

Koska derivaattafunktio on aidosti kasvava ja jatkuva, niin merkit $-\rightarrow+$

Merkkikaavio



Funktion $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$ pienin arvo sijaitsee ainoassa minimikohdassa $x=0$.

Koska oletettiin, että $x\neq 0$, niin tätä arvoa funktio ei koskaan saavuta. Lasketaan funktion arvo, kun $f(0)=\cos 0+\frac{1}{2}\cdot 0-1=1-1=0$.

Näin ollen $f(x)>0$ aina, kun $x\neq 0$, joten $\cos x+\frac{1}{2}x^2-1>0$ eli $\cos x+\frac{1}{2}x^2>1$, kun $x\neq 0$. $\square$

Harjoituskoe 2

1. a) Lukujono 1, 5, 9, …
Yleinen termi $a_n = 4n - 3$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Lukujono $\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, -\frac{4}{11}, \ldots$

Yleinen termi $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{3n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

c) Lukujono $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 3}$
Lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä
$a_1 = 1$
$a_2 = \sqrt{a_1 + 3} = \sqrt{1+3} = 2$
$a_3 = \sqrt{a_2 + 3} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$
$a_4 = \sqrt{a_3 + 3} = \sqrt{\sqrt{5}+3} \approx 2,2882$
neljäs jäsen ja sen likiarvo neljän desimaalin tarkkuudella.

<u>Vastaus</u>: Yleinen termi on a) $a_n = 4n - 3$ b) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{3n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

c) Lukujonon 4. jäsen on $\sqrt{\sqrt{5}+3} \approx 2,2882$.

2. Lukujono $\frac{1}{1}, \frac{2}{4}, \frac{3}{7}, \frac{4}{10}, \ldots$

Yleinen termi $a_n = \dfrac{n}{3n-2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lukujonon raja-arvo $\frac{1}{3}$.

Poikkeama raja-arvosta vähemmän kuin 0,0001

$$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < 0,0001$$

$$\left|{}^{3)}\frac{n}{3n-2} - {}^{3n-2)}\frac{1}{3}\right| < 0,0001$$

$$\left|\frac{3n-(3n-2)}{3(3n-2)}\right| < 0,0001$$

$$\left|\frac{2}{9n-6}\right| < 0,0001 \quad \| \, |9n-6| > 0$$

$$\frac{2}{9n-6} < 0,0001 \quad \left| \cdot (9n-6) > 0 \right.$$

$$0,0001 \cdot (9n-6) > 2 \quad \left| : 0,0001 \right.$$

$$9n - 6 > 20\,000$$

$$9n > 20\,006 \quad \left| : 9 \right.$$

$$n > 2\,222,88...$$

n:n arvosta 2 223 lähtien lukujonon jäsenet poikkeavat raja-arvostaan vähemmän kuin 0,0001.

Vastaus: Yleinen termi on $a_n = \dfrac{n}{3n-2}$, n = 1, 2, 3,…. n:n arvosta 2 223 lähtien lukujonon jäsenet poikkeavat raja-arvostaan vähemmän kuin 0,0001.

3. Lukujono $a_1 = 2$ ja $a_{n+1} = 3a_n - 1$.
Lukujonon lauseke analyyttisessä muodossa
$a_1 = 2$
$a_2 = 3\cdot 2 - 1$
$a_3 = 3\cdot(3\cdot 2 - 1) - 1 = 2\cdot 3^2 - 3 - 1$
$a_4 = 3\cdot(2\cdot 3^2 - 3 - 1) - 1 = 2\cdot 3^3 - 3^2 - 3 - 1$
$a_5 = 3\cdot(2\cdot 3^2 - 2\cdot 3^2 - 3 - 1) - 1 = 2\cdot 3^4 - 3^3 - 3^2 - 3 - 1$
$\vdots$

$$a_n = 2\cdot 3^{n-1} - 3^{n-2} - 3^{n-3} - ... - 3^2 - 3 - 1$$

$$= 2\cdot 3^{n-1} - (\underbrace{3^{n-2} + 3^{n-3} + ... + 3^2 + 3 + 1}_{\text{Geometrinen summa}}) \quad \left| S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, a_1 = 1, q = 3 \right.$$

$$= 2\cdot 3^{n-1} - \frac{1\cdot(1-3^{n-1})}{1-3}$$

$$= 2\cdot 3^{n-1} + \frac{1-3^{n-1}}{2}$$

$$= 2\cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{3^{n-1}}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3^n + 1\right)$$

Vastaus: Lukujonon yleinen termi $a_n = \dfrac{1}{2}\left(3^n + 1\right)$, n = 1, 2, 3,….

4. Talletuksen k määrä ajan t kuluttua on $K = kq^t$
Korkotekijä q = 1,0225

	Pääoma vuoden lopussa
1. talletus k	$k \cdot 1{,}0225^4$
2. talletus k	$k \cdot 1{,}0225^3$
3. talletus k	$k \cdot 1{,}0225^2$
4. talletus k	$k \cdot 1{,}0225$

Talletusten pääoma yhteensä on 15 000 €, joten

$$k \cdot 1{,}0225^4 + k \cdot 1{,}0225^3 + k \cdot 1{,}0225^2 + k \cdot 1{,}0225 = 15\,000$$

$$k \cdot (1{,}0225^4 + 1{,}0225^3 + 1{,}0225^2 + 1{,}0225) = 15\,000 \quad \left| \begin{array}{l} S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}, \quad a_1 = 1{,}0225 \\ q = 1{,}0225,\ n = 4 \end{array} \right.$$

$$k \cdot 1{,}0225 \cdot \frac{1-1{,}0225^4}{1-1{,}0225} = 15\,000 \quad \left| : \left(1{,}0225 \cdot \frac{1-1{,}0225^4}{1-1{,}0225}\right) \right.$$

$$k = \frac{15\,000}{1{,}0225} \cdot \frac{1-1{,}0225}{1-1{,}0225^4}$$

$$k \approx 3\,546{,}00$$

Vastaus: Kertatalletuksen suuruus on 3 546,00 €.

5. Sinin ja kosinin välinen yhteys

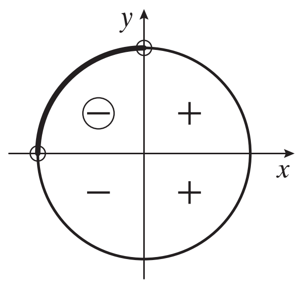
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \left| \ \sin\alpha = \frac{20}{29} \right.$$

$$\left(\frac{20}{29}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{441}{841} \quad \left| \sqrt{\ } \right.$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{21}{29} \qquad |90° < \alpha < 180°$$

$$\cos\alpha = -\frac{21}{29}$$



Tangentti $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{20}{29}}{-\frac{21}{29}} = -\dfrac{20}{29} : \dfrac{21}{29} = -\dfrac{20}{29} \cdot \dfrac{29}{21} = -\dfrac{20}{21}$

Vastaus: Kysytyt arvot ovat cos α = $-\dfrac{21}{29}$, tan α = $-\dfrac{20}{21}$.

6. Ratkaistaan yhtälöt.

a) $2\sin 3x = 1 \quad |:2$

$\sin 3x = \frac{1}{2}$

$\sin 3x = \sin \frac{\pi}{6}$

$3x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad |:3 \quad$ tai $\quad 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad 3x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad |:3$

$x = \frac{5\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \Big| \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{3})\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$

$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} - x + n \cdot 2\pi \quad$ tai $\quad x + \frac{\pi}{2} = -\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) + n \cdot 2\pi$

$2x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad |:2 \qquad \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z} \qquad$ Ei ratkaisua

<u>Vastaus</u>: Yhtälön ratkaisu on a) $x = \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ tai $x = \frac{5\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

b) $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

7. Liikettä kuvaavat yhtälöt $x(t) = 15 - 10\sin 3t$ ja $y(t) = 15 + 30\sin(3t + 8)$

Kun $\quad y = 0$

$15 + 30\sin(3t + 8) = 0$

$30\sin(3t + 8) = -15 \quad |:2$

$\sin(3t + 8) = -\frac{1}{2}$

$\sin(3t + 8) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$3t - 8 = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad$ tai $\quad 3t - 8 = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + n \cdot 2\pi$

$$3t = 8 - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \Big| :3 \qquad 3t = 8 + \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \Big| :3$$

$$t = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad t = \frac{8}{3} + \frac{7\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

Paikka *x*-akselilla, kun $t = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

$$x(t) = 15 - 10\sin\left[3\left(\frac{8}{3} - \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right] = 15 - 10\sin\left(8 - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi\right) \approx 5{,}70$$

Paikka *x*-akselilla, kun $t = \frac{8}{3} + \frac{7\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

$$x(t) = 15 - 10\sin\left[3\left(\frac{8}{3} + \frac{7\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right] = 15 - 10\sin\left(8 + \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi\right) \approx 22{,}8$$

Vastaus: Paikka on joko 5,70 tai 22,8.

8. Lämpötilafunktio $T(t) = 7 - 11\cos\frac{\pi(t-4)}{12}$

Vuorokauden suurin lämpötila saadaan, kun $\cos\frac{\pi(t-4)}{12} = -1$.

Lämpötila on tällöin 7 – 11·(–1) = 18.

Vuorokauden pienin lämpötila saadaan, kun $\cos\frac{\pi(t-4)}{12} = 1$.

Lämpötila on tällöin 7 – 11·1 = –4.

Suurimman lämpötilan kellonaika

$$\cos\frac{\pi(t-4)}{12} = -1$$

$$\cos\frac{\pi(t-4)}{12} = \cos(-\pi)$$

$$\frac{\pi(t-4)}{12} = \pm\pi + n \cdot 2\pi \quad \Big| : \frac{\pi}{12}$$

$$t - 4 = \pm 12 + n \cdot 24$$

$$t = 16 + n \cdot 24 \quad \text{tai} \quad t = -8 + n \cdot 24$$

Lämpötila on suurin kello 16.

Pienimmänn lämpötilan kellonaika

$$\cos\frac{\pi(t-4)}{12} = 1$$

$$\cos\frac{\pi(t-4)}{12} = \cos 0$$

$$\frac{\pi(t-4)}{12} = \pm 0 + n \cdot 2\pi \quad \Big| : \frac{\pi}{12}$$

$$t - 4 = n \cdot 24$$

$$t = 4 + n \cdot 24$$

Lämpötila on suurin kello 4.

Vastaus: Lämpötila on suurimmillaan 18°C kello 16 ja pienimmillään –4°C kello 4.

Harjoituskoe 3

1.
a)
Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa $d = 2(n+1)-1-2n+1 = 2$

$$\sum_{n=1}^{15}(2n-1) = 15\cdot\frac{2\cdot 1-1+2\cdot 15-1}{2} = 225$$

b)

Kyseessä on geometrinen summa, jossa $q = \dfrac{2\cdot(\frac{2}{3})^{k+1}}{2\cdot(\frac{2}{3})^{k}} = \dfrac{2}{3}$

$$\sum_{k=0}^{10}[2\cdot(\frac{2}{3})^k] = \frac{2\cdot(\frac{2}{3})^0\cdot[1-(\frac{2}{3})^{11}]}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2\cdot[1-\frac{2048}{177147}]}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{350198}{177147}}{\frac{1}{3}} = \frac{350\,198}{59\,049}$$

Vastaus: a) 225 b) $\dfrac{350\,198}{59\,049}$

2. a)
$f(x) = \cos x^2$
$f\,'(x) = 2x\cdot(-\sin x^2) = -2x\sin x^2$

$$f\,'(\frac{\pi}{6}) = -2\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\sin(\frac{\pi}{6})^2 \approx 0{,}284$$

b)
$f(x) = x^2\tan 2x$
$f\,'(x) = 2x\tan 2x + 2x^2(1+\tan^2 2x)$

$$f'(\frac{\pi}{6}) = 2\cdot\frac{\pi}{6}\tan 2\cdot\frac{\pi}{6} + 2\cdot(\frac{\pi}{6})^2(1+\tan^2 2\cdot\frac{\pi}{6})$$
$$= \frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{3} + \frac{\pi^2}{18}[1+(\sqrt{3})^2]$$
$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi^2}{9}$$
$$\approx 4,01$$

Vastaus: a) 0,284 b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi^2}{9} \approx 4,01$

3.

Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa $d = \lg 3^{k+1} - \lg 3^k = \lg\frac{3^{k+1}}{3^k} = \lg 3$

$$\sum_{k=1}^{n}\lg 3^k = n\cdot\frac{\lg 3^1 + \lg 3^n}{2} = n\cdot\frac{\lg 3^{n+1}}{2} = \frac{\lg 3}{2}(n^2+n)$$

Vastaus: $\frac{\lg 3}{2}(n^2+n)$

4.

$$f(x) = \sin(\frac{\pi}{3}+5x)$$

$$f'(x) = 5\cdot\cos(\frac{\pi}{3}+5x)$$

$$5\cdot\cos(\frac{\pi}{3}+5x) = 0$$

$$\cos(\frac{\pi}{3}+5x) = 0$$

$$\frac{\pi}{3}+5x = \frac{\pi}{2}+n\pi$$

$$5x = \frac{\pi}{6}+n\pi$$

$$x = \frac{\pi}{30}+n\cdot\frac{\pi}{5}$$

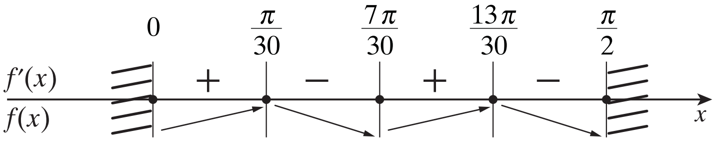
Välille $[0,\frac{\pi}{2}]$ kuuluvat derivaatan nollakohdat

$n = 0$: $\frac{\pi}{30}+0\cdot\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{30}$

$n = 1$: $\frac{\pi}{30}+1\cdot\frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{30}$

$n = 2:\ \dfrac{\pi}{30} + 2 \cdot \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{13\pi}{30}$

Kulkukaavio



Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $f(x) = \sin(\dfrac{\pi}{3} + 5x)$ on kasvava väleillä $[0, \dfrac{\pi}{30}]$ ja $[\dfrac{7\pi}{30}, \dfrac{13\pi}{30}]$

<u>Vastaus</u>: $[0, \dfrac{\pi}{30}]$ ja $[\dfrac{7\pi}{30}, \dfrac{13\pi}{30}]$

5.
$y = x^2 + \sin x$
$y' = 2x - \cos x$

Kohtaan $x = \dfrac{\pi}{2}$ piirretyn tangentin kulmakerroin $y'(\dfrac{\pi}{2}) = 2 \cdot \dfrac{\pi}{2} - \cos\dfrac{\pi}{2} = \pi$

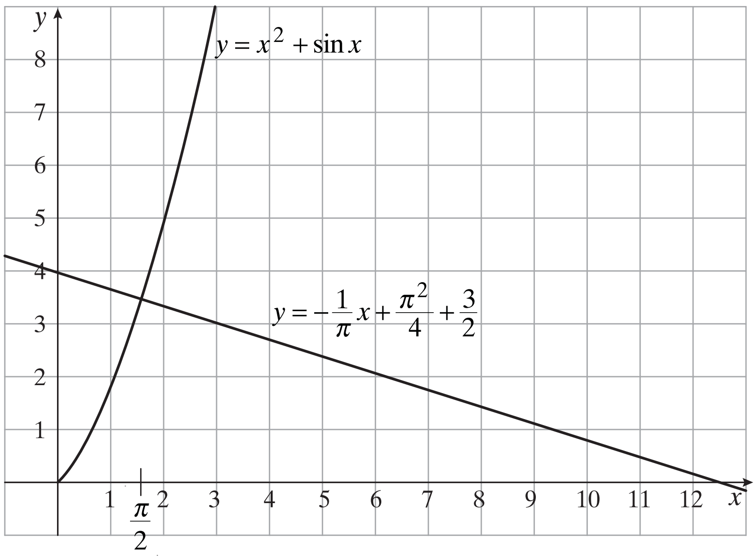
Kohtaan $x = \dfrac{\pi}{2}$ piirretyn normaalin kulmakerroin on $-\dfrac{1}{\pi}$.

$y(\dfrac{\pi}{2}) = (\dfrac{\pi}{2})^2 + \sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi^2}{4} + 1$

Pisteeseen $(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi^2}{4} + 1)$ piirretyn normaalin yhtälö

$$y - (\frac{\pi^2}{4} + 1) = -\frac{1}{\pi} \cdot (x - \frac{\pi}{2})$$

$$y = -\frac{1}{\pi} \cdot x + \frac{\pi^2}{4} + \frac{3}{2}$$



Vastaus: $y = -\frac{1}{\pi} \cdot x + \frac{\pi^2}{4} + \frac{3}{2}$

6.

$3\sin x - \cos 2x = 1$

$3\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 1$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

Sijoitetaan $t = \sin x$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2}$$

$$t_1 = -2$$

$$t_2 = \frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $t = \sin x$

$\sin x = -2$

ei käy, $-1 < \sin x < 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + n2\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$$

Vastaus: $x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$

7.
Lasketaan pääoman arvo vuosittain

1 vuoden kuluttua $1,045 \cdot 2\,000 - 150$

2 vuoden kuluttua $1,045 \cdot (1,045 \cdot 2\,000 - 150) - 150 = 1,045^2 \cdot 2\,000 - 1,045 \cdot 150 - 150$

3 vuoden kuluttua $1,045^3 \cdot 2\,000 - 1,045^2 \cdot 150 - 1,045 \cdot 150 - 150$

.
.
.

n vuoden kuluttua $1,045^n \cdot 2\,000 - 1,045^{n-1} \cdot 150 - 1,045^{n-2} \cdot 150 - \ldots - 1,045 \cdot 150 - 150$

$$= 1,045^n \cdot 2\,000 - 150 \cdot \underbrace{(1,045^{n-1} + 1,045^{n-2} + \ldots + 1,045 + 1)}_{\text{geometrinen summa}}$$

$$= 1,045^n \cdot 2\,000 - 150 \cdot \frac{1 \cdot (1 - 1,045^n)}{1 - 1,045}$$

Lasketaan milloin pääoma on nolla

$$1,045^n \cdot 2\,000 - 150 \cdot \frac{1 \cdot (1 - 1,045^n)}{1 - 1,045} = 0$$

$$1,045^n \cdot 2\,000 + \frac{10\,000}{3} \cdot (1 - 1,045^n) = 0$$

$$-\frac{4\,000}{3} \cdot 1,045^n = -\frac{10\,000}{3}$$

$$1,045^n = 2,5 \qquad \Big|\ \ln()$$

$$\ln 1,045^n = \ln 2,5$$

$$n \ln 1,045 = \ln 2,5$$

$$n = \frac{\ln 2,5}{\ln 1,045} = 20,81\ldots$$

Joten stipendejä voi myöntää 20 vuotena.

Vastaus: 20

8.
Astian tilavuus a

happoa alussa $\frac{1}{4}a$

happoa 1. täytön jälkeen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}a + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}a$

happoa 2. täytön jälkeen $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}a + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}a) + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}a = (\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{4}a + (\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{8}a + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}a$

happoa 3. täytön jälkeen

$$\frac{1}{2} \cdot [(\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{4}a + (\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{8}a] + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}a = (\frac{1}{2})^3 \cdot \frac{1}{4}a + (\frac{1}{2})^3 \cdot \frac{1}{8}a + (\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{8}a + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}a$$

.

.
.
happoa 10. täytön jälkeen

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\frac{1}{4}a+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\frac{1}{8}a+\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\cdot\frac{1}{8}a+\ldots+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}a=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\frac{1}{4}a+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\left(\frac{1}{2}\right)^{9}+\ldots+\frac{1}{2}\right]\cdot\frac{1}{8}a$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\frac{1}{4}a+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{8}a$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\frac{1}{4}a+\frac{1023}{1024}\cdot\frac{1}{8}a$$

$$=\frac{1025}{8192}a$$

happoa *n*. täytön jälkeen

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{4}a+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots+\frac{1}{2}\right]\cdot\frac{1}{8}a$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{4}a+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{8}a$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{4}a+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]\cdot\frac{1}{8}a$$

Kun n kasvaa rajatta $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ lähestyy nollaa ja $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ lähestyy luku 1, joten
$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{4}a+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]\cdot\frac{1}{8}a$ lähestyy lukua $\frac{1}{8}a$

<u>Vastaus</u>: $\frac{1025}{8192}$ ja $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{4}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]\cdot\frac{1}{8}$ sekä $\frac{1}{8}$

MAA9 Koe 1

1. Piirrä yksikköympyrä ja merkitse siihen suunnattukulma α, $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$. Olkoon kulman α kehäpisteen koordinaatit (a, b). Määritä tämän avulla $\sin\alpha$, $\cot(\alpha+\pi), \tan(-\alpha-\pi)$ ja $\sin(-2\alpha)$.

2. Määritä derivaatan nollakohdat.
a) $f(x) = \sin^2 x + \sin x + \pi$ b) $f(x) = \tan x^2$

3. a) Laske jonon 3, 6, 9, 12, 15, ... n:n ensimmäisen termin summa.
b) Laske summa $\sum_{n=1}^{900} \frac{n^2+n}{n}$.

4. Tarkastellaan lukujonoa $x_n = \frac{2n+1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.
a) Osoita, että lukujono on vähenevä.
b) Määritä lukujonon suurin termi.
c) Mistä n:n arvosta alkaen lukujonon, jäsenet eroavat luvusta kaksi vähemmän kuin yhden miljardisosan?

5. Laske funktiolle $f(x) = \cos x + \sin^2 x$ kohtaan $x = \frac{\pi}{2}$ piirrettyjen tangentin ja normaalin y-akselilta rajaaman janan pituus.

6. Määritä funktion $f(x) = \cos(\cos x)$ a) nollakohdat b) derivaatan nollakohdat.

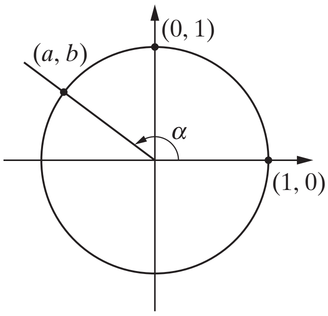
7. Erästä eläinpopulaatiota tarkkailtaessa havaittiin, että populaatio lisääntyi vuodessa 5,0 %. Tämän eläinpopulaation kuolleisuus vuodessa oli keskimäärin 50 yksilöä. Tarkkailun alussa eläinpopulaation koko oli 1 500 yksilöä.
Tutkitaan jonoa $a_1, a_2, \ldots$, missä a_n ilmaisee populaation yksilömäärän vuonna n tarkkailun alusta. Määritä jonon rekursiivinen ja analyyttinen sääntö.

8. n kappaletta sellaisia tasasivuisia kolmioita, joiden pinta-ala on aina puolet edellisestä, piirretään vierekkäin koordinaatistoon, kantasivut kiinni toisissaan (eli kolmion kannan loppupiste on kiinni seuraavan kolmion kannan alkupisteessä). Kolmioiden kannat ovat positiivisella x-akselilla ja suurimman kolmion kannan alkupiste on origossa. Laske kantojen muodostaman janan pituus. Mikä luvun n pitää vähintään olla, jotta janan pituus on ainakin kolminkertainen suurimman kolmion kantaan nähden?

MAA9 Koe 1 Ratkaisut

1. Piirrä yksikköympyrä ja merkitse siihen suunnattukulma $\alpha,\ \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Olkoon kulman α kehäpisteen koordinaatit (a, b). Määritä tämän avulla
$\sin\alpha,\ \cot(\alpha+\pi), \tan(-\alpha-\pi)$ ja $\sin(-2\alpha)$.

Ratkaisu:



Kulman sini on kehäpisteen y-koordinaatti: $\sin\alpha = b$
Kulman kosini on kehäpisteen x-koordinaatti: $\cos\alpha = a$

$$\cot(\alpha+\pi) = \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\tan(-\alpha-\pi) = \tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}$$

$$\sin(-2\alpha) = 2\sin(-\alpha)\cos(-\alpha) = 2\cdot(-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha = 2\cdot(-b)\cdot a = -2ab$$

<u>Vastaus:</u> $\sin\alpha = b$, $\cot(\alpha+\pi) = \frac{a}{b}$, $\tan(-\alpha-\pi) = -\frac{b}{a}$, $\sin(-2\alpha) = -2ab$

2. Määritä derivaatan nollakohdat.

a) $f(x) = \sin^2 x + \sin x + \pi$ b) $f(x) = \tan x^2$

Ratkaisu:

a) Funktio $f(x) = \sin^2 x + \sin x + \pi$
Derivatta $f'(x) = \cos x\cdot 2\sin x + \cos x = 2\sin x\cos x + \cos x$
Derivaatan nollakohdat

$$2\sin x\cos x + \cos x = 0$$
$$\cos x(2\sin x + 1) = 0$$
$$\cos x = 0 \quad \text{tai} \quad 2\sin x + 1 = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi \qquad \sin x = -\frac{1}{2}$$
$$\sin x = \sin\frac{7\pi}{6}$$

$x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{11\pi}{6}$ +n $\cdot 2\pi$

b) Funktio $f(x) = \tan x^2$, $x^2 \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

Derivaatta $f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 x^2}$

Derivaatan nollakohdat

$$2x \cdot \frac{1}{\cos^2 x^2} = 0$$
$$2x = 0$$
$$x = 0$$

Kun x = 0, niin $x^2 \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, koska $n \in \mathbb{Z}$.

Vastaus: a) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ tai $x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{11\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

3. a) Laske jonon 3, 6, 9, 12, 15, ... n:n ensimmäisen termin summa.

b) Laske summa $\sum_{n=1}^{900} \frac{n^2 + n}{n}$.

Ratkaisu

a) Jono 3,6,9,12,15... aritmeettinen, koska peräkkäisten jäsenten erotus d = 3 on vakio.

Jono on muotoa $3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2,\ 3 \cdot 3, \ldots 3 \cdot n$

Summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{3 + 3n}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$$

b) Summa $\sum_{n=1}^{900} \frac{n^2 + n}{n} = \sum_{n=1}^{900} (n+1)$

Kyseessä on aritmeettisen jonon summa, sillä peräkkäisten termien erotus on vakio:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1) + 1 - (n+1) = 1$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \quad \Big| \; a_1 = 1 + 1 = 2,\ a_{900} = 900 + 1 = 901$$

$$S_{900} = 900 \cdot \frac{2 + 901}{2} = 406\ 350$$

Vastaus: a) $\frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$ b) 406 350

4. Tarkastellaan lukujonoa $x_n = \dfrac{2n+1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

a) Osoita, että lukujono on vähenevä.
b) Määritä lukujonon suurin termi.
c) Mistä n:n arvosta alkaen lukujonon, jäsenet eroavat luvusta kaksi vähemmän kuin yhden miljardisosan?

Ratkaisu:

a) Lukujono $f(n) = \dfrac{2n+1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, sisältyy funktioon $f(x) = \dfrac{2x+1}{x} = 2 + \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$.
Tutkitaan funktiota $f(x)$

Funktio $f(x) = \dfrac{2x+1}{x} = 2 + \dfrac{1}{x}$ on jatkuva ja derivoituva, kun $x \in \mathbb{R}_+$.

Derivaatta $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ aina, kun $x \in \mathbb{R}_+$, joten funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä, kun $x \in \mathbb{R}_+$.

Näin ollen lukujono, joka sisältyy funktioon $f(x)$, $f(n) = \dfrac{2n+1}{n}$ on vähenevä, kun $n \in \mathbb{Z}_+$.

b) Koska lukujono on vähenevä, sen suurin termi saadaan pienimmällä n:n arvolla.

Suurin termi, kun $n = 1$: $x_1 = \dfrac{2 \cdot 1 + 1}{1} = 3$

c) Lukujonon jäsenet eroavat luvusta kaksi vähemmän kuin yhden miljardisosan

$$|x_n - 2| < 10^{-9}$$
$$\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| < 10^{-9}$$
$$\left|\frac{1}{n}\right| < 10^{-9} \qquad \mid n > 0$$
$$\frac{1}{n} < 10^{-9}$$
$$n > 10^9$$

eli arvosta miljardiyksi lähtien.
<u>Vastaus</u>: b) Suurin termi on 3   c) 1 000 000 001

5. Laske funktiolle $f(x) = \cos x + \sin^2 x$ kohtaan $x = \frac{\pi}{2}$ piirrettyjen tangentin ja normaalin y-akselilta rajaaman janan pituus.

Ratkaisu:
Määritetään tangentin yhtälö.

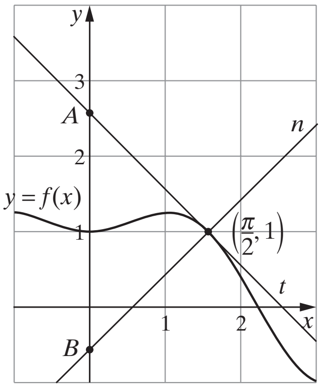
Funktion kohtaan $x = \frac{\pi}{2}$ piirrettyjen tangentin kulmakerroin on $f'(\frac{\pi}{2})$.

Funktion derivaatta

$f'(x) = -\sin x + \cos x \cdot 2\sin x = 2\sin x \cos x - \sin x$

Tangentin kulmakerroin

$k_t = f'(\frac{\pi}{2}) = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = 2\cdot 1\cdot 0 - 1 = -1$



Tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \Big|\ k = -1,\ x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} + \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$y - 1 = -1(x - \frac{\pi}{2})$$

Tangentti leikkaa *y*-akselin pisteessä *A*. Leikkauspisteessä $x = 0$
Pisteen *A* *y*-koordinaatti

$$y - 1 = -1(x - \frac{\pi}{2}) \qquad \Big|\ x = 0$$

$$y = \frac{\pi}{2} + 1$$

Tangentti ja normaali ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, joten niiden kulmakertoimien tulo on –1.

Normaalin kulmakerroin $k_t \cdot k_n = -1$, joten $k_n = \frac{-1}{-1} = 1$

Normaalin yhtälö

$$y - y_0 = k_n(x - x_0) \qquad \Big| \; k_n = 1,\ x_0 = \frac{\pi}{2},\ y_0 = f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} + \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$y - 1 = 1(x - \frac{\pi}{2})$$

Normaali leikkaa *y*-akselin pisteessä *B*. Leikkauspisteessä $x = 0$

Pisteen *B* *y*-koordinaatti

$$y - 1 = 1(x - \frac{\pi}{2}) \qquad \Big| \; x = 0$$

$$y = -\frac{\pi}{2} + 1$$

Janan *AB* pituus $|AB| = \left|\frac{\pi}{2} + 1 - (-\frac{\pi}{2} + 1)\right| = |\pi| = \pi$

Vastaus: Janan pituus on π.

6. Määritä funktion $f(x) = \cos(\cos x)$ a) nollakohdat b) derivaatan nollakohdat.

Ratkaisu:

a) Funktion $f(x) = \cos(\cos x)$ nollakohdat

$$\cos(\cos x) = 0$$

$$\cos(\cos x) = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

Koska $-1 \le \cos x \le 1$, niin yhtälöllä ei ole ratkaisuja. Joten funktiolla $f(x) = \cos(\cos x)$ ei ole nollakohtia.

b) Funktio $f(x) = \cos(\cos x)$

Derivaatta $f\,'(x) = -\sin x[-\sin(\cos x)] = \sin x \sin(\cos x)$

Derivaatan nollakohdat

$$\sin x \sin(\cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \qquad \text{tai} \qquad \sin(\cos x) = 0$$

$$\sin x = \sin 0 \qquad\qquad \sin(\cos x) = \sin 0$$

$$x = n \cdot \pi \qquad\qquad \cos x = n \cdot \pi,\quad n \in \mathbb{Z}$$

Koska $-1 \le \cos x \le 1$, niin yhtälö $\cos x = n \cdot \pi$ voi toteutua vain, kun $n = 0$, saadaan

$$\cos x = 0$$

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

Kun tulokset $x = n \cdot \pi$ ja $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ yhdistetään, saadaan $x = n \cdot \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

Vastaus: a) Funktiolla ei ole nollakohtia.   b) Derivaatan nollakohdat $x = n \cdot \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

7. Erästä eläinpopulaatiota tarkkailtaessa havaittiin, että populaatio lisääntyi vuodessa 5,0 %. Tämän eläinpopulaation kuolleisuus vuodessa oli keskimäärin 50 yksilöä. Tarkkailun alussa eläinpopulaation koko oli 1 500 yksilöä.
Tutkitaan jonoa $a_1,\ a_2,\ \ldots$, missä a_n ilmaisee populaation yksilömäärän vuonna n tarkkailun alusta. Määritä jonon rekursiivinen ja analyyttinen sääntö.
Ratkaisu: Lisääntymiskerroin $100\ \% + 5\ \% = 1{,}05$

Rekursiivinen sääntö
Populaatio tulee joka vuosi 1,05-kertaiseksi ja kuolleisuus on keskimäärin vuodessa 50, joten
$a_0 = 1\,500$ ja $a_n = 1{,}05a_{n-1} - 50$, $n \geq 1$

Analyyttinen sääntö
Lasketaan lukujonon jäseniä

$a_0 = 1\,500$

$a_1 = 1{,}05 \cdot a_0 - 50 = 1{,}05 \cdot 1\,500 - 50$

$a_2 = 1{,}05a_1 - 50 = 1{,}05^2 \cdot 1\,500 - 1{,}05 \cdot 50 - 50$

$a_3 = 1{,}05a_2 - 50 = 1{,}05^3 \cdot 1\,500 - 1{,}05^2 \cdot 50 - 1{,}05 \cdot 50 - 50$

.
.
.

$$\begin{aligned}
a_n &= 1{,}05^n \cdot 1\,500 - 1{,}05^{n-1} \cdot 50 - 1{,}05^{n-2} \cdot 50 - \ldots - 50 \\
&= 1{,}05^n \cdot 1\,500 - 50 \cdot (\underbrace{1{,}05^{n-1} + 1{,}05^{n-2} + \ldots + 1}_{\text{geometrinen summa}}) \qquad \Big|\ S_k = a_1 \frac{1-q^k}{1-q},\ k = n,\ a_1 = 1,\ q = 1{,}05 \\
&= 1{,}05^n \cdot 1\,500 - 50 \cdot 1 \cdot \frac{1-1{,}05^n}{1-1{,}05} \\
&= 1{,}05^n \cdot 1\,500 + 1000 \cdot (1 - 1{,}05^n) \\
&= 500 \cdot 1{,}05^n + 1\,000
\end{aligned}$$

Analyyttinen sääntö
$a_n = f(n) = 500 \cdot 1{,}05^n + 1\,000$, $n \in \mathbb{N}$

Vastaus: $a_n = f(n) = 500 \cdot 1{,}05^n + 1\,000$, $n \in \mathbb{N}$

8. n kappaletta sellaisia tasasivuisia kolmioita, joiden pinta-ala on aina puolet edellisestä, piirretään vierekkäin koordinaatistoon, kantasivut kiinni toisissaan (eli kolmion kannan loppupiste on kiinni seuraavan kolmion kannan alkupisteessä). Kolmioiden kannat ovat positiivisella x-akselilla ja suurimman kolmion kannan alkupiste on origossa. Laske kantojen muodostaman janan pituus. Mikä luvun n pitää vähintään olla, jotta janan pituus on ainakin kolminkertainen suurimman kolmion kantaan nähden?

Ratkaisu:

Kaikki tasasivuiset kolmiot ovat yhdenmuotoisia. Mittakaava on sivujen suhde, pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2$$

$$\frac{A_1}{\frac{1}{2}A_1} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}a$$

Ensimmäisen kolmion kanta on a, toisen $\frac{1}{\sqrt{2}}a$, kolmannen $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}a$, ..., n:nnen

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}a$$

Kantojen muodostaman janan pituus

$$d = \underbrace{a + \frac{1}{\sqrt{2}}a + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 a + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 a + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} a}_{\text{geometrinen summa}} \qquad \Big|\ S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= a\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = a\frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2}-1} \cdot (\sqrt{2})^{1-n}$$

Pituus ainakin $3a$

$$a\frac{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \ge 3a \qquad \Big|\ \frac{a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} > 0$$

$$1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^n \ge 3-\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \Big|\ -1$$

$$-(\frac{1}{\sqrt{2}})^n \ge 2-\frac{3}{2}\sqrt{2} \qquad \Big|\ :(-1) < 0$$

$$\underbrace{(\sqrt{2})^{-n}}_{>0} \le \underbrace{\frac{3}{2}\sqrt{2}-2}_{>0} \qquad \Big|\ \lg(),\ \text{lg aidosti kasvava, säilyttää järjestyksen}$$

$$\lg\underbrace{(\sqrt{2})^{-n}}_{>0} \le \lg(\frac{3}{2}\sqrt{2}-2)$$

$$-n\lg\sqrt{2} \le \lg(\frac{3}{2}\sqrt{2}-2) \qquad \Big|\ :-\lg\sqrt{2} < 0$$

$$n \ge -\frac{\lg(\frac{3}{2}\sqrt{2}-2)}{\lg\sqrt{2}}$$

$$n \ge 6,086...$$

Koska n on kokonaisluku, niin arvosta 7 lähtien.

<u>Vastaus</u>: Janan pituus $a\frac{(\sqrt{2})^n-1}{\sqrt{2}-1}\cdot(\sqrt{2})^{1-n}$, kolminkertainen, kun n on vähintään 7.

MAA 9 Koe 2

1. Määritä lukujonon a) 1, 4, 7, 10,… rekursiivinen sääntö

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \ldots$ analyyttinen sääntö

c) 2, –6, 18, –54,… analyyttinen ja rekursiivinen sääntö

2. Millä x:n arvoilla lukujono x, $2 - 2x$, $6x$, … on a) aritmeettinen b) geometrinen? Määritä kummassakin tapauksessa lukujonon neljäs termi.

3. Aritmeettisen summa kolmen ensimmäisen termin summa on –3 ja kolmen seuraavan 33. Laske sadan ensimmäisen termin summa.

4. Montako lukua geometrisen summan 2, 8, 32, 128, … alusta on otettava, jotta summan arvo ylittäisi 10^{20}?

5. Määritä cos α ja cos 2α, kun sin $\alpha = -\frac{3}{7}$ ja $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

6. Ratkaise yhtälö. a) $\cos 3x = \frac{1}{2}$ b) $\sin 3x = \cos 2x$

7. Määritä funktion $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ derivaatan nollakohdat.

8. Pöllöpopulaation alueella on keskimäärin 1200 ja se noudattaa sinikäyrää, jonka amplitudi on 500 ja jaksona 7 vuotta. Määritä populaation kokoa kuvaava funktio, kun tutkimuksen alussa populaatio oli kasvava ja sen koko oli 1 000 yksilöä. Kuinka pitkän ajan kuluttua tutkimuksen alusta populaation koko oli ensimmäistä kertaa minimissään?

MAA 9 Koe 2 Ratkaisut

1. Määritä lukujonon a) 1, 4, 7, 10,… rekursiivinen sääntö

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \ldots$ analyyttinen sääntö

c) 2, –6, 18, –54,… analyyttinen ja rekursiivinen sääntö

Ratkaisu

a) Lukujono 1, 4, 7, 10,…

Rekursiivinen sääntö $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = a_n + 3$

b) Lukujono $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \ldots$

Analyyttinen sääntö $a_n = \frac{n}{3n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$

b) Lukujono 2, –6, 18, –54,…

Rekursiivinen sääntö $a_1 = 2$ ja $a_{n+1} = a_n \cdot (-3) = -3a_n$

Analyyttinen sääntö $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$

<u>Vastaus</u>: a) $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = a_n + 3$ b) $a_n = \frac{n}{3n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ c) Rekursiivinen sääntö on $a_1 = 2$ ja $a_{n+1} = a_n \cdot (-3) = -3a_n$ ja analyyttinen sääntö $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

2. Millä x:n arvoilla lukujono x, $2 - 2x$, $6x$, … on a) aritmeettinen b) geometrinen? Määritä kummassakin tapauksessa lukujonon neljäs termi.

Ratkaisu

a) Lukujono x, $2 - 2x$, $6x$, … on aritmeettinen, kun

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$
$$2 - 2x - x = 6x - (2 - 2x)$$
$$2 - 3x = 8x - 2$$
$$-11x = -4 \quad |:(-11)$$
$$x = \frac{4}{11}$$

Lukujono on $\frac{4}{11}, \frac{14}{11}, \frac{24}{11}, \frac{34}{11}, \ldots$

Neljäs termi on $\frac{34}{11}$.

b) Lukujono x, $2 - 2x$, $6x$, … on geometrinen, kun

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$\frac{2-2x}{x} = \frac{6x}{2-2x}$$
$$4 - 8x + 4x^2 = 6x^2$$
$$-2x^2 - 8x + 4 = 0 \quad |:(-2)$$
$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$
$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{2} = -2 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 + \sqrt{2}$$

Jos $x = -2 - \sqrt{2}$, niin lukujono on
$a_1 = x = -2 - \sqrt{2}$
$a_2 = 2 - 2x = 2 - 2 \cdot (-2 - \sqrt{2}) = 6 + 2\sqrt{2}$
$a_3 = 6x = 6 \cdot (-2 - \sqrt{2}) = -12 - 6\sqrt{2}$
$a_4 = \frac{a_2}{a_1} \cdot a_3 = \frac{2 - 2x}{x} \cdot 6x = 6(2 - 2x) = 6a_2 = 6 \cdot (6 + 2\sqrt{2}) = 36 + 12\sqrt{2}$

Jos $x = -2 + \sqrt{2}$, niin lukujono on
$a_1 = x = -2 + \sqrt{2}$
$a_2 = 2 - 2x = 2 - 2 \cdot (-2 + \sqrt{2}) = 6 - 2\sqrt{2}$
$a_3 = 6x = 6 \cdot (-2 + \sqrt{2}) = -12 + 6\sqrt{2}$
$a_4 = \frac{a_2}{a_1} \cdot a_3 = \frac{2 - 2x}{x} \cdot 6x = 6(2 - 2x) = 6a_2 = 6 \cdot (6 - 2\sqrt{2}) = 36 - 12\sqrt{2}$

Vastaus: a) Lukujono on aritmeettinen, kun $x = \frac{4}{11}$. Neljäs termi on $\frac{34}{11}$. b) Lukujono on geometrinen, kun $x = -2 - \sqrt{2}$, jolloin neljäs termi on $36 + 12\sqrt{2}$ tai, kun $x = -2 + \sqrt{2}$, jolloin neljäs termi on $36 - 12\sqrt{2}$.

3. Aritmeettisen summa kolmen ensimmäisen termin summa on –3 ja kolmen seuraavan 33. Laske sadan ensimmäisen termin summa.

Ratkaisu
Aritmeettisen lukujonon yleinen termi $a_n = a_1 + (n - 1)d$
Kolmen ensimmäisen termin summa on –3.
$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = -3$
$3a_1 + 3d = -3 \quad |:3$
$a_1 + d = -1$
Kolmen seuraavan termin summa on 33.
$a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d = 33$
$3a_1 + 12d = 33 \quad |:3$
$a_1 + 4d = 11$
Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a_1 + d = 1 \\ a_1 + 4d = 11 \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan $a_1 = -1 - d$. Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$\begin{aligned} -1 - d + 4d &= 11 \\ 3d &= 12 \quad |:3 \\ d &= 4 \end{aligned}$$

Ensimmäinen termi $a_1 = -1 - d = -1 - 4 = -5$

Sadas termi $a_{100} = a_1 + (100 - 1)d = -5 + 99 \cdot 4 = 391$

Sadan ensimmäisen termin summa

$$S_{100} = n \cdot \frac{a_1 + a_{100}}{2} = 100 \cdot \frac{-5 + 391}{2} = 19\,300$$

Vastaus: Sadan ensimmäisen termin summa on 19 300.

4. Montako lukua geometrisen summan 2, 8, 32, 128, … alusta on otettava, jotta summan arvo ylittäisi 10^{20}?

Ratkaisu

Geometrinen summa 2, 8, 32, 128, …

Summan arvo suurempi kuin 10^{20}

$$S_n > 10^{20} \quad \left| S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},\ a_1 = 2,\ q = 4 \right.$$

$$\frac{2 \cdot (1-4^n)}{1-4} > 10^{20}$$

$$\frac{2 \cdot (1-4^n)}{-3} > 10^{20} \quad \left| : \left(-\frac{2}{3}\right) < 0 \right.$$

$$1 - 4^n < -\frac{3}{2} \cdot 10^{20}$$

$$-4^n < -\frac{3}{2} \cdot 10^{20} - 1 \quad |:(-1) < 0$$

$$4^n > \frac{3}{2} \cdot 10^{20} + 1 \quad |\lg()$$

$$\lg 4^n > \lg\left(\frac{3}{2} \cdot 10^{20} + 1\right)$$

$$n \lg 4 > \lg\left(\frac{3}{2} \cdot 10^{20} + 1\right) \quad |: \lg 4$$

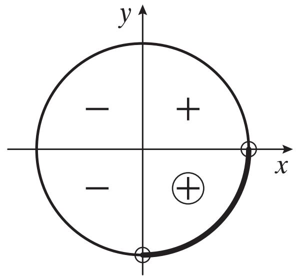
$$n > \frac{\lg\left(\frac{3}{2} \cdot 10^{20} + 1\right)}{\lg 4}$$

$$n > 33{,}511\ldots$$

Vastaus: Summan alusta on otettava 34 lukua.

5. Määritä cos α, cot α ja cos 2α, kun sin α = $-\frac{3}{7}$ ja $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Ratkaisu
Sinin ja kosinin välinen yhteys



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad | \sin\alpha = -\frac{3}{7}$$

$$\left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{40}{49} \qquad |\sqrt{\ }$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{40}}{7} \qquad | \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

Muut kysytyt arvot

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{7}}{-\frac{3}{7}} = -\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{31}{49}$$

<u>Vastaus</u>: $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7}$, cot α = $-\frac{2\sqrt{10}}{3}$ ja cos 2α = $\frac{31}{49}$

6. Ratkaise yhtälö. a) cos $3x = \frac{1}{2}$ b) sin $3x$ = cos $2x$

Ratkaisu
Ratkaistaan yhtälöt.

a) $\cos 3x = \frac{1}{2}$

$$\cos 3x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$3x = \pm\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi \quad |:3$$

$$x = \pm\frac{\pi}{9} + n\cdot\frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin 3x = \cos 2x \quad | \sin 3x = \cos(\frac{\pi}{2} - 3x)$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - 3x) = \cos 2x$$

$$\frac{\pi}{2} - 3x = \pm 2x + n\cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - 3x = 2x + n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{\pi}{2} - 3x = -2x + n\cdot 2\pi$$

$$-5x = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \quad |:(-5) \qquad -x = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \quad |:(-1)$$

$$x = \frac{\pi}{10} - n\cdot\frac{2\pi}{5} \qquad x = \frac{\pi}{2} - n\cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{10} + n\cdot\frac{2\pi}{5} \qquad x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Vastaus: a) $x = \pm\frac{\pi}{9} + n\cdot\frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$ b) $x = \frac{\pi}{10} + n\cdot\frac{2\pi}{5}$ tai $x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

7. Määritä funktion $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ derivaatan nollakohdat.

Ratkaisu

Funktio $f(x) = \sin^2 x - \sin x$

Derivaatta $f'(x) = \cos x \cdot 2\sin x - \cos x = 2\sin x \cos x - \cos x$

Derivaatan nollakohdat

$$f'(x) = 0$$

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{tai} \quad 2\sin x - 1 = 0$$

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{2} \qquad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \qquad \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Vastaus: $x = \pm\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$ tai $x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

8. Pöllöpopulaation alueella on keskimäärin 1200 ja se noudattaa sinikäyrää, jonka amplitudi on 400 ja jaksona 7 vuotta. Määritä populaation kokoa kuvaava funktio, kun tutkimuksen alussa populaatio oli kasvava ja sen koko oli 1 000 yksilöä. Kuinka pitkän ajan kuluttua tutkimuksen alusta populaation koko oli ensimmäistä kertaa minimissään?

Ratkaisu

Funktio on muotoa $f(x) = D + A\sin(bx + c)$

Keskimääräinen koko $D = 1\ 200$

Amplitudi $|A|$ on 400.

Jakson pituus

$$\frac{2\pi}{|b|} = 7 \qquad | \cdot |b|$$

$$2\pi = 7|b| \qquad | :9$$

$$|b| = \frac{2\pi}{7}$$

Funktio on $f(x) = 1200 + 400\sin\left(\frac{2\pi}{7}x + c\right)$

Populaation koko tutkimuksen alussa on 1 000.

$$f(0) = 1000$$

$$1200 + 400\sin\left(\frac{2\pi}{7}\cdot 0 + c\right) = 1000$$

$$\sin c = -\frac{1}{2}$$

$$\sin c = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$c = -\frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad c = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + n\cdot 2\pi$$

$$c = \frac{7\pi}{6} + n\cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Koska populaatio on alussa kasvava, niin $f'(0) > 0$.

Funktion derivaatta $f'(x) = \frac{2\pi}{7}\cdot 400\cos\left(\frac{2\pi}{7}x + c\right)$

Derivaatan arvo

$$f'(0) = \frac{2\pi}{7}\cdot 400\cos\left(\frac{2\pi}{7}\cdot 0 - \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi\right) = \frac{400\pi\sqrt{3}}{7} > 0$$

$$f'(0) = \frac{2\pi}{7}\cdot 400\cos\left(\frac{2\pi}{7}\cdot 0 + \frac{7\pi}{6} + n\cdot 2\pi\right) = -\frac{400\pi\sqrt{3}}{7} < 0, \quad \text{Ei käy}$$

Valitaan c = $-\frac{\pi}{6}$

Funktio on $f(x) = 1200 + 400\sin\left(\frac{2\pi}{7}x - \frac{\pi}{6}\right)$

Määritetään funktion pienin arvo välillä [0,7].

Derivaatta $f'(x) = \dfrac{800\pi}{7}\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

Derivaatan nollakohdat

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{800\pi}{7}\cos\left(\frac{2\pi}{7}x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \bigg| : \frac{800\pi}{7}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{7}x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{7}x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \quad \bigg| : \frac{2\pi}{7}$$

= 0

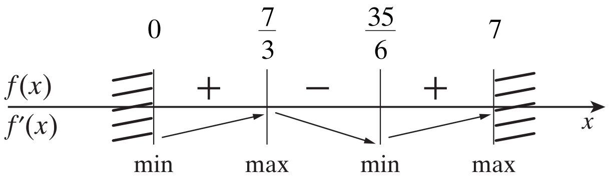
$$x = \frac{7}{12} \pm \frac{7}{4} + n\cdot 7$$

$$x = \frac{7}{12} + \frac{7}{4} + n\cdot 7 \quad \text{tai} \quad x = \frac{7}{12} - \frac{7}{4} + n\cdot 7$$

$$x = \frac{7}{3} + n\cdot 7 \qquad\qquad x = -\frac{7}{6} + n\cdot 7$$

$$x = \frac{35}{6} + n\cdot 7$$

Kulkukaavio välillä [0,7]



$f'(1) = 334{,}2\ldots > 0$

$f'(3) = -202{,}2\ldots$ <> 0

$f'(6) = 53{,}5\ldots > 0$

Populaation koko oli ensimmäistä kertaa minimissään $\dfrac{35}{6} = 5\dfrac{5}{6}$ vuoden kuluttua tutkimuksen alusta.

Vastaus: Funktio on $f(x) = 1200 + 400\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. Populaation koko oli ensimmäistä kertaa minimissään $5\dfrac{5}{6}$ vuoden kuluttua tutkimuksen alusta.

MAA 9 Koe 3

1. Laske summat a) $\sum_{n=1}^{150}(3n-5)$ b) $\sum_{k=1}^{12}(-\frac{1}{2})^{k-1}$

2. Ratkaise yhtälöt. a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $4\cos(3x+\frac{\pi}{2}) = 0$

3. Etana kiipeää lipputankoa ylöspäin 50 cm tunnissa. Joka tunti se pitää tunnin lopuksi tauon, jonka aikana se liukuu 15 cm alaspäin. Kuinka kauan etanalta kuluu aikaa päästä lipputangon nokkaan, kun tangon korkeus on 7,15 m?

4. Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on 5 ja neljäs jäsen $5\cdot 10^{-9}$. Millä n:n arvolla lukujonon summa S_n poikkeaa luvusta $\frac{5000}{999}$ vähemmän kuin 10^{-24}?

5. Määritä funktion $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ suurin ja pienin arvo.

6. Osoita, että yhtälöllä $e^{2x} = 3 - \cos^2 x$ on täsmälleen yksi juuri, kun $x \geq 0$.

7. Käyrän $y = \ln(\cos x), x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ja x-akselin leikkauskohtaan on piirretty suora, joka on käyrälle kohtaan $x = \frac{\pi}{3}$ piirretyn normaalin suuntainen. Määritä sellaisen kolmion ala, jonka yhtenä kärkenä on käyrän ja x-akselin leikkauspiste, toisena kärkenä edellä piirretyn suoran ja suoran $x = \frac{\pi}{3}$ leikkauspiste ja kolmas kärki on käyrällä kohdassa $x = \frac{\pi}{3}$.

8. Määritä $f'(x)$, kun $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ ja määritä derivaatan avulla summa $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

MAA 9 Koe 3 Ratkaisut

1. Laske summat a) $\sum_{n=1}^{150}(3n-5)$ b) $\sum_{k=1}^{12}(-\frac{1}{2})^{k-1}$

Ratkaisu
a)
Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa $d=3(n+1)-5-3n+5=3$

$$\sum_{n=1}^{150}(3n-5)=150\cdot\frac{3\cdot 1-5+3\cdot 150-5}{2}=33\,225$$

b)

Kyseessä on geometrinen summa, jossa $q=\frac{(-\frac{1}{2})^{k+1}}{(-\frac{1}{2})^{k}}=-\frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{12}(-\frac{1}{2})^{k-1}=\frac{1\cdot[1-(-\frac{1}{2})^{12}]}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1365}{2\,048}$$

<u>Vastaus</u>: a) 33 225 b) $\frac{1365}{2\,048}$

2. Ratkaise yhtälöt. a) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $4\cos(3x+\frac{\pi}{2})=0$

Ratkaisu

a)

$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x=\sin\frac{4\pi}{3}$

$x=\frac{4\pi}{3}+n2\pi$ tai $x=\pi-\frac{4\pi}{3}+n2\pi=-\frac{\pi}{3}+n2\pi$

b)

$$4\cos(3x+\frac{\pi}{2})=0$$

$$\cos(3x+\frac{\pi}{2})=0$$

$$3x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+n\pi$$

$$3x=n\pi$$

$$x=n\cdot\frac{\pi}{3}$$

Vastaus: a) $x=\frac{4\pi}{3}+n2\pi$ tai $x=-\frac{\pi}{3}+n2\pi$ b) $x=n\cdot\frac{\pi}{3}$

3. Etana kiipeää lipputankoa ylöspäin 50 cm tunnissa. Joka tunti se pitää tunnin lopuksi tauon, jonka aikana se liukuu 15 cm alaspäin. Kuinka kauan etanalta kuluu aikaa päästä lipputangon nokkaan, kun tangon korkeus on 7,15 m?

Ratkaisu
Etana etenee tunnissa
50 cm– 15 cm = 35 cm.
Lasketaan viimeisten tuntien eteneminen:
19 tunnissa $19\cdot 35$ cm = 665 cm
20 tunnissa 665 cm + 50 cm = 715 cm = 7,15 m eli etana on tässä vaiheessa perillä eikä enää valu alaspäin.

4. Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on 5 ja neljäs jäsen $5\cdot 10^{-9}$. Millä n:n arvolla lukujonon summa S_n poikkeaa luvusta $\frac{5000}{999}$ vähemmän kuin 10^{-24}?

Ratkaisu

$a_1 = 5$

$$5\cdot q^3=5\cdot 10^{-9}$$

$$q^3=10^{-9}$$

$$q=10^{-3}$$

$$S_n=\frac{5[1-(10^{-3})^n]}{1-10^{-3}}$$

$$\left|\frac{5\,000}{999}-\frac{5[1-(10^{-3})^n]}{1-10^{-3}}\right|<10^{-24}$$

$$\left|\frac{5\,000}{999}-\frac{5-5\cdot 10^{-3n}}{\frac{999}{1000}}\right|<10^{-24}$$

$$\left|\frac{5\,000}{999}-\frac{5\,000-5\cdot 10^{-3n+3}}{999}\right|<10^{-24}$$

$$\left|\frac{5\cdot 10^{-3n+3}}{999}\right|<10^{-24}$$

$$\frac{5\cdot 10^{-3n+3}}{999}<10^{-24}$$

$$10^{-3n+3}<\frac{999\cdot 10^{-24}}{5} \qquad |\lg()$$

$$\lg 10^{-3n+3}<\lg\frac{999\cdot 10^{-24}}{5}$$

$$-3n+1<\lg\frac{999\cdot 10^{-24}}{5}$$

$$n>\frac{\lg\frac{999\cdot 10^{-24}}{5}-3}{-3}=8,2331...$$

<u>Vastaus</u>: $n = 9$

5. Määritä funktion $f(x)=\sin^2 x+\sin x$ suurin ja pienin arvo.

Ratkaisu

$f(x)=\sin^2 x+\sin x$

$f\,'(x)=2\sin x\cos x+\cos x$

Derivaatan nollakohdat

$2\sin x\cos x+\cos x=0$

$\cos x(2\sin x+1)=0$

$\cos x=0$ tai $2\sin x+1=0$

$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ $\qquad$ $\sin x=-\frac{1}{2}$

$x=\frac{7\pi}{6}+n2\pi$ tai $x=\frac{11\pi}{6}+n2\pi$

Riittää tarkastella väliä $[0,2\pi]$

Tarkasteluvälillä olevat derivaatan nollakohdat

$\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$

Funktion arvot

$f(0) = \sin^2 0 + \sin 0 = 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = \sin^2 \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 2$ suurin

$f(\frac{3\pi}{2}) = \sin^2 \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = 0$

$f(\frac{7\pi}{6}) = \sin^2 \frac{7\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{4}$ pienin

$f(\frac{11\pi}{6}) = \sin^2 \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{4}$ pienin

Vastaus: Suurin arvo 2 ja pienin arvo $-\frac{1}{4}$

6. Osoita, että yhtälöllä $e^{2x} = 3 - \cos^2 x$ on täsmälleen yksi juuri, kun $x \geq 0$.

Ratkaisu

Osoitetaan, että funktiolla $f(x) = e^{2x} + \cos^2 x - 3$ on täsmälleen yksi nollakohta, kun $x \geq 0$.

$f'(x) = 2e^{2x} + 2\cos x(-\sin x) = 2e^{2x} - 2\cos x \sin x = 2e^{2x} - \sin 2x$

$2e^{2x} > 2$, kun $x \geq 0$ ja $-1 \leq \sin 2x \leq 1$, kun $x \geq 0$, joten $f'(x) = 2e^{2x} - \sin 2x > 1 > 0$ ja funktio on aidosti kasvava, kun $x \geq 0$ ja funktiolla on korkeintaan yksi nollakohta tällä välillä.

$f(0) = e^{2\cdot 0} + \cos^2 0 - 3 = -1 < 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = e^{2\cdot\frac{\pi}{2}} + \cos^2 \frac{\pi}{2} - 3 = 20{,}14... > 0$

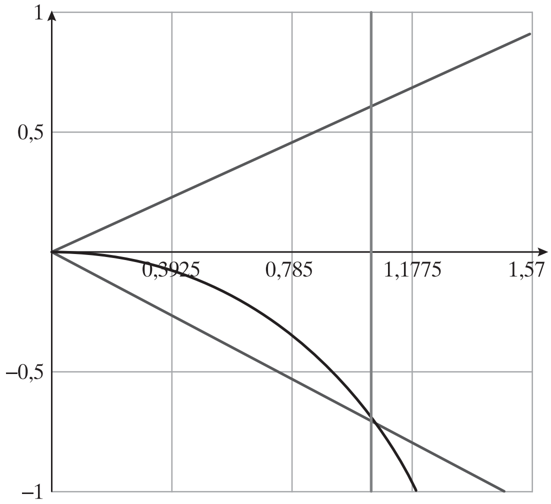
Joten funktiolla on vähintään yksi nollakohta välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Näistä seuraa, että funktiolla $f(x) = e^{2x} + \cos^2 x - 3$ on täsmälleen yksi nollakohta ja yhtälöllä $e^{2x} = 3 - \cos^2 x$ on täsmälleen yksi juuri, kun $x \geq 0$. m.o.t.

7. Käyrän $y = \ln(\cos x), x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ja *x*-akselin leikkauskohtaan on piirretty suora, joka on käyrälle kohtaan $x = \frac{\pi}{3}$ piirretyn normaalin suuntainen. Määritä sellaisen kolmion ala, jonka yhtenä kärkenä on käyrän ja *x*-akselin leikkauspiste, toisena kärkenä edellä piirretyn suoran ja suoran $x = \frac{\pi}{3}$ leikkauspiste ja kolmas kärki on käyrällä kohdassa $x = \frac{\pi}{3}$.

Ratkaisu

$y = \ln(\cos x), x \in [0, \frac{\pi}{2}[$



Nollakohta

$$\ln(\cos x) = 0$$
$$\cos x = 1$$
$$x = 0$$

Joten yksi kärki on origossa.
Derivaatta

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$y'(\frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Normaalin kulmakerroin on $-\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Origon kautta kulkeva normaalin suuntaisen suoran yhtälö

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

Suorien $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ ja $x = \frac{\pi}{3}$ leikkauspisteen y-koordinaatti

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Joten toinen kärki on pisteessä $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3\sqrt{3}})$

Kolmannen kärkipisteen y-koordinaatti

$$y = \ln(\cos\frac{\pi}{3}) = \ln\frac{1}{2}$$

Joten kolmas kärkipiste on $(\frac{\pi}{3}, \ln\frac{1}{2})$

Kolmion ala

$$A = \frac{1}{2} \cdot (\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \ln\frac{1}{2}) \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \cdot (\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \ln\frac{1}{2}) \approx 0,68$$

<u>Vastaus</u>: Ala on $\frac{\pi}{6} \cdot (\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \ln\frac{1}{2}) \approx 0,68$

8. Määritä $f'(x)$, kun $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ ja määritä derivaatan avulla summa $1+2x+3x^2$ $+\ldots+nx^{n-1}$.

Ratkaisu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = 1 \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \; x \neq 1$$

$$D(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n) = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$$

toisaalta

$$\mathrm{D}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-nx^n + nx^{n+1} - x^n + x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Joten $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$, kun $x \neq 1$

Kun $x = 1$, on

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} = 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + \ldots + n \cdot 1^{n-1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

<u>Vastaus</u>: $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$, kun $x \neq 1$ ja $\dfrac{n^2+n}{2}$, kun $x = 1$.