Laudatur 7

Derivaatta

MAA 7

Tarmo Hautajärvi
Jukka Ottelin
Leena Wallin-Jaakkola

Opettajan aineisto

Helsingissä Kustannusosakeyhtiö Otava

SISÄLLYS

Otavan asiakaspalvelu
Puh. 0800 17117
asiakaspalvelu@otava.fi

Tilaukset
Kirjavälitys Oy
Puh. 010 345 1520
Faksi 010 345 1454
kvtilaus@kirjavalitys.fi

1. painos
Toimittaja: Mare Herlevi
Taitto: Jukka Ottelin
Piirrokset: Eeva Lehtonen

ISBN-13 978-951-1-20987-4
ISBN-10 951-1-20987-6

Sidonta: KEURUSKOPIO

Painopaikka: Otavan Kirjapaino Oy, Keuruu 2008

RATKAISUT KIRJAN TEHTÄVIIN

Testaa lähtötaitosi

1. a) $\dfrac{3\cdot\frac{1}{7}-3\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}}:19=(3-\frac{22}{7}\cdot 7):19=-1$

b) $30\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{3}{5}-5\frac{3}{5}-6\cdot\dfrac{1}{\frac{5}{2}}=6+3-\frac{28}{5}-\frac{12}{5}=1$

Vastaus: a) -1 b) 1

2. a) $2x^2-8=2(x^2-4)=2(x-2)(x+2)$

b) $x^4+4x^2+4=(x^2+2)^2$ | joko muistikaavalla tai 2. asteen juurten avulla

c) Haetaan vastaavan yhtälön $x^2-\frac{3}{2}x-1=0$ ratkaisut.

$$x^2-\frac{3}{2}x-1=0$$

$$x=\frac{-(-\frac{3}{2})\pm\sqrt{(-\frac{3}{2})^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}}{2}$$

$$x_1=\frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{2}=2$$

$$x_2=\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{2}=-\frac{1}{2}$$

Lauseke $x^2-\frac{3}{2}x-1=(x+\frac{1}{2})(x-2)$

Vastaus: a) $2(x-2)(x+2)$ b) $(x^2+2)^2$ c) $(x+\frac{1}{2})(x-2)$

3. Suoritetaan jakolasku $\dfrac{9x^4-3x^2-9x+3}{3x-1}$ jakokulmassa.

$$3x^3+\ x^2-\frac{2}{3}x-29$$

$$3x-1\ \big|\ 9x^4\qquad -3x^2-9x+3$$

$$\underline{\mp 9x^4\ \ \pm 3x^3}$$

$$3x^3-3x^2$$

$$\underline{\mp 3x^3\pm\ x^2}$$

$$-2x^2\ -9x$$

$$\underline{\pm 2x^2\mp\frac{2}{3}x}$$

$$-\frac{29}{3}x+3$$

$$\underline{\pm\frac{29}{3}x\mp 29}$$

$$-26$$

Saadaan $\dfrac{9x^4-3x^2-9x+3}{3x-1}=3x^3+x^2-\dfrac{2}{3}x-29-\dfrac{26}{3x-1}$

<u>Vastaus</u>: $3x^3+x^2-\dfrac{2}{3}x-29-\dfrac{26}{3x-1}$

4. Toisen asteen yhtälöllä $x+x^2=a$ eli $x^2+x-a=0$ on yksi reaalijuuri, jos diskriminantti on nolla.

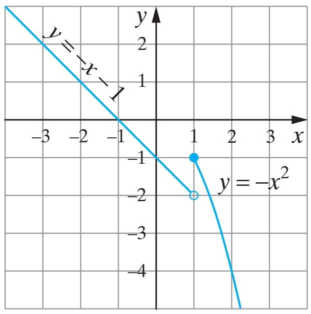
$$D=0 \qquad \Big|\ D=b^2-4ac$$

$$1^2-4\cdot 1\cdot(-a)=0$$

$$a=-\frac{1}{4}$$

<u>Vastaus</u>: $a=-\dfrac{1}{4}$

5. Funktio $f(x)=\begin{cases}-x-1, \text{ kun } x<1\\ -x^2, \text{ kun } x\geq 1\end{cases}$



Lasketaan pisteitä.

x	$y=-x-1,\ x<1$
0	–1
–2	–(–2)–1=1

x	$y=-x^2,\ x\geq 1$
1	–1
2	–4
3	–9
4	–16

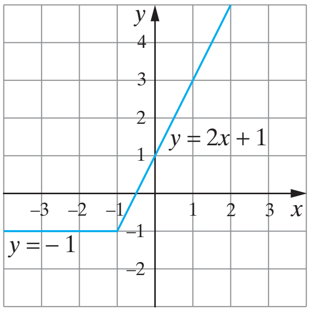
6. a) Funktio $f(x)=|x+1|+x$.

Poistetaan itseisarvomerkit. $|x+1|=\begin{cases}-(x+1), \text{ kun } x+1<0\\ x+1, \text{ kun } x+1\geq 0\end{cases}=\begin{cases}-x-1, \text{ kun } x<-1\\ x+1, \text{ kun } x\geq -1\end{cases}$

Funktio $f(x)=|x+1|+x=\begin{cases}-x-1+x, \text{ kun } x<-1\\ x+1+x, \text{ kun } x\geq -1\end{cases}=\begin{cases}-1, \text{ kun } x<-1\\ 2x+1, \text{ kun } x\geq -1\end{cases}$

Kun $x<-1$, kyseessä on x-akselin suuntainen suora.

x	$y=2x+1,\ x\geq -1$
0	1
2	5



b) Yhtälö $1\frac{1}{3}=|x+1|+x$

a-kohdan kuvaajasta nähdään, että $f(x)=|x+1|+x=1\frac{1}{3}$, kun $x>-1$. Saadaan yhtälö (a-kohdan nojalla)

$$2x+1=1\frac{1}{3}$$

$$2x=\frac{1}{3} \qquad |:2$$

$$x=\frac{1}{6}$$

Vastaus: $x=\frac{1}{6}$

7. Janan päätepisteet (1, 2) ja (2, –3)
Janan keskinormaali on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vasten.

Janan keskipiste $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{1+2}{2}, \frac{2+(-3)}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Sen suoran, jonka osana jana on, kulmakerroin on $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-(-3)}{1-2}=-5$. Koska keskinormaali on kohtisuorassa tätä suoraa vasten, niiden kulmakertoimien tulo on –1.

Keskinormaalin kulmakerroin $k_n=\frac{1}{5}$.

Keskinormaalin yhtälö

$$y-y_0=k_n(x-x_0) \qquad \Big|\ x_0=\frac{3}{2},\ y_0=-\frac{1}{2},\ k_n=\frac{1}{5}$$

$$y-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{5}(x-\frac{3}{2})$$

$$y=\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}$$

<u>Vastaus</u>: $y=\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}$

8. Funktio $f(x)=x^2-\frac{65}{8}x+1$

a) Toisen asteen polynomifunktion nimi on paraabeli.
b) Kuvaaja leikkaa x-akselin, kun $y=f(x)=0$.

$$f(x)=0$$

$$x^2-\frac{65}{8}x+1=0$$

$$x=\frac{-(-\frac{65}{8})\pm\sqrt{(-\frac{65}{8})^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$$

$$x_1=\frac{\frac{65}{8}+\frac{63}{8}}{2}=8$$

$$x_2=\frac{\frac{65}{8}-\frac{63}{8}}{2}=\frac{1}{8}$$

Leikkauspisteet (8, 0) ja $(\frac{1}{8}, 0)$

c) Koska paraabelin nollakohdat ovat (b-kohdan nojalla) $x = \frac{1}{8}$ ja $x = 8$ ja se aukeaa *y*-akselin suuntaan, niin tangentti, joka on *x*- akselin suuntainen pitää kulkea huipun kautta. Paraabeli on ylöspäin aukeava ja sen huippu sijaitsee pisteiden $(8,\ 0)$ ja $(\frac{1}{8},\ 0)$ puolivälissä, joten huipun *y*-koordinaatti on negatiivinen.
Myös kuvaajalla voidaan asiaa perustella.

Vastaus: a) Paraabeli b) $(8,\ 0)$ ja $(\frac{1}{8},\ 0)$ c) ei

9. Lasketaan suoran $y + 2x - 4 = 0$ on paraabelin $y = 3ax^2 + 1$ leikkauspisteet. Suora on paraabelin tangentti, jos se sivuaa paraabelia. Tällöin niillä on ainoastaan yksi yhteinen piste.

$$\begin{cases} y + 2x - 4 = 0 \\ y = 3ax^2 + 1 \end{cases} \quad \Big| \text{ sijoitetaan ylempään yhtälöön}$$

$$3ax^2 + 1 + 2x - 4 = 0$$

$$3ax^2 + 2x - 3 = 0 \quad \Big| \text{ yksi ratkaisu, joten diskriminantti on nolla}$$

$$D = 0$$

$$(-2)^2 - 4 \cdot 3a \cdot (-3) = 0$$

$$a = -\frac{1}{9}$$

Vastaus: $a = -\frac{1}{9}$

10. Suora on paraabelin $y = x^2$ tangentti, jos se sivuaa paraabelia. Tällöin niillä on ainoastaan yksi yhteinen piste. Tangentti on nouseva, joten sen kulmakerroin k > 0.
Tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \Big| \ (x_0,\ y_0) = (1,\ -15),\ k > 0$$

$$y + 15 = k(x - 1)$$

$$y = kx - k - 15$$

Paraabelin ja tangentin sivuaminen

$$\begin{cases} y = kx - k - 15 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$x^2 = kx - k - 15$$

$$x^2 - kx + k + 15 = 0 \qquad \Big| \text{ sivuaminen, eli } D = 0$$

$$(-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k + 15) = 0$$

$$k^2 - 4k - 60 = 0$$

$$k = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1}$$

$$k_1 = \frac{4 + 16}{2} = 10$$

$$k_2 = \frac{4 - 16}{2} = -6 \qquad \Big| \text{ ei käy, } k > 0$$

Vastaus: Kulmakerroin on 10.

1. Rationaalifunktio

1. a) $\frac{^{5)}1}{3} - \frac{^{3)}2}{5} - 2 \cdot (\frac{5}{6} - 3) = \frac{5}{15} - \frac{6}{15} - \frac{25}{15} + 6 = 4\frac{4}{15}$

b) $\frac{2}{3} : \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9}$

c) $\frac{1+4}{4} : 4 - 4 \cdot 4 : \frac{1}{4} : 4 - 1 = \frac{5}{16} - 17 = -16\frac{11}{16}$

Vastaus: a) $4\frac{4}{15}$ b) $-\frac{5}{9}$ c) $-16\frac{11}{16}$

2. a) $\frac{9x+1}{3x} - {}^{3x)}3 = \frac{9x + 1 - 9x}{3x} = \frac{1}{3x}$

b) $\frac{x}{y} : \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} - (\frac{x}{y})^2 + 1 = (\frac{x}{y})^2 - 1 - (\frac{x}{y})^2 + 1 = 0$

Vastaus: a) $\frac{1}{3x}$ b) 0

3. a) $\frac{^{x-1)}1}{x+1} - \frac{^{x+1)}1}{x-1} - {}^{x^2-1)}1 = \frac{x - 1 - (x+1) - (x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{-x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{-(-\sqrt{17})^2 - 1}{(-\sqrt{17})^2 - 1} = -1\frac{1}{8}$

b)

$$\left({}^{x^2)}x^2 - \frac{1}{x^2} \right) : \left({}^{x)}x - \frac{1}{x} \right) \cdot x = \frac{x^4 - 1}{x^2} \cdot \frac{x}{x^2 - 1} \cdot x = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1} = x^2 + 1 = (-\sqrt{17})^2 + 1 = 18$$

Vastaus: a) $\frac{-x^2-1}{x^2-1} = -1\frac{1}{8}$ b) $x^2+1=18$

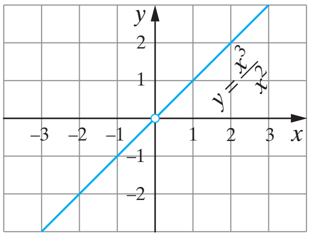
4. a) Määritelty, kun nimittäjä on nollasta eroava, eli $x \neq 0$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2} = x$

Nollakohdat

$f(x) = 0$, kun x =0. Nollakohta ei kuulu määrittelyjoukkoon, joten funktiolla ei ole nollakohtia

c)



Vastaus: a) $x \in \mathbb{R}$ ja $x \neq 0$ b) ei nollakohtia

5. a) Rationaalifunktio $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ on määritelty, kun nimittäjä $x+1 \neq 0$ eli $x \neq -1$.

b) Nollakohdat

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x^2-1}{x+1} = 0$$

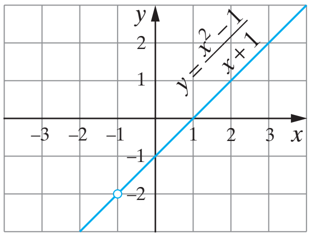
$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Nollakohta $x = -1$ ei kuulu määrittelyjoukkoon, joten ainoa nollakohta on $x = 1$.

c)



Vastaus: a) $x \in \mathbb{R}$ ja $x \neq -1$ b) $x = 1$

6.

$$\frac{1}{x} = x^2$$

$$\frac{1}{x} - {}^{x)}x^2 = 0$$

$$\frac{1-x^3}{x} = 0$$

Määritelty, kun $x \neq 0$
Nollakohdat

$$1 - x^3 = 0$$

$$x^3 = 1 \qquad \Big| \sqrt[3]{\ }$$

$$x = 1$$

Vastaus: $x = 1$

7.

$$\frac{1}{x-1} = x + 1$$

$$\frac{1}{x-1} - {}^{x-1)}x - {}^{x-1)}1 = 0$$

$$\frac{-x^2+2}{x-1} = 0$$

Määritelty, kun $x \neq 1$
Nollakohdat

$$-x^2 + 2 = 0$$

$$x^2 = 2 \qquad \Big| \sqrt{\ }$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Vastaus: $x = -\sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{2}$

8.

$$\frac{1}{x} - x = -2$$

$$\frac{1}{x} - {}^{x)}x + {}^{x)}2 = 0$$

$$\frac{1 - x^2 + 2x}{x} = 0$$

Määritelty, kun $x \neq 0$
Nollakohdat

$$-x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{-2}$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

<u>Vastaus:</u> $x = 1 - \sqrt{2}$ tai $x = 1 + \sqrt{2}$

9.

$$\frac{2x}{x^2 - 2x} + 2 - \frac{2}{x} = \frac{x}{x - 2}$$

$$\frac{2x}{x^2 - 2x} + {}^{x^2-2x)}2 - {}^{x-2)}\frac{2}{x} - {}^{x)}\frac{x}{x - 2} = 0$$

$$\frac{2x + 2x^2 - 4x - 2x + 4 - x^2}{x(x - 2)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x(x - 2)} = 0$$

Määritelty, kun $x \neq 0$ ja $x \neq 2$
Nollakohdat

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

Nollakohta ei kuulu määrittelyjoukkoon, joten ei nollakohtia.

<u>Vastaus</u>: Ei ratkaisuja

10.

$$\frac{2}{|x|} = |x|$$

$$\frac{2}{|x|} - {}^{|x|)}|x| = 0$$

$$\frac{2 - x^2}{|x|} = 0$$

Määritelty, kun $x \neq 0$

Nollakohdat

$$2 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

<u>Vastaus:</u> $x = -\sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{2}$

11.

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| = 1 \qquad \mid ()^2,\ \text{molemmat puolet ei-negatiivisia}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} - {}^{(x-1)^2)}1 = 0$$

$$\frac{x^2 - x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2} = 0$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$$

Määritelty, kun $(x-1)^2 \neq 0$, eli $x \neq 1$

Nollakohdat

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

<u>Vastaus</u>: $x = \frac{1}{2}$

12. Kohdat, joissa funktio $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ ei ole määritelty, eli nimittäjän nollakohdat

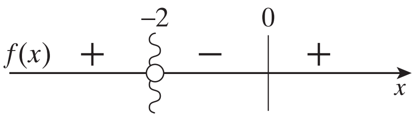
$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Funktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohtien joukosta

$$f(x) = 0$$
$$x = 0$$

Merkkikaavio



$$f(x) = \frac{x}{x+2}$$
$$f(-3) = \frac{-3}{-3+2} = 3 > 0$$
$$f(-1) = \frac{-1}{-1+2} = -1 < 0$$
$$f(1) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} > 0$$

Funktio on positiivinen, kun $x < -2$ tai $x > 1$
Funktio on negatiivinen, kun $-2 < x < 0$

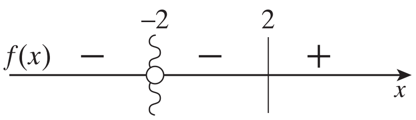
<u>Vastaus:</u> Funktio on positiivinen, kun $x < -2$ tai $x > 1$
Funktio on negatiivinen, kun $-2 < x < 0$

13. Funktio $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$
Kohdat, joissa funktio ei ole määritelty, eli nimittäjän nollakohdat

$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

Funktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohtien joukosta
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$
Kohta $x = -2$ ei kuulu määrittelyjoukkoon, joten se ei ole funktion nollakohta.

Merkkikaavio



$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$$
$$f(-3) = \frac{(-3)^2-4}{-3+2} = -5 < 0$$
$$f(0) = -2 < 0$$
$$f(3) = 1 > 0$$

Funktio on positiivinen, kun $x < 2$ ja $x \neq -2$
Funktio on negatiivinen, kun $x > 2$

<u>Vastaus:</u> Funktio on positiivinen, kun $x < 2$ ja $x \neq -2$. Funktio on negatiivinen, kun $x > 2$.

14. Funktio $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$

Kohdat, joissa funktio ei ole määritelty, eli nimittäjän nollakohdat

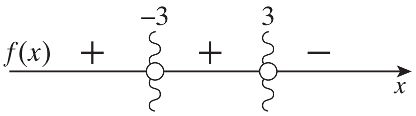
$$\begin{aligned} x^2-9&=0\\ x^2&=9\\ x&=\pm3 \end{aligned}$$

Funktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohtien joukosta

$$\begin{aligned} x-3&=0\\ x&=3 \end{aligned}$$

Kohta x = 3 ei kuulu määrittelyjoukkoon, joten se ei ole funktion nollakohta.

Merkkikaavio



$$f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$$

$$f(-4)=\frac{-4-3}{(-4)^2-9}=7>0$$

$$f(0)=\frac{1}{3}>0$$

$$f(4)=-1<0$$

Funktio on ei-negatiivinen, kun $x < 3$ ja $x \neq -3$

Vastaus: Funktio on ei-negatiivinen, kun $x < 3$ ja $x \neq -3$

15

$$\frac{x-2}{x-1}<0$$

Funktio $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

Funktio voi vaihtaa merkkinsä vain kohdissa, joissa sitä ei ole määritelty ja nollakohdissaan.

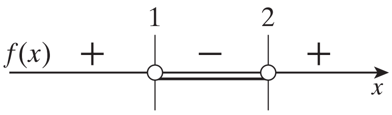
Kohdat, joissa funktio ei ole määritelty, eli nimittäjän nollakohdat

$$\begin{aligned} x-1&=0\\ x&=1 \end{aligned}$$

Funktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohtien joukosta

$$\begin{aligned} x-2&=0\\ x&=2 \end{aligned}$$

Merkkikaavio



$$f(x) = \frac{x-2}{x-1}$$
$$f(0) = 2 > 0$$
$$f(1{,}5) = -0{,}5 < 0$$
$$f(3) = 0{,}5 > 0$$

Merkkikaaviosta nähdään, että $f(x) < 0$, kun $1 < x < 2$

<u>Vastaus:</u> $1 < x < 2$

16.

$$^{x+1)}\frac{1}{x-1} + {}^{x-1)}\frac{1}{x+1} \le 0$$
$$\frac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)} \le 0$$
$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)} \le 0$$

Funktio $f(x) = \dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}$

Funktio voi vaihtaa merkkinsä vain kohdissa, joissa sitä ei ole määritelty ja nollakohdissaan.

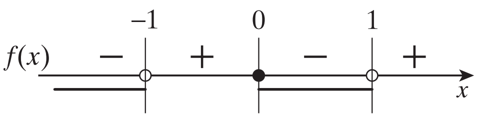
Kohdat, joissa funktio ei ole määritelty, eli nimittäjän nollakohdat

$$(x-1)(x+1) = 0$$
$$x-1 = 0 \quad \text{tai} \quad x+1 = 0$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = -1$$

Funktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohtien joukosta

$$2x = 0$$
$$x = 0$$

Merkkikaavio



$$f(x) = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$
$$f(-2) = \frac{2\cdot(-2)}{(-2-1)(-2+1)} = -\frac{4}{3} < 0$$
$$f(-0{,}5) > 0$$
$$f(0{,}5) < 0$$
$$f(2) > 0$$

Merkkikaaviosta nähdään, että $f(x) < 0$, kun $x < -1$ tai $0 \le x < 1$

Vastaus: $x < -1$ tai $0 \le x < 1$

17.

$$\frac{1}{x} < x$$

$$\frac{1}{x} - {}^{x)} x < 0$$

$$\frac{1 - x^2}{x} < 0$$

Funktio $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x}$

Funktio voi vaihtaa merkkinsä vain kohdissa, joissa sitä ei ole määritelty ja nollakohdissaan.

Kohdat, joissa funktio ei ole määritelty, eli nimittäjän nollakohdat

$$x = 0$$

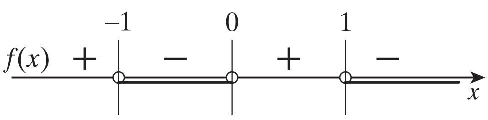
Funktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohtien joukosta

$$1 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Merkkikaavio



$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x}$$

$$f(-2) = \frac{1 - (-2)^2}{-2} = \frac{3}{2} > 0$$

$$f(-0{,}5) < 0$$

$$f(0{,}5) > 0$$

$$f(2) < 0$$

Merkkikaaviosta nähdään, että $f(x) < 0$, kun $-1 < x < 0$ tai $x > 1$

Vastaus: $-1 < x < 0$ tai $x > 1$

18.

$$\frac{x^4-2x+1}{x-1} \le 2x$$

$$\frac{x^4-2x+1}{x-1} - {}^{x-1)}2x \le 0$$

$$\frac{x^4-2x+1-2x^2+2x}{x-1} \le 0$$

$$\frac{x^4-2x^2+1}{x-1} \le 0$$

Funktio $f(x) = \dfrac{x^4-2x^2+1}{x-1}$

Funktio voi vaihtaa merkkinsä vain kohdissa, joissa sitä ei ole määritelty ja nollakohdissaan.

Kohdat, joissa funktio ei ole määritelty, eli nimittäjän nollakohdat

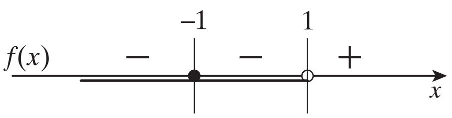
$$x-1=0$$
$$x=1$$

Funktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohtien joukosta

$$x^4-2x^2+1=0$$
$$(x^2-1)^2=0$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm 1$$

Kohta x = 1 ei kuulu määrittelyjoukkoon, joten se ei ole funktion nollakohta.

Merkkikaavio



$$f(x) = \frac{x^4-2x^2+1}{x-1}$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^4-2\cdot(-2)+1}{-2-1} = -\frac{13}{3} < 0$$

$$f(0) < 0$$

$$f(2) > 0$$

Merkkikaaviosta nähdään, että $f(x) \le 0$, kun $x < 1$

<u>Vastaus:</u> $x < 1$

19.

$$f(x) = {}^{x^2)}x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4-1}{x^2}$$

Funktio voi vaihtaa merkkinsä vain kohdissa, joissa sitä ei ole määritelty ja nollakohdissaan.
Kohdat, joissa funktio ei ole määritelty, eli nimittäjän nollakohdat

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Funktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohtien joukosta

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= 0 \\ x^4 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Koska välille [–1, 0[ei kuulu yhtään sellaista kohtaa, jossa funktio voi vaihtaa merkkinsä, on se koko välillä samanmerkkinen.

$$f(x) = \frac{x^4-1}{x^2}$$

$$f(0,5) = \frac{0,5^4-1}{0,5^2} = -3,75$$

Siis $f(x) < 0$ aina, kun $x \in [-1,\ 0[$.

20.

Oletus: $x^2 - 4 \le 0$ ja $x < 0$
Väite:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} &\le x \\ \frac{4}{x} - {}^{x)}x &\le 0 \\ \frac{4-x^2}{x} &\le 0 \end{aligned}$$

Todistus:

Funktio $f(x) = \frac{4-x^2}{x} = -\frac{x^2-4}{x}$

Funktio $f(x) \le 0$, kun lauseke $\frac{x^2-4}{x} \ge 0$.

Koska jaettava $x^2 - 4 \le 0$ ja jakaja $x < 0$, niin niiden osamäärä on joko positiivinen (kahden negatiivisen luvun osamäärä) tai nolla. Tällöin $f(x) \le 0$.

Oletetaan, että $\frac{4}{x} \le x$.

$$\frac{4}{x} \le x$$

$$\frac{4}{x} - {}^{x)} x \le 0$$

$$\frac{4 - x^2}{x} \le 0$$

Epäyhtälö toteutuu, kun $x = 3$

$$\frac{4 - 3^2}{3} = -\frac{5}{3} < 0$$

Sen sijaan $x^2 - 4 = 9 - 4 = 5 > 0$.
Väite ei siis ole voimassa toisinpäin.

21

$$\frac{a^3 - 2a^2 + a}{a^3 - a} = \frac{\cancel{a}(a^2 - 2a + 1)}{\cancel{a}(a^2 - 1)} = \frac{(a-1)^2}{(a+1)(a-1)} = \frac{a-1}{a+1}$$

$a = -2 : \dfrac{-2-1}{-2+1} = 3$

Lauseke ei ole määritelty, kun $a = -1$

$a = 0 : \dfrac{0-1}{0+1} = -1$

$a = 1 : \dfrac{1-1}{1+1} = 0$

$a = 2 : \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

22.

$$h(x) = \left(\frac{x^2}{x+1} + {}^{x+1)} 4 \right) : (x+2) = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+2)^2}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+2}{x+1}$$

<u>Vastaus</u>: $h(x) = \dfrac{x+2}{x+1},\ x \ne -2, x \ne -1$

23.

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x-1} : \frac{x^2 + 2x + 1}{x} - x^2 = \frac{(x^2-1)^2}{x-1} \cdot \frac{x}{(x+1)^2} - x^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(x^2-1)^2}{(x^2-1)(x+1)} - x^2 \\
&= \frac{x^2-1}{x+1} - x^2 \\
&= \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} - x^2 \\
&= -x^2 + x - 1
\end{aligned}
$$

$x = \sqrt{2}$

$-(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - 1 = -1 + \sqrt{2}$

Vastaus: $-x^2 + x - 1 = -3 + \sqrt{2}$

24. Yhtälön ratkaisu toteuttaa yhtälön. Sijoitetaan $x = -5$.

$$
\begin{aligned}
\frac{x^3 + 2x^2 + ax}{x-3} &= 0 \qquad \bigg| \; x = -5 \\
\frac{(-5)^3 + 2\cdot(-5)^2 + a\cdot(-5)}{-5-3} &= 0 \\
\frac{-75 - 5a}{-8} &= 0 \\
-5a &= 75 \\
a &= -15
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $a = -15$ ja ratkaistaan yhtälö.

$$
\begin{aligned}
\frac{x^3 + 2x^2 + ax}{x-3} &= 0 \qquad \bigg| \; a = -15 \\
\frac{x^3 + 2x^2 - 15x}{x-3} &= 0
\end{aligned}
$$

Funktio $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 15x}{x-3}$ on määritelty, kun nimittäjä ei saa arvoa 0, eli $x \neq 3$

Funktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohtien joukosta.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
x^3 + 2x^2 - 15x &= 0 \\
x(x^2 + 2x - 15) &= 0 \\
x &= 0 \qquad \text{tai} \qquad x^2 + 2x - 15 = 0
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2-8}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-2+8}{2} = 3 \qquad \Big| \text{ ei käy, } x \neq 3$$

Nollakohdat ovat −5 ja 0

<u>Vastaus</u>: $a = -15$, muut ratkaisut $x = 0$

25. Luku x

Käänteisluku $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Epäyhtälö

$$x > \frac{1}{x}$$

$$^{x)} x - \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{x^2 - 1}{x} > 0$$

Funktio $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

Funktio voi vaihtaa merkkinsä vain kohdissa. joissa se ei ole määritelty ja nollakohdissaan.

Kohdat, joissa funktio ei ole määritelty eli nimittäjän nollakohdat

$$x = 0$$

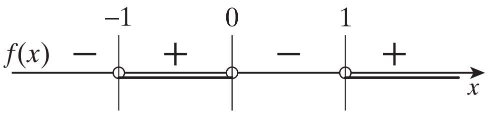
Funktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohtien joukosta.

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Merkkikaavio



$$f(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^2-1}{-2} = -\frac{3}{2} < 0$$

$$f(-0,5) = 1,5 > 0$$

$$f(0,5) = -1,5 < 0$$

$$f(2) = \frac{3}{2} > 0$$

Merkkikaaviosta nähdään, että $f(x) > 0$, kun $-1 < x < 0$ tai $x > 1$

<u>Vastaus</u>: $-1 < x < 0$ tai $x > 1$

26.
Epäyhtälö

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} < 1$$

$$^{x+1)}\frac{1}{x-1} - {}^{x-1)}\frac{1}{x+1} - {}^{x^2-1)}1 < 0$$

$$\frac{x+1-x+1-x^2+1}{x^2-1} < 0$$

$$\frac{-x^2+3}{x^2-1} < 0$$

Funktio $f(x) = \dfrac{-x^2+3}{x^2-1}$

Funktio voi vaihtaa merkkinsä vain kohdissa, joissa se ei ole määritelty ja nollakohdissaan.

Kohdat, joissa funktio ei ole määritelty eli nimittäjän nollakohdat

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

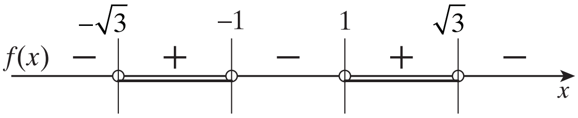
Funktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohtien joukosta.

$$-x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Merkkikaavio



$$f(x)=\frac{-x^2+3}{x^2-1}$$

$$f(-2)=\frac{-(-2)^2+3}{(-2)^2-1}=-\frac{1}{3}<0$$

$$f(-1{,}5)=0{,}6>0$$

$$f(0)=-3<0$$

$$f(1{,}5)=0{,}6>0$$

$$f(2)=-\frac{1}{3}<0$$

Merkkikaaviosta nähdään, että $f(x)<0$, kun $x<-\sqrt{3}$ tai $-1<x<1$ tai $x>\sqrt{3}$

<u>Vastaus</u>: $x<-\sqrt{3}$ tai $-1<x<1$ tai $x>\sqrt{3}$

27.

a) $$\frac{\frac{1}{x}-{}^{x)}x}{\frac{1}{x}+{}^{x)}1}=\frac{\frac{1-x^2}{x}}{\frac{1+x}{x}}=\frac{(1-x)(1+x)}{1+x}=1-x\,,\ x\neq 0 \text{ ja } x\neq -1$$

b) $$\frac{x-1}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{x-1}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}=\frac{x-1}{{}^{x)}1-\frac{1}{x}}=\frac{(x-1)x}{x-1}=x\,,\ x>0 \text{ ja } x\neq 1$$

c)

$$\frac{\frac{1}{x}-x}{\frac{1}{x}+1}=\frac{x-1}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$ | edellisten kohtien sievennykset, $x>0$ ja $x\neq 1$

$$1-x=x$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

<u>Vastaus:</u> a) $1-x$, $x\neq 0$ ja $x\neq -1$ b) x, $x\neq 0$ ja $x\neq -1$ c) $x=\frac{1}{2}$

28.

$$\frac{2x+a^2-3a}{x-1}=a$$

$$\frac{2x+a^2-3a}{x-1}-{}^{x-1)}a=0$$

$$\frac{2x+a^2-3a-ax+a}{x-1}=0$$

$$\frac{(2-a)x+a^2-2a}{x-1}=0$$

Funktio $f(x)=\dfrac{(2-a)x+a^2-2a}{x-1}$ on määritelty, kun nimittäjä ei saa arvoa 0, eli $x\neq 1$

Funktion nollakohdat löytyvät osoittajan nollakohtien joukosta.

$$f(x)=0$$

$$(2-a)x+a^2-2a=0$$

$$(2-a)x=-a^2+2a$$

1° $2-a\neq 0$ eli $a\neq 2$

$$(2-a)x=-a^2+2a \qquad \big|\ :(2-a)\neq 0$$

$$x=\frac{a(-a+2)}{2-a}$$

$$x=a$$

Tämä kelpaa ratkaisuksi, jos se ei ole nimittäjän nollakohta, eli jos $x=a\neq 1$. Jos a = 1, niin ratkaisuja ei ole.

2° $2-a=0$ eli $a=2$

$$(2-a)x=-a^2+2a \qquad \big|\ a=2$$

$$0\cdot x=0$$

$$0=0 \qquad \text{identtisesti tosi}$$

Ratkaisuksi kelpaavat kaikki määrittelyjoukon luvut, eli $x\in\mathbb{R}$ ja $x\neq 1$

<u>Vastaus</u>: $\begin{cases} x=a,\ \text{kun } a\neq 2 \text{ ja } a\neq 1 \\ x\in\mathbb{R} \text{ ja } x\neq 1,\ \text{kun } a=2 \\ \text{ei ratkaisuja, kun } a=1 \end{cases}$

29.

a) $${}^{a-1)}\frac{a}{1+a}-{}^{a^2-1)}1-{}^{a+1)}\frac{1}{-1+a}=\frac{a^2-a-a^2+1-a-1}{(a+1)(a-1)}=\frac{-2a}{a^2-1},\ a\neq\pm 1$$

b) $\dfrac{6a}{a^3-a^2}:\dfrac{3a}{a^2-a}=\dfrac{6a}{a^2(a-1)}\cdot\dfrac{a(a-1)}{3a}=\dfrac{2}{a}$

$a^3-a^2\neq 0$ ja $a^2-a\neq 0$ ja $3a\neq 0$ eli $a\neq 0,\ a\neq 1$

<u>Vastaus:</u> a) $\dfrac{-2a}{a^2-1},\ a\neq \pm 1$ b) $\dfrac{2}{a},\ a\neq 0$ ja $a\neq 1$

2. Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

30. a) Annetaan muuttujalle arvoja ja lasketaan funktion arvot

x	$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$
0,9	1,9
0,999	1,999
0,999 99	1,999 99
0,999 999 9	1,999 999 9
0,999 999 999	1,999 999 999
0,999 999 999 99	1,999 999 999 99

Funktion arvot lähenevät arvoa 2.

b) Annetaan muuttujalle arvoja ja lasketaan funktion arvot

x	$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$
1,1	2,1
1,001	2,001
1,000 01	2,000 01
1,000 000 1	2,000 000 1
1,000 000 001	2,000 000 001
1,000 000 000 1	2,000 000 000 1

Funktion arvot lähenevät arvoa 2.

<u>Vastaus</u>: Funktion arvot lähestyvät arvoa a) 2 b) 2.

31. a) Annetaan muuttujalle arvoja ja lasketaan funktion arvot

x	$f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$
0,9	2,71
0,999	2,997 001
0,999 99	2,999 97
0,999 999 9	2,999 999 7
0,999 999 999	2,999 999 997
0,999 999 999 99	2,999 999 999 97

Funktion arvot lähenevät arvoa 3.

b) Annetaan muuttujalle arvoja ja lasketaan funktion arvot

x	$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$
1,1	3,31
1,001	3,003 001
1,000 01	3,000 03
1,000 000 1	3,000 000 3
1,000 000 001	3,000 000 003
1,000 000 000 1	3,000 000 000 3

Funktion arvot lähenevät arvoa 3.

Vastaus: Funktion arvot lähestyvät arvoa a) 3   b) 3.

32. Funktio $f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$

Annetaan muuttujalle arvoja, jotka ovat pienempiä kuin 1 ja lasketaan funktion arvot

x	$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$
0,9	–0,1
0,999	–0,001
0,999 99	–0,000 01
0,999 999 9	–0,000 000 1
0,999 999 999	–0,000 000 001
0,999 999 999 99	–0,000 000 000 01

Funktion arvot lähenevät arvoa 0.

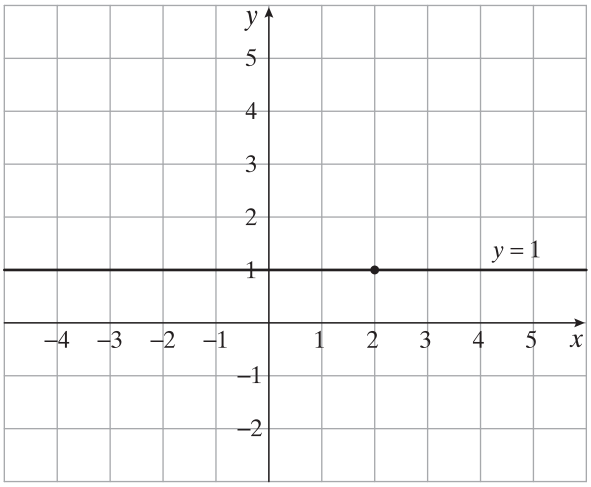
b) Annetaan muuttujalle arvoja, jotka ovat suurempia kuin 1 ja lasketaan funktion arvot

x	$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$
1,1	0,1
1,001	0, 001
1,000 01	0,000 01
1,000 000 1	0,000 000 1
1,000 000 001	0,000 000 001
1,000 000 000 1	0,000 000 000 1

Funktion arvot lähenevät arvoa 0.
Vastaus: Funktion raja-arvo on 0.

33. a) Raja-arvo $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}$

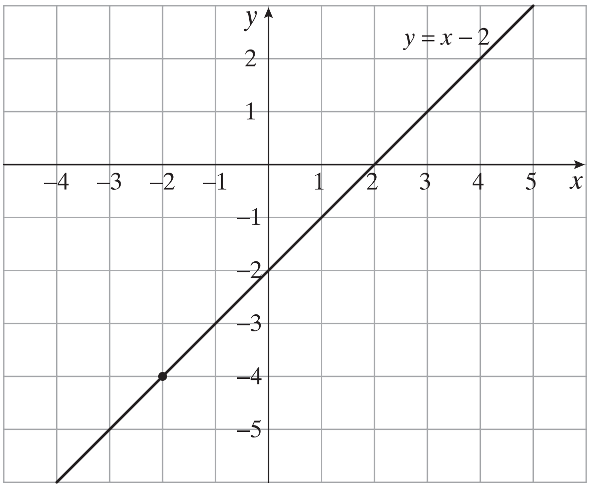
Sievennetään lauseke $\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}=1$



Raja-arvo $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}=1$

b) Raja-arvo $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$

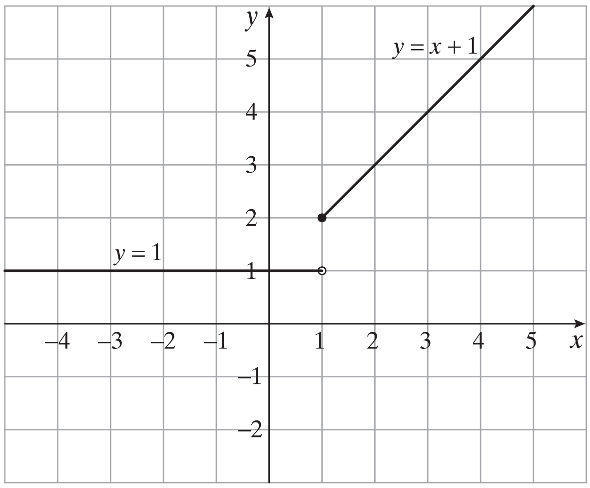
Sievennetään lauseke $\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}}=x-2$



Raja-arvo $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$

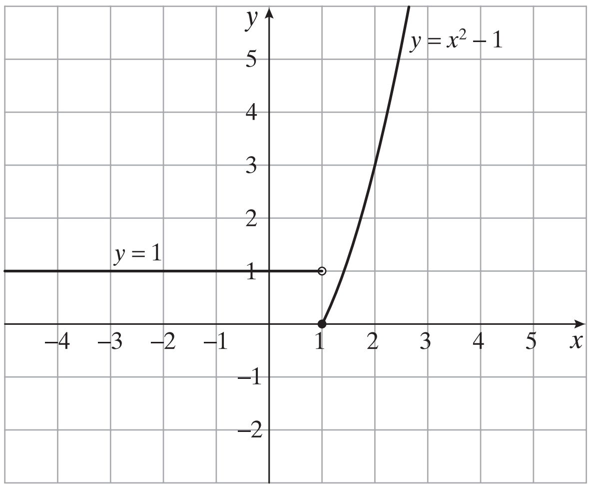
Vastaus: Raja-arvo on a) 1   b) –4.

34. a) Funktio $f(x)=\begin{cases}1, & \text{kun } x<1\\ x+1, & \text{kun } x\geq 1\end{cases}$



Funktiolla $f(x)=\begin{cases}1, & \text{kun } x<1\\ x+1, & \text{kun } x\geq 1\end{cases}$ ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 1$, koska toispuoleiset raja-arvot $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 1=1$ ja $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$ ovat erisuuret.

b) Funktio $g(x)=\begin{cases}1, & \text{kun } x<1\\ x^2-1, & \text{kun } x\geq 1\end{cases}$

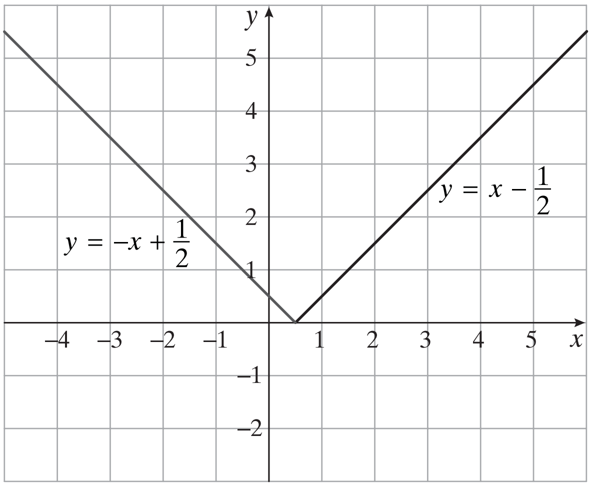


Funktiolla $g(x)=\begin{cases}1, \text{ kun } x<1\\ x^2-1, \text{ kun } x\geq 1\end{cases}$ ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 1$, koska toispuoleiset raja-arvot $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1$ ja $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1) = 0$ ovat erisuuret.

Vastaus: a) Raja-arvoa ei ole olemassa. b) Raja-arvoa ei ole olemassa.

35. Tutki piirtämällä, onko funktiolla raja-arvo kodassa $x = \frac{1}{2}$.

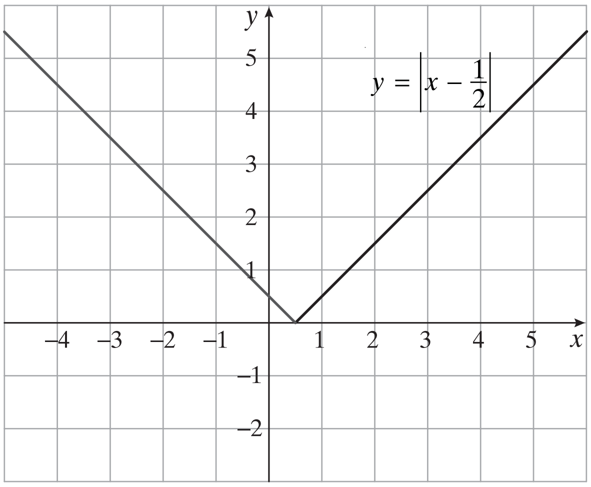
a) Funktio $f(x)=\begin{cases}-x+\frac{1}{2}, \text{ kun } x\leq \frac{1}{2}\\ x-\frac{1}{2}, \text{ kun } x>\frac{1}{2}\end{cases}$



Funktion $f(x)=\begin{cases}-x+\frac{1}{2}, \text{ kun } x\leq \frac{1}{2}\\ x-\frac{1}{2}, \text{ kun } x>\frac{1}{2}\end{cases}$ toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = \frac{1}{2}$ ovat

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} \left(-x+\frac{1}{2}\right) = 0$ ja $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} \left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$, joten funktiolla *f* on raja-arvo kohdassa $x = \frac{1}{2}$.

b) Funktio $g(x) = \left|x-\frac{1}{2}\right|$



Funktion $g(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = \frac{1}{2}$ ovat

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0$ ja $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0$, joten funktiolla *g* on raja-arvo kohdassa $x = \frac{1}{2}$.

Vastaus: Funktioilla *f* ja *g* on raja-arvo kohdassa $x = \frac{1}{2}$ ja se on 0.

36. a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-2}{\sqrt{x}-5} = \frac{1-2}{\sqrt{1}-5} = \frac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+2}{x^2+4} = \frac{2+2}{2^2+4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{0}{(0-1)^2} = 0$

Vastaus: Raja-arvo on a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0.

37. a) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{\sqrt{x}-2}} = \lim\limits_{x \to 4}(\sqrt{x}+2) = \sqrt{4}+2 = 4$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2+6x+9}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{(x+3)^{\cancel{2}1}}{\cancel{x+3}} = \lim\limits_{x \to -3}(x+3) = -3+3 = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{-x^2+4x-4}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{-(x^2-4x+4)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{-\cancel{(x-2)^2}}{\cancel{(x-2)^2}} = \lim\limits_{x \to 2}(-1) = -1$

Vastaus: Raja-arvo on a) 4 b) 0 c) –1.

38. a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x^2-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x)=(-1)^2-(-1)=2$

b) Raja-arvo $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}$

Jaetaan osoittaja ja nimittäjä tekijöihin käyttäen apuna toisen asteen polynomin nollakohtia.
Osoittaja

$$x^2+x-6=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$$

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{25}}{2}=-3$$

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{25}}{2}=2$$

Nimittäjä

$$x^2-7x+10=0$$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1}$$

$$x_1=\frac{7-\sqrt{9}}{2}=2$$

$$x_2=\frac{7+\sqrt{9}}{2}=5$$

Raja-arvo $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-5)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-5}=\dfrac{2+3}{2-5}=-\dfrac{5}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}[(\dfrac{4}{x^2}-{}^{x^2)}1):(-2+x)]=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4-x^2}{x^2}\cdot\dfrac{1}{-2+x}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\cancel{(2-x)}(2+x)}{x^2}\cdot\dfrac{1}{-\cancel{(2-x)}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left(-\dfrac{2+x}{x^2}\right)=-\dfrac{2+2}{2^2}=-1$

<u>Vastaus</u>: Raja-arvo on a) 2 b) $-\dfrac{5}{3}$ c) –1.

39. a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}=\dfrac{-1-1}{(-1)^2+2\cdot(-1)+1}=-\dfrac{2}{0}$ Ei raja-arvoa.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^8-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{x^4-1}}{\cancel{(x^4-1)}\,(x^4+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^4+1}=\dfrac{1}{1^4+1}=\dfrac{1}{2}$

c) Raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$

Sijoittamalla lausekkeeseen $x = 1$, se muuttuu muotoon $\dfrac{0}{0}$, joten sekä osoittajan että nimittäjän tekijänä on polynomi $x – 1$. Suoritetaan jakolasku jakokulmassa.

Osoittajan jakaminen

$$
\begin{array}{r l}
 & x^3+x^2+x+1 \\
x-1\,\big) & x^4 \qquad\qquad\qquad -1 \\
 & \underline{\mp x^4 \pm x^3} \\
 & \quad x^3 \\
 & \quad \underline{\mp x^3 \pm x^2} \\
 & \qquad x^2 \\
 & \qquad \underline{\mp x^2 \pm x} \\
 & \qquad\quad x-1 \\
 & \qquad\quad \underline{\mp x \pm 1} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Nimittäjän jakaminen

$$
\begin{array}{r l}
 & x^2+x+1 \\
x-1\,\big) & x^3 \qquad\qquad -1 \\
 & \underline{\mp x^3 \pm x^2} \\
 & \quad x^2 \\
 & \quad \underline{\mp x^2 \pm x} \\
 & \qquad x-1 \\
 & \qquad \underline{\mp x \pm 1} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Raja-arvo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\,(x^3+x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}\,(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}=\frac{1^3+1^2+1+1}{1^2+1+1}=\frac{4}{3}$$

<u>Vastaus</u>: a) Ei raja-arvoa. b) Raja-arvo on $\dfrac{1}{2}$. c) Raja-arvo on $\dfrac{4}{3}$.

40. a) Funktio $g(x)=\begin{cases} -x-\dfrac{2}{3}, & \text{kun } x\le -1 \\ -\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}, & \text{kun } x>-1 \end{cases}$

Koska funktio on paloittain määritelty ja sen lause muuttuu kohdassa, missä raja-arvo pitää laskea, tarkastellaan toispuolisia raja-arvoja kohdassa x = –1.

Vasemmalta: $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (-x - \frac{2}{3}) = -(-1) - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Oikealta: $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}\cdot(-1)^2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Koska toispuoleisien raja-arvojen arvot ovat yhtä suuret, niin funktiolla on raja-arvo kohdassa x = –1 ja se on toispuoleisten raja-arvojen yhteinen arvo $\frac{1}{3}$.

b) Funktio $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ kun } x \le -1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3, \text{ kun } x > -1 \end{cases}$

Tarkastellaan toispuoleisia raja-arvoja.

Vasemmalta: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (x^2 - 1) = (-1)^2 - 1 = 0$

Oikealta: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3\right) = \frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot(-1)^3 = 1$

Koska toispuoleiset raja-arvot ovat eri suuret, niin funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa x = –1.

<u>Vastaus</u>: a) Raja-arvo on $\frac{1}{3}$. b) Funktiolla ei ole raja-arvoa.

41. Funktio jatkuva kohdassa x = 1, jos funktion arvo on yhtä suuri kuin funktion raja-arvo tässä kohdassa.

a) Funktio $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{4}, \text{ kun } x \le 1 \\ -x^2 + \frac{5}{4}, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$

Raja-arvon laskemiseksi tarkastellaan toispuoleisia raja-arvoja kohdassa x = 1.

Vasemmalta: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - \frac{1}{4}) = 1^2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Oikealta: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-x^2 + \frac{5}{4}) = -1^2 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$

Koska toispuoleiset raja-arvot ovat eri suuret, niin funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa x = –1. Täten funktio ei ole jatkuva kohdassa x = 1.

b) Funktio $g(x)=\begin{cases}(x-1)^3, & \text{kun } x\le 1\\ x^3-3x^2+3x+1, & \text{kun } x>1\end{cases}$

Raja-arvon laskemiseksi tarkastellaan toispuoleisia raja-arvoja kohdassa x = 1.

Vasemmalta: $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)^3=(1-1)^3=0$

Oikealta: $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^3-3x^2+3x+1)=1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1+1=2$

Koska toispuoleiset raja-arvot ovat eri suuret, niin funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa x = –1. Täten funktio ei ole jatkuva kohdassa x = 1.

Vastaus: a) Funktio ei ole jatkuva. b) Funktio ei ole jatkuva.

42. Funktio jatkuva kohdassa x = 1, jos funktion arvo on yhtä suuri kuin funktion raja-arvo tässä kohdassa.

a) Funktio $f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{kun } x<1\\ x^2-1, & \text{kun } x\ge 1\end{cases}$

Raja-arvon laskemiseksi tarkastellaan toispuoleisia raja-arvoja kohdassa x = 1.

Vasemmalta: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=1-1=0$

Oikealta: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)=1^2-1=0$

Koska toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret, niin funktion raja-arvo kohdassa x = 1 on $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

Funktion arvo kohdassa x = 1 on $f(1)=1^2-1=0$

Funktion arvo on yhtä suuri kuin funktion raja-arvo kohdassa x = 1, joten funktio on jatkuva kohdassa x = 1.

b) Funktio $g(x)=\begin{cases}x^3+1, & \text{kun } x\le 1\\ \sqrt{x+8}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{kun } x>1\end{cases}$

Raja-arvon laskemiseksi tarkastellaan toispuoleisia raja-arvoja kohdassa x = 1.

Vasemmalta: $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^3+1)=1^3+1=2$

Oikealta: $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\sqrt{x+8}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})=\sqrt{1+8}-\dfrac{1}{\sqrt{1}}=2$

Koska toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret, niin funktion raja-arvo kohdassa $x = 1$ on $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

Funktion arvo kohdassa $x = 1$ on $f(1) = 1^3 + 1 = 2$

Funktion arvo on yhtä suuri kuin funktion raja-arvo kohdassa $x = 1$, joten funktio on jatkuva kohdassa $x = 1$.

Vastaus: a) Funktio on jatkuva. b) Funktio on jatkuva.

43. Funktio $f(x) = \begin{cases} x - a, \text{ kun } x < -2 \\ 2a, \text{ kun } x \geq -2 \end{cases}$

Funktion osat ovat polynomifunktioina jatkuvia kaikkialla. Funktio on jatkuva kohdassa $x = -2$, jos funktion arvo on yhtä suuri kuin funktion raja-arvo tässä kohdassa.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = x - a, x < -2 \\ f(x) = 2a, x \geq -2 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x\to -2^-}(x - a) = \lim_{x\to -2^+}(2a) = 2a$$

$$-2 - a = 2a$$

$$3a = -2 \quad |:3$$

$$a = -\frac{2}{3}$$

Vastaus: Funktio on jatkuva kaikkialla, kun $a = -\dfrac{2}{3}$.

44.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}[1 : (\dfrac{2}{x-1} + 1)] = \lim\limits_{x\to 1}[1 : (\dfrac{2 + x - 1}{x - 1})] = \lim\limits_{x\to 1}[1 \cdot \dfrac{x-1}{1+x}] = 0$

Vastaus: a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2}$ b) 0

45.

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2 - x}{2x}}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{2 - x}{2x(x - 2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

Vastaus: $-\dfrac{1}{4}$

46.

Jatkuvuusehto $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x\to a}(x-2) = a^2 - 4$$

$$a - 2 = a^2 - 4$$

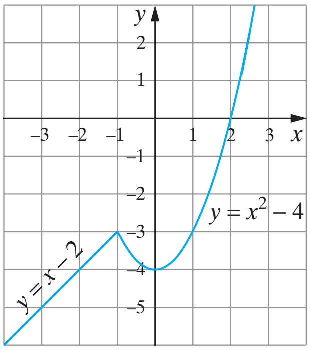
$$-a^2 + a + 2 = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-1)\cdot 2}}{2\cdot(-1)}$$

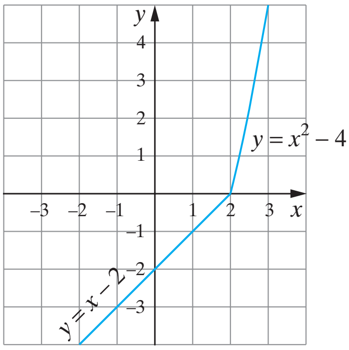
$$a_1 = -1$$

$$a_2 = 2$$

$a = -1$



$a = 2$



<u>Vastaus</u>: $a = -1$ tai $a = 2$

47.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 2 \\ 0{,}3x & 2 \le x < 20 \\ 0{,}4x & 20 \le x < 50 \\ 0{,}5x & 50 \le x \le 100 \end{cases}$$

Funktio ei ole jatkuva koska esimerkiksi kohdassa $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0 \ne 0{,}6 = f(2)$$

48.

Jatkuvuusehto $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

Jotta lausekkeella $\dfrac{x^3 + x^2 + 4x + a}{x^2 - 1}$ olisi raja-arvo kohdassa $x = -1$, on osoittajalla ja nimittäjällä oltava yhteinen nollakohta kohdassa $x = -1$.

$$(-1)^3 + (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + a = 0$$
$$a = 4$$

Osoittajan tekijät $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x+1)(x^2+4)$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2 + 4x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2+4)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2+4}{x-1} = -\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$$
$$-\frac{5}{2} = \frac{5}{2} \cdot (-1) + b$$
$$b = 0$$

<u>Vastaus</u>: $a = 4$ ja $b = 0$

49.

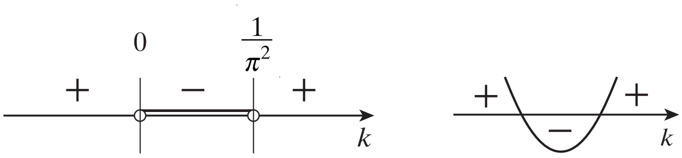
$g(r) = \dfrac{r^2 + 2\pi kr - \pi^2}{r^2 + 2\pi kr + k}$ on kaikkialla jatkuva, jos nimittäjällä ei ole nollakohtia eli kun diskriminantti $D < 0$

$$D = (2\pi k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 4\pi^2 k^2 - 4k$$
$$4\pi^2 k^2 - 4k < 0$$

Nollakohdat

$$4\pi^2 k^2 - 4k = 0$$
$$4k(\pi^2 k - 1) = 0$$
$$k = 0 \quad \text{tai} \quad \pi^2 k - 1 = 0$$
$$k = \frac{1}{\pi^2}$$

Merkkikaavio



<u>Vastaus</u>: $0 < k < \dfrac{1}{\pi^2}$

50.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{\frac{2}{x}}-1}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{\frac{2}{x}}+1)(\sqrt{\frac{2}{x}}-1)}{(\sqrt{\frac{2}{x}}+1)(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x}-1}{(\sqrt{\frac{2}{x}}+1)(2-x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{x}}{(\sqrt{\frac{2}{x}}+1)(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x(\sqrt{\frac{2}{x}}+1)(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x(\sqrt{\frac{2}{x}}+1)}=\frac{1}{4}$$

<u>Vastaus</u>: $\frac{1}{4}$

51.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+1-\left(1-2x+x^2\right)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x-1}=-4$$

<u>Vastaus</u>: −4

52.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)^2=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right)^2=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right)^2=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)^2=\frac{1}{4}$$

<u>Vastaus</u>: $\frac{1}{4}$

53.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}+1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=0$$

<u>Vastaus</u>: 0

54.

Jotta funktiolla olisi äärellinen raja-arvo kohdassa $x = 2$, on $x = 2$ oltava osoittaja ja nimittäjän yhteinen nollakohta eli

$$a\cdot 2^2-6\cdot 2+4=0$$
$$a=2$$

Osoittajan nollakohdat

$2x^2 - 6x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

Nimittäjän nollakohdat

$x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$x_1 = -1$

$x_2 = 2$

Joten

$$\frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - x - 2} = \frac{2(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{2(x-1)}{x+1} \to \frac{2}{3}, \text{ kun } x \to 2$$

Vastaus: $a = 2$ ja raja-arvo on $\frac{2}{3}$

55.

$$\frac{ax}{x-1} + \frac{x^3 + b}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + ax^2 - ax + b}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + ax^2 - ax + b}{x^2 - 2x + 1}$$

Jotta funktio olisi jatkuva pisteessä $x = 1$, on se oltava määritelty siinä pisteessä eli osoittajan on oltava nimittäjän tekijä.

Suoritetaan jakolasku

$$\frac{x^3 + ax^2 - ax + b}{x^2 - 2x + 1} = x + a + 2 + \frac{(a+3)x + b - a - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

Jotta jako menisi tasan, tulee lausekkeen $(a + 3)x + b - a - 2$ olla identtisesti nolla eli $a + 3 = 0$ ja $b - a - 2 = 0$ eli $a = -3$ ja $b = -1$.

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x-1)^2} = x - 3 + 2 = x - 1$$

$\lim_{x \to 1}(x-1) = 0 = f(1)$, joten f on jatkuva pisteessä $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x}{x-1} + \dfrac{x^3 - 1}{(x-1)^2}, \text{ kun } x \neq 1 \\ 0, \text{ kun } x = 1 \end{cases}$$

Vastaus: $a = -3$ ja $b = -1$

56. a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \to 1}(x-1) = 0$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$

Vastaus: a) 0 b) 3

3. Funktion derivaatta

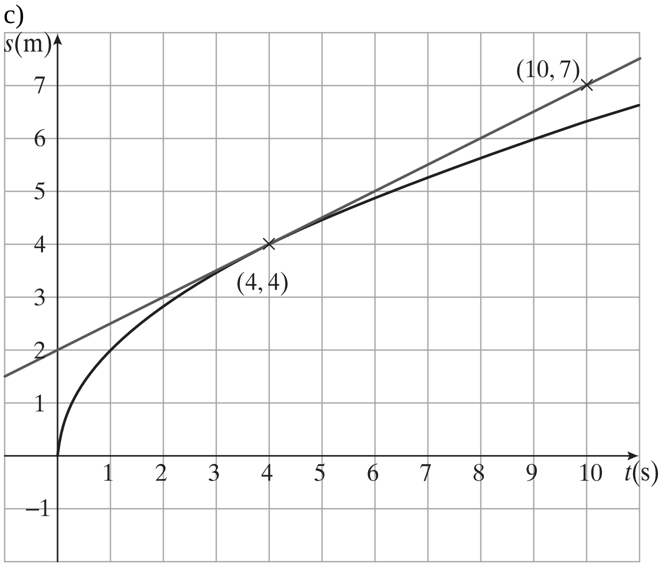
57. a) Kappale kulkee pisteiden (0,0) ja (9,6) kautta.

Keskimääräinen nopeus aikavälillä 0 s … 9 s $v_k=\frac{6\text{ m}-0\text{ m}}{9\text{ s}-0\text{ s}}\approx 0{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) Kappale kulkee pisteiden (1,2) ja (4,4) kautta.

Keskimääräinen nopeus aikavälillä 1 s … 4 s $v_k=\frac{4\text{ m}-2\text{ m}}{4\text{ s}-1\text{ s}}\approx 0{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}$

c)

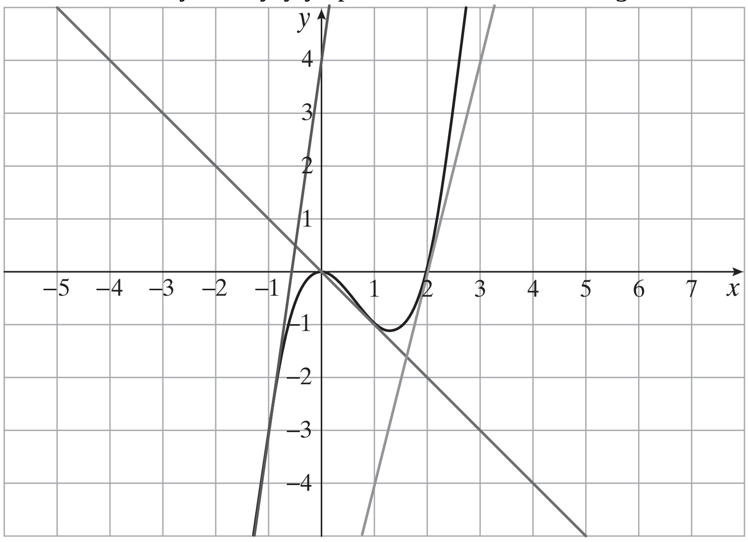


Hetkellinen nopeus neljän sekunnin kuluttua liikkeelle lähdöstä saadaan kyseiseen käyrän kohtaan piirretyn tangentin kulmakertoimesta. Tangentti kulkee pisteiden (4,4) ja (10,7) kautta.

Nopeus neljän sekunnin kuluttua liikkeelle lähdöstä $v_k=\frac{7\text{ m}-4\text{ m}}{10\text{ s}-4\text{ s}}\approx 0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Vastaus: Kappaleen nopeus ona) 0,7 m/s b) 0,7 m/s c) 0,5 m/s.

58. Piirretään käyrälle kysytyn pisteen kautta kulkeva tangentti.



a) Funktion derivaatta kohdassa $x = -1$.
Tangentti kulkee pisteiden (–1,–3) ja (0,4) kautta.

Derivaatta $f'(-1) = \dfrac{4-(-3)}{0-(-1)} = 7$

b) Funktion derivaatta kohdassa $x = 0$
Tangentti on x-akselin suuntainen.
Derivaatta $f'(0) = 0$
c) Funktion derivaatta kohdassa $x = 1$
Tangentti kulkee pisteiden (–1,1) ja (1,–1) kautta.

Derivaatta $f'(1) = \dfrac{-1-1}{1-(-1)} = -1$

d) Funktion derivaatta kohdassa $x = 2$
Tangentti kulkee pisteiden (1,–4) ja (3,4) kautta.

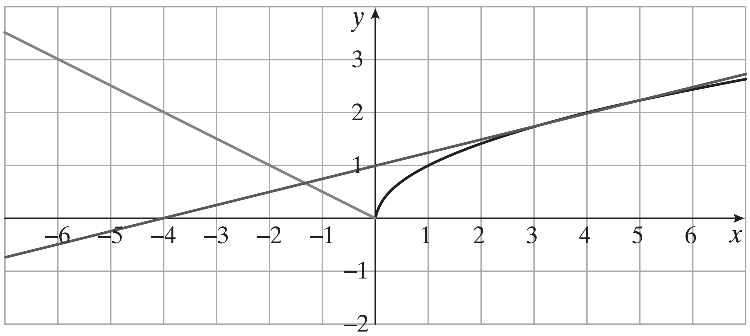
Derivaatta $f'(-1) = \dfrac{4-(-4)}{3-1} = 4$

Vastaus: Derivaatta on a) 7 b) 0 c) –1 d) 4.

59. a) Koska funktion kuvaaja on suora kohdassa $x = -4$, niin kuvaajan tangentin kulmakerroin on sama kuin suoran kulmakerroin.

Derivaatta kohdassa $x = -4$ on $f'(-4) = \dfrac{0-2}{0-(-4)} = -0,5$

b) Derivaatta kohdassa $x = 0$ ei ole olemassa, koska kyseiseen kohtaan ei voi piirtää tangenttia
c) Derivaatta kohdassa $x = 4$



Tangentti kulkee pisteiden (1,4) ja (–4,0) kautta.

Derivaatta $f\,'(4) = \dfrac{0-4}{-4-1} = 0{,}8$

<u>Vastaus</u>: a) Derivaatta on –0,5. b) Derivaattaa ei ole olemassa. c) Derivaatta on 0,8.

60. Funktio $f(x) = x^2$

Derivaatta $f\,'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

a) Derivaatta kohdassa $x = 2$

$$f\,'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 2 + 2 = 4$$

b) Derivaatta kohdassa $x = -1$

$$f\,'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = -1 - 1 = -2$$

<u>Vastaus</u>: a) $f\,'(2) = 4$ b) $f\,'(-1) = -2$

61. Funktio $f(x) = x^2 + 2x$

Erotusosamäärä $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Derivaatta $f\,'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

a) Erotusosamäärä kohdassa $x = 2$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{x^2 + 2x - 8}{x-2}$$

Polynomin $x^2 + 2x - 8$ nollakohdat

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2} = 2$$

Erotusosamäärä $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \dfrac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = x + 4$

Derivaatta $f\,'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+4) = 6$

b) Erotusosamäärä kohdassa $x = -1$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x+1)^2}{x+1} = x + 1$$

Derivaatta $f\,'(-1) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1}(x+1) = 0$

<u>Vastaus</u>: a) Erotusosamäärä on $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = x + 4$ ja derivaatta $f\,'(2) = 6$. b) Erotusosamäärä on $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = x + 1$ ja derivaatta $f\,'(-1) = 0$.

62.a) Funktio $f(x) = \sqrt{x} + 2$

Derivaatta $f\,'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f\,'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} + 2 - 4}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{{}^{\sqrt{x}+2)}\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

b) Funktio $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$

$$\text{Derivaatta } f\,'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{{}^{9)}\dfrac{1}{2x+1} - {}^{2x+1)}\dfrac{1}{9}}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{9 - 2x - 1}{9(2x+1)} : (x - 4)$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{-2x + 8}{9(2x+1)} \cdot \frac{1}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{-2\,\cancel{(x-4)}}{9(2x+1)} \cdot \frac{1}{\cancel{x-4}} = \frac{-2}{9 \cdot (2 \cdot 4 + 1)} = -\frac{2}{81}$$

<u>Vastaus</u>: a) $f\,'(4) = \dfrac{1}{4}$ b) $f\,'(4) = -\dfrac{2}{81}$

63. Funktio $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$

Erotusosamäärä kohdassa $x = 1$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\dfrac{{}^{4)}x}{x+3}-\dfrac{{}^{x+3)}1}{4}}{x-1}=\frac{4x-x-3}{4(x+3)}:(x-1)$$

$$=\frac{3x-3}{4(x+3)}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{3\cancel{(x-1)}}{4(x+3)}\cdot\frac{1}{\cancel{x-1}}=\frac{3}{4(x+3)}$$

Derivaatta $f\,'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{4(x+3)}=\dfrac{3}{16}$

<u>Vastaus</u>: Erotusosamäärä on $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{3}{4(x+3)}$ ja derivaatta $f\,'(1)==\dfrac{3}{16}$.

64. Funktion f erotusosamäärä $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Erotusosamäärä kohdassa $x = 2$

a) Funktio $f(x) = -x$

Erotusosamäärä $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{-x+2}{x-2}=-1$

b) Funktio $f(x) = 2x^2$

Erotusosamäärä $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{2x^2-8}{x-2}=\dfrac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=2x+4$

c) Funktio $f(x) = -x^2 + 1$

Erotusosamäärä $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{-x^2+1+3}{x-2}=\dfrac{-x^2+4}{x-2}=\dfrac{-\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=-x-2$

<u>Vastaus</u>: a) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=-1$ b) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=2x+4$ c) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=-x-2$

65. Funktion f derivaatta $f\,'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Derivaatta kohdassa $x = 1$

a) Funktio $f(x) = 3x$

Derivaatta $f\,'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(1+h)-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3\cancel{h}}{\cancel{h}}=3$

b) Funktio $f(x) = -4x^2$

Derivaatta $f\,'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-4(1+h)^2+4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-4-8h-4h^2+4}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-8-4h)}{\cancel{h}}=-8$$

c) Funktio $f(x) = 3x^2 - 1$

Derivaatta $f\,'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(1+h)^2-1-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3+6h+3h^2-3}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(6+3h)}{\cancel{h}} = 6$$

Vastaus: Derivaatta kohdassa $x = 1$ on a) 3 b) –8 c) 6.

66. Funktio $f(x) = -x^2 + x - 2$
Funktion arvo $f(2) = -2^2 + 2 - 2 = -4$

Derivaatta $f\,'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-(2+h)^2+(2+h)-2+4}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-4-4h-h^2+h+4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-3-h)}{\cancel{h}} = -3$$

Vastaus: $f(2) = -4$ ja $f\,'(2) = -3$

67. Funktion $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ kasvunopeuden ilmaisee funktion derivaatan arvo kysytyssä kohdassa.
a) Kasvunopeus kohdassa $x = 1$

$f\,'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2(1+h)^2+4(1+h)-1-1}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2-4h-2h^2+4+4h-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2h^{\cancel{2}1}}{\cancel{h}} = 0$$

b) Kasvunopeus kohdassa $x = \dfrac{1}{2}$

$$f\,'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\left(\frac{1}{2}+h\right)^2+4\left(\frac{1}{2}+h\right)-1-\frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\left(\frac{1}{2}+h\right)^2+4\left(\frac{1}{2}+h\right)-1-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{2}-2h-2h^2+2+4h-1\frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2-2h)}{\cancel{h}} = 2$$

Vastaus: Kasvunopeus on a) 0 b) 2.

68. Funktion f derivaatta kohdassa $x = -3$

Derivaatta $f\,'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

a) Funktio $f(x) = \dfrac{3}{x}$

Derivaatta $f\,'(-3) = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{\frac{3}{x} + {}^{x)}1}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{3+x}{x} : (x+3)$

$= \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{\cancel{x+3}}{x} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x+3}} = -\dfrac{1}{3}$

b) Funktio $f(x) = \dfrac{3}{x+4}$

Derivaatta $f\,'(-3) = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{\frac{3}{x+4} - {}^{x+4)}3}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{3-3x-12}{x+4} : (x+3)$

$= \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{-3x-9}{x+4} \cdot \dfrac{1}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{-3\cancel{(x+3)}}{x+4} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x+3}} = -3$

c) Funktio $f(x) = \dfrac{2x}{x-5}$

Derivaatta $f\,'(-3) = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{{}^{4)}\frac{2x}{x-5} - {}^{x-5)}\frac{3}{4}}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{8x-3x+15}{4(x-5)} : (x+3)$

$= \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{5\cancel{(x+3)}}{4(x-5)} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x+3}} = -\dfrac{5}{32}$

<u>Vastaus</u>: Funktion f derivaatta kohdassa $x = -3$ on a) $-\dfrac{1}{3}$ b) -3 c) $-\dfrac{5}{32}$.

69. Funktio $f(x) = x^4 + 2x - 3$.
Funktion arvo $f(0) = 0^4 + 2\cdot 0 - 3 = -3$

Derivaatta $f\,'(0) = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{(0+h)^4 + 2(0+h) - 3 + 3}{h}$

$= \lim\limits_{h\to0} \dfrac{h^4 + 2h}{h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{\cancel{h}(h^3+2)}{\cancel{h}} = 2$

<u>Vastaus</u>: $f(0) = -3$ ja $f\,'(0) = 2$

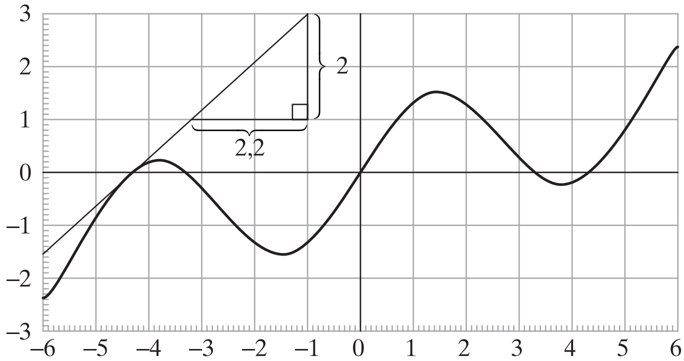
70. Funktio $f(x) = x^3 + 2x - 3$.
Funktion arvo $f(-2) = (-2)^3 + 2\cdot(-2) - 3 = -15$

Derivaatta $f\,'(-2) = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{(-2+h)^3 + 2(-2+h) - 3 + 15}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-8+12h-6h^2+h^3-4+2h+12}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(14-6h+h^2)}{\cancel{h}} = 14$$

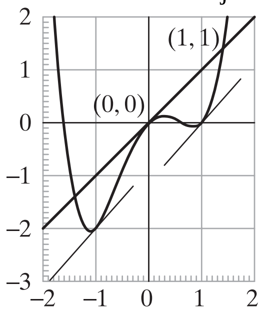
Vastaus: $f(-2) = -15$ ja $f'(-2) = 14$

71.



Kuvaajan ja x-akselin leikkauskohdat eli nollakohdat ovat – 4,3; –3,3; 0; 3,3 ja 4,3.
Derivaatan arvo kohdassa – 4,3 on pisteeseen (–4,3 ; 0) piirretyn tangentin kulmakerroin, joka on 0,9.
Vastaus: Nollakohdat ovat – 4,3; – 3,3; 0 3,3; 4,3 ja $f'(x_1) \approx 0,9$.

72. Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 0$.



Tangentti kulkee pisteiden (0,0) ja (1,1) kautta.
Derivaatan arvo on tangentin kulmakerroin kyseisessä pisteessä.

$f'(0) = k_t = \frac{1-0}{1-0} = 1$

Derivaatalla on sama arvo kuin origossa pisteissä (–1,–2) ja (1,0).
Vastaus: $f'(0) = 1$ ja derivaatalla on sama arvo kuin origossa pisteissä (–1,–2) ja (1,0).

73. Funktio $f : f(x) = \frac{1}{x^2}$

Derivaatan määritelmä $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Derivaatta pisteessä $x = 1$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^2}:(x-1)=\lim_{x\to 1}\frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{x-1}}=\frac{-(1+1)}{1^2}=-2$$

Vastaus: $f'(1) = -2$

74. Funktio f toteuttaa välillä $-1 < x < 1$ yhtälön $f(x) = 1 + 2x + x^2 f(x^2)$. Täten

$f(0) = 1 + 2\cdot 0 + 0^2 \cdot f(0)$

$f(0) = 1$

Lisäksi $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, joten $\lim_{x\to 0} x^2 f(x^2) = 0$

Derivaatan määritelmä $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Derivaatta $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2f(h^2)-1}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2f(h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[2+hf(h^2)\right]}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}\left[2+hf(h^2)\right]=2$$

Vastaus: $f'(0) = 2$

75. Funktio $f(x)=\frac{1}{1+x}$

Derivaatan määritelmä $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Derivaatta $f'(0)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x-1}{x+1}:x=\lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{x}}{x+1}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}=\frac{-1}{0+1}=-1$

Vastaus: $f'(0) = -1$

76. Derivaatan määritelmä $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Tällöin $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=k$

Kysytty raja-arvo $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\overbrace{-f(a)+f(a)}^{=0}-f(a-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=k+\lim_{h\to 0}\left[-\frac{f(a)-f(a-h)}{-h}\right]=k+k=2k$$

Vastaus: Kysytty raja-arvo on $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=2k$.

77. Derivaatan määritelmä $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Derivaatta $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+2(2+h)+(2+h)^2-9}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1+4+2h+4+4h+h^2-9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}} = 6$$

Vastaus: Derivaatta on $f'(2) = 6$.

4. Polynomifunktion derivaatta

78. a) Funktio $f(x) = 15$
Derivaatta $f'(x) = 0$
b) Funktio $f(x) = \pi^2$
Derivaatta $f'(x) = 0$
Vastaus : Derivaatta on a) $f'(x) = 0$ b) $f'(x) = 0$.

79. a) $Dx^2 = 2x$
b) $Dx^4 = 4x^3$
c) $Dx^{28} = 28x^{27}$
d) $Dx^{2\,007} = 2\,007x^{2\,006}$
e) $Dx = 1$
Vastaus: Derivaatta on a) $2x$ b) $4x^3$ c) $28x^{27}$ d) $2\,007x^{2\,006}$ e) 1

80. a) $D(6x^5) = 6\cdot 5x^4 = 30x^4$
b) $D(2x^4) = 2\cdot 4x^3 = 8x^3$
c) $D(-3x) = -3$
d) $D(\frac{1}{2}x^{10}) = \frac{1}{2}\cdot 10x^9 = 5x^9$
e) $D(\frac{x^6}{2}) = D(\frac{1}{2}x^6) = \frac{1}{2}\cdot 6x^5 = 3x^5$
Vastaus: Derivaatta on a) $30x^4$ b) $8x^3$ c) -3 d) $5x^9$ e) $3x^5$.

81. a) $D(x^5 + x^4 + x^2) = 5x^4 + 4x^3 + 2x$
b) $D(4x^{10} - 2x^8 + 3x^6) = 4\cdot 10x^9 - 2\cdot 8x^7 + 3\cdot 6x^5 = 40x^9 - 16x^7 + 18x^5$
c) $D(3x^2 - 5x - 97) = 3\cdot 2x - 5 - 0 = 6x - 5$
Vastaus: Derivaatta on a) $5x^4 + 4x^3 + 2x$ b) $40x^9 - 16x^7 + 18x^5$ c) $6x - 5$.

82. a) $D(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x + 1) = \frac{1}{2}\cdot 4x^3 - \frac{1}{3}\cdot 3x^2 + \frac{1}{5} + 0 = 2x^3 - x^2 + \frac{1}{5}$
b) $D(\frac{1}{3}x^{12} - 5x^7 + x - 23) = \frac{1}{3}\cdot 12x^{11} - 5\cdot 7x^6 + 1 - 0 = 4x^{11} - 35x^6 + 1$
c) $D(\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{2}x + 12) = \frac{3}{4}\cdot 3x^2 - \frac{3}{5}\cdot 2x + \frac{1}{2} + 0 = \frac{9}{4}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{2}$
Vastaus: Derivaatta on a) $2x^3 - x^2 + \frac{1}{5}$ b) $4x^{11} - 35x^6 + 1$ c) $\frac{9}{4}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{2}$.

83. a) $D(\frac{x^9}{3}+\frac{x^7}{7}+\frac{x}{2})=D(\frac{1}{3}x^9+\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{2}x)=\frac{1}{3}\cdot 9x^8+\frac{1}{7}\cdot 7x^6+\frac{1}{2}=3x^8+x^6+\frac{1}{2}$

b) $D(\frac{x^{12}}{3}-\frac{6x^7}{7}+\frac{5x}{2}-\frac{1}{6})=D(\frac{1}{3}x^{12}-\frac{6}{7}x^7+\frac{5}{2}x-\frac{1}{6})=\frac{1}{3}\cdot 12x^{11}-\frac{6}{7}\cdot 7x^6+\frac{5}{2}-0$

$=4x^{11}-6x^6+\frac{5}{2}$

c) $D(\frac{x^5}{3}-1{,}34x^3+2{,}36x-4{,}36)=D(\frac{1}{3}x^5-1{,}34x^3+2{,}36x-4{,}36)$

$=\frac{5}{3}x^4-4{,}02x^2+2{,}36$

Vastaus: Derivaatta on a) $3x^8+x^6+\frac{1}{2}$ b) $4x^{11}-6x^6+\frac{5}{2}$ c) $\frac{5}{3}x^4-4{,}02x^2+2{,}36$

84. a) $D(2x+1)^2=D(4x^2+4x+1)=4\cdot 2x+4+0=8x+4$

b) $D[(3x-4)(x+x^2)]=D[3x^2+3x^3-4x-4x^2]=D[3x^3-x^2-4x]=3\cdot 3x^2-2x-4$

$=9x^2-2x-4$

c) $D(\frac{5x^8-4x^5+x}{x})=D(\frac{\cancel{x}(5x^7-4x^4+1)}{\cancel{x}})=D(5x^7-4x^4+1)=5\cdot 7x^6-4\cdot 4x^3+0$

$=35x^6-16x^3$

d) $D(\frac{6x^5+5x^4+x^3-x^2}{2x^2})=D(3x^3+\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})=3\cdot 3x^2+\frac{5}{2}\cdot 2x+\frac{1}{2}$

$=9x^2+5x+\frac{1}{2}$

Vastaus: Derivaatta on a) $8x+4$ b) $9x^2-2x-4$ c) $35x^6-16x^3$ d) $9x^2+5x+\frac{1}{2}$.

85. Funktio $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-x+5$

Derivaatta $f'(x)=-\frac{1}{3}\cdot 3x^2+2\cdot 2x-1+0=-x^2+4x-1$

Derivaatan arvot

$f'(0)=-0^2+4\cdot 0-1=-1$

$f'(-2)=-(-2)^2+4\cdot(-2)-1=-13$

$f'(\frac{1}{2})=-(\frac{1}{2})^2+4\cdot\frac{1}{2}-1=\frac{3}{4}$

Vastaus: Derivaatan arvot ovat $f'(0)=-1$, $f'(-2)=-13$ ja $f'(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$.

86. Funktio $f(x)=x^4-2x^2+2$

Derivaatta $f'(x)=4x^3-2\cdot 2x+0=4x^3-4x$

Derivaatan arvo kohdissa 1, 2 ja −2
$f'(1) = 4\cdot 1^3 - 4\cdot 1 = 0$
$f'(2) = 4\cdot 2^3 - 4\cdot 2 = 24$
$f'(-2) = 4\cdot(-2)^3 - 4\cdot(-2) = -24$
Vastaus: Derivaatan arvot ovat $f'(1) = 0$, $f'(2) = 24$ ja $f'(-2) = -24$.

87. a) Funktio $f(x) = x^2 - 4x + 2$
Derivaatta $f'(x) = 2x - 4$
Yhtälö $f'(x) = 0$
$2x - 4 = 0$
$x = 2$
b) Funktio $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{5}$
Derivaatta $f'(x) = x - 3$
Yhtälö $f'(x) = 0$
$x - 3 = 0$
$x = 3$
Vastaus: a) $x = 2$ b) $x = 3$

88. a) Funktio $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 3$
Derivaatta $f'(x) = x^2 - 4x - 5$
Yhtälö $f'(x) = 0$
$x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{36}}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{4-\sqrt{36}}{2} = -1$$

b) Funktio $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x - \frac{257}{1\,093}$
Derivaatta $f'(x) = 4x^2 - 5x + 1$
Yhtälö $f'(x) = 0$
$4x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 4\cdot 1}}{2\cdot 4}$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{9}}{8} = 1$$

$$x_2 = \frac{5-\sqrt{9}}{8} = \frac{1}{4}$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisut ovat a) 5 ja –1 b) $\frac{1}{4}$ ja 1.

89. a) Funktio $f(x) = tx^3 + t^3x$
Derivaatta $f'(x) = t \cdot 3x^2 + t^3 \cdot 1 = 3tx^2 + t^3$
b) Määritä $f'(t)$, kun $f(t) = tx^3 + t^3x$.
Funktio $f(x) = tx^3 + t^3x$
Derivaatta $f'(t) = x^3 \cdot 1 + 3 \cdot t^2 \cdot x = x^3 + 3t^2x$
Vastaus: Derivaatta on a) $f'(x) = 3tx^2 + t^3$ b) $f'(t) = x^3 + 3t^2x$.

90. Funktio $f(x) = ax^2 + x + b$
Ehto $f(1) = 2$
$a \cdot 1^2 + 1 + b = 2$
$a + b = 1$
Derivaatta $f'(x) = 2ax + 1$
Ehto $f'(2) = 2$
$2a \cdot 2 + 1 = 2$
$4a = 1 \quad |:4$
$a = \frac{1}{4}$
Sijoitetaan $a = \frac{1}{4}$ ylempään ehtoon.

$$a + b = 1 \quad \Big| a = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} + b = 1$$

$$b = \frac{3}{4}$$

Vastaus: Vakiot ovat $a = \frac{1}{4}$ ja $b = \frac{3}{4}$.

91. Funktio $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + 12$
Funktion kasvunopeus $f'(x) = -x^2 + 5x - 3$ kohdissa 1, 0 ja –1
$f'(1) = -1^2 + 5 \cdot 1 - 3 = 1$
$f'(0) = -0^2 + 5 \cdot 0 - 3 = -3$
$f'(-1) = -(-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 3 = -9$
Vastaus: Funktion kasvunopeus kohdissa 1, 0 ja –1 on 1, –3 ja –9.

92. Ilvesten määrä $f(x) = 2{,}3x^3 - 39x^2 + 170x + 540$
Muutosnopeus $f'(x) = 6{,}9x^2 - 78x + 170$
a) Muutosnopeus vuoden kuluttua $f'(1) = 6{,}9 \cdot 1^2 - 78 \cdot 1 + 170 \approx 99$

b) Muutosnopeus 5 vuoden kuluttua $f'(5) = 6{,}9 \cdot 5^2 - 78 \cdot 5 + 170 \approx -48$

Vastaus: a) 99 eläintä/a b) –48 eläintä/a

93. Raketin lentorata $y = 10 + 40x - 5x^2$

Raketin lentoradan ylin piste on paraabelin huipussa.
Derivoimalla saadaan $y' = 40 - 10x$

Derivaatan nollakohta $y' = 0$

$$40 - 10x = 0$$
$$x = 4 \quad \big| \text{ paraabelin huipun } x\text{-koordinaatti}$$

Paraabelin huipun y-koordinaatti $y = 10 + 40 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 90$

Vastaus: Raketti käy 90 metrin korkeudella.

94. Sukelluksen syvyys $d(t) = 0{,}04t^2 - 2t$

Sukelluksen syvyyttä kuvaa ylöspäin aukeava paraabeli, joten suurin syvyys saadaan paraabelin huipusta.
Derivoimalla saadaan $d'(t) = 0{,}08t - 2$

Derivaatan nollakohta $d'(t) = 0$

$$0{,}08t - 2 = 0$$
$$t = 25$$

Sukelluksen syvyys $d(25) = 0{,}04 \cdot 25^2 - 2 \cdot 25 = -25$

Koska Terho on suurimmassa syvyydessä 25 s:n kuluttua, niin sukellus kestää $2 \cdot 25 \text{ s} = 50 \text{ s}$

Vastaus: Terho käy 25 metrin syvyydellä ja sukellus kestää 50 s.

95. Funktio $f(x) = x^3 - 11x^2 + 19x + \pi^2$
Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 11 \cdot 2x + 19 + 0 = 3x^2 - 22x + 19$
Yhtälö $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 22x + 19 = 0$$

$$x = \frac{-(-22) \pm \sqrt{(-22)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 19}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = \frac{22 - \sqrt{256}}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{22 + \sqrt{256}}{6} = 6\frac{1}{3}$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisut ovat 1 ja $6\frac{1}{3}$.

96. Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 11$ derivaatta saa arvon nolla?
Funktio $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 11$
Derivaatta $f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot 2x - 4 - 0 = 3x^2 + 4x - 4$
Derivaatan nollakohdat $f'(x) = 0$

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot3\cdot(-4)}}{2\cdot3}$$

$$x_1=\frac{-4-\sqrt{64}}{6}=-2$$

$$x_2=\frac{-4+\sqrt{64}}{6}=\frac{2}{3}$$

Vastaus: Derivaatan nollakohdat ovat –2 ja $\frac{2}{3}$.

97. Funktio $f(x) = x^2 - 4x - 5$
Derivaatta $f'(x) = 2x - 4$
Funktion nollakohdat $f(x) = 0$

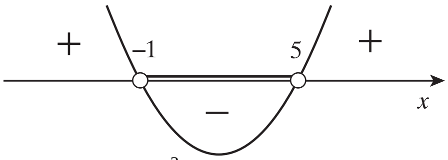
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2\cdot1}$$

$$x_1=\frac{4-\sqrt{36}}{2}=-1$$

$$x_2=\frac{4+\sqrt{36}}{2}=5$$

Merkkikaavio



Funktio $f(x) = x^2 - 4x - 5$ saa negatiivisia arvoja eli $f(x) < 0$, kun $-1 < x < 5$
Derivaatta $f'(x) = 2x - 4$ saa negatiivisia arvoja eli

$$f'(x) < 0$$
$$2x - 4 < 0$$
$$2x < 4 \quad |:2$$
$$x < 2$$

Vastaus: Funktio ja sen derivaatta saavat yhtä aikaa negatiivisia arvoja, kun $-1 < x < 2$.

98. Funktio $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 18$
Derivaatta $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
Ehdot $f(-2) = 20$

$$(-2)^3 + a(-2)^2 + b(-2) - 18 = 20$$
$$4a - 2b = 46$$

$$f'(2) = 19$$
$$3\cdot2^2 + 2a\cdot2 + b = 19$$
$$4a + b = 7$$

Saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases}4a-2b=46\\4a+b=7\end{cases}$$

Alemmasta yhtälöstä saadaan $b = –4a + 7$, joka sijoitetaan ylempään yhtälöön.

$4a – 2(–4a + 7) = 46$

$12a = 60 \quad |:12$

$a = 5$

Täten $b = –4·5 + 7 = –13$

Derivaatta $f'(x) = 3x^2 + 10x – 13$

Derivaatan nollakohdat $f'(x) = 0$

$3x^2 + 10x – 13 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-13)}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{256}}{6} = -4\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-10 + \sqrt{256}}{6} = 1$$

<u>Vastaus</u>: Derivaatan nollakohdat ovat $-4\frac{1}{3}$ ja 1.

99. Toisen asteen polynomi $P(x) = ax^2 + bx + c$

Derivaatta $P'(x) = 2ax + b$

Yhtälö $P(x) − P'(x) = x^2$

$ax^2 + bx + c – (2ax + b) = x^2$

$ax^2 + (b – 2a)x + c – b = x^2$

Yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla, kun

$a = 1$

$b – 2a = 0$, eli $b = 2$

$c – b = 0$, eli $c = – 2$

<u>Vastaus</u>: Polynomifunktio on $P(x) = x^2 + 2x – 2$.

100. Polynomifunktio $P(x) = x^3 + ax^2 + 3x$

Derivaatta $P'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$

Derivaatta on kaikkialla positiivinen, kun $3x^2 + 2ax + 3 > 0$.

Derivaatan nollakohdat $P'(x) = 0$

$3x^2 + 2ax + 3 = 0$

Derivaattafunktion kuvaajana on ylöspäin aukeava paraabeli, joten se on kaikkialla positiivinen, kun derivaatalla ei ole nollakohtia. Toisen asteen polynomifunktiolla ei ole nollakohtia, kun $D < 0$.

$(2a)^2 – 4·3·3 < 0$

$4a^2 – 36 < 0$

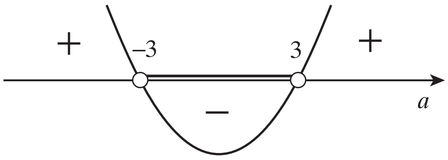
Nollakohdat $4a^2 – 36 = 0$

$4a^2 = 36 \quad |:4$

$a^2 = 9 \quad |\sqrt{\ }$

$a = ±3$

Merkkikaavio



Vastaus: Derivaatta on kaikkialla positiivinen, kun $-3 < a < 3$

101. Polynomi $P(x) = ax^3 + x^2 + bx$
Derivaatta $P'(x) = 3ax^2 + 2x + b$
Ehdot $P(-1) = P'(-1) = 1$

$$\begin{cases} a\cdot(-1)^3 + (-1)^2 + b\cdot(-1) = 1 \\ 3a\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1) + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a - b = 0 \\ 3a + b = 3 \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan $a = -b$, joka sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$3(-b) + b = 3$$

$$b = -\frac{3}{2}$$

Täten $a = \frac{3}{2}$

Vastaus: Kertoimet ovat $a = \frac{3}{2}$ ja $b = -\frac{3}{2}$.

102. a) Funktio $f(x) = x(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x$

Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

b) Funktio $f(x) = (x^2 - 3)(2x + 1) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$

Derivaatta $f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$

Vastaus: a) $3x^2 - 4x + 1$ b) $6x^2 + 2x - 6$

5. Käyrän tangentti ja normaali

103. Käyrä $f(x) = x^2 - 3x - 5$
Derivaatta $f'(x) = 2x - 3$
Tangentin kulmakerroin $k_t = f'(-1) = 2\cdot(-1) - 3 = -5$
Tangentin yhtälö $y - y_0 = k_t(x - x_0)$ $|x_0 = -1$, $y_0 = f(-1) = (-1)^2 - 3\cdot(-1) - 5 = -1$

$$y - (-1) = -5(x - (-1))$$

$$y = -5x - 6$$

Normaalin kulmakerroin $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5}$

Normaalin yhtälö $y - y_0 = k_n(x - x_0)$ $|x_0 = -1$, $y_0 = f(-1) = -1$

$$y-(-1)=\frac{1}{5}(x-(-1))$$
$$y=\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}$$

Vastaus: Tangentin yhtälö on $y = -5x - 6$ ja normaalin $y=\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}$.

104. Käyrä $f(x)=x^4-3x-\frac{1}{2}$

Derivaatta $f'(x) = 4x^3 - 3$

Tangentin kulmakerroin $k_t = f'(-1) = 4\cdot(-1)^3 - 3 = -7$

Tangentin yhtälö $y - y_0 = k_t\,(x - x_0)$ $|x_0 = -1$, $y_0 = f(-1) = (-1)^4 - 3\cdot(-1) - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$$y-\frac{7}{2}=-7(x-(-1))$$
$$y=-7x-\frac{7}{2}$$

Normaalin kulmakerroin $k_n=-\frac{1}{k_t}=-\frac{1}{-7}=\frac{1}{7}$

Normaalin yhtälö $y - y_0 = k_n\,(x - x_0)$ $|x_0 = -1$, $y_0 = f(-1) = -1$

$$y-\frac{7}{2}=\frac{1}{7}(x-(-1))$$
$$y=\frac{1}{7}x+3\frac{9}{14}$$

Vastaus: Tangentin yhtälö on $y=-7x-\frac{7}{2}$ ja normaalin $y=\frac{1}{7}x+3\frac{9}{14}$.

105. Paraabeli $y = x^2 + 1$

Derivaatta $y'(x) = 2x$

Tangentin kulmakerroin $k_t = 3$

Paraabelin kohta, jonka kautta tangentti kulkee

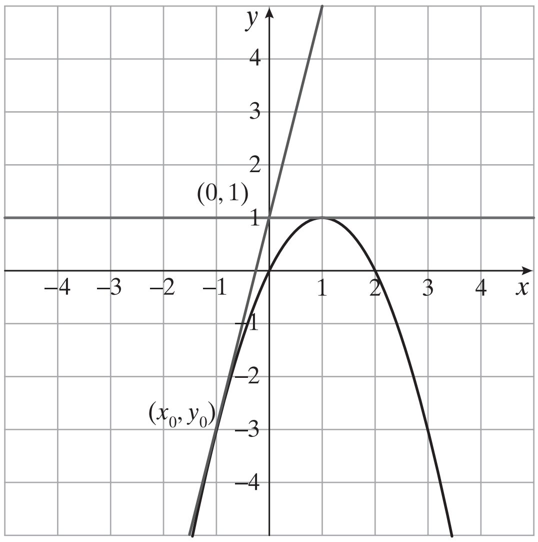
$$2x = 3 \quad |:2$$
$$x=\frac{3}{2}$$

Tangentin yhtälö $y - y_0 = k_t\,(x - x_0)$ $|x_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = y(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^2 + 1 = \frac{13}{4}$

$$y-\frac{13}{4}=3(x-\frac{3}{2})$$
$$y=3x-\frac{5}{4}$$

Vastaus: Tangentin yhtälö on $y=3x-\frac{5}{4}$.

106.



Käyrä $f(x) = -x^2 + 2x$

Koska $f(0) = 0$, niin piste (0,1) ei ole käyrällä.

Derivaatta $f'(x) = -2x + 2$

Tangentin kulmakerroin $k_t = f'(x_0) = -2x_0 + 2$

Pisteen (x_0,y_0) kautta kulkevan tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad | \; y_0 = f(x_0) = -x_0^2 + 2x_0, \; k_t = f'(x_0) = -2x_0 + 2$$

$$y - (-x_0^2 + 2x_0) = (-2x_0 + 2)(x - x_0)$$

Tangentti kulkee pisteen (0,1) kautta

$$1 + x_0^2 - 2x_0 = (-2x_0 + 2)(0 - x_0)$$

$$1 + x_0^2 - 2x_0 = 2x_0^2 - 2x_0$$

$$x_0^2 = 1 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$x_0 = \pm 1$$

Tangentin yhtälö, kun $x_0 = 1$

$$y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad | \; y_0 = 1, \; k_t = f'(1) = 0$$

$$y - 1 = 0(x - 1)$$

$$y = 1$$

Tangentin yhtälö, kun $x_0 = -1$

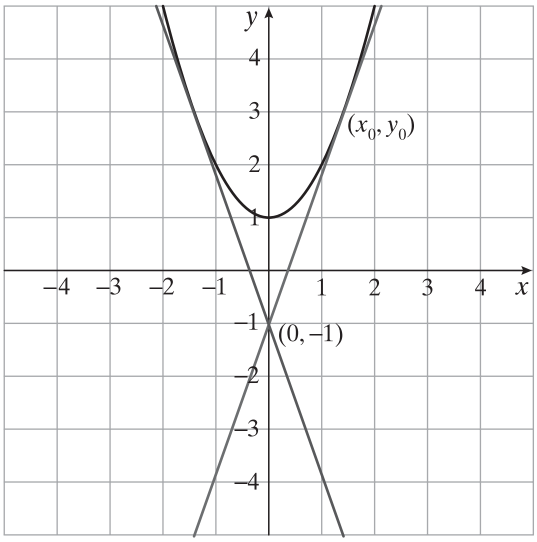
$$y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad | \; y_0 = -3, \; k_t = f'(-1) = 4$$

$$y - (-3) = 4(x - (-1))$$

$$y = 4x + 1$$

Vastaus: Tangentin yhtälöt ovat $y = 1$ ja $y = 4x + 1$.

107.



Käyrä $f(x) = x^2 + 1$

Koska $f(0) = 1$, niin piste (0,–1) ei ole käyrällä.
Derivaatta $f'(x) = 2x$
Tangentin kulmakerroin $k_t = f'(x_0) = 2x_0$
Pisteen (x_0,y_0) kautta kulkevan tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad | \; y_0 = f(x_0) = x_0^2 + 1, \; k_t = f'(x_0) = 2x_0$$

$$y - (x_0^2 + 1) = 2x_0(x - x_0)$$

Tangentti kulkee pisteen (0,–1) kautta

$$-1 - x_0^2 - 1 = 2x_0(0 - x_0)$$

$$x_0^2 - 2 = -2x_0^2$$

$$x_0^2 = 2 \quad |\sqrt{}$$

$$x_0 = \pm\sqrt{2}$$

Tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad | \; y_0 = 3, \; k_t = f'(\pm\sqrt{2}) = \pm 2\sqrt{2}$$

$$y - 3 = \pm 2\sqrt{2}\,(x - (\pm\sqrt{2}))$$

$$y = \pm 2\sqrt{2}\,x - 1$$

<u>Vastaus</u>: Tangentin yhtälöt ovat $y = \pm 2\sqrt{2}\,x - 1$.

108. Käyrä $y = -x^2 - 4x$
Derivaatta $y'(x) = -2x - 4$
Tangentin kulmakerroin pisteessä $x = -3$ on $k_t = y'(-3) = -2\cdot(-3) - 4 = 2$

Normaalin kulmakerroin $k_n = -\dfrac{1}{k_t} = -\dfrac{1}{2}$

Normaalin yhtälö $y - y_0 = k_n(x - x_0) \quad | \; y_0 = -(-3)^2 - 4\cdot(-3) = 3$

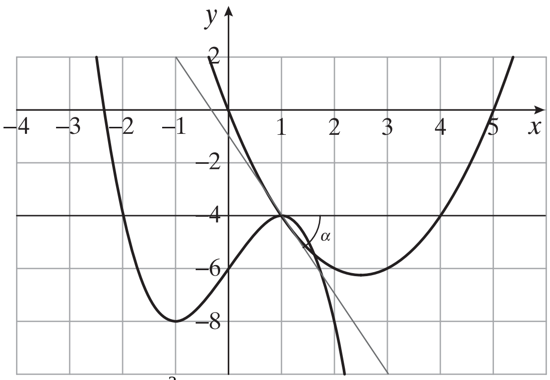
$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - (-3))$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Vastaus: Tangentin kulmakerroin on 2 ja normaalin yhtälö on $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

109. Paraabeli $y = x^2 - 4x + 13$
Derivaatta $y'(x) = 2x - 4$
Tangentin kulmakerroin pisteessä $x = 2$ on $k_t = y'(2) = 2 \cdot (2) - 4 = 0$
Normaalilla ei ole kulmakerrointa, joten normaali on y-akselin suuntainen.
Normaalin yhtälö $x = 2$
Vastaus: Normaalin yhtälö on $x = 2$.

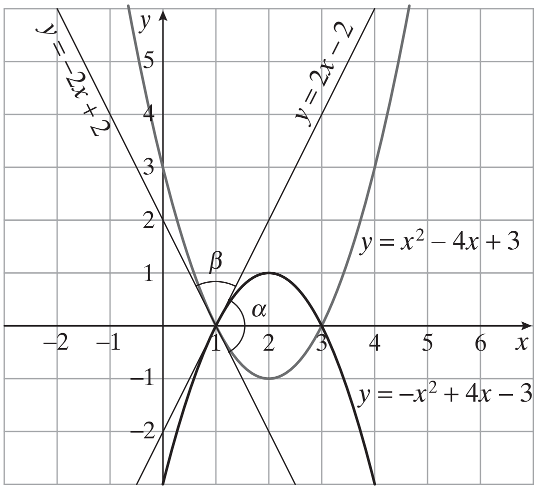
110.



Käyrä 1: $y = x^2 - 5x$
Derivaatta $y'(x) = 2x - 5$
Tangentin kulmakerroin $k_1 = y'(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$
Koska $\tan \alpha_1 = -3$, niin tangentin suuntakulma $\alpha_1 = -71{,}56...°$

Käyrä 2: $y = -x^3 + 3x - 6$
Derivaatta $y'(x) = -3x^2 + 3$
Tangentin kulmakerroin $k_2 = y'(1) = -3 \cdot 1^2 + 3 = 0$
Koska $\tan \alpha_2 = 0$, niin tangentin suuntakulma $\alpha_2 = 0°$
Käyrien välinen leikkauskulma on $\alpha_2 - \alpha_1 \approx 71{,}6°$.
Vastaus: Käyrien välinen leikkauskulma on 71,6°.

111.



Paraabelien $y = x^2 - 4x + 3$ ja $y = -x^2 + 4x - 3$ leikkauspisteet.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 4x - 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$$

Symmetrian perusteella molemmissa leikkauspisteissä on yhtä suuri leikkauskulma.
Paraabeli 1: $y = x^2 - 4x + 3$
Derivaatta $y'(x) = 2x - 4$
Tangentin kulmakerroin $k_1 = y'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$
Koska $\tan \alpha_1 = -2$, niin tangentin suuntakulma $\alpha_1 = -63{,}43...°$

Paraabeli 2: $y = -x^2 + 4x - 3$
Derivaatta $y'(x) = -2x + 4$
Tangentin kulmakerroin $k_2 = y'(1) = -2 \cdot 1 + 4 = 2$
Koska $\tan \alpha_2 = 2$, niin tangentin suuntakulma $\alpha_2 = 63{,}43...°$
Tangenttien välinen kulma on $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 63{,}43...° - (-63{,}43...°) = 126{,}86...°$.
Käyrien välinen kulma $\beta = 180° - \alpha \approx 53{,}1°$
<u>Vastaus</u>: Käyrien välinen leikkauskulma on 53,1°.

112. Käyrät $y = -x^2 - 4x$ ja $y = x^2 + 2$ sivuavat toisiaan, kun niiden leikkauspisteisiin piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

Käyrien leikkauspisteet

$$\begin{cases} y = -x^2 - 4x \\ y = x^2 + 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2 = -x^2 - 4x$$

$$2x^2 + 4x + 2 = 0 \quad |:2$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

Käyrä 1: $y = -x^2 - 4x$
Derivaatta $y'(x) = -2x - 4$
Tangentin kulmakerroin $k_1 = y'(-1) = -2\cdot(-1) - 4 = -2$
Käyrä 2: $y = x^2 + 2$
Derivaatta $y'(x) = 2x$
Tangentin kulmakerroin $k_2 = y'(1) = 2\cdot(-1) = -2$
Koska $k_1 = k_2$, niin käyrät sivuavat toisiaan. □

113. Raketti lähtee paikasta, missä $x = 0$
Raketin lentorata $y = 10 + 40x - 5x^2$
Derivaatta $y'(x) = 40 - 10x$
Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(0) = 40 - 10\cdot(0) = 40$
Koska tan $\alpha = 40$, niin raketin lähtökulma $\alpha \approx 88{,}6°$
<u>Vastaus</u>: Raketin lähtökulma on 88,6°.

114. Käyrä $y = \frac{x^2}{3} - 2x + 7$

Koska $y(6) = \frac{6^2}{3} - 2\cdot 6 + 7 = 7$, niin piste (6,7) on käyrällä.

Derivaatta $y'(x) = \frac{2x}{3} - 2$

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(6) = \frac{2\cdot 6}{3} - 2 = 2$

Normaalin kulmakerroin $k_n = \; = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{2}$

Normaalin yhtälö $y - y_0 = k_n\,(x - x_0)$ $\quad | \; x_0 = 6,\; y_0 = 7$

$$y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 6)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 10$$

Normaalin ja käyrän toinen leikkauspiste

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{3} - 2x + 7 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 10 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{3} - 2x + 7 = -\frac{1}{2}x + 10$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}x - 3 = 0 \quad \Big| \cdot 6$$

$$2x^2 - 9x - 18 = 0$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-18)}}{2 \cdot 2}$$

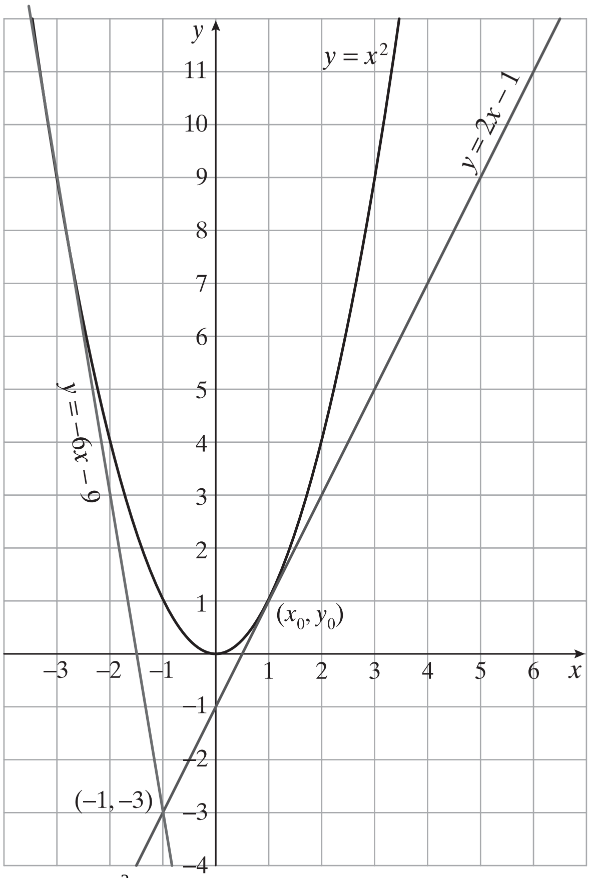
$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{225}}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{9 + \sqrt{225}}{4} = 6$$

Toisen leikkauspisteen *y*-koordinaatti $y\left(-\frac{3}{2}\right) = \dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 7 = 10\frac{3}{4}$

<u>Vastaus</u>: Normaaliin yhtälö on $y = -\frac{1}{2}x + 10$ ja normaalin ja käyrän toinen leikkauspiste on $\left(-\frac{3}{2}, 10\frac{3}{4}\right)$.

115.



Käyrä $y = x^2$

Koska $y(–1) = 1$, niin piste (–1,–3) ei ole käyrällä.

Derivaatta $y\,'(x) = 2x$

Tangentin kulmakerroin $k_t = y\,'(x_0) = 2x_0$

Pisteen (x_0,y_0) kautta kulkevan tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k_t\,(x - x_0) \quad |\; y_0 = x_0^2,\; k_t = y\,'(x_0) = 2x_0$$

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$$

Tangentti kulkee pisteen (–1,–3) kautta

$$-3 - x_0^2 = 2x_0(-1 - x_0)$$

$$-3-x_0^2=-2x_0-2x_0^2$$

$$x_0^2+2x_0-3=0$$

$$x_0=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}$$

$$x_{01}=\frac{-2-\sqrt{16}}{2}=-3$$

$$x_{02}=\frac{-2+\sqrt{16}}{2}=1$$

Tangentin yhtälö, kun $x_{01} = -3$

$$y - y_0 = k_t (x - x_0) \quad | \, y_0 = 9,\ k_t = y'(-3) = -6$$

$$y - 9 = -6(x - (-3))$$

$$y = -6x - 9$$

Tangentin yhtälö, kun $x_{02} = 1$

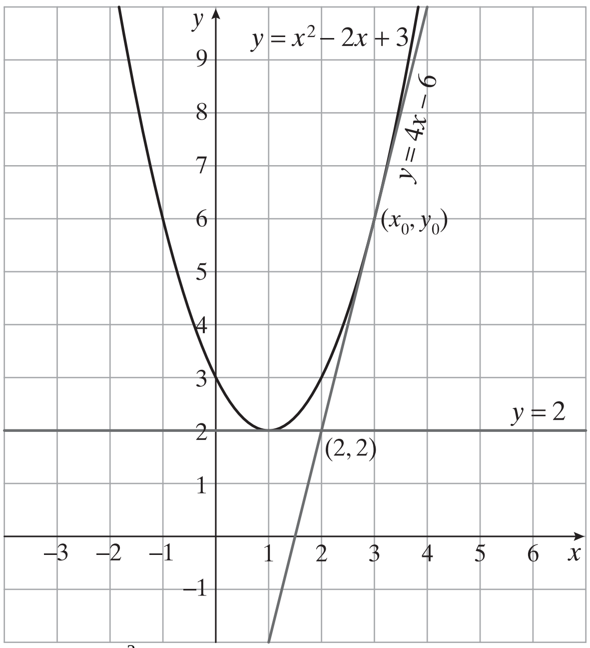
$$y - y_0 = k_t (x - x_0) \quad | \, y_0 = 1,\ k_t = y'(1) = 2$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1$$

<u>Vastaus</u>: Tangentin yhtälöt ovat $y = -6x - 9$ ja $y = 2x - 1$.

116.



Käyrä $y = x^2 - 2x + 3$

Koska $y(2) = 3$, niin piste (2,2) ei ole käyrällä.

Derivaatta $y'(x) = 2x - 2$

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(x_0) = 2x_0 - 2$

Pisteen (x_0,y_0) kautta kulkevan tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k_t (x - x_0) \quad | \, y_0 = x_0^2 - 2x_0 + 3,\ k_t = y'(x_0) = 2x_0 - 2$$

$y - (x_0^2 - 2x_0 + 3) = (2x_0 - 2)(x - x_0)$

Tangentti kulkee pisteen (2,2) kautta

$2 - (x_0^2 - 2x_0 + 3) = (2x_0 - 2)(2 - x_0)$

$2 - x_0^2 + 2x_0 - 3 = 4x_0 - 2x_0^2 - 4 + 2x_0$

$x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0$

$$x_0 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{01} = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$$

$$x_{02} = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$$

Tangentin yhtälö, kun $x_{01} = 1$

$y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad | \, y_0 = 2, \; k_t = y'(1) = 0$

$y - 2 = 0(x - 1)$

$y = 2$

Tangentin yhtälö, kun $x_{02} = 3$

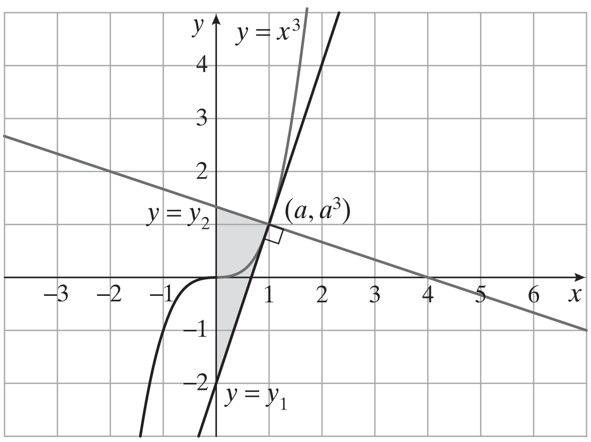
$y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad | \, y_0 = 6, \; k_t = y'(1) = 4$

$y - 6 = 4(x - 3)$

$y = 4x - 6$

Vastaus: Tangentin yhtälöt ovat $y = 2$ ja $y = 4x - 6$.

117.



Käyrä kulkee pisteen (a, a^3), $a \neq 0$ kautta.

Käyrä $y = x^3$

Derivaatta $y'(x) = 3x^2$

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(a) = 3a^2$

Tangentin yhtälö $y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad | x_0 = a, \, y_0 = a^3$

$y - a^3 = 3a^2(x - a)$

$y = 3a^2x - 2a^3$

Tangentin ja y-akselin leikkauspiste $y_1 = -2a^3$

Normaalin kulmakerroin $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{3a^2}$

Normaalin yhtälö $y - y_0 = k_n\,(x - x_0)$ $\quad | \; x_0 = a,\, y_0 = a^3$

$$y - a^3 = -\frac{1}{3a^2}(x - a)$$

$$y = -\frac{1}{3a^2}x + a^3 + \frac{1}{3a}$$

Normaalin ja y-akselin leikkauspiste $y_2 = a^3 + \frac{1}{3a}$

Tangentti ja normaali yhdessä y-akselin kanssa rajaaman kolmion pinta-ala

$$A = \frac{\left(a^3 + \frac{1}{3a} - (2a^3)\right)a}{2} = \frac{{}^{3)}3a^4 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{9a^4 + 1}{6}$$

Alan raja-arvo

$$\lim_{a\to 0} A = \lim_{a\to 0}\frac{9a^4 + 1}{6} = \frac{1}{6}$$

Vastaus: Alan raja-arvo on $\frac{1}{6}$.

118. a) Funktio $y = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

Derivaatta $y'(x) = 8x + 4$

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(2) = 8\cdot 2 + 4 = 20$
Tangentin yhtälö $y - y_0 = k_t\,(x - x_0)$ $\quad |x_0 = 2,\, y_0 = (2\cdot 2 + 1)^2 = 25$

$$y - 25 = 20(x - 2)$$

$$y = 20x - 15$$

b) Tangentti leikkaa x-akselin, kun $y = 0$.

$$20x - 15 = 0$$

$$20x = 15 \quad |:20$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Vastaus: a) Tangentin yhtälö on $y = 20x - 15$. b) Tangentti leikkaa x-akselin kohdassa $x = \frac{3}{4}$.

119. Käyrä $y = 2x^2 + x$

Derivaatta $y'(x) = 4x + 1$

Käyrän pisteiden (1,3) ja (3,21) kautta kulkevan suoran kulmakerroin $k = \frac{21-3}{3-1} = 9$

Kohta, jossa tangentti on suoran suuntainen

$y'(x) = k$

$4x + 1 = 9$

$x = 2$

Pisteen y-koordinaatti $y(2)= 2\cdot 2^2 + 2 = 10$
Vastaus: Piste on (2,10).

120. Käyrä kulkee pisteen (2,8) kautta.

$a\cdot 2^3 + b\cdot 2 = 8$

$8a + 2b = 8 \quad |:2$

$b = 4 – 4a$

Käyrä $y = ax^3 + bx$

Derivaatta $y'(x) = 3ax^2 + b$

a) Tangentti on x-akselin suuntainen eli $k = 0$.

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(2) = 3a\cdot 2^2 + b = 0$

$12a + b = 0$

Sijoitetaan $b = 4 – 4a$ saatuun yhtälöön

$12a + 4 – 4a = 0$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$b = 4 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$$

b) Tangentti on suoran $y = 3x + 5$ suuntainen eli $k = 3$.

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(2) = 3a\cdot 2^2 + b = 3$

$12a + b = 3$

Sijoitetaan $b = 4 – 4a$ saatuun yhtälöön

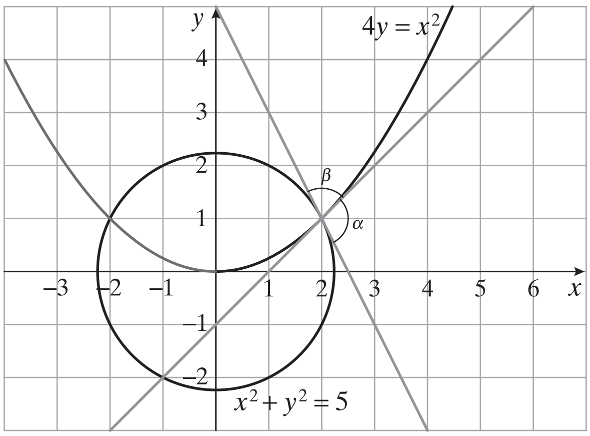
$12a + 4 – 4a = 3$

$$a = -\frac{1}{8}$$

$$b = 4 - 4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) = 4\frac{1}{2}$$

Vastaus: Vakiot ovat a) $a = -\frac{1}{2}$ ja $b = 6$ b) $a = -\frac{1}{8}$ ja $b = 4\frac{1}{2}$.

121.



Käyrien leikkauspisteet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 4y = x^2 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x^2 = 4y$ ylempään yhtälöön.

$$4y + y^2 = 5$$

$$y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$y_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2} = -5$$

$$y_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} = 1$$

Lasketaan x.
Jos $y = -5$, niin yhtälöllä $x^2 = 4 \cdot (-5) = -20$ ei ole ratkaisua.
Jos $y = 1$, niin $x^2 = 4 \cdot 1$, eli $x = \pm 2$.
Käyrien leikkauspisteet ovat (–2,1) ja (2,1). Kuvaajien symmetrisyyden perusteella riittää laskea tangenttien leikkauskulma ainoastaan toisessa leikkauspisteessä (2,1).

Paraabeli $y = \frac{1}{4}x^2$

Derivaatta $y'(x) = \frac{1}{2}x$

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Koska tan $\alpha = 1$, niin tangentin suuntakulma $\alpha_1 = 45°$

Ympyrän ja paraabelin leikkauspisteeseen piirretyn säteen kulmakerroin $k = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$

Ympyrän tangentin kulmakerroin $k_2 = -\frac{1}{k} = -2$

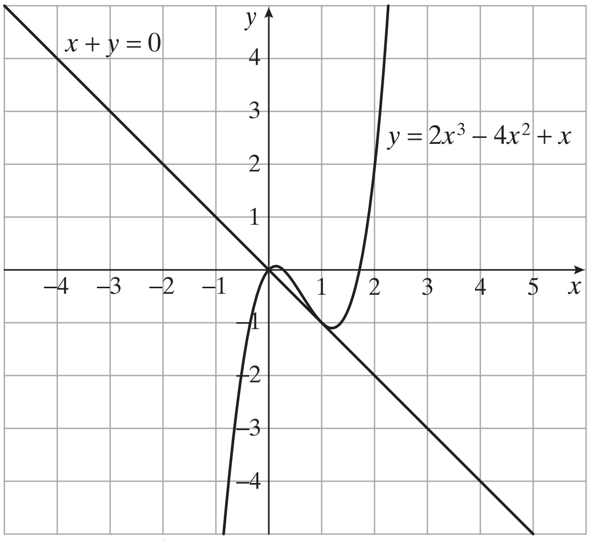
Koska tan α = –2, niin tangentin suuntakulma α_2 = –63,43...°

Suuntakulmien erotus $\alpha_1 - \alpha_2$ = 45° – (–63,43...°) = 108,43…°

Tangenttien välinen kulma β = 180° – 108,43…° ≈ 71,6°

Vastaus: Tangenttien välinen kulma on 71,6°.

122.



a) Käyrä $y = 2x^3 - 4x^2 + x$

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(x) = 6x^2 - 8x + 1$

Suora $x + y = 0$ eli $y = -x$

Kohta, jossa suora voi olla käyrän tangentti.

Suoran kulmakerroin $k = -1$ on yhtä suuri kuin tangentin kulmakerroin.

$$6x^2 - 8x + 1 = -1$$
$$6x^2 - 8x + 2 = 0 \quad |:2$$
$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{6} = 1$$

Tangentin yhtälö, kun $x = 1$.

$$y - y_0 = k_t (x - x_0) \quad |x_0 = 1, y_0 = -1, k_t = -1$$
$$y - (-1) = -1(x - 1)$$
$$y = -x$$

Täten suora $x + y = 0$ on käyrän tangentti. □

b) Käyrä $y = 2x^3 - 4x^2 + x$
Tangentin kulmakeroin $k_t = y'(x) = 6x^2 - 8x + 1$

Normaalin kulmakerroin $k_n = -\dfrac{1}{6x^2 - 8x + 1}$

Suora $x + y = 0$ eli $y = -x$
Kohta, jossa suora voi olla käyrän normaali.
Suoran kulmakerroin $k = -1$ on yhtä suuri kuin normaalin kulmakerroin.

$$-\frac{1}{6x^2 - 8x + 1} = -1 \quad \Big| \cdot (6x^2 - 8x + 1)$$
$$-6x^2 + 8x - 1 = -1$$
$$6x^2 - 8x = 0$$
$$2x(3x - 4) = 0$$
$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x - 4 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = \frac{4}{3}$$

Normaalin yhtälö, kun $x = 0$.
$$y - y_0 = k_t\,(x - x_0) \quad |x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ k_n = -1$$
$$y - 0 = -1(x - 0)$$
$$y = -x$$
Täten suora $x + y = 0$ on käyrän normaali. □

123. Käyrä $y = 4x^2 + x$
Derivaatta $y'(x) = 8x + 1$

Normaalin kulmakerroin $k_n = -\dfrac{1}{k_t} = -\dfrac{1}{y'(x)} = -\dfrac{1}{8x+1}$

Normaalin suuntakulma on 45°.
Normaalin kulmakerroin $k = 1$
Kohta, jossa normaali leikkaa käyrän.

$$-\frac{1}{8x+1} = 1 \quad \Big| \cdot (8x+1)$$
$$8x + 1 = -1$$
$$x = -\frac{1}{4}$$

Leikkauspisteen y-koordinaatti $y\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right) = 0$

<u>Vastaus</u>: Käyrän normaalin ja x-akselin leikkauspiste on $\left(-\dfrac{1}{4}, 0\right)$.

124.
Käyrä $y = x^3 + ax + b$
Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(x) = 3x^2 + a$

Käyrällä on y-akselin suuntainen normaali, siinä pisteessä, missä sillä on x-akselin suuntainen tangentti, eli tangentin kulmakerroin on $k = 0$.
Saadaan yhtälö $3x^2 + a = 0$

$$3x^2 = -a \quad |:3$$

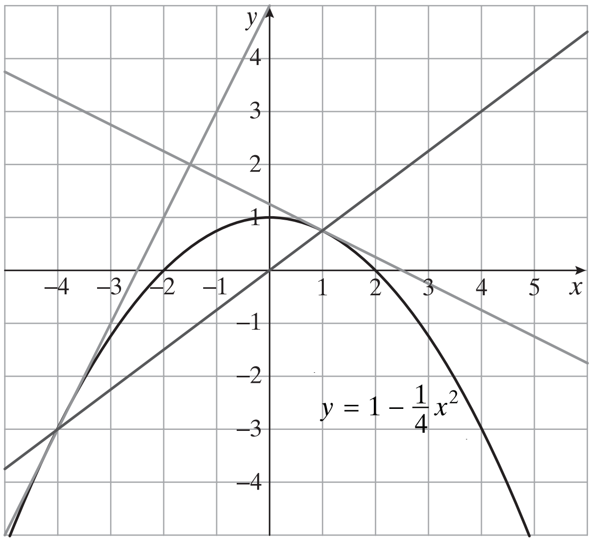
$$x^2 = -\frac{a}{3} \quad |\sqrt{}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{a}{3}}, \quad a \le 0$$

Normaali on y-akselin suuntainen, kun $a \le 0$, ja $b \in \mathbb{R}$.

<u>Vastaus</u>: Normaali on y-akselin suuntainen, kun $a \le 0$, ja $b \in \mathbb{R}$.

125.



Origon kautta kulkevan suora $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$

Paraabeli $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$

Suoran ja paraabelin leikkauspisteet

$$\begin{cases} y = 1 - \frac{1}{4}x^2 \\ y = kx \end{cases}$$

$$kx = 1 - \frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{1}{4}x^2 + kx - 1 = 0 \quad |\cdot 4$$

$$x^2 + 4kx - 4 = 0$$

$$x = \frac{-4k \pm \sqrt{(4k)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-4k - \sqrt{16k^2 + 16}}{2} = -2k - 2\sqrt{k^2 + 1}$$

$$x_2 = \frac{-4k + \sqrt{16k^2 + 16}}{2} = -2k + 2\sqrt{k^2 + 1}$$

Derivaatta $y'(x) = -\frac{1}{2}x$

Pisteeseen $x_1 = -2k - 2\sqrt{k^2+1}$ piirretyn tangentin kulmakerroin $y'(x_1) = -k - \sqrt{k^2+1}$

Pisteeseen $x_2 = -2k + 2\sqrt{k^2+1}$ piirretyn tangentin kulmakerroin $y'(x_2) = -k + \sqrt{k^2+1}$

Kulmakertoimien tulo $y'(x_1)\cdot y'(x_2) = (-k - \sqrt{k^2+1})(-k - \sqrt{k^2+1}) = k^2 - k^2 - 1 = -1$

Koska kulmakertoimien tulo on –1, niin tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. □

126. Käyrä $y = x^3 + x$

Derivaatta $y'(x) = 3x^2 + 1$

Suoran $y = 4x$ suuntaisen tangentin kulmakerroin $k = 4$

Kohta, jossa tangentti on suoran suuntainen

$$y'(x) = k$$

$$3x^2 + 1 = 4$$

$$3x^2 = 3 \quad |:3$$

$$x^2 = 1 \quad |\sqrt{\ }$$

$$x = \pm 1$$

Tangentin yhtälö, kun $x_0 = 1$

$$y - y_0 = k_t\,(x - x_0) \quad |\ y_0 = 2,\ k_t = y\,'(1) = 4$$

$$y - 2 = 4(x - 1)$$

$$y = 4x - 2$$

Tangentin yhtälö, kun $x_0 = -1$

$$y - y_0 = k_t\,(x - x_0) \quad |\ y_0 = -2,\ k_t = y\,'(-1) = 4$$

$$y - (-2) = 4(x - (-1))$$

$$y = 4x + 2$$

<u>Vastaus</u>: Tangentin yhtälöt ovat $y = 4x - 2$ ja $y = 4x + 2$.

127. Paraabeli $y = x^2$
Derivaatta $y'(x) = 2x$

Normaalin kulmakerroin $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{2}$

Normaalin yhtälö $y - y_0 = k_n (x - x_0)$ $\mid x_0 = 1,\ y_0 = 1$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Normaalin ja paraabelin leikkauspisteet

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \quad \Big|\cdot 2$$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{4} = -\frac{3}{2}$$

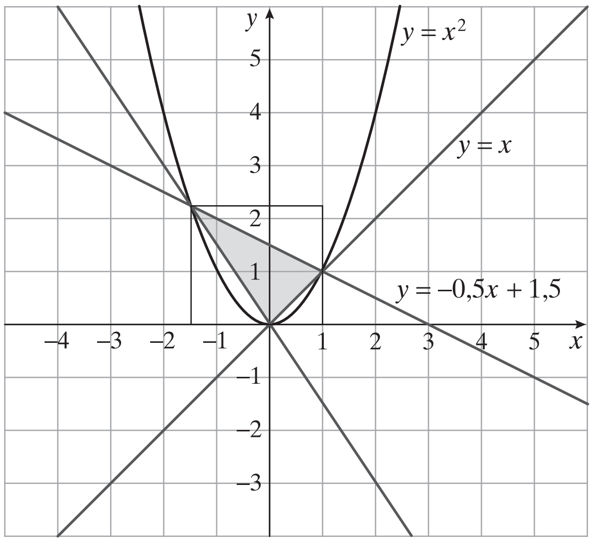
$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{4} = 1$$

Leikkauspisteiden y-koordinaatit

Jos $x = -\frac{3}{2}$, niin $y = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.

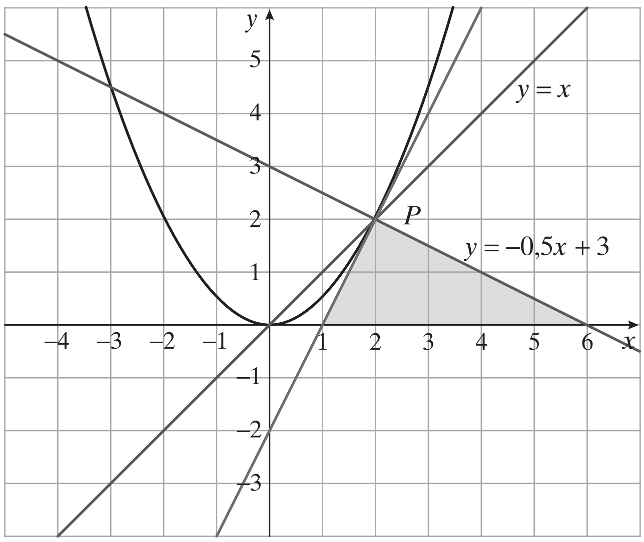
Jos $x = 1$, niin $y = 1$.

Kolmion ala $A = \left(1 - (-\frac{3}{2})\right)\cdot\frac{9}{4} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4} = 1\frac{7}{8}$



Vastaus: Kolmion ala on $1\frac{7}{8}$.

128.



Suoran $y = x$ ja paraabelin $y = ax^2$ ($a > 0$) leikkauspisteet

$$ax^2 = x$$
$$ax^2 - x = 0$$
$$x(ax - 1) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{a}, \quad a > 0$$

Pisteen P koordinaatit ovat $P\left(\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$.

Paraabeli $y = ax^2$
Derivaatta $y'(x) = 2ax$

Tangentin kulmakerroin $y'\left(\frac{1}{a}\right) = 2a\cdot\frac{1}{a} = 2$

Tangentin yhtälö $y - y_0 = k_t\,(x - x_0)$ | $x_0 = \frac{1}{a},\ y_0 = \frac{1}{a},\ k_t = 2$

$$y-\frac{1}{a} = 2\left(x-\frac{1}{a}\right)$$

$$y = 2x-\frac{1}{a}$$

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $y = 0$.

$$2x-\frac{1}{a} = 0$$

$$x = \frac{1}{2a}$$

Normaalin yhtälö $y - y_0 = k_n\,(x - x_0)$ | $x_0 = \frac{1}{a},\ y_0 = \frac{1}{a},\ k_n = -\frac{1}{2}$

$$y-\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{a}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2a}$$

Normaaliin ja x-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $y = 0$.

$$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2a} = 0$$

$$x = \frac{3}{a}$$

Kolmion ala on 5. Saadaan yhtälö

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{a}-\frac{1}{2a}\right)\cdot\frac{1}{a} = 5$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2a}\cdot\frac{1}{a} = 5 \quad \Big|\cdot 4a^2$$

$$20a^2 = 5 \quad \Big|:20$$

$$a^2 = \frac{1}{4} \quad \Big|\sqrt{\ },\ a>0$$

$$a = \frac{1}{2}$$

<u>Vastaus</u>: Kolmion ala on viisi, kun $a = \frac{1}{2}$.

129. Käyrä $y = x^2$

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(x) = 2x$

Suora $2y - x + 2 = 0$

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

Suoran kulmakerroin $k = \frac{1}{2}$ on sama kuin tangentin kulmakerroin. Kohta, johon tangentti piirretään.

$$2x = \frac{1}{2} \quad |:2$$
$$x = \frac{1}{4}$$

Tangentin yhtälö $y - y_0 = k_t\,(x - x_0)$ $\mid$ $x_0 = \frac{1}{4},\ y_0 = \frac{1}{16},\ k_t = \frac{1}{2}$

$$y - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{4})$$
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$$

Suoran ja y-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $x = 0$.

$$y = \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{16} = -\frac{1}{16}$$

Vastaus: Käyrän tangentti leikkaa y-akselin pisteessä $\left(0, -\frac{1}{16}\right)$.

130. Paraabelin yhtälö $y = ax^2 + bx + c$
Kiven lähtöpiste (0,0), joten $y(0) = 0$, eli $c = 0$.
Kiven putoamispiste (30,0) eli $y(30) = 0$ eli $900a + 30b = 0$.
Kiven korkein kohta on pisteessä (15,10) eli $225a + 15b = 10$.

Ratkaisemalla yhtälöpari saadaan $a = -\frac{2}{45}$ ja $b = \frac{4}{3}$.

Paraabelin yhtälö $y = -\frac{2}{45}x^2 + \frac{4}{3}x$

Derivaatta $y'(x) = -\frac{4}{45}x + \frac{4}{3}$

Lähtökulma $\tan\alpha = y'(0)$

$$\tan\alpha = \frac{4}{3}$$
$$\alpha \approx 53{,}1°$$

Vastaus: Kiven lähtökulma on 53,1°.

131.
Paraabelin yhtälö $y = ax^2 + bx + c$
Pallon lähtöpiste (0,0), joten $y(0) = 0$, eli $c = 0$.
Pallon putoamispiste (50,0) eli $y(50) = 0$ eli $2\,500a + 50b = 0$.
Kiven lähtökulma on 30°, joten $y'(0) = \tan 30°$, eli $2a\cdot 0 + b = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Täten $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$
Sijoittamalla b saadaan

$$2\,500a + 50\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$a = -\frac{1}{50\sqrt{3}}$$

Paraabelin yhtälö $y = -\frac{1}{50\sqrt{3}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x$

Derivaatta $y'(x) = -\frac{1}{25\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$

Paraabelin huipussa $y'(x) = 0$

$$-\frac{1}{25\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \quad \Big|\cdot(25\sqrt{3})$$

$$x = 25$$

Pallon suurin lentokorkeus $y(25) = -\frac{1}{50\sqrt{3}}\cdot 25^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 25 = \frac{25}{2\sqrt{3}} \approx 7,2$

Vastaus: Pallo käy $\frac{25}{2\sqrt{3}}$ = 7,2 metrin korkeudessa.

132.
Käyrä $y = 2x^3 + 9x^2 - 60x + 110$
Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(x) = 6x^2 + 18x - 60$
Tangentti on x-akselin suuntainen, kun $y'(x) = 0$.
Saadaan yhtälö

$$6x^2 + 18x - 60 = 0 \quad |:6$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2} = 2$$

Pisteiden y-koordinaatit
Jos $x = -5$, niin $y = 385$.
Jos $x = 2$, niin $y = 42$.
Vastaus: Pisteet ovat (2, 42) ja (–5, 385).

Testaa hyvät taitosi 1

1. a) Funktio $f(x) = \frac{1}{x} + 1$

Nollakohdat $\quad f(x) = 0$

$$\frac{1}{x} + 1 = 0$$

$$\frac{1}{x} = -1 \quad \Big| \cdot (-x)$$

$$x = -1$$

b) Funktio $f(x) = \frac{1}{x} - x$

Nollakohdat $\quad f(x) = 0$

$$\frac{1}{x} - x = 0$$

$$\frac{1}{x} = x \quad \Big| \cdot x \neq 0$$

$$x^2 = 1 \quad \Big| \sqrt{\ }$$

$$x = \pm 1$$

<u>Vastaus</u>: Nollakohdat ovat a) –1 b) –1 ja 1.

2. Funktioiden $f(x) = \frac{2}{2x-3}$ ja $g(x) = \frac{6}{x+1}$ kuvaajien leikkauspiste saadaan merkitsemällä funktiot yhtä suuriksi.

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{2}{2x-3} = \frac{6}{x+1}$$

$$12x - 18 = 2x + 2$$

$$10x = 20 \quad \Big| : 2$$

$$x = 2$$

Leikkauspisteen y-koordinaatti $f(2) = \frac{2}{2 \cdot 2 - 3} = 2$

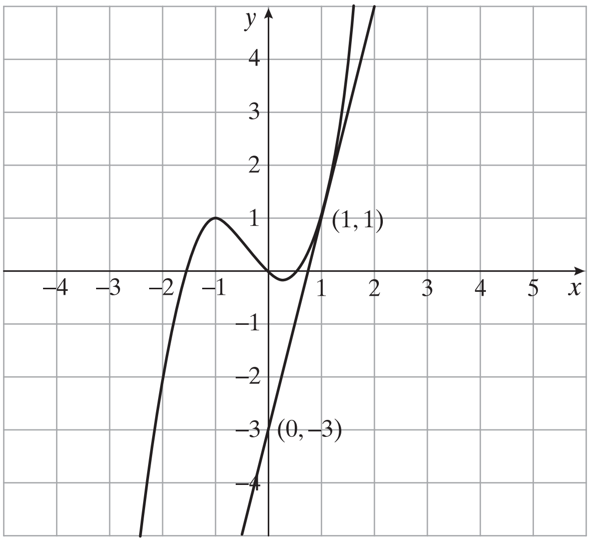
<u>Vastaus</u>: Leikkauspiste on (2,2).

3. Funktio $f(x) = {}^{x+1)}\frac{x}{x-1} + {}^{x-1)}\frac{x}{x+1} = \frac{x(x+1) + x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

Funktion arvo $f(\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot (\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2 - 1} = 3$

<u>Vastaus</u>: Funktion lauseke on $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ ja sen arvo on $f(\sqrt{3}) = 3$.

4.



Derivaatta $f'(1) = k_t = \dfrac{1-(-3)}{1-0} = 4$

<u>Vastaus</u>: Derivaatta $f'(1) = 4$.

5. Funktion kasvunopeus on funktion derivaatan arvo kyseisessä pisteessä.
Funktio $f(x) = x^2 + 3x$
Derivaatta $f'(x) = 2x + 3$
Kasvunopeus kohdassa $x = 1$ on $f'(1) = 2\cdot1 + 3 = 5$
<u>Vastaus</u>: Kasvunopeus kohdassa $x = 1$ on 5.

6. Raja-arvo $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+4x-16}{x^2-2x}$

Osoittajan nollakohdat $2x^2 + 4x - 16 = 0 \quad |:2$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}$$

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-2+\sqrt{36}}{2} = 2$$

Raja-arvo $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+4x-16}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{2(x+4)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = \dfrac{2\cdot(2+4)}{2} = 6$

<u>Vastaus</u>: Raja-arvo on 6.

7. Funktio $f(x) = \frac{x+1}{x}$

Erotusosamäärä $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Erotusosamäärä kohdassa $x = -1$ on

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\frac{x+1}{x} - 2}{x-1} = \frac{x+1-2}{x} : (x-1) = \frac{\cancel{x-1}}{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x-1}} = \frac{1}{x}$$

<u>Vastaus</u>: Erotusosamäärä kohdassa $x = -1$ on $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{x}$.

8. Raja-arvo $\lim\limits_{x \to -1} \frac{3x^2 - 5x + a}{x^2 + 5x + 4}$ on olemassa, kun nimittäjästä voidaan supistaa pois lauseke $x + 1$. Tällöin myös osoittajan tekijänä on $x + 1$ ja samalla osoittajan nollakohta on $x = -1$. Sijoitetaan $x = -1$ osoittajan lausekkeeseen ja merkitään se nollaksi.

$$3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + a = 0$$
$$a = -8$$

<u>Vastaus</u>: Raja-arvo on olemassa, kun $a = -8$.

9. Funktio $f(x) = x^2 + x - 3$
Derivaatta $f'(x) = 2x + 1$
Derivaatan arvo $f'(-5) = 2 \cdot (-5) + 1 = -9$
<u>Vastaus</u>: Derivaatan arvo $f'(-5) = -9$.

10. Funktio $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 10x}{x}, \text{ kun } x \neq 0 \\ a, \text{ kun } x = 0 \end{cases}$

Funktio on jatkuva kohdassa $x = 0$, kun funktion raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo.

Funktion raja-arvo $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 10x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x+10)}{\cancel{x}} = 10$

Kun määritellään, että $f(0) = 10$, niin funktio on jatkuva kohdassa x = 0. Tällöin $a = 10$.

<u>Vastaus</u>: Funktio on jatkuva kohdassa x = 0, kun $a = 10$.

6. Tulon ja osamäärän derivaatta

133. a) $D[x^2(4x^3 - 2)] = D[4x^5 - 2x^2] = 20x^4 - 4x$
b) $D[(x^3 - 5)(2x^5 + 3)] = 3x^2(2x^5 + 3) + (x^3 - 5)\cdot 10x^4 = 16x^7 - 50x^4 + 9x^2$
c) $D\left[\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{3}x^3 + 6\right)\right] = (2x^2 - x)\left(\frac{1}{3}x^3 + 6\right) + \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)x^2$

$$= \frac{4}{3}x^5 - \frac{5}{6}x^4 - 12x^2 - 6x$$

<u>Vastaus</u>: a) $20x^4 - 4x$ b) $16x^7 - 50x^4 + 9x^2$ c) $\frac{4}{3}x^5 - \frac{5}{6}x^4 - 12x^2 - 6x$

134. a) $D[x^2(x+1)] = 2x(x+1) + x^2\cdot 1 = 3x^2 + 2x$
b) $D[(2x+1)(x+3)] = 2(x+3) + (2x+1)\cdot 1 = 4x + 7$
c) $D[x^5(x^4 + x^3)] = 5x^4(x^4 + x^3) + x^5(4x^3 + 3x^2) = 9x^8 + 8x^7$
<u>Vastaus</u>: a) $3x^2 + 2x$ b) $4x + 7$ c) $9x^8 + 8x^7$

135. a) $D\frac{x}{x+3} = \frac{1\cdot(x+3) - x\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2}$

b) $D\frac{x^2}{x+5} = \frac{2x(x+5) - x^2\cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x}{(x+5)^2}$

c) $D\frac{3x^2+2}{x+1} = \frac{6x(x+1) - (3x^2+2)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3x^2 + 6x - 2}{(x+1)^2}$

<u>Vastaus</u>: a) $\frac{3}{(x+3)^2}$ b) $\frac{x^2+10x}{(x+5)^2}$ c) $\frac{3x^2+6x-2}{(x+1)^2}$

136. a) $D\frac{x(x^2+1)}{3x+1} = D\frac{x^3+x}{3x+1} = \frac{(3x^2+1)(3x+1) - (x^3+x)\cdot 3}{(3x+1)^2}$

$$= \frac{9x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^3 - 3x}{(3x+1)^2} = \frac{6x^3 + 3x^2 + 1}{(3x+1)^2}$$

b) $D\frac{(x+5)^2}{x-4} = D\frac{x^2+10x+25}{x-4} = \frac{(2x+10)(x-4) - (x^2+10x+25)\cdot 1}{(x-4)^2}$

$$= \frac{2x^2 + 2x - 40 - x^2 - 10x - 25}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x - 65}{(x-4)^2}$$

c) $D\frac{(2x-1)(2x+1)}{(x+2)^2} = D\frac{4x^2-1}{x^2+4x+4} = \frac{8x(x^2+4x+4) - (4x^2-1)(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$$= \frac{8x^3 + 32x^2 + 32x - (8x^3 + 16x^2 - 2x - 4)}{(x+2)^4} = \frac{16x^2 + 34x + 4}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{16\cancel{(x+2)}\left(x+\frac{1}{8}\right)}{(x+2)^{\cancel{4}3}} = \frac{16x+2}{(x+2)^3}$$

<u>Vastaus</u>: a) $\frac{6x^3+3x^2+1}{(3x+1)^2}$ b) $\frac{x^2-8x-65}{(x-4)^2}$ c) $\frac{16x+2}{(x+2)^3}$

137. a) $D(x^{-3}+x^{-1}) = -3x^{-4} - x^{-2}$

b) $D\frac{x^3+3x-4}{x^2} = D(x+3x^{-1}-4x^{-2}) = 1-3x^{-2}+8x^{-3} = {}^{x^3)}1 - {}^{x)}\frac{3}{x^2} + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3-3x+8}{x^3}$

c) $D\frac{(2x-1)(3x+2)}{x} = D\frac{6x^2+x-2}{x} = D(6x+1-2x^{-1}) = 6+0+2x^{-2}$

$= {}^{x^2)}6 + \frac{2}{x^2} = \frac{6x^2+2}{x^2}$

<u>Vastaus</u>: a) $-3x^{-4} - x^{-2}$ b) $\frac{x^3-3x+8}{x^3}$ c) $\frac{6x^2+2}{x^2}$

138. a) $D\frac{6}{x^3} = D6x^{-3} = -18x^{-4} = -\frac{18}{x^4}$

b) $D\frac{1}{3x^4} = D\frac{1}{3}x^{-4} = -\frac{4}{3}x^{-5} = -\frac{4}{3x^5}$

c) $D(x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}) = D(x + 1 + x^{-1} + x^{-2}) = 1 + 0 - x^{-2} - 2x^{-3}$

$= 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

<u>Vastaus</u>: a) $-\frac{18}{x^4}$ b) $-\frac{4}{3x^5}$ c) $1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$

139. Funktio $f(x) = x^3(x^2 + x)$
Derivaatta $f'(x) = 3x^2(x^2 + x) + x^3(2x + 1) = 5x^4 + 4x^3$
Yhtälö $f'(x) = 0$

$5x^4 + 4x^3 = 0$

$x^3(5x + 4) = 0$

$x^3 = 0$ tai $5x + 4 = 0$

$x = 0$ $\quad$ $x = -\frac{4}{5}$

<u>Vastaus</u>: Yhtälö $f'(x) = 0$, kun $x = 0$ tai $x = -\frac{4}{5}$.

140. a) Funktio $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Derivaatta $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

Yhtälö $f'(x) = 0$

$$\frac{-1}{(x-1)^2} = 0$$

$$-1 = 0$$

Ei ratkaisua

b) Funktio $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Derivaatta $f(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

Yhtälö $f'(x) = 0$

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

<u>Vastaus</u>: a) Ei nollakohtia b) $x = 0$ tai $x = 2$

141. a) Funktio $f(x) = \dfrac{tx^2}{x+2t}$

Derivaatta $f'(x) = \dfrac{2tx(x+2t) - tx^2 \cdot 1}{(x+2t)^2} = \dfrac{tx^2 + 4t^2x}{(x+2t)^2}$

b) Funktio $f(t) = \dfrac{tx^2}{x+2t}$.

Derivaatta $f'(t) = \dfrac{x^2(x+2t) - tx^2 \cdot 2}{(x+2t)^2} = \dfrac{x^3}{(x+2t)^2}$

<u>Vastaus</u>: a) $f'(x) = \dfrac{tx^2 + 4t^2x}{(x+2t)^2}$ b) $f'(t) = \dfrac{x^3}{(x+2t)^2}$

142. Funktio $h(x) = f(x)g(x)$

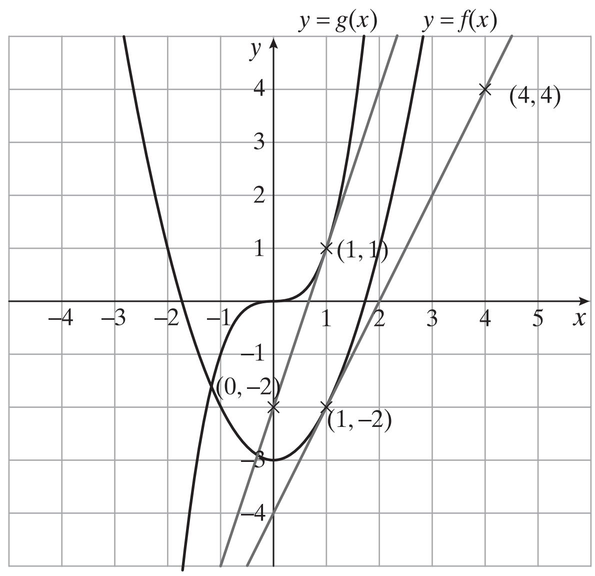
Derivaatta $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Derivaatan arvo $h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$

Funktioiden arvot $f(1) = -2$ ja $g(1) = 1$

Funktioiden derivaatat $f'(1) = \dfrac{4-(-2)}{4-1} = 2$ ja $g'(1) = \dfrac{1-(-2)}{1-0} = 3$

Kysytty derivaatta $h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 = -4$



Vastaus: Derivaatta on $h'(1) = -4$.

143. Funktio $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{x} = x^{-2} - 4x^{-1}$

Derivaatta $f'(x) = -2x^{-3} + 4x^{-2} = -\dfrac{2}{x^3} + {}^{x)}\dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4x-2}{x^3}$

Epäyhtälö $\quad f'(x) \le 0$

$$\frac{4x-2}{x^3} \le 0$$

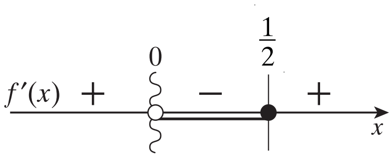
Osoittajan nollakohta $\quad 4x - 2 = 0$

$$x = \frac{1}{2}$$

Nimittäjän nollakohta $\quad x^3 = 0$

$$x = 0$$

Merkkikaavio



$f'(-1) = 6 > 0$
$f'(0{,}25) = -64 < 0$
$f'(1) = 2 > 0$

Epäyhtälön ratkaisu $\quad f'(x) \le 0$

$$0 < x \le \frac{1}{2}$$

Vastaus: Epäyhtälö $f'(x) \le 0$, kun $0 < x \le \dfrac{1}{2}$.

144.Funktio $f(x) = \dfrac{(x+3)(x-4)}{x+1} = \dfrac{x^2 - x - 12}{x+1}$

Derivaatta $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x - 12)\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x + 11}{(x+1)^2}$

Epäyhtälö $f'(x) > 0$

$$\frac{x^2 + 2x + 11}{(x+1)^2} > 0$$

Osoittajan nollakohta $x^2 + 2x + 11 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 11}}{2\cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-40}}{2}$$

Ei nollakohtaa

Nimittäjän nollakohta $(x + 1)^2 = 0$

$x = -1$

Merkkikaavio

		-1		
$f'(x)$	$+$		$+$	x

$f'(-2) = 11 > 0$
$f'(0) = 11 > 0$

Epäyhtälön ratkaisu $f'(x) > 0$

$x \neq -1$

<u>Vastaus</u>: Epäyhtälö $f'(x) > 0$, kun $x \neq -1$.

145. Funktio $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$

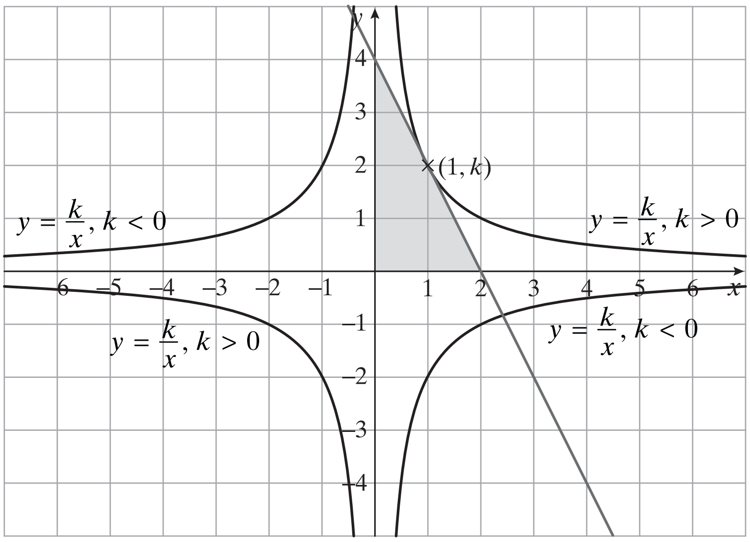
Derivaatta $h'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot x^2 - f(x)\cdot 2x}{x^4}$

Derivaatan arvo $h'(-1) = \dfrac{f'(-1)\cdot(-1)^2 - f(-1)\cdot 2\cdot(-1)}{(-1)^4}$ | $f(-1) = 2$ ja $f'(-1) = 3$

$$= \frac{3\cdot(-1)^2 - 2\cdot 2\cdot(-1)}{(-1)^4} = 7$$

<u>Vastaus</u>: Derivaatan arvo on $h'(-1) = 7$.

146.



Koska tangentti leikkaa positiivisia koordinaattiakseleita, niin vakio on $k > 0$.

Käyrä $f(x) = \frac{k}{x} = kx^{-1}$

Derivaatta $f'(x) = -kx^{-2} = -\frac{k}{x^2}$

Tangentin kulmakerroin $k_t = f'(1) = -\frac{k}{1^2} = -k$

Tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad \Big| x_0 = 1,\ y_0 = k$$

$$y - k = -k(x-1)$$

$$y = -kx + 2k$$

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $y = 0$.

$$-kx + 2k = 0$$

$$kx = 2k \quad \Big| : k$$

$$x = 2$$

Tangentin ja y-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $x = 0$.

$$y = -kx + 2k \quad \Big| x = 0$$

$$y = 2k$$

Tangentin ja positiivisten koordinaattiakseleiden rajoittaman kolmion ala

$$A = \frac{2 \cdot 2k}{2} \quad \Big| A = 8$$

$$2k = 8 \quad \Big| : 2$$

$$k = 4$$

Vastaus: Vakio $k = 4$.

147. Funktio $f(x)=\frac{3x^2-x}{2x+1}-\frac{7x}{8}$

Derivaatta $f'(x)=\frac{(6x-1)(2x+1)-(3x^2-x)\cdot 2}{(2x+1)^2}-\frac{7}{8}=\frac{6x^2+6x-1}{4x^2+4x+1}-\frac{7}{8}$

Derivaatan nollakohdat $f'(x)=0$

$$\frac{6x^2+6x-1}{4x^2+4x+1}-\frac{7}{8}=0$$

$$\frac{6x^2+6x-1}{4x^2+4x+1}=\frac{7}{8}$$

$$48x^2+48x-8=28x^2+28x+7$$

$$20x^2+20x-15=0 \quad \big| :5$$

$$4x^2+4x-3=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 4\cdot(-3)}}{2\cdot 4}$$

$$x_1=\frac{-4-\sqrt{64}}{8}=-\frac{3}{2}$$

$$x_2=\frac{-4+\sqrt{64}}{8}=\frac{1}{2}$$

<u>Vastaus</u>: Derivaatan nollakohdat ovat $-\frac{3}{2}$ ja $\frac{1}{2}$.

148. a) Funktio $f(x)=\frac{x^2+14x+33}{2x+4}$

Funktion nollakohdat $f(x)=0$

$$\frac{x^2+14x+33}{2x+4}=0$$

$$x^2+14x+33=0$$

$$x=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-4\cdot 1\cdot 33}}{2\cdot 1}$$

$$x_1=\frac{-14-\sqrt{64}}{2}=-11$$

$$x_2=\frac{-14+\sqrt{64}}{2}=-3$$

b) Funktio $f(x)=\frac{x^2+14x+33}{2x+4}$

Derivaatta $f'(x)=\frac{(2x+14)(2x+4)-(x^2+14x+33)\cdot 2}{(2x+4)^2}=\frac{2x^2+8x-10}{(2x+4)^2}$

Derivaatan nollakohdat $f'(x) = 0$

$$\frac{2x^2+8x-10}{(2x+4)^2}=0$$

$$2x^2+8x-10=0 \quad \Big|:2$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2\cdot1}$$

$$x_1=\frac{-4-\sqrt{36}}{2}=-5$$

$$x_2=\frac{-4+\sqrt{36}}{2}=1$$

<u>Vastaus</u>: a) Funktion nollakohdat ovat –11 ja –3. b) Derivaatan nollakohdat ovat –5 ja 1.

149. Funktio $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x}=x+1+2x^{-1}$

Derivaatta $f'(x) = 1 + 0 - 2x^{-2} = {}^{x^2)}1-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{x^2-2}{x^2}$

Derivaatta on negatiivinen $f'(x) < 0$

Osoittajan nollakohdat

$$x^2-2=0$$

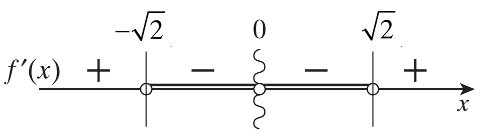
$$x^2=2 \quad \Big|\sqrt{}$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

Nimittäjän nollakohdat $x^2 = 0$

$$x = 0$$

Merkkikaavio



$f'(-2)$ =0,5 > 0
$f'(1)$ =–1 < 0
$f'(1)$ =–1 < 0
$f'(2)$ =0,5 > 0

Derivaatta on negatiivinen $f'(x) < 0$

$$-\sqrt{2}<x<0 \quad \text{tai} \quad 0<x<\sqrt{2}$$

<u>Vastaus</u>: Derivaatta on negatiivinen, kun $-\sqrt{2}<x<0$ tai $0<x<\sqrt{2}$.

150. Käyrä $y=\dfrac{2x-1}{x+4}$

Derivaatta $y'(x)=\dfrac{2(x+4)-(2x-1)\cdot 1}{(x+4)^2}=\dfrac{9}{(x+4)^2}$

Tangentin kulmakerroin $k_t=y'(2)=\dfrac{9}{(2+4)^2}=\dfrac{1}{4}$

Tangentin ja yhtälö $y-y_0=k_t(x-x_0)\quad \Big| x_0=2,\ y_0=\dfrac{1}{2},\ k_t=\dfrac{1}{4}$

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-2)$$

$$y=\frac{1}{4}x$$

Normaalin kulmakerroin $k_n=-\dfrac{1}{k_t}=-4$

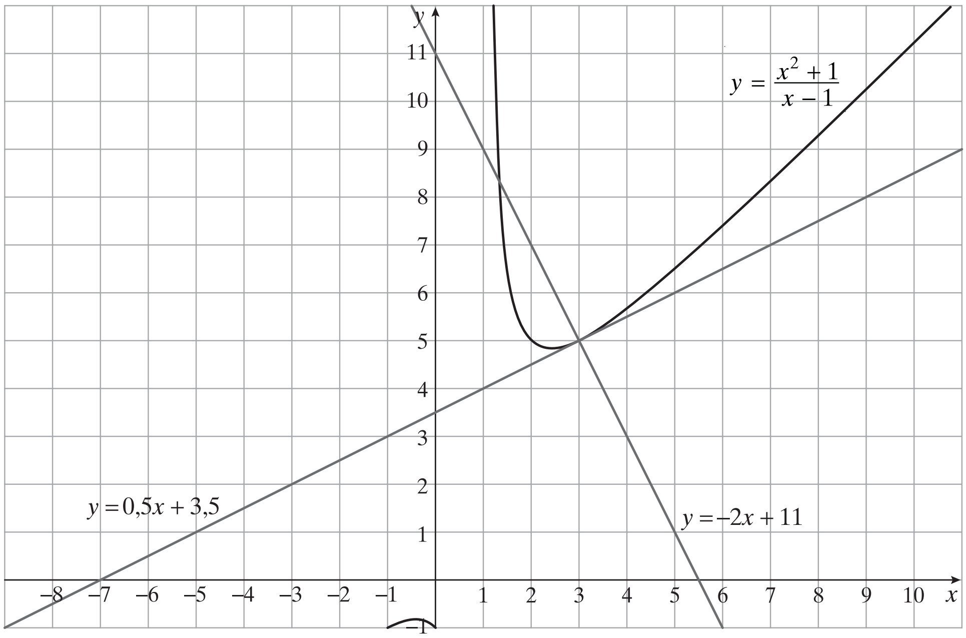
Normaalin yhtälö $y-y_0=k_n(x-x_0)\quad \Big| x_0=2,\ y_0=\dfrac{1}{2},\ k_n=-4$

$$y-\frac{1}{2}=-4(x-2)$$

$$y=-4x+8\frac{1}{2}$$

<u>Vastaus</u>: Tangentin yhtälö on $y=\dfrac{1}{4}x$ ja normaalin $y=-4x+8\dfrac{1}{2}$.

151.



Käyrä $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

Derivaatta $y'(x)=\dfrac{2x\cdot(x-1)-(x^2+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

Tangentin kulmakerroin $k_t=y'(3)=\dfrac{3^2-2\cdot 3-1}{(3-1)^2}=\dfrac{1}{2}$

Tangentin ja yhtälö $y-y_0=k_t(x-x_0)\quad \Big| x_0=3,\ y_0=5,\ k_t=\dfrac{1}{2}$

$$y-5=\frac{1}{2}(x-3)$$
$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $y = 0$.

$$\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}=0 \quad |\cdot 2$$
$$x=-7$$

Normaalin kulmakerroin $k_n=-\dfrac{1}{k_t}=-2$

Normaalin yhtälö $y-y_0=k_n(x-x_0)\quad |x_0=3,\ y_0=5,\ k_n=-2$

$$y-5=-2(x-3)$$
$$y=-2x+11$$

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $y = 0$.

$$-2x+11=0$$
$$x=\frac{11}{2}$$

Pinta-ala $A=\dfrac{\left(\dfrac{11}{2}-(-7)\right)\cdot 5}{2}=31\dfrac{1}{4}$

<u>Vastaus</u>: Ala on $31\dfrac{1}{4}$.

152. Käyrä $y=\dfrac{a^2}{x}=a^2x^{-1}$

Derivaatta $y'(x)=-a^2x^{-2}=-\dfrac{a^2}{x^2}$

Tangentin kulmakerroin $k_t=y'(x_0)=-\dfrac{a^2}{x_0^2}$

Tangentin ja yhtälö $y-y_0=k_t(x-x_0)\quad \Big| y_0=\dfrac{a^2}{x_0},\ k_t=-\dfrac{a^2}{x_0^2}$

$$y-\frac{a^2}{x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0)$$

$$y=-\frac{a^2}{x_0^2}x+\frac{2a^2}{x_0}$$

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $y = 0$.

$$-\frac{a^2}{x_0^2}x+\frac{2a^2}{x_0}=0$$

$$\frac{a^2}{x_0^2}x=\frac{2a^2}{x_0} \quad \Big| \cdot\frac{x_0^2}{a^2}$$

$$x = 2x_0$$

Tangentin ja y-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $x = 0$.

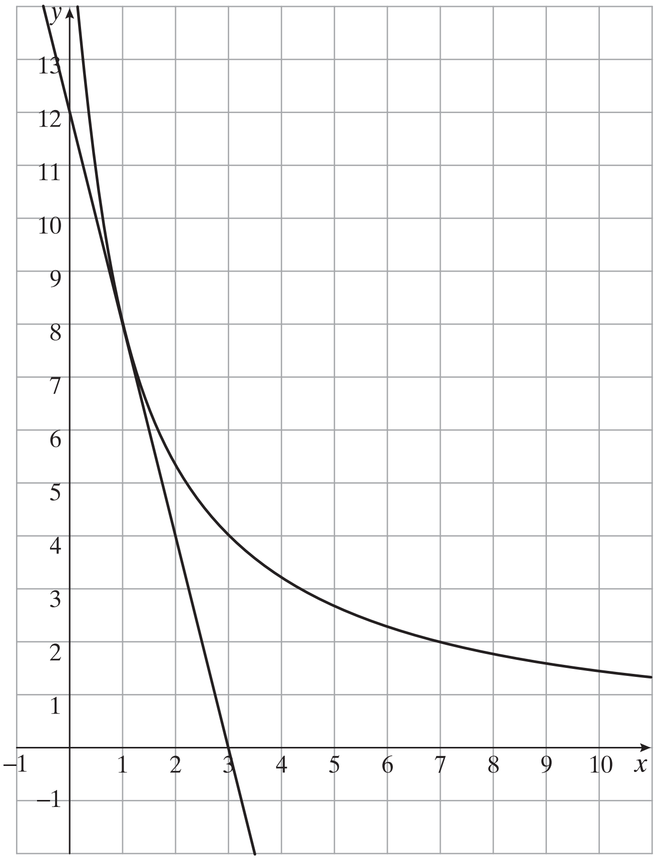
$$y=-\frac{a^2}{x_0^2}\cdot 0+\frac{2a^2}{x_0}$$

$$y=\frac{2a^2}{x_0}$$

Kolmion ala $A=\frac{1}{2}\cdot|2x_0|\cdot\left|\frac{2a^2}{x_0}\right|=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{|x_0|}\cdot\frac{2a^2}{\cancel{|x_0|}}=2a^2$

Käyrän $y=\frac{a^2}{x}$ jokainen tangentti muodostaa koordinaattiakseleiden kanssa kolmion, jonka ala on $2a^2$. $\square$

153.



Käyrä $y = \dfrac{k}{x+1}$

Derivaatta $y'(x) = \dfrac{0 \cdot (x+1) - k \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{-k}{(x+1)^2}$

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(1) = -\dfrac{k}{(1+1)^2} = -\dfrac{k}{4}$

Tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad \Big| \; x_0 = 1,\ y_0 = \frac{k}{2},\ k_t = -\frac{k}{4}$$

$$y - \frac{k}{2} = -\frac{k}{4}(x-1)$$

$$y = -\frac{k}{4}x + \frac{3k}{4}$$

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $y = 0$.

$$-\frac{k}{4}x+\frac{3k}{4}=0$$

$$\frac{k}{4}x=\frac{3k}{4} \qquad \Big| : \left(\frac{k}{4}\right)$$

$$x=3$$

Tangentin ja y-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $x = 0$.

$$y=-\frac{k}{4}\cdot 0+\frac{3k}{4}$$

$$y=\frac{3k}{4}$$

Tangentin ja positiivisten koordinaattiakseleiden rajoittaman kolmion ala

$$A=\frac{3\cdot\frac{3k}{4}}{2} \qquad \big| A=18$$

$$\frac{9}{8}k=18 \qquad \Big| : \left(\frac{9}{8}\right)$$

$$k=16$$

<u>Vastaus</u>: Vakio k = 16.

154. Laske sen kolmion ala, jota rajoittavat koordinaattiakselit sekä käyrälle $y=\frac{2}{x}$ pisteeseen (1,2) piirretty normaali. (S85/4)

Käyrä $y=\frac{2}{x}=2x^{-1}$

Derivaatta $y'(x)=-2x^{-2}=-\frac{2}{x^2}$

Normaalin kulmakerroin $k_n=-\frac{1}{k_t}=-\frac{1}{y'(1)}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$

Normaalin yhtälö

$$y-y_0=k_n(x-x_0) \qquad \Big| x_0=1,\ y_0=2,\ k_n=\frac{1}{2}$$

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

Normaalin ja x-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $y = 0$.

$$\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=0$$

$$\frac{1}{2}x=-\frac{3}{2} \qquad \big| \cdot 2$$

$$x=-3$$

Normaalin ja y-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $x = 0$.

$$y=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{3}{2}$$
$$y=\frac{3}{2}$$

Normaalin koordinaattiakseleiden rajoittaman kolmion ala $A=\frac{1}{2}\cdot|-3|\cdot\left|\frac{3}{2}\right|=2\frac{1}{4}$

Vastaus: Ala on $2\frac{1}{4}$.

155. Funktio $f(x)=x+\frac{1}{2x}=x+\frac{1}{2}x^{-1}$

Derivaatta $f'(x)=1-\frac{1}{2}x^{-2}=1-\frac{1}{2x^2}$

Yhtälö $f'(x)=-1$

$$1-\frac{1}{2x^2}=-1$$
$$\frac{1}{2x^2}=2 \quad |\cdot x^2$$
$$2x^2=\frac{1}{2} \quad |:2$$
$$x^2=\frac{1}{4} \quad |\sqrt{\ }$$
$$x=\pm\frac{1}{2}$$

Vastaus: Derivaatta on $f'(x)=1-\frac{1}{2x^2}$. Yhtälön $f'(x)=-1$ ratkaisu on $x=\pm\frac{1}{2}$.

7. Funktion kulun tutkiminen

156.

$f(x)=5x^3-x^2+6x-10$

$f'(x)=15x^2-2x+6$

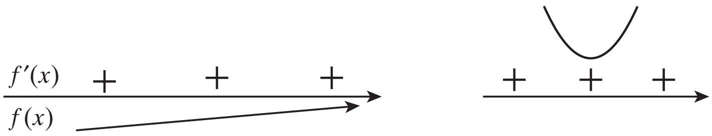
Derivaatan nollakohdat

$15x^2-2x+6=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 15\cdot 6}}{2\cdot 15}$$
$$x=\frac{4\pm\sqrt{-356}}{30}$$

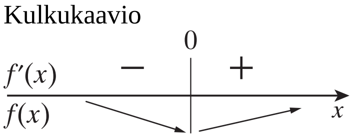
Ei juuria

Kulkukaavio



Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on aidosti kasvava kaikilla muuttujan arvoilla.

157.
a) Funktio $f(x) = 5x^{42} - 13$ ja muuttujan arvot ovat
$f(x) = 5x^{42} - 13$
$f'(x) = 210x^{41}$
Derivaatan nollakohdat
$210x^{41} = 0$
$x = 0$
Kulkukaavio

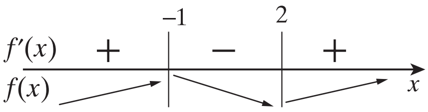


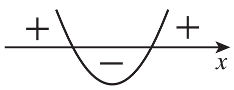
Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on aidosti kasvava, kun $x \geq 0$, joten se saa suuremman arvon muuttujan suuremmalla arvolla.
$a = 0{,}123456 > 0{,}12345 = b$, joten funktio saa suuremman arvon muuttujan arvolla a.

b) Funktio $f(x) = -x^{25} + 9$ ja muuttujan arvot ovat
$f(x) = -x^{25} + 9$
$f'(x) = -25x^{24} \leq 0$, kaikilla x, joten funktio on aidosti vähenevä kaikilla muuttujan arvoilla, joten se saa suuremman arvon muuttujan pinemmällä arvolla.
$d = -10{,}987761 < -10{,}98776 = c$, joten funktio saa suuremman arvon muuttujan arvolla d.

Vastaus: a) $a = 0{,}123456$ b) $d = -10{,}987761$

158.
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$
Derivaatan nollakohdat
$6x^2 - 6x - 12 = 0$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-12)}}{2 \cdot 6}$$
$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{324}}{12} = -1$$
$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{324}}{12} = 2$$
Kulkukaavio





Vastaus: kasvava, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 2$, vähenevä, kun $-1 \leq x \leq 2$

159.

$y = x^4 - x^2$

$y' = 4x^3 - 2x$

Derivaatan nollakohdat

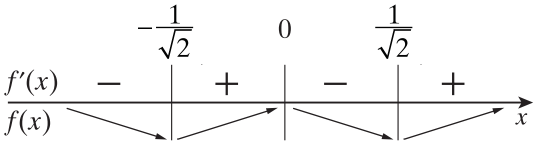
$$4x^3 - 2x = 0$$

$$2x(2x^2 - 1) = 0$$

$$2x = 0 \text{ tai } 2x^2 - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Kulkukaavio



$y'(-1) < 0$

$y'(-0,5) > 0$

$y'(0,5) < 0$

$y'(1) > 0$

<u>Vastaus</u>: a) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 0$ tai $x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $x \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$ tai $0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

160.

$f(x) = -x^4 + 2x^3$

$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$

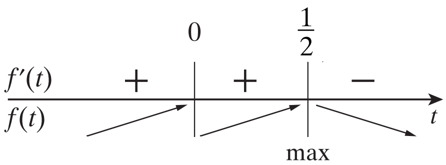
Derivaatan nollakohdat

$-4x^3 + 6x^2 = 0$

$2x^2(-2x + 1) = 0$

$x = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$

Kulkukaavio



$f'(-1) > 0$

$f'(0,25) > 0$

$f'(1) > 0$

maksimiarvo $f(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^4 + 2 \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{27}{16}$

<u>Vastaus</u>: maksimiarvo $\frac{27}{16}$

161.

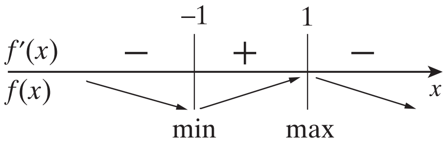
$f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Derivaatan nollakohdat

$x = \pm 1$

Kulkukaavio



$f'(-2) < 0$

$f'(0) > 0$

$f'(2) < 0$

minimiarvo $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2}$

maksimiarvo $f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$

<u>Vastaus</u>: minimiarvo $-\frac{1}{2}$ maksimiarvo $\frac{1}{2}$

162.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{9}{4}x - 2$, välillä [−2,2]

$f'(x) = x^2 + 4x - \frac{9}{4}$

Derivaatan nollakohdat

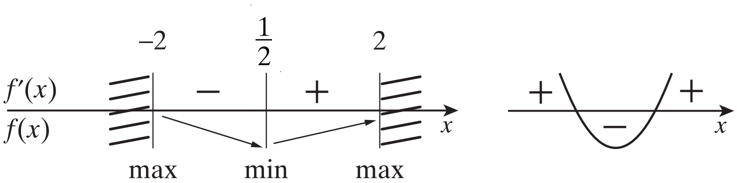
$x^2 + 4x - \frac{9}{4} = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot(-\frac{9}{4})}}{2\cdot 1}$$

$x_1 = \frac{-4-5}{2} = -4{,}5$ ei kuulu välille

$x_2 = \frac{-4+5}{2} = \frac{1}{2}$

Kulkukaavio



maksimiarvo $f(-2) = \frac{1}{3}\cdot(-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 - \frac{9}{4}\cdot(-2) - 2 = 7\frac{5}{6}$

minimiarvo $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} - 2 = -2\frac{7}{12}$

maksimiarvo $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - \frac{9}{4} \cdot 2 - 2 = 4\frac{1}{6}$

<u>Vastaus</u>: maksimiarvot $7\frac{5}{6}$ ja $4\frac{1}{6}$, minimiarvo $-2\frac{7}{12}$

163.

$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$

$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-2)-(x+1)2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2-2x-2}{(x^2-2)^2}$

Derivaatan nollakohdat

$-x^2-2x-2=0 \quad \vert \cdot(-1)$

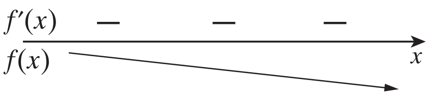
$x^2+2x+2=0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

ei juuria

Kulkukaavio



<u>Vastaus</u>: Ei ääriarvoja.

164.

$f(x) = -x^3 + px^2 + 3px$

$f'(x) = -3x^2 + 2px + 3p$

Derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten derivaatta saa vain negatiivisia arvoja ja funktio on kaikkialla vähenevä, jos derivaatalla on korkeintaan yksi nollakohta eli diskriminantti $D \leq 0$.

$D = (2p)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3p$

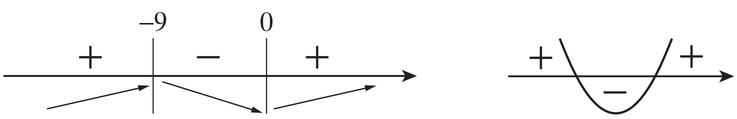
$4p^2 + 36p \leq 0$

Nollakohdat

$4p(p + 9) = 0$

$p = 0$ tai $p = -9$

Diskriminantin merkkikaavio



<u>Vastaus</u>: $-9 \leq p \leq 0$

165.

$f(x) = x^3 - px^2 + x$

$f'(x) = 3x^2 - 2px + 1$

Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten derivaatta saa vain positiivisia arvoja ja funktiolla ei ole ääriarvoja, jos derivaatalla on korkeintaan yksi nollakohta eli diskriminantti $D \leq 0$.

$D = (-2p)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1$

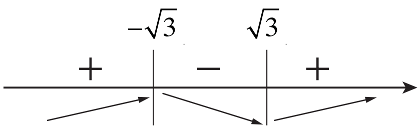
$4p^2 - 12 \leq 0$

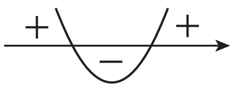
Nollakohdat

$4p^2 - 12 = 0$

$p = -\sqrt{3}$ tai $p = \sqrt{3}$

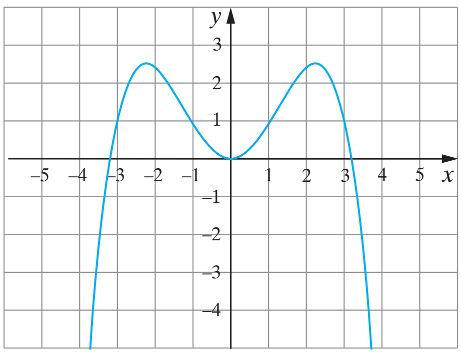
Diskriminantin merkkikaavio





<u>Vastaus</u>: $-\sqrt{3} \leq p \leq \sqrt{3}$

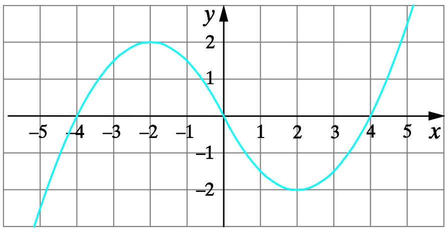
166.



Kuvaajasta nähdään, että derivaatan nollakohdat ovat −3,2 ja 0 sekä 3,2.
Derivaatta on negatiivinen, kun $x < -3{,}2$ tai $x > 3{,}2$ ja positiivinen, , kun $-3{,}2 < x < 3{,}2$.

<u>Vastaus</u>: vähenevä, kun $x \leq -3{,}2$ tai $x \geq 3{,}2$, kasvava, kun $-3{,}2 \leq x \leq 3{,}2$,
minimikohta $x = -3{,}2$ ja maksimikohta $x = 3{,}2$

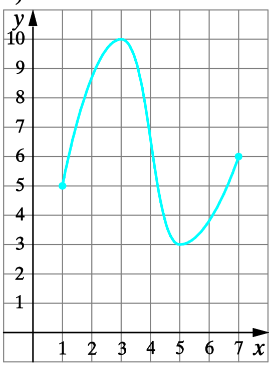
167.



a) funktion nollakohdat −4; 0 ja 4, derivaatan nollakohdat eli paikalliset ääriarvokohdat −2 ja 2
b) derivaatan nollakohdat ovat −4; 0 ja 4 ja derivaatta vaihtaa merkkinsä järjestyksessä − + − +, joten minimikohdat ovat −4 ja 4 , maksimikohta on 0 ja derivaatan arvo kohdassa x = 3 on −1,5, joten kulmakerroin −1,5

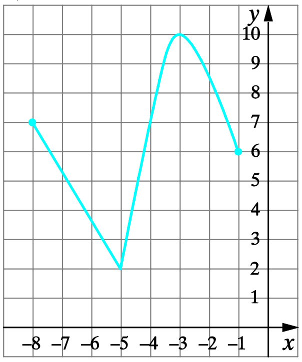
168. Paikallinen ääriarvokohta voi olla:
* kohdassa, jossa derivaatta vaihtaa merkkinsä
* suljetun välin päätepisteessä
* kohdassa, jossa derivaattaa ei ole

a)



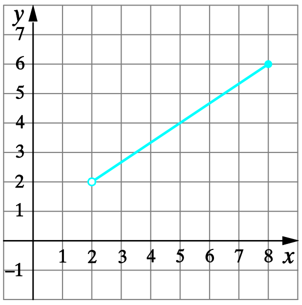
Kohdissa x = 1 ja x = 5 on minimi, koska funktion arvo pienempi kuin lähellä olevat muut funktion arvot.
Kohdissa x = 3 ja x = 7 on maksimi, koska funktion arvo suurempi kuin lähellä olevat muut funktion arvot.

b)



Kohdissa x =–5 ja x = −1 on minimi, koska funktion arvo pienempi kuin lähellä olevat muut funktion arvot.
Kohdissa x = −8 ja x = −3 on maksimi, koska funktion arvo suurempi kuin lähellä olevat muut funktion arvot.

c)

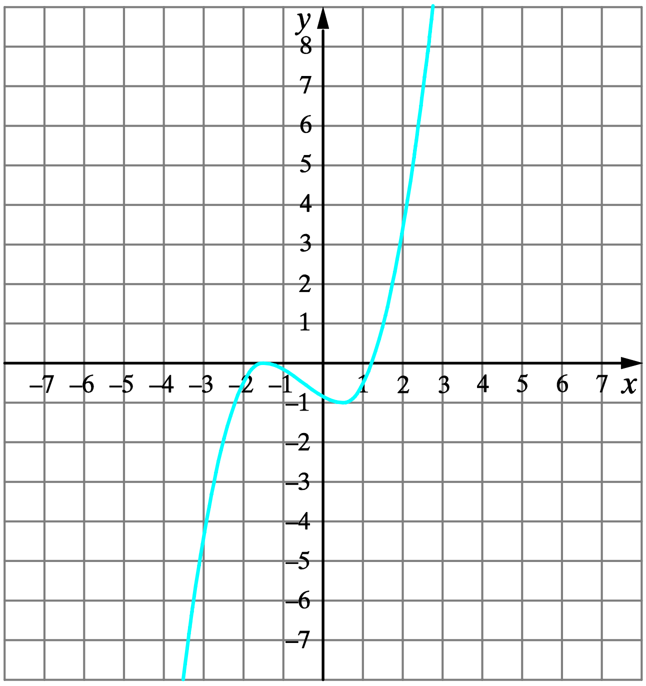


Kohdassa x = 8 on maksimi, koska funktion arvo suurempi kuin lähellä olevat muut funktion arvot.
Minimikohtaa ei ole, koska välin alkupää on avoin.

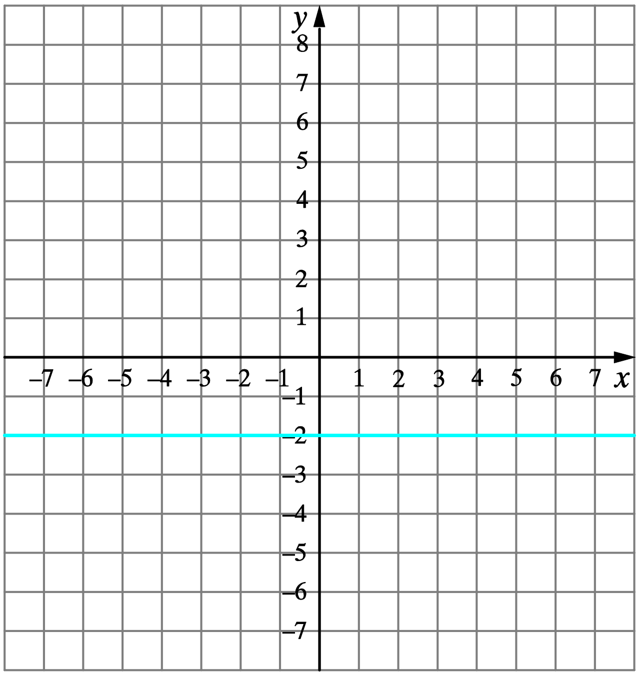
Vastaus: a) minimikohdat 1 ja 5, maksimikohdat 3 ja 7
b) minimikohdat −5 ja −1, maksimikohdat −8 ja −3
c) ei minimikohtia, maksimikohta 8

169.

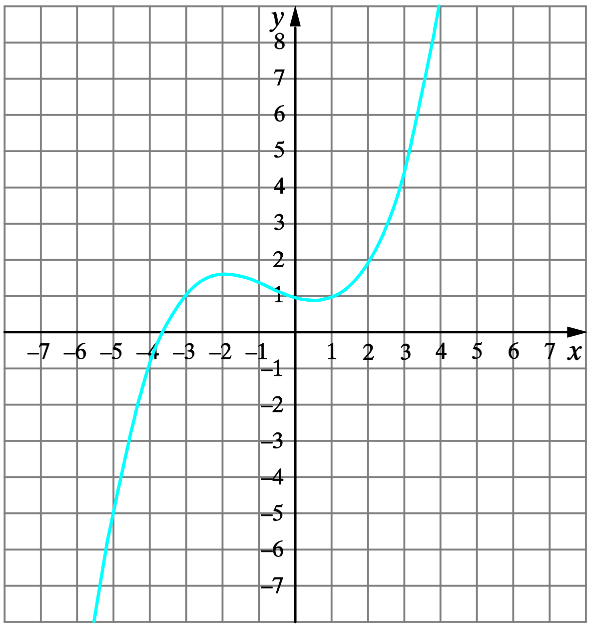
a)


y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
–1
–2
–3
–4
–5
–6
–7
–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6 7

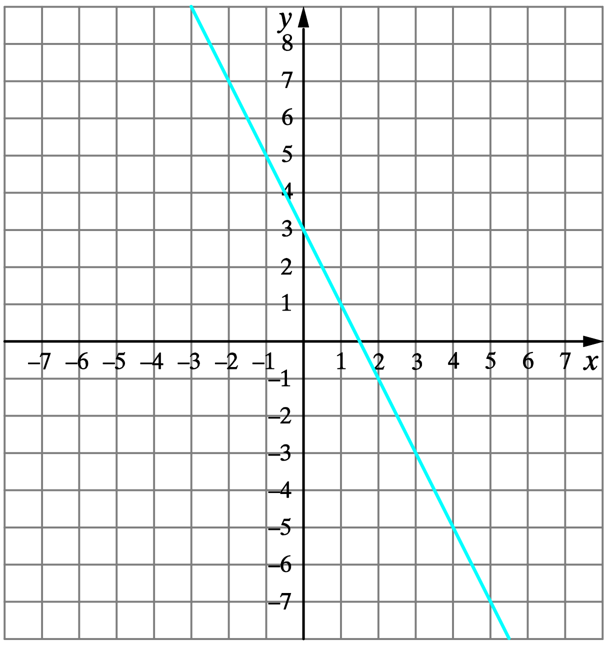
b)


y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
–1
–2
–3
–4
–5
–6
–7
–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6 7

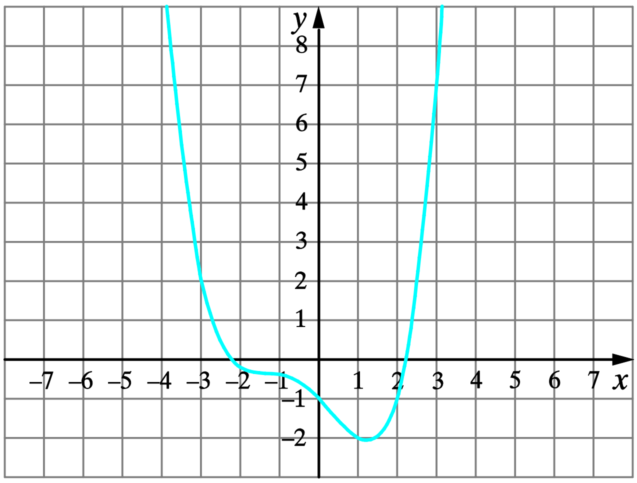
c)


y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1
1 2 3 4 5 6 7
–1
–2
–3
–4
–5
–6
–7

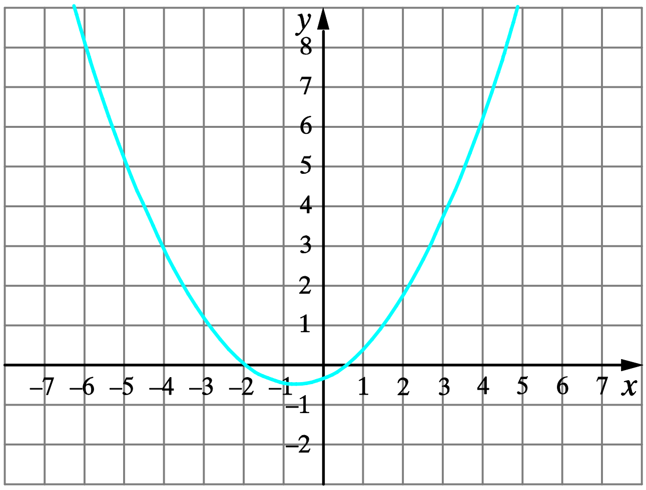
d)


y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1
1 2 3 4 5 6 7
–1
–2
–3
–4
–5
–6
–7

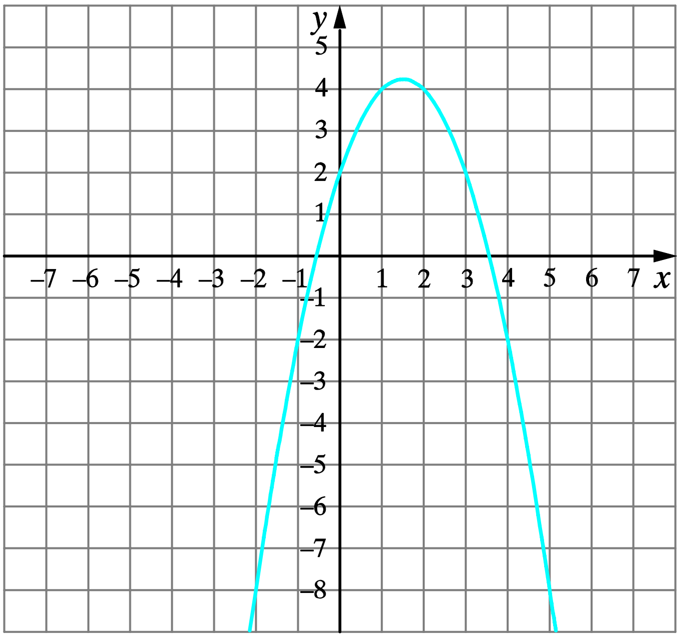
e)


y
8
7
6
5
4
3
2
1
–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1
1 2 3 4 5 6 7 x
–1
–2

f)


y
8
7
6
5
4
3
2
1
–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1
1 2 3 4 5 6 7 x
–1
–2

g)



Vastaus: Funktion e derivaattafunktio on a, koska a:n nollakohdat vastaavat e:n ääriarvokohtia.
funktion c derivaattafunktio on f, koska f:n nollakohdat vastaavat c:n ääriarvokohtia.

funktion g derivaattafunktio on d, koska d:n nollakohta vastaa e:n ääriarvokohtaa.
funktion d derivaattafunktio on b, koska d:n kulmakerroin vastaa vakiofunktio b:n arvoa.

170.

1) $f(x) = 5x^3 + 14x - 11$

$f'(x) = 15x^2 + 14 > 0$, kaikilla x:n arvoilla, joten f on aidosti kasvava kaikilla x:n arvoilla ja sillä on korkeintaan 1 nollakohta.

2) Koska $f(0) = -11 < 0$ ja $f(1) = 8 > 0$, on funktiolla vähintään 1 nollakohta.

Kohdista 1) ja 2) seuraa, että funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta.

171.

$$f(x) = (1 + \frac{1}{x})^2 = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 + 2x^{-1} + x^{-2}$$

$$f'(x) = -2x^{-2} - 2x^{-3} = -\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{-2x-2}{x^3}$$

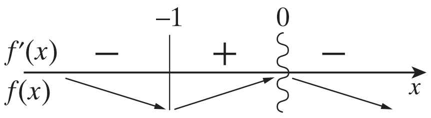
Derivaatan nollakohdat

$$\frac{-2x-2}{x^3}=0 \qquad \big|\cdot x^3 \neq 0$$

$$-2x-2=0$$

$$x=-1$$

Kulkukaavio



$f\,'(-2)<0$

$f\,'(0,5)>0$

$f\,'(1)<0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun $-1 \leq x < 0$

<u>Vastaus</u>: $-1 \leq x < 0$

172.

$$f(x)=\frac{x^2+a}{x-1}$$

$$f\,'(x)=\frac{2x(x-1)-1\cdot(x^2+a)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-a}{(x-1)^2}$$

Ääriarvokohdassa $x = -2$ derivaatta saa arvon nolla

$$\frac{(-2)^2-2\cdot(-2)-a}{(-2-1)^2}=0$$

$$\frac{8-a}{9}=0$$

$$a=8$$

Derivaatan nollakohdat

$$\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}=0$$

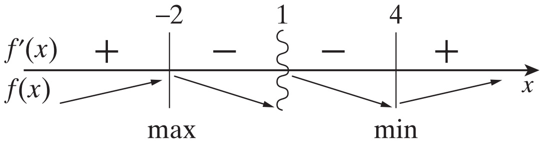
$$x^2-2x-8=0$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1}$$

$$x_1=\frac{2-6}{2}=-2$$

$$x_2=\frac{2+6}{2}=4$$

Kulkukaavio



$f\,'(-3) > 0$

$f\,'(-1) < 0$

$f\,'(2) < 0$

$f\,'(5) > 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että kohdassa $x = -2$ on maksimi ja kohdassa $x = 4$ on minimi.

Maksimiarvo $f(-2) = \dfrac{(-2)^2 + 8}{(-2) - 1} = -4$

Minimiarvo $f(4) = \dfrac{4^2 + 8}{4 - 1} = 8$

<u>Vastaus:</u> $a = 8$, maksimiarvo −4, minimiarvo 8

173.

$$y = \frac{x^2 + a}{2x + 1}$$

$$y' = \frac{2x(2x+1) - (x^2 + a)2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 2a}{(2x+1)^2}$$

Ääriarvokohdassa $x = 1$ derivaatta saa arvon nolla

$$\frac{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 2a}{(2 \cdot 1 + 1)^2} = 0$$

$$\frac{4 - 2a}{9} = 0$$

$$a = 2$$

Derivaatan nollakohdat

$$\frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x+1)^2} = 0$$

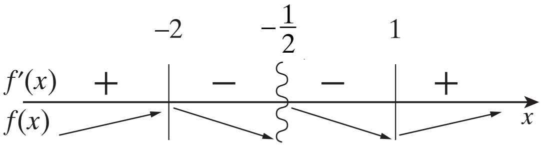
$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 1$$

Kulkukaavio



Kulkukaaviosta nähdään, että kohdassa $x = -2$ on maksimi ja kohdassa $x = 1$ on minimi.

Maksimiarvo $f(-2) = \dfrac{(-2)^2 + 2}{2 \cdot (-2) + 1} = -2$

Minimiarvo $f(1) = \dfrac{1^2 + 2}{2 + 1} = 1$

<u>Vastaus:</u> $a = 2$, maksimiarvo −2, minimiarvo 1

174.

$f(x) = 2px^3 + 3x^2 + 6x + 1$

$f'(x) = 6px^2 + 6x + 6$

Jotta $f(x)$ olisi koko **R**:ssä aidosti kasvava, on oltava $f'(x) \geq 0$ eli

$6px^2 + 6x + 6 \geq 0$ eli $px^2 + x + 1 \geq 0$, kaikilla x.

Derivaatan kuvaaja on paraabeli ja sen täytyy aueta ylöspäin ja oltava x –akselin yläpuolella tai sivuta x –akselia eli

$D = 1 - 4p \leq 0$ eli $p \geq \dfrac{1}{4}$

<u>Vastaus</u>: $p \geq \dfrac{1}{4}$

175.

$(x+1)^3 = x$

$f(x) = (x+1)^3 - x = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$f(-3) = -5$

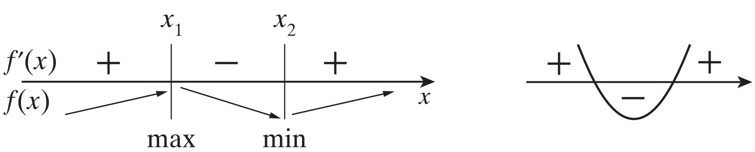
$f(-2) = 1$

eli on ainakin yksi nollakohta välillä $[-3,-2]$

$f('\,x) = 3x^2 + 6x + 2 = 0$

$x = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$ $\qquad x_1 \approx -1{,}58$ $\qquad x_2 = -0{,}423$

Kulkukaavio



Minimi $f\left(\dfrac{-6 + 2\sqrt{3}}{6}\right) \approx 0{,}615 > 0.$ Koska *f(x)* on aidosti kasvava välillä $]-\infty, x_1]$ ja se vaihtaa välillä merkkiä, on ko. välillä täsmälleen yksi nollakohta. Koska *f (x)* on aidosti vähenevä välillä $[x_1, x_2]$ ja se saa pienimmän arvonsa $f(x_2) > 0$ ko. välillä, ei *f (x)*:llä ole välillä nollakohtaa. Ja koska *f (x)* on aidosti kasvava ja > 0 välillä $[x_2, \infty[$ ei tälläkään välillä ole nollakohtaa. Näin ollen *f (x)*:llä on täsmälleen yksi nollakohta ja yhtälöllä $(x+1)^3 = x$ täsmälleen yksi juuri.

176.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + a}{x^2 - 2x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x+2) - (x^2-2x+a)(2x-2x)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$= \frac{(2x-2)(x^2-2x+2-x^2+2x-a)}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{(2x-2)(2-a)}{(x^2-2x+2)^2}$$

Derivaatan nollakohdat

$(2x-2)(2-a) = 0$

$x = 1$ tai $a = 2$

Jos $a = 2$, saadaan vakiofunktio $f(x) = 1$, jolla ei ole maksimiarvoa 2.

$$f(1) = 2$$

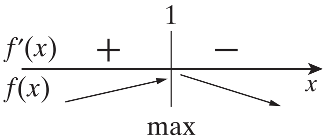
$$\frac{1^2 - 2\cdot 1 + a}{1^2 - 2\cdot 1 + 2} = 2$$

$$a = 3$$

Joten funktio on $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x + 2}$

ja derivaatta $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(2-3)}{(x^2-2x+2)^2} = \dfrac{-2x+2}{(x^2-2x+2)^2}$

Kulkukaavio



$f'(0) > 0$

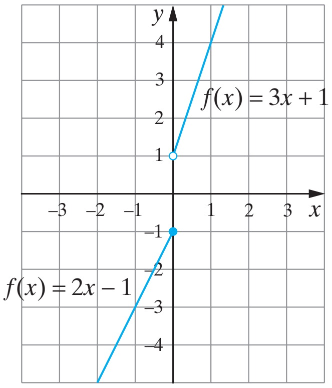
$f'(2) < 0$

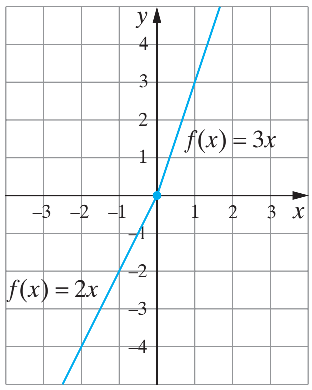
Kulkukaaviosta nähdään, että kohdassa on $x = 1$ on maksimi.

<u>Vastaus:</u> $a = 3$

177.

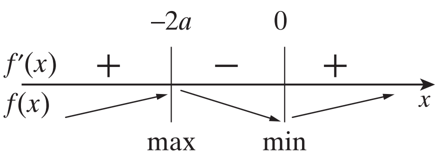
Funktio *f* on kasvava: Jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) \le f(x_2)$ .Esimerkki epäjatkuvasta kasvavasta funktiosta $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \le 0 \\ 3x+1, & x > 0 \end{cases}$ (Kuva 1). Kasvava, koska $f'(x) > 0$, kun $x \ne 0$ ja epäjatkuva, koska $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = f(0)$. Esimerkki kasvavasta funktiosta, joka on origossa jatkuva mutta ei derivoituva $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 0 \\ 3x, & x > 0 \end{cases}$ (Kuva 2). Jatkuva, koska $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = f(0)$ mutta ei derivoituva, koska $2 = f'_-(0) \neq f'_+(0) = 3$.

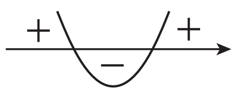




178.

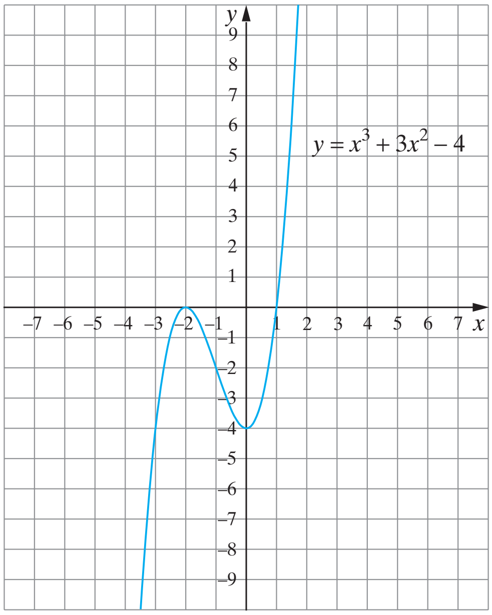
$f(x) = x^3 + 3ax^2 - 4$
$f'(x) = 3x^2 + 6ax$
$3x^2 + 6ax = 0$
$x(3x + 6a) = 0$
$x = 0$ tai $x = -2a$
Kulkukaavio





Kulkukaaviosta nähdään, että funktio kasvaa, kun $x \le -2a$ tai $x \ge 0$ ja funktio vähenee, kun $-2a \le x \le 0$.
Minimiarvo $f(0) = 0^3 + 3a \cdot 0^2 - 4 = -4$
maksimiarvo $f(-2a) = (-2a)^3 + 3a \cdot (-2a)^2 - 4 = 4(a^3-1)$.

Funktion kuvaaja sivuaa x-akselia, kun jompikumpi ääriarvoista on nolla. Minimiarvo −4 ei ole nolla, joten maksimiarvon yhtälö
$4(a^3-1) = 0$
$a = 1$
Tällöin funktio on $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$



Vastaus: Kasvaa, kun $x \leq -2a$ tai $x \geq 0$. Vähenee, kun $-2a \leq x \leq 0$. Minimiarvo −4 ja maksimiarvo $4(a^3-1)$. Kun $a = 1$, kuvaaja sivuaa x-akselia ja funktio on $x^3 + 3x^2 - 4$

179.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
Ehdoista minimi = 1, kun x=0 ja maksimi, kun $x = -1$ ja ääriarvokohdassa derivaatan arvo on nolla saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 0^3 + a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 1 \\ 3\cdot 0^2 + 2a\cdot 0 + b = 0 \\ 3\cdot(-1)^2 + 2a\cdot(-1) + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ b = 0 \\ 3 - 2a + b = 0 \end{cases}$$

$3 - 2a + 0 = 0$

$$a = \frac{3}{2}$$

Maksimiarvo $f(-1) = (-1)^3 + \frac{3}{2}\cdot(-1)^2 + 1 = \frac{3}{2}$

Vastaus: $\frac{3}{2}$

180.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

Ehdoista x:n arvolla 2 funktio saa ääriarvonsa 2,5 ja x:n arvoilla 1 ja 5 saa vastakkaiset arvot saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 2,5 \\ 2a \cdot 2 + b = 0 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = d \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = -d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2,5 \\ 4a + b = 0 \\ a + b + c - d = 0 \\ 25a + 5b + c + d = 0 \end{cases}$$

Saadaan
$a = -0,5$
$b = 2$
$c = 0,5$
$d = 2$

Vastaus: $-0,5x^2 + 2x + 0,5$

181.

$f(x) = x$ on pariton, koska $f(-x) = -x = -f(x)$

$f(x)$ on kasvava, kun $x \in \mathbf{R}$, sillä jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) = x_1 < x_2 = f(x_2)$

$f(x) = -x$ on pariton, koska $f(-x) = -(-x) = -f(x)$

$f(x)$ ei ole kasvava, sillä jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) = -x_1 > -x_2 = f(x_2)$

Jos $f(x)$ on pariton, niin $f(-0) = -f(0)$. Koska $-0 = 0$, niin $f(-0) = f(0)$. Edellisistä seuraa, että $f(0) = -f(0)$ ja edelleen $f(0) + f(0) = 0$ eli $2f(0) = 0$ ja $f(0) = 0$.
Koska $f(x)$ on jatkuva, sen raja-arvo on sama kuin funktion arvo eli

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

Vastaus: Funktio $f(x) = x$ kasvava pariton funktio ja funktio $f(x) = -x$ on pariton, mutta ei kasvava funktio.

182.
$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{p'(2+\Delta x) - p'(2)}{\Delta x} = 12$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3a(2+\Delta x)^2 + 2b(2+\Delta x) + c - (3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c)}{\Delta x} = 12$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3a(4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2) + 4b + 2b\Delta x + c - 12a - 4b - c}{\Delta x} = 12$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{12a + 12a\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + 4b + 2b\Delta x + c - 12a - 4b - c}{\Delta x} = 12$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{12a\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + 2b\Delta x}{\Delta x} = 12$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (12a + 3a\Delta x + 2b) = 12$$

$$12a + 2b = 12$$

Ehdoista saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 3 \\ a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 5 \\ 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 0 \\ 12a + 2b = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 3 \\ -a + b - c + d = 5 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 12a + 2b = 12 \end{cases}$$

Saadaan
$a = 1$
$b = 0$
$c = -3$
$d = 3$

Vastaus: $p(x) = x^3 - 3x + 3$

183.
a)
$f(x) = -x^7 + x^6$
$f'(x) = -7x^6 + 6x^5$
$-7x^6 + 6x^5 = 0$
$x^5(-7x + 6) = 0$
$x = 0$ tai $x = \frac{6}{7}$
Kulkukaavio

		0		$\frac{6}{7}$	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$f'(-1) < 0$
$f'(0{,}5) > 0$
$f'(1) < 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio vähenevä, kun $x \leq 0$ tai $x \geq \frac{6}{7}$, kasvava,

kun $0 \leq x \leq \frac{6}{7}$

b)
$f(x) = x^5 + x - 2$
$f'(x) = 5x^4 + 1$
ei nollakohtia ja $f'(x) > 0$ kaikilla x, joten f on kasvava kaikilla x

<u>Vastaus</u>: a) funktio vähenevä, kun $x \leq 0$ tai $x \geq \frac{6}{7}$, kasvava, kun $0 \leq x \leq \frac{6}{7}$

b) kasvava kaikilla x.

8. Polynomifunktion kuvaajan piirtäminen

184.
a)
$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$
$f'(x) = 4x - 4$
Ylöspäin aukeavan paraabelin huippu
$4x - 4 = 0$
$x = 1$
$y = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 6 = -8$

b)
$f(x) = -x^2 - 2x - 3$
$f'(x) = -2x - 2$
Alaspäin aukeavan paraabelin huippu
$-2x - 2 = 0$
$x = -1$
$y = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = -2$

c)
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$

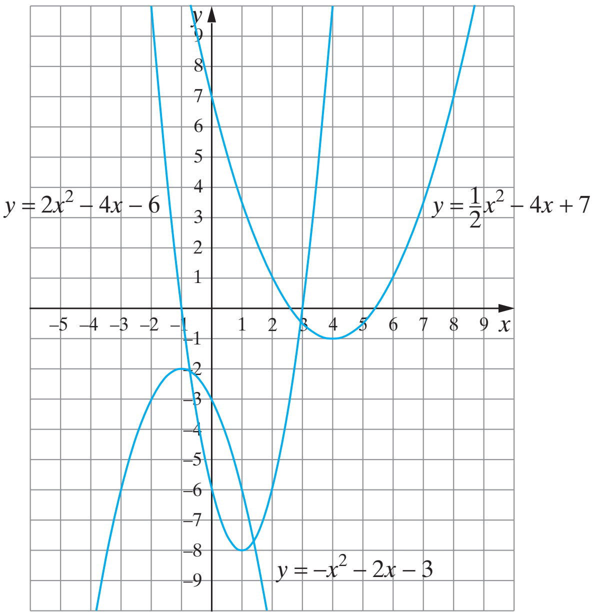
$f\,'(x) = x - 4$

Ylöspäin aukeavan paraabelin huippu

$x - 4 = 0$

$x = 4$

$y = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 7 = -1$



185.

a)

$f(x) = x^3 + 3x^2$

Nollakohdat

$x^3 + 3x^2 = 0$

$x^2(x+3) = 0$

$x = 0$ tai $x = -3$

$f\,'(x) = 3x^2 + 6x$

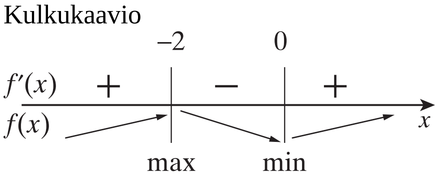
Derivaatan nollakohdat

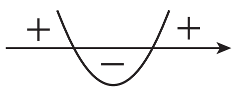
$3x^2 + 6x = 0$

$3x(x+2) = 0$

$x = 0$ tai $x = -2$

Kulkukaavio





maksimiarvo $f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = 4$

minimiarvo $f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0$

b)

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

Nollakohdat

$\frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0$

$x^2(\frac{1}{3}x - 1) = 0$

$x = 0$ tai $x = 3$

$f'(x) = x^2 - 2x$

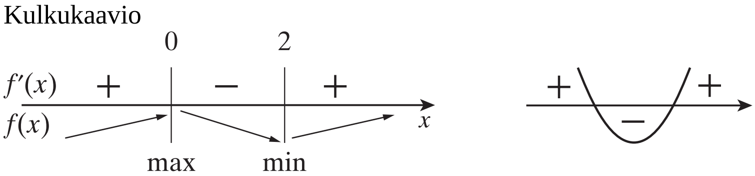
Derivaatan nollakohdat

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0$ tai $x = 2$

Kulkukaavio



maksimiarvo $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 = 0$

minimiarvo $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2^2 = -\frac{4}{3}$

c)

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$

Nollakohdat

$2x^3 - 6x^2 + 4x = 0$

$x(2x^2 - 6x + 4) = 0$

$x = 0$ tai $2x^2 - 6x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$f'(x) = 6x^2 - 12x + 4$

Derivaatan nollakohdat

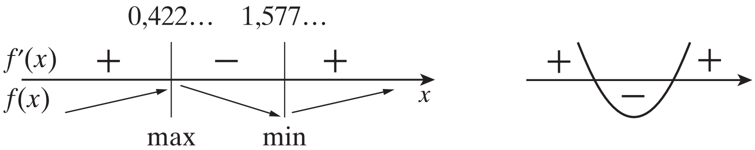
$6x^2 - 12x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4}}{2 \cdot 6}$$

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{48}}{12} = 0,422...$$

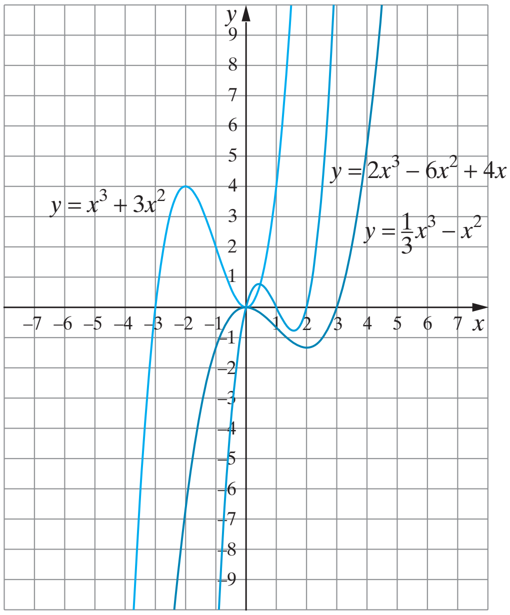
$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{48}}{12} = 1,577...$$

Kulkukaavio



maksimiarvo $f(0,422...) = 2 \cdot 0,422...^3 - 6 \cdot 0,422...^2 + 4 \cdot 0,422... \approx 0,77$

minimiarvo $f(1,577...) = 2 \cdot 1,577...^3 - 6 \cdot 1,577...^2 + 4 \cdot 1,577... \approx -0,77$



186.

a)

$f(x) = 3x^4 - 4x^3$

Nollakohdat

$3x^4 - 4x^3 = 0$

$x^3(3x-4) = 0$

$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \dfrac{4}{3}$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

Derivaatan nollakohdat

$12x^3 - 12x^2 = 0$

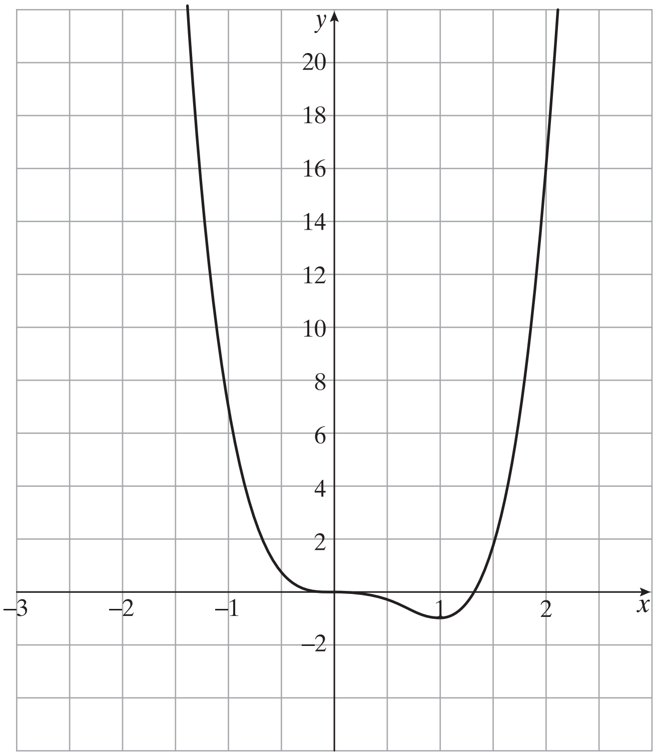
$12x^2(x-1) = 0$

$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 1$

Kulkukaavio

		0		1		
$f'(x)$	–		–		+	
$f(x)$	↘		↘		↗	x
				min		

minimiarvo $f(1) = 3 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 = -1$



b)

$f(x) = x^4 - 4x^2$

Nollakohdat

$$x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \pm 2$$

$f'(x) = 4x^3 - 8x$

Derivaatan nollakohdat

$$4x^3 - 8x = 0$$

$$4x(x^2 - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \pm\sqrt{2}$$

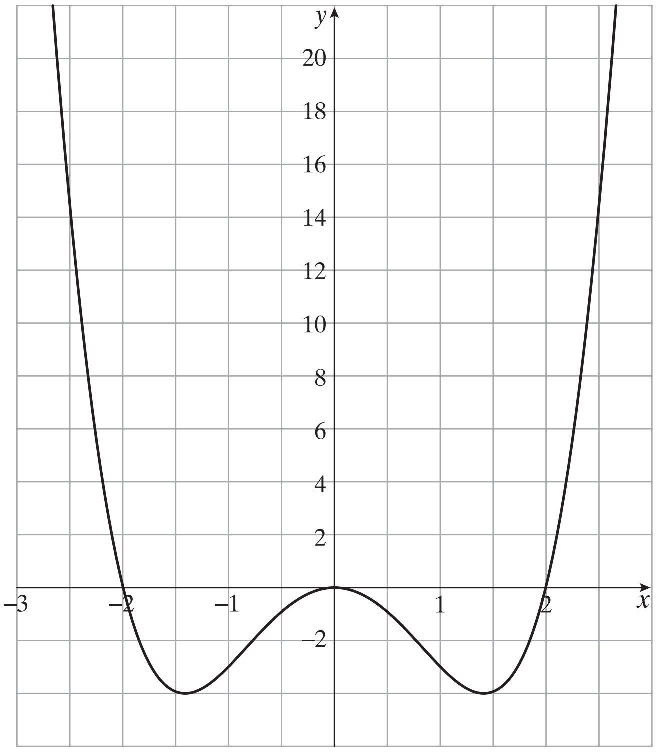
Kulkukaavio

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	x

minimiarvo $f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 4 \cdot (-\sqrt{2})^2 = -4$

minimiarvo $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4 \cdot (\sqrt{2})^2 = -4$

maksimiarvo $f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^2 = 0$



c)

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Nollakohdat

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Sijoitetaan $x^2 = t$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$t_1 = 1$

$t_2 = 4$

Sijoitetaan $x^2 = t$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$f'(x) = 4x^3 - 10x$

Derivaatan nollakohdat

$$4x^3 - 10x = 0$$
$$2x(2x^2 - 5) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} = \pm 1{,}58...$$

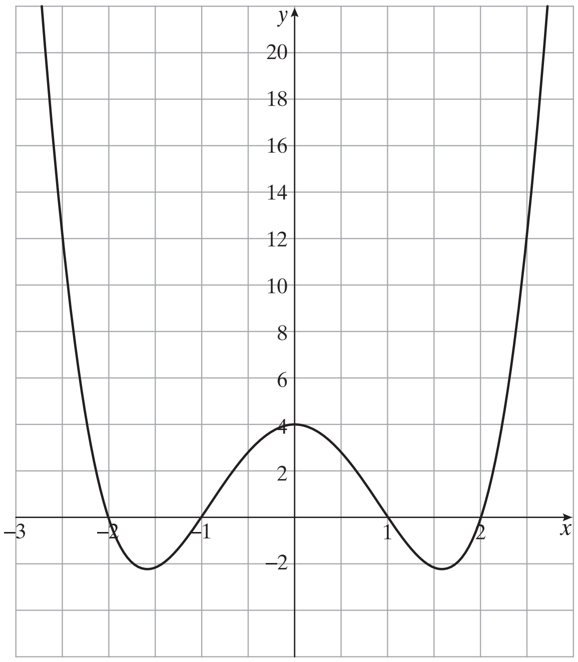
Kulkukaavio

		$-1{,}58\ldots$		0		$1{,}58\ldots$		
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	x
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

minimiarvo $f(-\sqrt{\frac{5}{2}}) = (-\sqrt{\frac{5}{2}})^4 - 5\cdot(-\sqrt{\frac{5}{2}})^2 + 4 = -2\frac{1}{4}$

minimiarvo $f(\sqrt{\frac{5}{2}}) = (\sqrt{\frac{5}{2}})^4 - 5\cdot(\sqrt{\frac{5}{2}})^2 + 4 = 2\frac{1}{4}$

maksimiarvo $f(0) = 0^4 - 5\cdot 0^2 + 4 = 4$



187.

a)

$f(x) = -35x^2 - 140x - 540$

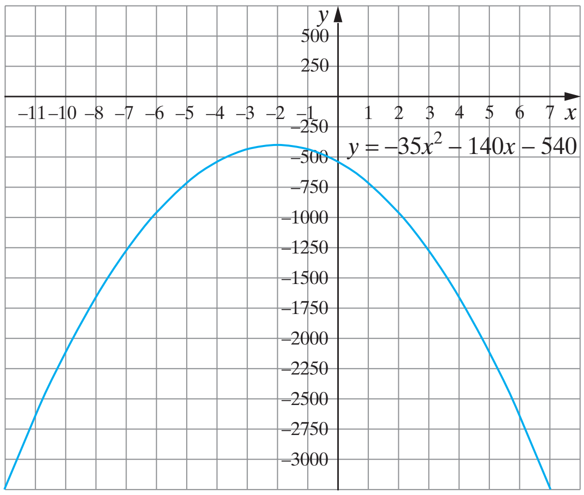
$f'(x) = -70x - 140$

Alaspäin aukeavan paraabelin huippu

$-70x - 140 = 0$

$x = -2$

$y = -35 \cdot (-2)^2 - 140 \cdot (-2) - 540 = -400$



b)

$f(x) = x^3 - 135x^2$

Nollakohdat

$x^3 - 135x^2 = 0$

$x^2(x - 135) = 0$

$x = 0 \text{ tai } x = 135$

$f'(x) = 3x^2 - 270x$

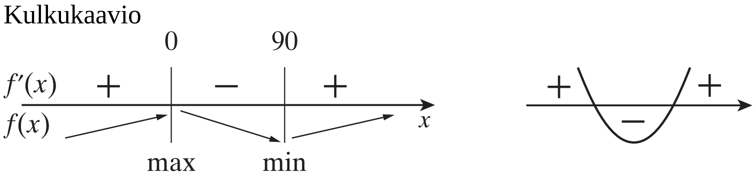
Derivaatan nollakohdat

$3x^2 - 270x = 0$

$3x(x - 90) = 0$

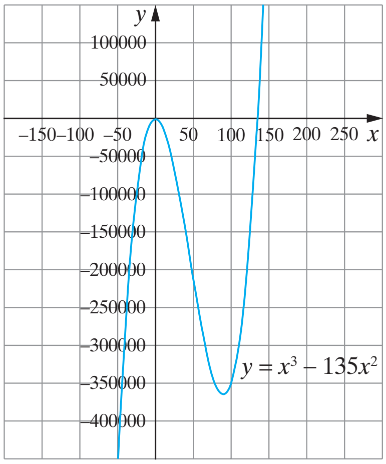
$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 90$

Kulkukaavio



maksimiarvo $f(0) = 0^3 - 135 \cdot 0^2 = 0$

minimiarvo $f(90)=90^3-135\cdot 90^2=-364\,500$



188.

a)

$f(x)=x^3+45x^2+600x$

Nollakohdat

$x^3+45x^2+600x=0$

$x(x^2+45x+600)=0$

$x=0$ tai $x^2+45x+600=0$

$D<0$ ei juuria

$f'(x)=3x^2+90x+600$

Derivaatan nollakohdat

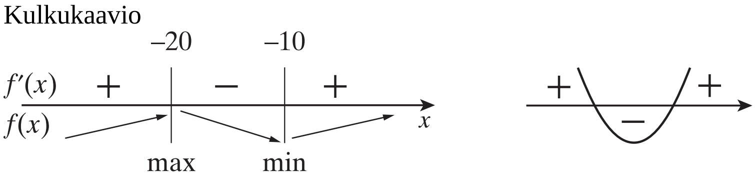
$3x^2+90x+600=0$

$$x=\frac{-90\pm\sqrt{90^2-4\cdot 3\cdot 600}}{2\cdot 3}$$

$x_1=-20$

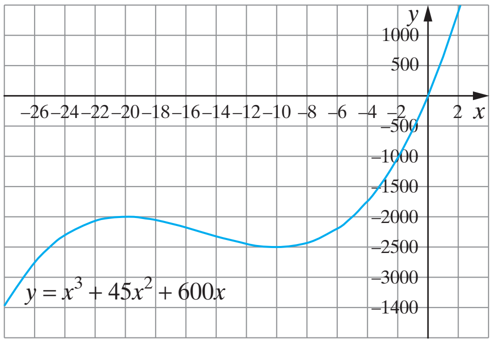
$x_2=-10$

Kulkukaavio



maksimiarvo $f(-20)=(-20)^3+45\cdot(-20)^2+600\cdot(-20)=-2\,000$

minimiarvo $f(-10)=(-10)^3+45\cdot(-10)^2+600\cdot(-10)=-2\,500$



b)

$f(x) = 0{,}01x^3 - x^2 + 8$

$f\,'(x) = 0{,}03x^2 - 2x$

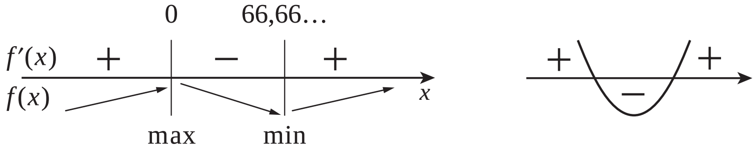
Derivaatan nollakohdat

$0{,}03x^2 - 2x = 0$

$x(0{,}03x - 2) = 0$

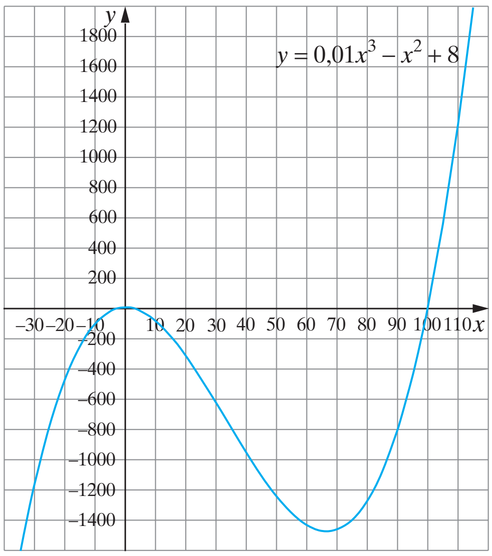
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 66\frac{2}{3}$$

Kulkukaavio



maksimiarvo $f(0) = 0{,}01 \cdot 0^3 - 0^2 + 8 = 8$

minimiarvo $f(66{,}66...) = 0{,}01 \cdot 66{,}66...^3 - 66{,}66...^2 + 8 = -\dfrac{39\,784}{27} \approx -1473$



189.

$f(x) = x^2 + ax + b$

$f'(x) = 2x + a$

Derivaatan nollakohdat

$x = -\frac{a}{2}$

Huipun x-koordinaatti

$-\frac{a}{2} = 2$

$a = -4$

Huipun y-koordinaatti

$2^2 - 4 \cdot 2 + b = 3$

$b = 7$

<u>Vastaus</u>: $a = -4$, $b = 7$

190.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

Derivaatan nollakohta

$2ax + b = 0$

$x = -\frac{b}{2a}$

191.

$f(x) = x^2 + tx + 4$

$f'(x) = 2x + t$

Derivaatan nollakohdat

$x = -\frac{t}{2}$

Huipun x-koordinaatti

$-\frac{t}{2} = 1$

$t = -2$

Huipun y-koordinaatti

$1^2 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$

<u>Vastaus</u>: $t = -2$

192.

$f(x) = 3x^2 + x + t$

$f'(x) = 6x + 1$

Derivaatan nollakohdat

$x = -\frac{1}{6}$

Huipun y-koordinaatti

$3 \cdot (-\frac{1}{6})^2 - \frac{1}{6} + t = 0$

$t = \frac{1}{12}$

Vastaus: $t = \frac{1}{12}$

193.

$y = x^2 + 2ax - a^2 + 2a + 3$

$y' = 2x + 2a$

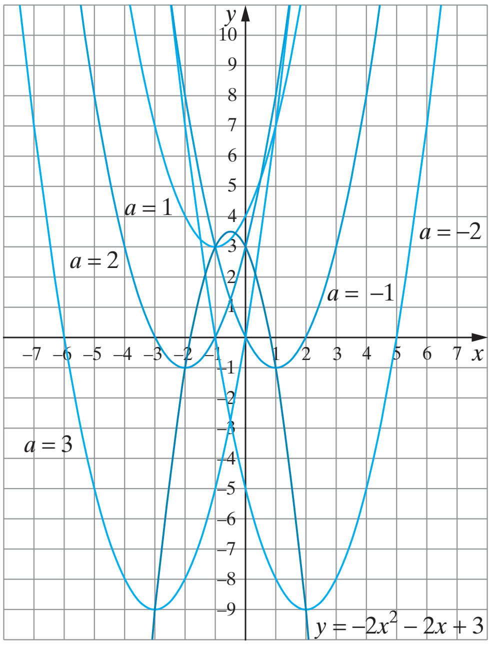
$2x + 2a = 0$

$a = -x$

Koska 2.asteen polynomifunktion ääriarvopiste on paraabelin huipussa, saadaan ääriarvopisteiden muodostama käyrä sijoittamalla $a = -x$ funktioon

$y = x^2 + 2ax - a^2 + 2a + 3$

$y = x^2 + 2 \cdot (-x) \cdot x - (-x)^2 + 2 \cdot (-x) + 3 = -2x^2 - 2x + 3$



Vastaus: $y = -2x^2 - 2x + 3$

194.

$y = x^4 - 2ax^2 + 1$

$y' = 4x^3 - 4ax$

$4x^3 - 4ax = 0$

$4x(x^2 - a) = 0$

$x = 0$ tai $x^2 - a = 0$

$x = \pm\sqrt{a}$

Kulkukaavio

	$-\sqrt{\frac{1}{a}}$		0		$\sqrt{\frac{1}{a}}$	
$4x$	$-$		$-$	$+$		$+$
$x^2 - a$	$+$		$-$	$-$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$
		min		max	min	

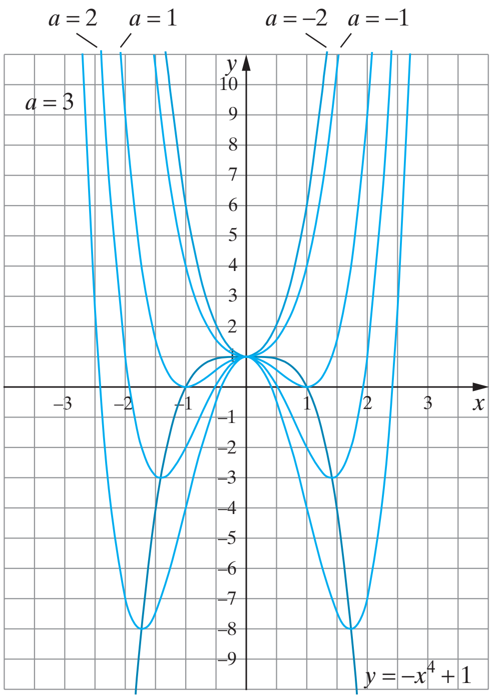
Ratkaistaan a

$x^2 - a = 0$

$a = x^2$

Sijoitetaan $a = x^2$ funktion lausekkeeseen $y = x^4 - 2ax^2 + 1$

$y = x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot x^2 + 1 = -x^4 + 1$



Vastaus: $y = -x^4 + 1$

195.

a)

$f(x) = x^3 - 3x - 2$

Nollakohdat

$x^3 - 3x - 2 = 0$

Kokeilemalla nähdään, että ainakin $x = -1$ ja $x = 2$ ovat juuria

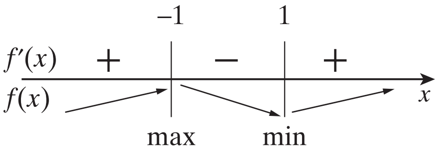
$f'(x) = 3x^2 - 3$

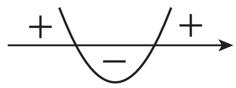
Derivaatan nollakohdat

$3x^2 - 3 = 0$

$x = \pm 1$

Kulkukaavio

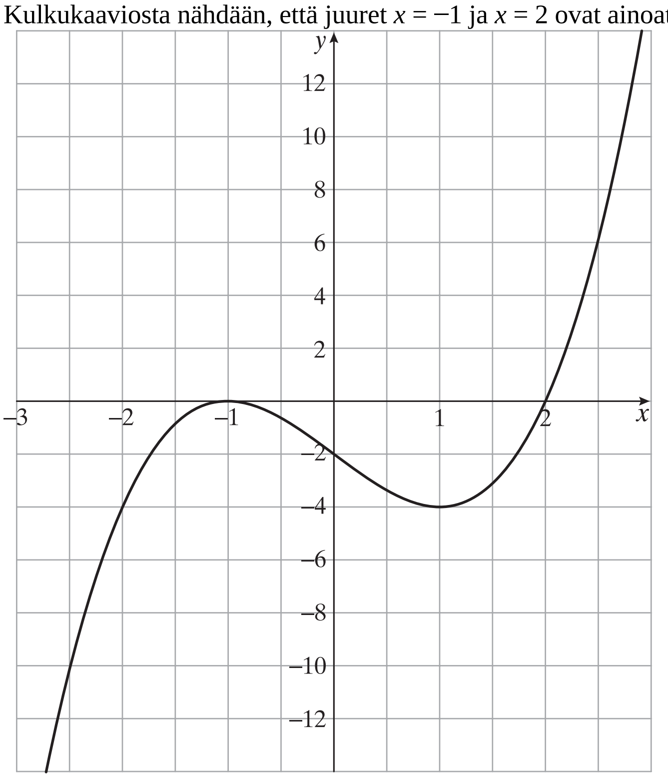




maksimiarvo $f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) - 2 = 0$

minimiarvo $f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 - 2 = -4$

Kulkukaaviosta nähdään, että juuret $x = -1$ ja $x = 2$ ovat ainoat juuret.



b)

$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7$

Nollakohdat

$2x^3 + 5x^2 - 7 = 0$

Kokeilemalla nähdään, että ainakin $x = 1$ on yksi juuri

$f'(x) = 6x^2 + 10x$

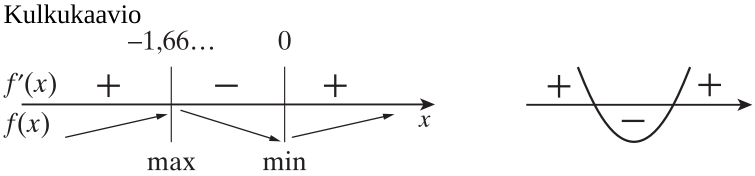
Derivaatan nollakohdat

$6x^2 + 10x = 0$

$2x(3x + 5) = 0$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{5}{3}$$

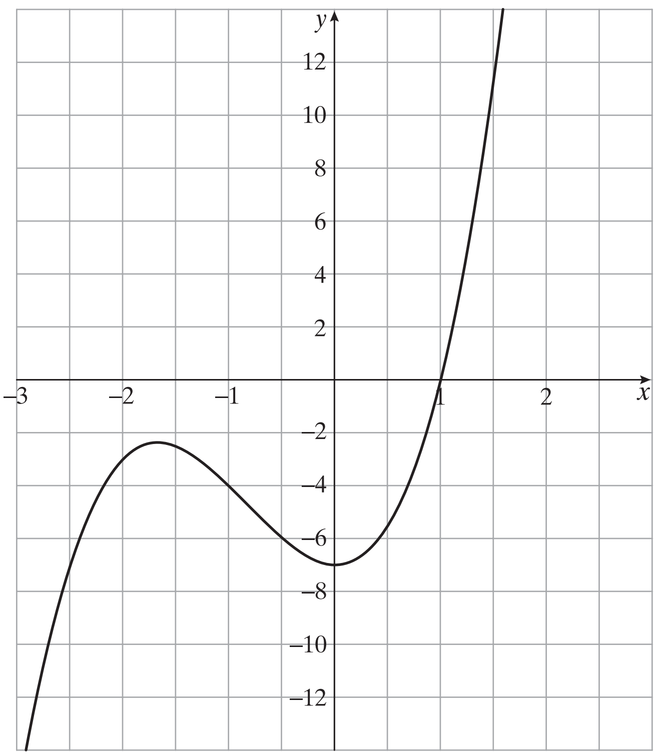
Kulkukaavio



maksimiarvo $f(-\frac{5}{3}) = 2\cdot(-\frac{5}{3})^3 + 5\cdot(-\frac{5}{3})^2 - 7 = -2\frac{10}{27}$

minimiarvo $f(0) = 2\cdot 0^3 + 5\cdot 0^2 - 7 = -7$

Kulkukaaviosta nähdään, että $x = 1$ on ainoa juuri.



c)

$f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$

Nollakohdat

$3x^4-8x^3+6x^2=0$

$x^2(3x^2-8x+6)=0$

$x=0$ tai $3x^2-8x+6=0$

$D<0$ ei juuria

$f'(x)=12x^3-24x^2+12x$

Derivaatan nollakohdat

$12x^3-24x^2+12x=0$

$12x(x^2-2x+1)=0$

$x=0$ tai $x^2-2x+1=0$

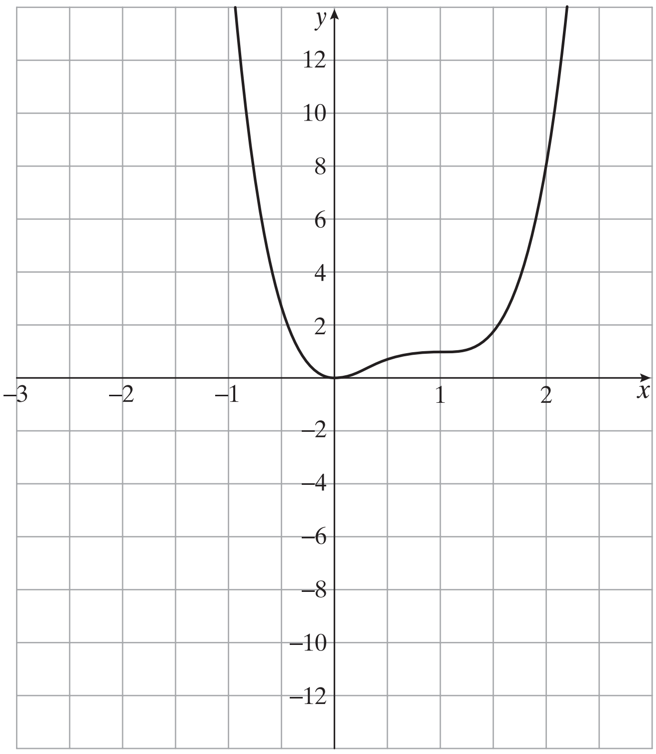
$(x-1)^2=0$

$x=1$

Kulkukaavio

		0		1	
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$
$f(x)$	↘	min	↗		↗

minimiarvo $f(0)=3\cdot 0^4-8\cdot 0^3+6\cdot 0^2=0$



d) $f(x)=\frac{1}{10}x^5-\frac{4}{3}x^3+6x$

Nollakohdat

$$\frac{1}{10}x^5-\frac{4}{3}x^3+6x=0$$

$$x(\frac{1}{10}x^4-\frac{4}{3}x^2+6)=0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad \frac{1}{10}x^4-\frac{4}{3}x^2+6=0$$

sijoitetaan $t = x^2$

$$\frac{1}{10}t^2-\frac{4}{3}t+6=0 \qquad | \cdot 30$$

$$3t^2-40t+180=0$$

$D < 0$, ei juuria

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^2+6$$

Derivaatan nollakohdat

$$\frac{1}{2}x^4-4x^2+6=0 \qquad | \cdot 2$$

$$x^4-8x^2+12=0$$

sijoitetaan $t = x^2$

$$t^2-8t+12=0$$

$$t=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1}$$

$$t_1=2$$

$$t_2=6$$

sijoitetaan $t = x^2$

$$x^2=2$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

$$x^2=6$$

$$x=\pm\sqrt{6}$$

Kulkukaavio

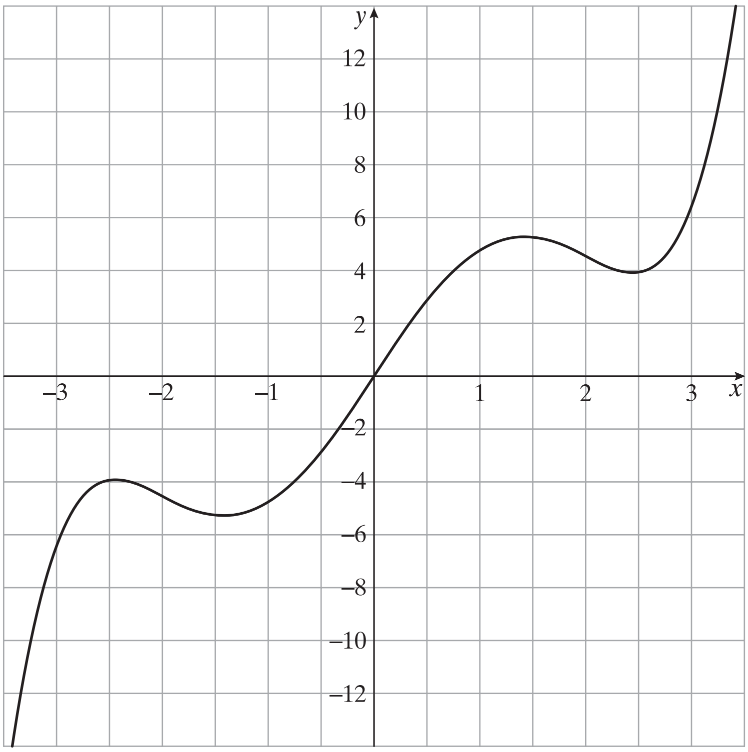
		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{6}$		x
$f'(x)$	+		−		+		−		+	
$f(x)$	↗		↘		↗		↘		↗	
		max		min		max		min		

maksimiarvo $f(-\sqrt{6})=\frac{1}{10}\cdot(-\sqrt{6})^5-\frac{4}{3}\cdot(-\sqrt{6})^3+6\cdot(-\sqrt{6})\approx -3{,}92$

minimiarvo $f(-\sqrt{2})=\frac{1}{10}\cdot(-\sqrt{2})^5-\frac{4}{3}\cdot(-\sqrt{2})^3+6\cdot(-\sqrt{2})\approx -5{,}28$

maksimiarvo $f(\sqrt{2})=\frac{1}{10}\cdot(\sqrt{2})^5-\frac{4}{3}\cdot(\sqrt{2})^3+6\cdot(\sqrt{2})\approx 5,28$

minimiarvo $f(\sqrt{6})=\frac{1}{10}\cdot(\sqrt{6})^5-\frac{4}{3}\cdot(\sqrt{6})^3+6\cdot(\sqrt{6})\approx 3,92$



196.

$$y=\frac{3}{5}x^2-\frac{1}{5}x+2$$

$$y'=\frac{6}{5}x-\frac{1}{5}$$

Paraabelin huippu

$$\frac{6}{5}x-\frac{1}{5}=0$$

$$x=\frac{1}{6}$$

$$y=\frac{3}{5}\cdot(\frac{1}{6})^2-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}+2=1\frac{59}{60}$$

Vastaus: $(\frac{1}{6},1\frac{59}{60})$

8. Funktion suurin ja pienin arvo

197.
a)
Määritetään alaspäin aukeavan paraabelin huipun *y*-koordinaatti
$f(x) = -x^2 + 8x - 21$
$f'(x) = -2x + 8$
$-2x + 8 = 0$
$x = 4$
$f(4) = -4^2 + 8 \cdot 4 - 21 = -5$

b)
Määritetään 4.asteen polynomifunktion alaspäin aukeavan kuvaajan korkein kohta

$$f(x) = -x^4 + \frac{1}{2}x + 7$$

$$f'(x) = -4x^3 + \frac{1}{2}$$

$$-4x^3 + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = -(\frac{1}{2})^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 7 = 7\frac{3}{16}$$

Vastaus: a) -5 b) $7\frac{3}{16}$

198.
a)
$f(x) = 5x^2 - 20x + 12$ välillä $[-1,4]$
$f'(x) = 10x - 20$
$10x - 20 = 0$
$x = 2$
Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(-1) = 5 \cdot (-1)^2 - 20 \cdot (-1) + 12 = 37$ suurin
$f(2) = 5 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 + 12 = -8$ pienin
$f(4) = 5 \cdot 4^2 - 20 \cdot 4 + 12 = 12$

b)

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ välillä $[-2,1]$

$f'(x) = -x - 2$

$-x - 2 = 0$

$x = -2$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(-2) = -\frac{1}{2}\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2) + 3 = 5$ suurin

$f(1) = -\frac{1}{2}\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 3 = \frac{1}{2}$ pienin

Vastaus: a) suurin 37 pienin −8   b) suurin 5 pienin $\frac{1}{2}$

199.

a)

$f(x) = x^3 - 3x + 4$, välillä $[-2,2]$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$

$x = \pm 1$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(-2) = (-2)^3 - 3\cdot(-2) + 4 = 2$ pienin

$f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 4 = 6$ suurin

$f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 + 4 = 2$ pienin

$f(2) = 2^3 - 3\cdot 2 + 4 = 6$ suurin

b)

$f(x) = -2x^3 - 9x^2 + 60x + 7$, välillä $[-6,4]$

$f'(x) = -6x^2 - 18x + 60$

$-6x^2 - 18x + 60 = 0$

$$x = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4\cdot(-6)\cdot 60}}{2\cdot(-6)}$$

$x_1 = -5$

$x_2 = 2$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(-6) = -2\cdot(-6)^3 - 9\cdot(-6)^2 + 60\cdot(-6) + 7 = -245$

$f(-5) = -2\cdot(-5)^3 - 9\cdot(-5)^2 + 60\cdot(-5) + 7 = -268$ pienin

$f(2) = -2\cdot 2^3 - 9\cdot 2^2 + 60\cdot 2 + 7 = 75$ suurin

$f(4) = -2\cdot 4^3 - 9\cdot 4^2 + 60\cdot 4 + 7 = -25$

Vastaus: a) suurin 6 pienin 2   b) suurin 75 pienin −268

200.
a)
$f(x) = 2x + 7$, välillä $[-3,3]$
Kuvaaja on suora, joten funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä.
$f(-3) = 2\cdot(-3) + 7 = 1$ pienin
$f(3) = 2\cdot 3 + 7 = 13$ suurin

b)
$f(x) = -x^3 + 2x^2$, välillä $[-1, \frac{3}{2}]$
$f'(x) = -3x^2 + 4x$
$-3x^2 + 4x = 0$
$x(-3x + 4) = 0$
$x = 0$ tai $x = \frac{4}{3}$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(-1) = -(-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 = 3$ suurin

$f(0) = -0^3 + 2\cdot 0^2 = 0$ pienin

$f(\frac{4}{3}) = -(\frac{4}{3})^3 + 2\cdot(\frac{4}{3})^2 = 1\frac{5}{27}$

$f(\frac{3}{2}) = -(\frac{3}{2})^3 + 2\cdot(\frac{3}{2})^2 = 1\frac{1}{8}$

Vastaus: a) suurin 13 pienin 1 b) suurin 3 pienin 0

201.
a)
$f(x) = -x^2 + 6x$, välillä $[-2,2]$
$f(x) = -2x + 6$
$-2x + 6 = 0$
$x = 3$ ei kuulu välille
Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(-2) = -(-2)^2 + 6\cdot(-2) = -16$ pienin

$f(2) = -2^2 + 6\cdot 2 = 8$ suurin

b)
$f(x) = 73$, välillä $[-2,5]$
Vakiofunktio suurin ja pienin arvo on 73

Vastaus: a) suurin 8 pienin −16 b) suurin 73 pienin 73

202.
a)
$f(x) = 4x^5 - 5x^4$, välillä $[-1,2]$
$f'(x) = 20x^5 - 20x^3$
$20x^5 - 20x^3 = 0$
$20x^3(x^2 - 1) = 0$
$x = 0$ tai $x = \pm 1$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(-1) = 4\cdot(-1)^5 - 5\cdot(-1)^4 = -9$ pienin
$f(0) = 4\cdot 0^5 - 5\cdot 0^4 = 0$
$f(2) = 4\cdot 2^5 - 5\cdot 2^4 = 48$ suurin

b)
$f(x) = x^4 + 8x^3 - 14x^2$, välillä $[-8,0]$
$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 - 28x$
$4x^3 + 24x^2 - 28x = 0$
$4x(x^2 + 6x - 7) = 0$
$x = 0$ tai $x^2 + 6x - 7 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot(-7)}}{2\cdot 1}$$
$x_1 = -7$
$x_2 = 1$ ei kuulu välille

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(-8) = (-8)^4 + 8\cdot(-8)^3 - 14\cdot(-8)^2 = -896$
$f(-7) = (-7)^4 + 8\cdot(-7)^3 - 14\cdot(-7)^2 = -1\,029$ pienin
$f(0) = 0^4 + 8\cdot 0^3 - 14\cdot 0^2 = 0$ suurin

Vastaus: a) suurin 48 pienin −9 b) suurin 0 pienin −1 029

203.
a)
$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$, välillä $[-1,3]$
$f'(x) = -3x^2 + 12x - 12$
$-3x^2 + 12x - 12 = 0$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x = 2$$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(-1) = -1 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 8 = 27$ suurin
$f(2) = -1 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 = 0$
$f(3) = -1 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 8 = -1$ pienin

b)
$f(x) = (x^2 - 4)x^2$ välillä $[-3,1]$
$f(x) = x^4 - 4x^2$
$f'(x) = -4x^3 - 8x$
$-4x^3 - 8x = 0$
$-4x(x^2 + 2) = 0$
$x = 0$ tai $x^2 + 2 = 0$
ei juuria

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(-3) = (-3)^4 - 4 \cdot (-3)^2 = 45$ suurin
$f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0 = 0$
$f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1^2 = -3$ pienin

Vastaus: a) suurin 27 pienin -1 b) suurin 45 pienin -3

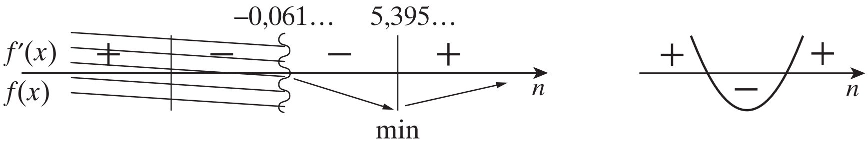
204.
$f(n) = n^3 - 8n^2 - n$
$f'(n) = 3n^2 - 16n - 1$
$3n^2 - 16n - 1 = 0$

$$n = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$n_1 = \frac{16 - \sqrt{268}}{6} = -0,061...$$

$$n_2 = \frac{16 + \sqrt{268}}{6} = 5,395...$$

Kulkukaavio



Lasketaan kummalla minimikohtaa 5,395... lähimmistä kokonaisluvuista 5 vai 6 lauseke saa pienemmän arvon.
$f(5) = 5^3 - 8 \cdot 5^2 - 5 = -80$
$f(6) = 6^3 - 8 \cdot 6^2 - 6 = -78$

Vastaus: $n = 5$

205.

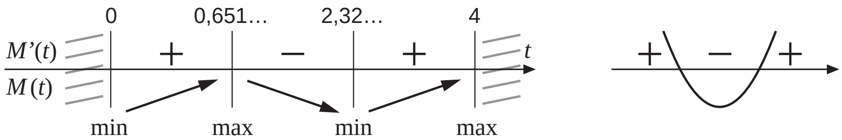
Metsähiiren populaation koko $M(t) = 13t^3 - 58t^2 + 59t + 16, \quad t \in [0,4]$
Derivaatta $M'(t) = 39t^2 - 116t + 59$
Derivaatan nollakohdat $39t^2 - 116t + 59 = 0$

$$t = \frac{-(-116) \pm \sqrt{(-116)^2 - 4 \cdot 39 \cdot 59}}{2 \cdot 39}$$

$$t_1 = \frac{116 - \sqrt{4\,252}}{78} = 0,651...$$

$$t_2 = \frac{116 + \sqrt{4\,252}}{78} = 2,32...$$

Kulkukaavio



Minimiarvo $M(0) = 16$
$M(2,32...) = 3,03...$ pienin
Maksimiarvo $M(4) = 156 \approx 160$ suurin
$M(0,651...) = 33,41...$

Vastaus: Metsähiiren populaation koko oli suurimmillaan neljän vuoden kuluttua ,160 hiirtä/ha ja pienimmillään 2,3 vuoden kuluttua, 3 hiirtä/ha.

206..

a)

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}\ \text{ välillä } [-4,6]$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)}=\frac{4x}{(x^2+1)}$$

$4x = 0$

$x = 0$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$$f(-4)=\frac{(-4)^2-1}{(-4)^2+1}=\frac{15}{17}$$

$$f(0)=\frac{0^2-1}{0^2+1}=-1\ \text{ pienin}$$

$$f(6)=\frac{6^2-1}{6^2+1}=\frac{35}{37}\ \text{ suurin}$$

b)

$$f(x)=\frac{6x}{x^2+4}\ \text{ välillä } [-3,2]$$

$$f'(x)=\frac{6(x^2+4)-6x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-6x^2+24}{(x^2+4)^2}$$

$$-6x^2+24=0$$

$$x=\pm 2$$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$$f(-3)=\frac{6\cdot(-3)}{(-3)^2+4}=-\frac{18}{13}$$

$$f(-2)=\frac{6\cdot(-2)}{(-2)^2+4}=-\frac{3}{2}\ \text{ pienin}$$

$$f(2)=\frac{6\cdot 2}{2^2+4}=\frac{3}{2}\ \text{suurin}$$

<u>Vastaus</u>: a) suurin $\frac{35}{37}$ pienin -1 b) suurin $\frac{3}{2}$ pienin $-\frac{3}{2}$

207.

a)

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}\ \text{ välillä } [-5,100]$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$2x = 0$
$x = 0$
Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(-5) = \frac{(-5)^2}{(-5)^2 + 1} = \frac{25}{26}$

$f(0) = \frac{0^2}{0^2 + 1} = 0$ pienin

$f(100) = \frac{100^2}{100^2 + 1} = \frac{10\ 000}{10\ 001}$ suurin

b)

$f(x) = \frac{x^2 - x}{3x + 1}$ välillä [0,10]

$f'(x) = \frac{(2x-1)(3x+1) - (x^2 - x)3}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{(3x+1)^2}$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$

$x_1 = -1$ ei kuulu välille

$x_2 = \frac{1}{3}$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(0) = \frac{0^2 - 0}{3 \cdot 0 + 1} = 0$

$f(\frac{1}{3}) = \frac{(\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}}{3 \cdot \frac{1}{3} + 1} = -\frac{1}{9}$ pienin

$f(10) = \frac{10^2 - 10}{3 \cdot 10 + 1} = \frac{90}{31}$ suurin

Vastaus: a) suurin $\frac{10\ 000}{10\ 001}$ pienin 0 b) suurin $\frac{90}{31}$ pienin $-\frac{1}{9}$

208.
väli [1,3]

$f(x) = \frac{x^5}{3x^2} + \frac{x^3 - 12x^2 + x}{2x} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{2}$, $x \neq 0$

$f\,'(x) = x^2 + x - 6$

$x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$$

$x_1 = -3$ ei kuulu välille

$x_2 = 2$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(1) = \frac{1}{3}\cdot 1^3 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 - 6\cdot 1 + \frac{1}{2} = -4\frac{2}{3}$

$f(2) = \frac{1}{3}\cdot 2^3 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + \frac{1}{2} = -6\frac{5}{6}$ pienin

$f(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 + \frac{1}{2}\cdot 3^2 - 6\cdot 3 + \frac{1}{2} = -4$ suurin

<u>Vastaus</u>: suurin -4 pienin $-6\frac{5}{6}$

209.

a)

$f(x) = 3x^2 - 4x + 2$

$f\,'(x) = 6x - 4$

$6x - 4 = 0$

$$x = \frac{2}{3}$$

Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa pienimmän arvonsa huipussa.

Pienin arvo $f(\frac{2}{3}) = 3\cdot(\frac{2}{3})^2 - 4\cdot\frac{2}{3} + 2 = \frac{2}{3} > 0$

Koska funktion pienin arvo on positiivinen, funktio saa vain positiivisia arvoja.

b)

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

$f(x) = 4x^3 - 4x$

$4x^3 - 4x = 0$

$4x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0$ tai $x = \pm 1$

Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava, joten funktio saa pienimmän arvonsa jossain minikohdassaan.

Ääriarvot

$f(-1) = (-1)^4 - 2\cdot(-1)^2 + 3 = 2 > 0$

$f(0) = 0^4 - 2\cdot 0^2 + 3 = 3 > 0$

$f(1) = 1^4 - 2\cdot 1^2 + 3 = 2 > 0$

Koska funktion pienin arvo on positiivinen, funktio saa vain positiivisia arvoja.

210.

$$f(x)=\frac{4x}{x^2+1}-6=\frac{4x-6x^2-6}{x^2+1}=\frac{-6x^2+4x-6}{x^2+1}$$

Funktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdassa, epäjatkuvuuskohdassa tai sellaisessa kohdassa, jossa sitä ei ole määritelty (nimittäjän nollakohdassa).

Osoittajan nollakohdat

$$-6x^2+4x-6=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-6)\cdot(-6)}}{2\cdot(-6)}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{-128}}{-12}$$

ei reaalijuuria

Nimittäjän nollakohdat

$x^2+1>0$ ei nollakohtia

Koska osoittajalla tai nimittäjällä ei ole nollakohtia, funktio ei vaihda merkkiään.

$$f(0)=\frac{4\cdot 0}{0^2+1}-6=-6<0$$

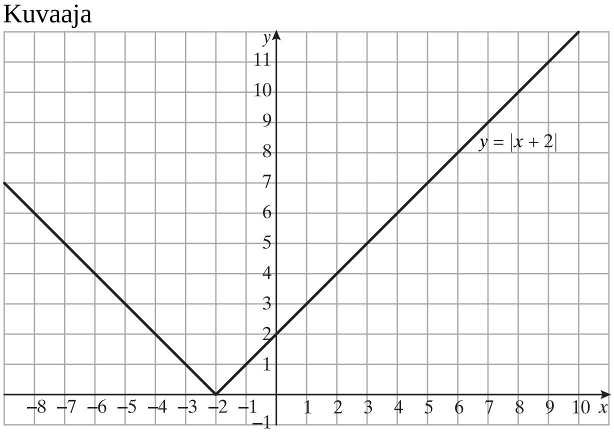
Joten funktio saa vain negatiivisia arvoja.

211.

väli [−5,27].

$$f(x)=|x+2|=\begin{cases}-x-2, \text{ kun } x<-2\\ x+2, \text{kun } x\geq -2\end{cases}$$

Kuvaaja



Kuvaajasta nähdään, että funktion minimikohta on $x = -2$

$$f(-5)=|-5+2|=3$$

$$f(-2)=|-2+2|=0 \text{ pienin}$$

$$f(27)=|27+2|=29 \text{ suurin}$$

Vastaus: suurin 29 pienin 0

212.

Funktion $f(x) = x^2 - 3x + 7$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Derivaatta $f'(x) = 2x - 3$

Derivaatan nollakohta $2x - 3 = 0$

$$x = \frac{3}{2}$$

Sijoituksella saadaan $y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 7 = 4\frac{3}{4}$, joka on funktion *f* minimiarvo.

Funktion $g(x) = -x^2 - 4x - 1$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Derivaatta $g'(x) = -2x - 4$

Derivaatan nollakohta $-2x - 4 = 0$

$$x = -2$$

Funktion *g* maksimiarvo $y = -4 + 8 - 1 = 3$

Koska $f(x)$:n pienin arvo $4\frac{3}{4}$ on suurempi kuin $g(x)$:n suurin arvo 3, kulkee *f*:n kuvaaja koko ajan ylempänä kuin *g*:n kuvaaja.

213.

$f(x) = x^2 + 4x + 6$ ja $g(x) = 3x^2 - 4x + 9$

erotus $h(x) = f(x) - g(x) = -2x^2 + 8x - 3$

$h'(x) = -4x + 8$

$-4x + 8 = 0$

$x = 2$

Erotusfunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa suurimman arvonsa huipussa.

Suurin arvo $h(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 3 = 5$

Vastaus: 5

214.

$f(x) = \frac{1}{x+2}$,välillä $[-10,-3]$.

$f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} < 0$

Funktio on aidosti vähenevä kaikilla x, koska derivaatta on negatiivinen. Funktio saa suurimman arvonsa välin alkupisteessä ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä.

$f(-10) = \frac{1}{-10+2} = -\frac{1}{8}$ suurin

$f(-3) = \frac{1}{-3+2} = -1$ pienin

Vastaus: suurin $-\frac{1}{8}$ pienin -1

215.

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2$

derivaattafunktio $f'(x) = -x^2 - 2x$

derivaattafunktion derivaatta $f''(x) = -2x - 2$

$-2x - 2 = 0$

$x = -1$

Derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa suurimman arvonsa huipussa.

Suurin arvo $f'(-1) = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1$

<u>Vastaus</u>: 1

216.

$2x - y = 2x - (x^2 + 5x - 8) = -x^2 - 3x + 8$

$D(-x^2 - 3x + 8) = -2x - 3$

$-2x - 3 = 0$

$x = -1{,}5$

Lausekkeen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa suurimman arvonsa huipussa.

Suurin arvo $-(-1{,}5)^2 - 3 \cdot (-1{,}5) + 8 = 10{,}25$

<u>Vastaus</u>: 10,25

217.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x,\ 0 \le x \le 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$3x^2 - 6x + 3 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$$

$x = 1$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 2$

<u>Vastaus</u>: 2

218.

$P: P(x) = x^2 + 4x + a$

Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio ei saa negatiivisia arvoja, jos funktiolla on korkeintaan 1 nollakohta eli diskriminantti $D \le 0$.

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 16 - 4a$
$16 - 4a \leq 0$
$a \geq 4$

<u>Vastaus</u>: $a \geq 4$

219.
a) Muutetaan neliöön täydentämällä ympyrän yhtälö keskipiste muotoon $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4ay + 5a^2 + 2a = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4ay + (2a)^2 = -5a^2 - 2a + 1 + (2a)^2$$
$$(x-1)^2 + (y-2a)^2 = -a^2 - 2a + 1$$

Yhtälö esittää ympyrää, jos $r^2 = -a^2 - 2a + 1 > 0$

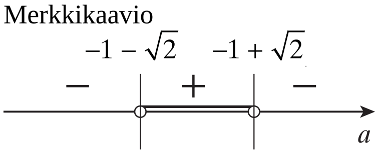
Ratkaistaan epäyhtälö

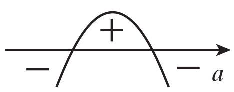
$$-a^2 - 2a + 1 > 0$$

Nollakohdat

$$-a^2 - 2a + 1 = 0$$
$$a = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)}$$
$$a = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2}$$
$$a_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{-2} = -1 - \sqrt{2}$$
$$a_2 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{-2} = -1 + \sqrt{2}$$

Merkkikaavio





$$-a^2 - 2a + 1 > 0$$
$$-1 - \sqrt{2} < a < -1 + \sqrt{2}$$

b) Ympyrän pinta-ala $A = \pi r^2$ on suurin, kun säteen neliö r^2 on mahdollisimman suuri.

Haetaan säteen neliön $r^2 = -a^2 - 2a + 1$ suurin arvo, kun $-1-\sqrt{2} < a < -1+\sqrt{2}$.

Merkitään $r^2 = f(a) = -a^2 - 2a + 1$
Funktion $f(a)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Se saavuttaa suurimman arvonsa huipussa. Paraabelin huipussa funktion derivaatta on nolla.

Derivoidaan funktio

$$f(a) = -a^2 - 2a + 1$$
$$f'(a) = -2a - 2$$

Derivaatan nollakohta

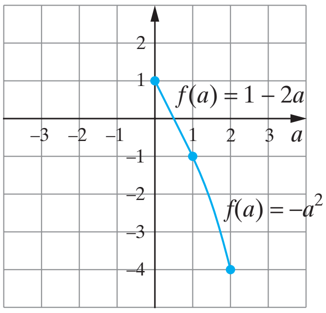
$$\begin{aligned} f'(a) &= 0 \\ -2a - 2 &= 0 \\ -2a &= 2 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Koska derivaatan nollakohta kuuluu välille $-1-\sqrt{2} < a < -1+\sqrt{2}$, niin säteen neliö on suurimmillaan tässä kohdassa.
Suurin mahdollinen pinta-ala

$$A = \pi r^2 \qquad \Big| \; r^2 = f(-1) = -(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 1 = 2$$
$$A = \pi \cdot 2 = 2\pi$$

<u>Vastaus</u>: a) Yhtälö esittää ympyrää, kun $-1-\sqrt{2} < a < -1+\sqrt{2}$. b) Ympyrän suurin ala on 2π.

220.
$g'(x) = 2x - 2a = 0$,kun $x = a$. (Kuva 1) Minimi $f(a) = g(a) = -a^2$, kun $0 \le a \le 1$. (Kuva 2) Minimi $f(a) = g(1) = 1 - 2a$, kun $1 < a \le 2$. $f'(a) = \begin{cases} -2, & \text{kun } 0 < a < 1 \\ -2a, & \text{kun } 1 < a < 2 \end{cases}$, josta $f'\left(\frac{3}{2}\right) = -3$. Funktio f on derivoituva välillä $]0,2[$, koska f on jatkuva ja derivoituva kaikissa välin pisteissä erityisesti kohdassa $a = 1$. Jatkuvuus $f(1) = \lim_{a\to 1+} f(x) = \lim_{a\to 1-} f(x)$ ja derivoituvuus $f'_-(1) = f'_+(1)$.



Vastaus: $f(a) = \begin{cases} 1 - 2a, & 0 \le a \le 1 \\ -a^2, & 1 < a \le 2 \end{cases}$,

f on derivoituva kaikissa välin pisteissä.

221.

$x^2 + y^2 - xy - x - y + 1$

neliön kärkipisteet

O(0, 0)

A (l, 0)

B(l, l)

C (0, l)

neliön sivulla OA $y = 0$, joten funktion lauseke on $x^2 - x + 1$, väli [0,1]

$D(x^2 - x + 1) = 2x - 1$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$0^2 - 0 + 1 = 1$ suurin

$(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$ pienin

$1^2 - 1 + 1 = 1$ suurin

neliön sivulla AB $x = 1$, joten funktion lauseke on $y^2 - 2y + 1$, väli [0,1]

$D(y^2 - 2y + 1) = 2y - 2$

$2y - 2 = 0$

$y = 1$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$ suurin

$1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ pienin

neliön sivulla BC $y = 1$, joten funktion lauseke on $x^2 - 2x + 1$, väli [0,1]

$D(x^2 - 2x + 1) = 2x - 2$

$2x - 2 = 0$

$x = 1$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$ suurin

$1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ pienin

neliön sivulla CO $x = 0$, joten funktion lauseke on $y^2 - y + 1$, väli [0,1]

$D(y^2 - y + 1) = 2y - 1$

$2y - 1 = 0$

$y = \frac{1}{2}$

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$0^2 - 0 + 1 = 1$ suurin

$(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$ pienin

<u>Vastaus</u>: suurin 1 pienin 0

222.

Juuret x_1 ja x_2

Juurten summa $x_1 + x_2 = -\frac{a^2}{a} = -a$

Juurten tulo $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{a}$

juurien ja niiden käänteisarvojen summa

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -a + \frac{-a}{\frac{1}{a}} = -a - a^2$$

$D(-a - a^2) = -1 - 2a$

$-1 - 2a = 0$

$a = -\frac{1}{2}$

Lausekkeen $-a - a^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten lauseke saa suurimman arvonsa huipussa eli kun $a = -\frac{1}{2}$.

Yhtälö

$$-\frac{1}{2}x^2+(-\frac{1}{2})^2x+1=0$$

$$-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+1=0 \qquad |\cdot 4$$

$$-2x^2+x+4=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-2)\cdot 4}}{2\cdot(-2)}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{-4}$$

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{33}}{-4}=\frac{1+\sqrt{33}}{4}$$

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{33}}{-4}=\frac{1-\sqrt{33}}{4}$$

juurien ja niiden käänteisarvojen summa

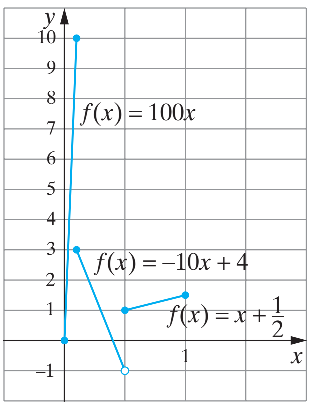
$$\frac{1+\sqrt{33}}{4}+\frac{1-\sqrt{33}}{4}+{}^{1-\sqrt{33})}\frac{4}{1+\sqrt{33}}+{}^{1+\sqrt{33})}\frac{4}{1-\sqrt{33}}=\frac{2}{4}+\frac{4-4\sqrt{33}+4+4\sqrt{33}}{1-33}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Vastaus: $a=-\frac{1}{2}$, maksimisumma $\frac{1}{4}$

223.

Esimerkki $f(x)=\begin{cases}100x & ,0\le x<\frac{1}{10}\\ -10x+4 & ,\frac{1}{10}\le x<\frac{1}{2}\\ x+\frac{1}{2} & ,\frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$.

Ei voi olla kasvava, koska silloin sillä olisi suurin ja pienin arvo.



224.

Funktio $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+5$

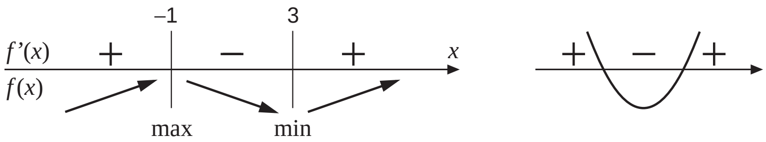
Derivaatta $f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$

Derivaatan nollakohdat $\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}=0$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}}{2\cdot\frac{1}{2}}$$

$$x_1=\frac{1-\sqrt{4}}{1}=-1 \text{ ja } x_2=\frac{1+\sqrt{4}}{1}=3$$

Kulkukaavio



Maksimiarvo $f(-1)=-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+5=5\frac{5}{6}$

Minimiarvo $f(3)=\frac{1}{6}\cdot 27-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}+5=-\frac{27}{6}+5=\frac{1}{2}$

<u>Vastaus</u>: Minimalverdien $\frac{1}{2}$, maksimalverdien $5\frac{5}{6}$

225. a) Funktio $f(x)=-x^3+3x^2-2$

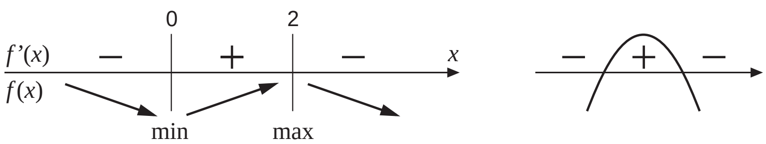
Derivaatta $f'(x)=-3x^2+6x$

Derivaatan nollakohdat $-3x^2+6x=0$

$3x(-x+2)=0$

$x=0$ tai $x=2$

Kulkukaavio



Minimiarvo $f(0)=-2$, minimum point $(0,-2)$

Maksimiarvo $f(2)=2)$, maximum point $(2,2)$

b) Funktio $g(x)=x^3-4x^2+7$

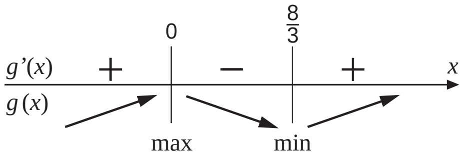
Derivaatta $g'(x)=3x^2-8x$

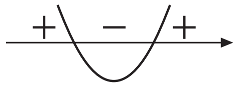
Derivaatan nollakohta $3x^2-8x=0$

$x(3x-8)=0$

$x = 0$ tai $x = \frac{8}{3}$

Kulkukaavio





Maksimiarvo $g(0) = 7$, maximum point (0,7)

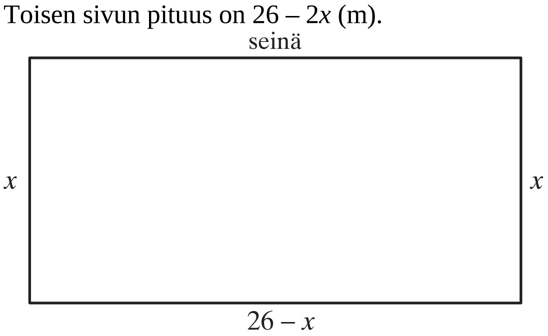
Minimiarvo $g\left(\frac{8}{3}\right) = -2\frac{13}{27}$, minimum point $\left(\frac{8}{3}, -2\frac{13}{27}\right)$

<u>Vastaus</u>: a) Minimum point (0, –2), maximum point (2,2) b) Minimum point $\left(\frac{8}{3}, -2\frac{13}{27}\right)$, maximum point (0,7)

10. Ääriarvosovelluksia

226.

Aitauksen toinen sivu on x (m).
Toisen sivun pituus on $26 - 2x$ (m).



Pinta-ala on

$$A(x) = x(26 - 2x) = -2x^2 + 26x$$

Sivun pituus on aina ei-negatiivinen, joten $x \geq 0$ ja $26 - 2x \geq 0$ eli $x \leq 13$.

Tarkasteluväli on [0, 13].

Derivoidaan funktio

$A(x) = -2x^2 + 26x$
$A'(x) = -4x + 26$

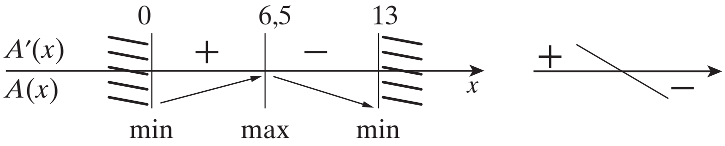
Derivaatan nollakohdat

$-4x + 26 = 0$

$-4x = -26 \quad \big| : (-4)$

$x = 6{,}5$

Piirretään kulkukaavio.



Funktio saa suurimman arvonsa ainoassa maksimikohdassaan $x = 6{,}5$.
Toinen sivu on $26 - 2x = 26 - 2 \cdot 6{,}5 = 13$.
Pinta-ala on
$A(6{,}5) = -2 \cdot 6{,}5^2 + 26 \cdot 6{,}5 = 84{,}5$

Vastaus: Seinän suuntainen sivu on 13 m, ja muut sivut ovat 6,5 m. Ala on tällöin 84,5 m^2.

227.
Luvut x ja $18 - x$
Suurin tulo $f(x) = x(18 - x) = -x^2 + 18x$
Derivaatta $f'(x) = -2x + 18$
Derivaatan nollakohdat $-2x + 18 = 0$

$$x = 9$$

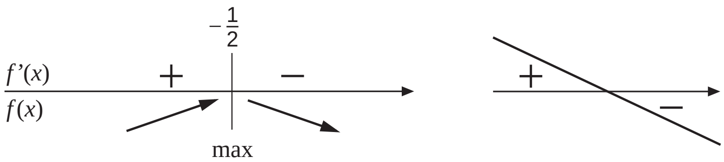
Koska funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, funktio saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa, joka on derivaatan nollakohta $x = 9$.
Toinen luku on $18 - x = 18 - 9 = 9$

Vastaus: Molemmat luvut ovat 9.

228. Luvun x vastaluku on $-x$ ja sen neliö $(-x)^2 = x^2$
Kun lukujen erotus $-x - x^2$ on suurimmillaan, on luku x eniten neliötään suurempi.
Erotus $f(x) = -x - x^2$
Derivaatta $f'(x) = -2x - 1$
Derivaatan nollakohta $-2x - 1 = 0$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Kulkukaavio



Vastaus: Luvun $-\frac{1}{2}$

229. Korkeus x , jolloin kanta on $10 - x$

Ala $A(x) = \frac{x(10-x)}{2} = -0{,}5x^2 + 5x$

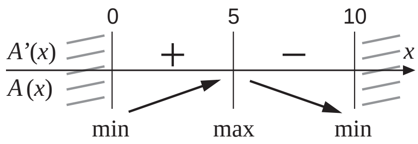
Derivaatta $A'(x) = -x + 5$

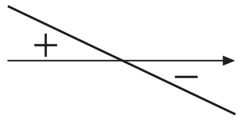
Derivaatan nollakohta $-x + 5 = 0$

$x = 5$

Kanta $10 - x = 10 - 5 = 5$

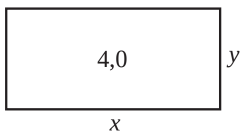
Kulkukaavio





Vastaus: Kolmio on suurin, kun kanta ja korkeus ovat 5,0 m.

230. leveys x ja korkeus y, jolloin $xy = 4$ ja edelleen $y = \frac{4}{x}$



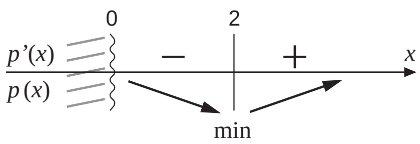
piiri $p(x) = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{4}{x} = 2x + 8x^{-1}$

$p'(x) = 2 - 8x^{-2} = 2 - \frac{8}{x^2}$

$2 - \frac{8}{x^2} = 0$

$x = \pm 2 \quad | \, x > 0$

Kulkukaavio



$p'(1) = -6 < 0$

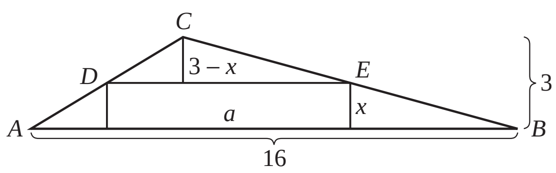
$p'(3) = 1\frac{1}{9} > 0$

$y = \frac{4}{2} = 2$

Vastaus: Neliöllä, jonka sivu on 2,0 m

231. Suorakulmion korkeus x ja leveys a

Yhdenmuotoisista kolmioista ΔABC ja ΔDEC saadaan verranto



$\frac{3}{16} = \frac{3-x}{a}$

$a = \frac{16(3-x)}{3}$

Suorakulmion ala $A(x) = x \cdot \dfrac{16(3-x)}{3} = 16x - \dfrac{16}{3}x^2$

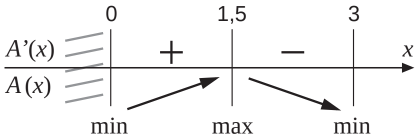
Derivaatta $A'(x) = 16 - \dfrac{32}{3}x$

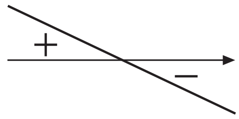
Derivaatan nollakohta $\quad 16 - \dfrac{32}{3}x = 0$

$$-\frac{32}{3}x = -16 \quad \Big| : \left(-\frac{32}{3}\right)$$

$$x = -16 : \left(-\frac{32}{3}\right) = 16 \cdot \frac{3}{32} = 1{,}5$$

Kulkukaavio

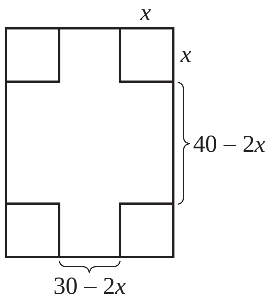




Suurimman suorakulmion kanta $a = \dfrac{16(3-1{,}5)}{3} = 8$

<u>Vastaus</u>: Suurimman suorakulmion korkeus 1,5 cm ja leveys 8,0 cm.

232. Pois leikattavan neliön sivu *x* ja *x* on välillä [0,15]



Tilavuus $\quad V(x) = x(40-2x)(30-2x) = x\left(1200 - 80x - 60x + 4x^2\right)$

$$= 4x^3 - 140x^2 + 1200x, \quad x \in [0{,}15]$$

Derivaatta $V'(x) = 12x^2 - 280x + 1200$

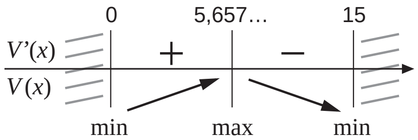
Derivaatan nollakohdat $\;12x^2 - 280x + 1\,200 = 0$

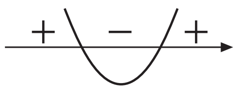
$$x = \frac{-(-280) \pm \sqrt{(-280)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1200}}{2 \cdot 12}$$

$$x_1 = \frac{280 - \sqrt{20\,800}}{24} = 5{,}657\ldots \approx 5{,}7$$

$$x_2 = \frac{280 + \sqrt{20\,800}}{24} = 17{,}675\ldots > 15 \text{ Ei käy}$$

Kulkukaavio

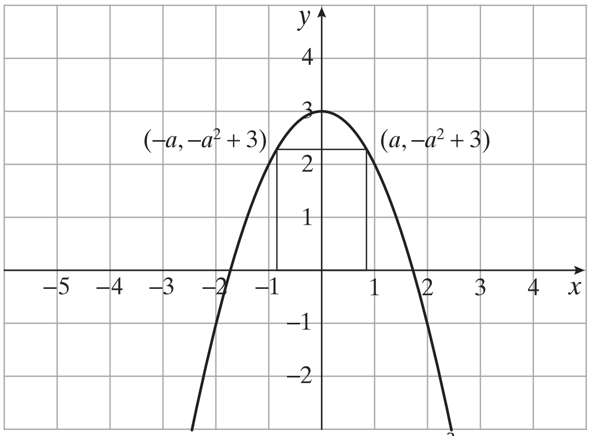




Ainoa maksimi $\quad V(5{,}6\ldots) = 3\,032{,}3\ldots \approx 3\,000$ on myös suurin arvo.
Pohjan sivut $40 - 2 \cdot 5{,}657\ldots \approx 29$ ja $30 - 2 \cdot 5{,}657\ldots \approx 19$

<u>Vastaus</u>: Tilavuusfunktio on $V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x, \quad x \in [0,15]$.
Suurin tilavuus 3 000 cm^3, korkeus 5,7 cm, pohjan sivut 29 cm ja 19 cm.

233.



Suorakulmion leveys on $2a$ ja korkeus $-a^2 + 3$

Lasketaan paraabelin $y = -x^2 + 3$ ja x-akselin leikkauspisteet. Sijoitetaan $y = 0$ paraabelin yhtälöön.

$-x^2 + 3 = 0$

$x^2 = 3 \quad \Big| \sqrt{}$

$x = \pm\sqrt{3}$

Koska $a \geq 0$, on tarkasteluväli $\left[0, \sqrt{3}\right]$

Suorakulmion ala $A(a) = 2a\left(-a^2 + 3\right) = -2a^3 + 6a, \quad a \in \left[0, \sqrt{3}\right]$

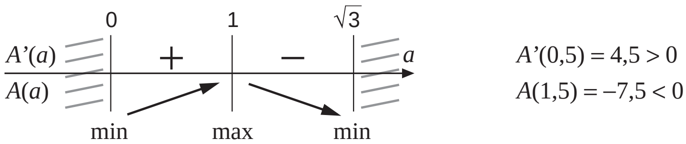
Derivaatta $A'(a) = -6a^2 + 6$

Derivaatan nollakohdat $-6a^2 + 6 = 0$

$a = \pm 1 \quad \Big| \, a \geq 0$

$a = 1$

Kulkukaavio



Funktio saa suurimman arvonsa ainoassa maksimikohdassaan $a = 1$.

Suorakulmion leveys $2a = 2 \cdot 1 = 2$

Suorakulmion korkeus $-a^2 + 3 = -1^2 + 3 = 2$

Suorakulmion ala $A(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1 = 4$

<u>Vastaus</u>: Suurimman suorakulmion ala on 4.

234. tuotto = hinta $\cdot$ kysyntä

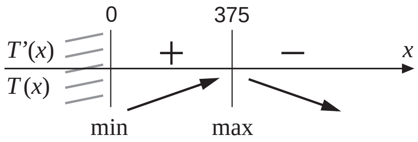
Tuotto $T(x) = x \cdot (15 - 0{,}02x) = -0{,}02x^2 + 15x$

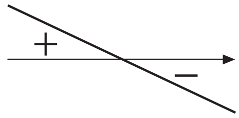
Derivaatta $T'(x) = -0{,}04x + 15$

Derivaatan nollakohta $-0{,}04x + 15 = 0$

$x = 375$

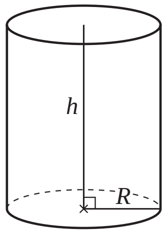
Kulkukaavio





Vastaus: Suurin tuotto saadaan 375 €:n hinnalla.

235. $V = \pi R^2 h$



$\pi R^2 h = 10$

$h = \dfrac{10}{\pi R^2}$

$A(R) = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \dfrac{10}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + 20R^{-1}$

$A'(R) = 4\pi R - 20R^{-2} = 4\pi R - \dfrac{20}{R}$

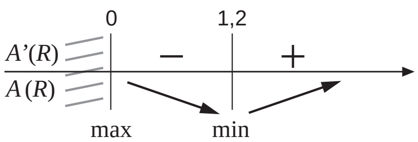
$4\pi R - \dfrac{20}{R} = 0$

$\dfrac{4\pi R^3 - 20}{R^2} = 0$

$4\pi R^3 - 20 = 0$

$R = \sqrt[3]{\dfrac{20}{4\pi}} = 1{,}167 \approx 1{,}2$

Kulkukaavio

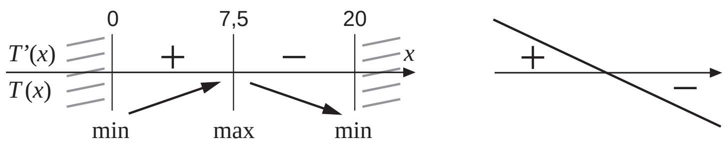


$A'(1) < 0$
$A'(2) > 0$

$h = \dfrac{10}{\pi R^2} = 2{,}335\ldots \approx 2{,}3$

Vastaus: pohjan säde 1,2 dm ja korkeus 2,3 dm

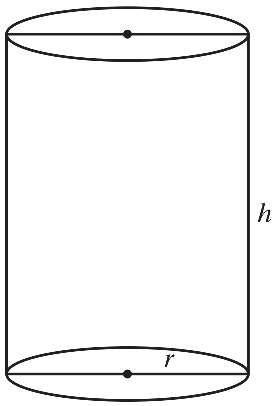
236. Alennusten määrä x
Tuotto = hinta $\cdot$ menekki
Tuotto $T(x) = (1 - 0{,}05x)(10 + 2x) = -0{,}1x^2 + 1{,}5x + 10$
Derivaatta $T'(x) = -0{,}2x + 1{,}5$
Derivaatan nollakohta $-0{,}2x + 1{,}5 = 0$
$x = 7{,}5$
Kulkukaavio



Alennus $7{,}5 \cdot 0{,}05$ ja paras hinta $1 - 7{,}5 \cdot 0{,}05 = 0{,}625 \approx 0{,}63$

<u>Vastaus</u>: Tuotto $T(x) = -0{,}1x^2 + 1{,}5x + 10$ ja suurin tuotto, kun hinta on 63 senttiä.

237.



$h = (6 - 4r) : 2 = 3 - 2r$

$V(r) = \pi r^2 \cdot (3 - 2r) = -2\pi r^3 + 3\pi r^2$
$V'(r) = -6\pi r^2 + 6\pi r = 6\pi r(-r + 1)$
$6\pi r(-r + 1) = 0$
$r = 0$ tai $r = 1$
Kulkukaavio

Suurin tilavuus $V(1) = -2\pi + 3\pi = \pi$

<u>Vastaus</u>: π

238.

$xy = 100$

$$y = \frac{100}{x}$$

Summa

$$S(x) = x + \frac{100}{x} = \frac{x^2 + 100}{x}$$

$$S'(x) = 1 - \frac{100}{x^2} = \frac{x^2 - 100}{x^2}$$

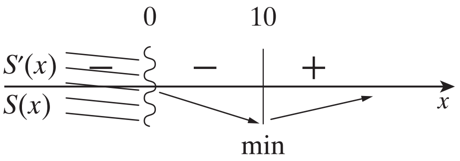
$$\frac{x^2 - 100}{x^2} = 0$$

$$x^2 - 100 = 0$$

$$x = \pm 10 \quad \mid x > 0$$

$$x = 10$$

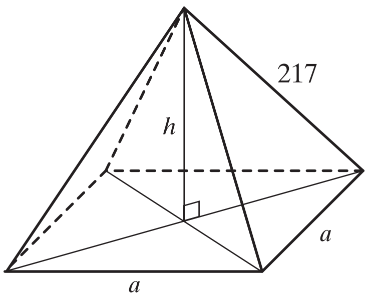
Kulkukaavio



Pienin summa $S(10) = 10 + \frac{100}{10} = 20$

<u>Vastaus</u>: 20

239.



pyramidin korkeus *h*

pohjaneliön sivu *a*

pohjaneliön lävistäjä $a\sqrt{2}$

Korkeus saadaan laskettua suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusana on pyramidin sivusärmä, toisena kateettina pyramidin korkeus *h* ja toisena kateettina pohjaneliön lävistäjän puolikas $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

$$h^2 + (\frac{1}{2}a\sqrt{2})^2 = 217^2$$

$$h = \sqrt{217^2 - \frac{1}{2}a^2}$$

Tilavuus

$$V(a) = \frac{1}{3}a^2\sqrt{217^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{3}\sqrt{217^2 a^4 - \frac{1}{2}a^2 a^4} = \frac{1}{3}\sqrt{217^2 a^4 - \frac{1}{2}a^6}$$

Tilavuusfunktio saa suurimman arvonsa, kun juurrettava saa suurimman arvonsa.

$$f(a) = -\frac{1}{2}a^6 + 217^2 a^4$$

$$f'(a) = -3a^5 + 4\cdot 217^2 a^3$$

$$-3a^5 + 4\cdot 217^2 a^3 = 0$$

$$a^3(-3a^2 + 4\cdot 217^2) = 0$$

$$a = 0 \quad \text{tai} \quad -3a^2 + 4\cdot 217^2 = 0$$

$$a = \frac{434}{\sqrt{3}} \approx 251$$

Kulkukaavio

	0		251		a
$V'(a)$		$+$		$-$	
$V(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vastaus: Tilavuuden suurin arvo saadaan, kun pohjaneliön sivun pituus on 251m.

240.

Alueen halvemmat sivut x ja kalliimmat y

$xy = 20\ 000$ (m^2)

$$y = \frac{20\ 000}{x}$$

Kustannukset

$$K(x) = 2x\cdot 30 + 2\cdot\frac{20\ 000}{x}\cdot 48{,}60 = 60x + \frac{1\ 944\ 000}{x}$$

$$K'(x) = 60 - \frac{1\ 944\ 000}{x^2} = \frac{60x^2 - 1\ 944\ 000}{x^2}$$

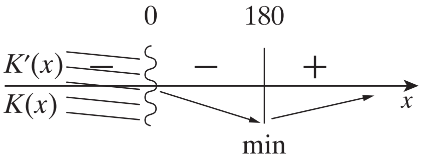
$$\frac{60x^2 - 1\ 944\ 000}{x^2} = 0$$

$$60x^2 - 1\ 944\ 000 = 0$$

$$x = \pm 180 \quad \big| \; x > 0$$

$$x = 180$$

Kulkukaavio



Pienimmät kustannukset saavutetaan, kun sivut ovat 180 ja $\frac{20\ 000}{180} \approx 111$

Vastaus: Halvemman sivun pituus 180 m ja kalliimman 111 m.

241.
Yksikkökustannukset

$$Y(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0,0005x^2 + 5,5x + 10\ 000}{x} = 0,0005x + 5,5 + \frac{10\ 000}{x}$$

$$Y'(x) = 0,0005 - \frac{10\ 000}{x^2} = \frac{0,0005x^2 - 10\ 000}{x^2}$$

$$\frac{0,0005x^2 - 10\ 000}{x^2} = 0$$

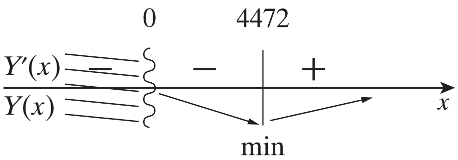
$$0,0005x^2 - 10\ 000 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{20\,000\ 000} \quad \Big| \ x > 0$$

$$x = \sqrt{20\,000\ 000}$$

$$x \approx 4\,472$$

Kulkukaavio

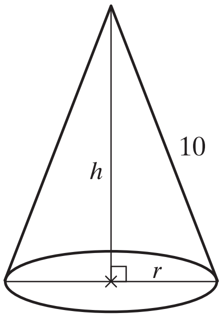


Pienimmät yksikkökustannukset

$$Y(x) = 0,0005 \cdot \sqrt{20\ 000\ 000} + 5,5 + \frac{10\ 000}{\sqrt{20\ 000\ 000}} \approx 9,97$$

Vastaus: 9,97 €

242.



Ympyrän säde 10 cm on syntyvän kartion sivujanan pituus.
Pythagoraan lauseella

$$r^2 + h^2 = 10^2$$

$$r^2 = 100 - h^2$$

Tilavuus

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi 100h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

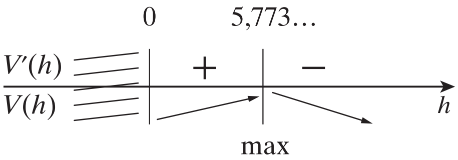
$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi 100 - \pi h^2$$

$$\frac{1}{3}\pi 100 - \pi h^2 = 0$$

$$h = \pm\frac{10}{\sqrt{3}} \qquad \Big|\ h > 0$$

$$h = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5{,}773...$$

Kulkukaavio

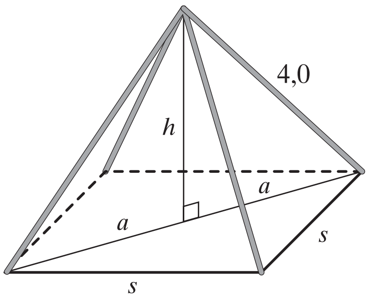


Suurin tilavuus

$$V\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(100 - \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2\right) \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{2\,000\pi}{9\sqrt{3}} \approx 403$$

<u>Vastaus</u>: $\frac{2\,000\pi}{9\sqrt{3}}\ \text{cm}^3 \approx 403\,\text{cm}^3$

243.



Pyramidin tilavuus on $V = \frac{1}{3} \cdot s^2 \cdot h$

Pyramidin korkeus on h (m).
Pohjaneliön särmä on s (m).
Pohjaneliön lävistäjä on $2a$ (m).

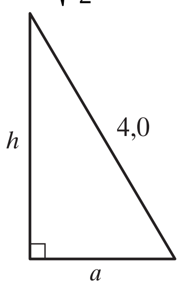
$(2a)^2 = s^2 + s^2$

$4a^2 = 2s^2 \quad | :4$

$a^2 = \frac{s^2}{2} \quad | \sqrt{\ }$

$a = \pm\sqrt{\frac{s^2}{2}} \quad , a > 0$

$a = \sqrt{\frac{s^2}{2}}$



$a^2 + h^2 = 4{,}0^2$ sijoitetaan $a = \sqrt{\frac{s^2}{2}}$

$\left(\sqrt{\frac{s^2}{2}}\right)^2 + h^2 = 16$

$\frac{s^2}{2} + h^2 = 16 \quad | \cdot 2$

$s^2 + 2h^2 = 32$

$s^2 = 32 - 2h^2$

Pyramidin tilavuus on

$V(h) = \frac{1}{3} \cdot s^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(32 - 2h^2\right) \cdot h = \frac{32}{3}h - \frac{2}{3}h^3$

h:n pienin mahdollinen arvo on 0 ja suurin mahdollinen arvo 4,0 (jolloin riu'ut ovat pystysuorassa)
eli tarkasteluväli on [0; 4,0].

Derivoidaan funktio

$V'(h) = \frac{32}{3} - 2h^2$

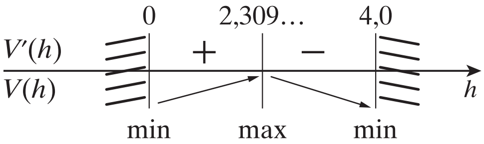
Derivaatan nollakohdat

$\frac{32}{3} - 2h^2 = 0$

$h = \pm\sqrt{\frac{16}{3}}$, $h > 0$

$h = \sqrt{\frac{16}{3}}$

h = 2,309..
Piirretään kulkukaavio.



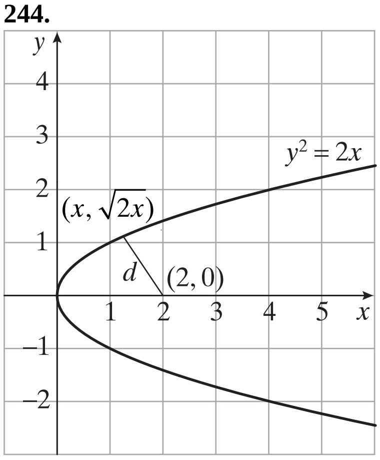
Funktio saa suurimman arvonsa ainoassa maksimikohdassaan h=2,309...:

Pohjaneliön särmä s on

$s = \sqrt{32 - 2h^2} = \sqrt{32 - 2 \cdot 2{,}309...^2} \approx 4{,}6$

<u>Vastaus</u>: Pohjaneliön särmäksi tulee valita 4,6 m.

244.



Koska kuvaaja on symmetrinen x-akselin suhteen ja piste (2,0) on x-akselilla voidaan rajoittaa tarkastelu paraabelin x-akselin yläpuolisiin pisteisiin $(x, \sqrt{2x})$.
Paraabelin pisteen ja pisteen (2,0) etäisyys

$$d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{2x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

Etäisyys saa pienimmän arvonsa, kun juurrettava saa pienimmän arvonsa

$$f(x) = x^2 - 2x + 4$$

$$f\,'(x) = 2x - 2$$

$$2x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

Koska f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, funktio saa pienimmän arvonsa paraabelin huipussa eli kohdassa $x = 1$
y-koordinaatti

$$y^2 = 2 \cdot 1$$

$$y = \pm\sqrt{2}$$

Vastaus: Pisteet $(1, -\sqrt{2})$ ja $(1, \sqrt{2})$

245.
Pohjan sivut a ja $2a$, korkeus h
Tilavuus

$$2a^2 h = 36 \qquad | \; h > 0$$

$$h = \frac{18}{a^2}$$

Kokonaispinta-ala

$$A(a) = 2a^2 + 2a \cdot \frac{18}{a^2} + 2 \cdot 2a \cdot \frac{18}{a^2} = 2a^2 + \frac{108}{a}$$

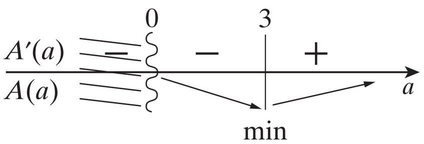
$$A'(a) = 4a - \frac{108}{a^2} = \frac{4a^3 - 108}{a^2}$$

$$\frac{4a^3 - 108}{a^2} = 0$$

$$4a^3 - 108 = 0$$

$$a = 3$$

Kulkukaavio



Pinta-ala on pienin, kun $a = 3$, jolloin pohjan sivut ovat 3,0 dm ja 6,0 dm sekä korkeus

$$\frac{18}{3^2}\ \text{dm} = 2{,}0\ \text{dm}$$

Vastaus: Pohjan sivut ovat 3,0 dm ja 6,0 dm sekä korkeus 2,0 dm.

246.
Erän suuruus x

Eriä $\dfrac{6000}{x}$

Lamppujen yhteishinta $6\,000 \cdot 5 = 30\,000$

Toimituskulut $20 \cdot \dfrac{6000}{x} = \dfrac{120\,000}{x}$

Varastointikustannukset $\dfrac{x}{2} \cdot 0,96 = 0,48x$

Kokonaiskustannukset

$$K(x) = 0,48x + \frac{120\,000}{x} + 30\,000$$

$$K'(x) = 0,48 - \frac{120\,000}{x^2} = \frac{0,48x^2 - 120\,000}{x^2}$$

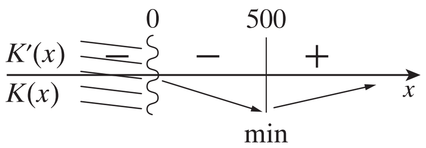
$$\frac{0,48x^2 - 120\,000}{x^2} = 0$$

$$0,48x^2 - 120\,000 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{250\,000} \qquad \Big| \; x > 0$$

$$x = 500$$

Kulkukaavio



Kustannukset ovat pienimmät, kun erän koko on 500, jolloin eriä on $\dfrac{6000}{500} = 12$.

<u>Vastaus</u>: 12 erässä

247.
Osat x ja $a - x$
Kuutioiden summa

$$f(x) = x^3 + (a-x)^3 = x^3 - x^3 + 3ax^2 - 3a^2x + a^3 = 3ax^2 - 3a^2x + a^3$$

$$f'(x) = 6ax - 3a^2$$

$$6ax - 3a^2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}a$$

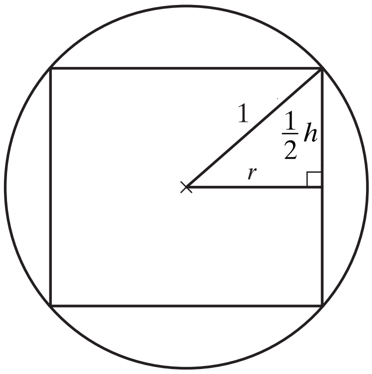
Koska f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, funktio saa pienimmän arvonsa paraabelin huipussa eli kohdassa $x = \dfrac{1}{2}a$, jolloin toinen osa on $a - x = a - \dfrac{1}{2}a = \dfrac{1}{2}a$.

Summan pienin arvo

$f(\frac{1}{2}a) = 3a(\frac{1}{2}a)^2 - 3a^2\frac{1}{2}a + a^3 = \frac{1}{4}a^3$

<u>Vastaus</u>: Molemmat osat $\frac{1}{2}a$ ja minimiarvo $\frac{1}{4}a^3$

248.



Lieriön korkeus h ($0 \le h \le 2$) ja pohjan säde r.

Suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateetit ovat $\frac{1}{2}h$ ja r,

saadaan pythagoraan lauseella $(\frac{1}{2}h)^2 + r^2 = 1^2$ eli

$r^2 = 1 - \frac{1}{4}h^2$.

Lieriön tilavuus $V(h) = \pi r^2 h = \pi(1 - \frac{1}{4}h^2)h = \pi h - \frac{1}{4}\pi h^3$

$V'(h) = \pi - \frac{3}{4}\pi h^2$. Derivaatan nollakohdat $\pi - \frac{3}{4}\pi h^2 = 0$, josta $h = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Tilavuuden suurin arvo saadaan määrittelyvälin päätepisteissä ($h = 0$ tai $h = 2$) tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa $h = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$V(0) = \pi \cdot 0 - \frac{1}{4}\pi \cdot 0^3 = 0$ ja $V(2) = \pi \cdot 2 - \frac{1}{4}\pi \cdot 2^3 = 0$ ja

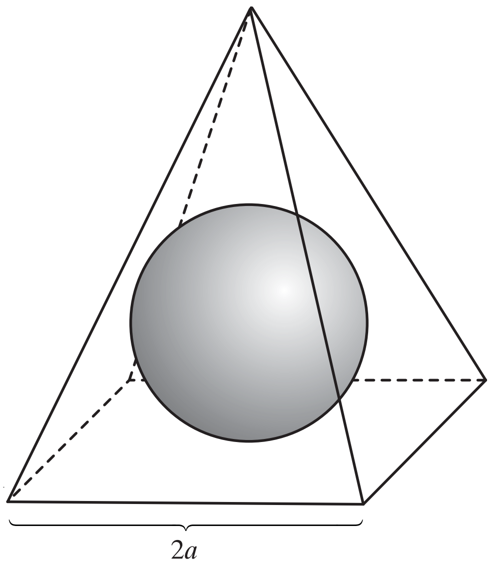
$V(\frac{2}{\sqrt{3}}) = \pi \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\pi \cdot (\frac{2}{\sqrt{3}})^3 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

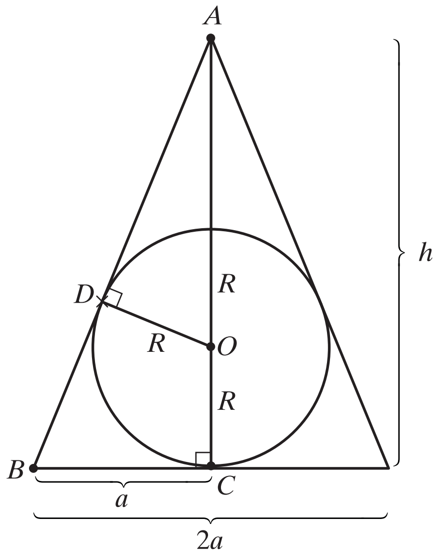
Pohjaympyrän säde $r = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cdot (\frac{2}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Lieriön ja pallon tilavuuksien suhde $\frac{V_{\text{lieriö}}}{V_{\text{pallo}}} = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

<u>Vastaus</u>: Lieriön korkeus $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ja säde $\sqrt{\frac{2}{3}}$ .Lieriön ja pallon tilavuuksien suhde on $\frac{1}{\sqrt{3}}$

249.





Kolmion *ABC* hypotenuusan pituus

$AB = \sqrt{a^2 + h^2}$

Yhdenmuotoisista kolmiosta ΔABC ja ΔAOD

$$\frac{\sqrt{h^2 + a^2}}{a} = \frac{h - R}{R}$$

$$a\left(h - R\right) = R\sqrt{h^2 + a^2} \qquad \Big| \left(\ \right)^2,\ h > 2R$$

$$a^2\left(h^2 - 2hR + R^2\right) = R^2\left(h^2 + a^2\right)$$

$$a^2 = \frac{R^2 h}{h-2R}$$

Pyramidin tilavuuden pienin arvo

$$V = \frac{1}{3}(2a)^2 h$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{R^2 h}{h-2R} \cdot h$$

$$= \frac{4R^2}{3} \cdot \frac{h^2}{h-2R} \qquad h > 2R$$

Derivoidaan

$$V'(h) = \frac{4R^2}{3} \frac{2h(h-2R) - h^2 \cdot 1}{(h-2R)^2}$$

$$= \frac{4R^2}{3} \frac{h^2 - 4Rh}{(h-2R)^2}$$

Derivaatan nollakohdat ja merkki

$$V'(h) = 0$$

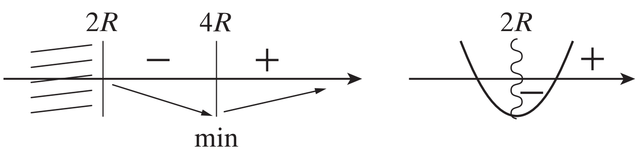
$$h^2 - 4Rh = 0$$

$$h(h-4R) = 0$$

$h = 0$ tai $h = 4R$

Koska derivaatan lausekkeessa sekä kerroin että nimittäjä ovat positiivisia, niin derivaatan merkin määrää $h^2 - 4Rh$. Kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohta 0 ei kuulu tarkasteluvälille

Kulkukaavio, kun $h > 2R$



Ainoana minimina kohdassa $h = 4R$ on funktion pienin arvo.

Tilavuuksien suhde

$$\frac{V_{\text{pallo}}}{V_{\text{pyramidi}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}(2a)^2 h}$$

$$= \frac{\pi R^3}{a^2 h}$$

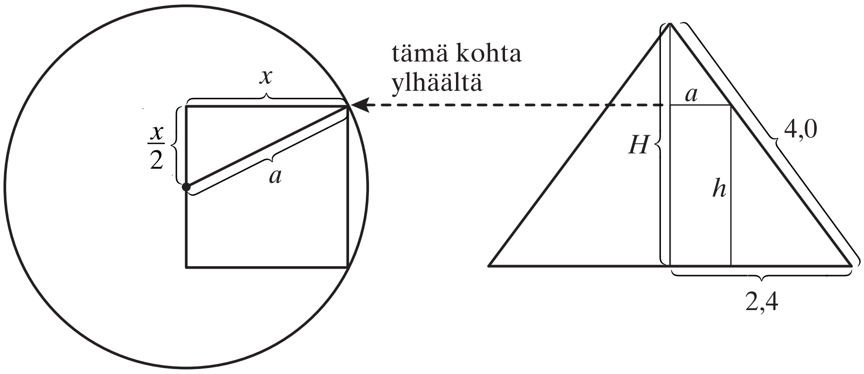
$$= \frac{\pi R^3}{\frac{R^2 \cdot 4R}{4R - 2R} \cdot 4R}$$

$$= \frac{\pi R^3}{\frac{16R^3}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

Vastaus: Pallon tilavuuden suhde pyramidin tilavuuteen on $\frac{\pi}{8}$.

250.



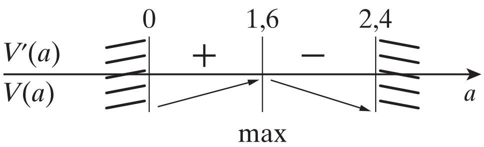
$H^2 + 2{,}4^2 = 4{,}0^2$, joten kartion korkeus $H = 3{,}2$. Yhdenmuotoisista kolmioista $\frac{a}{3{,}2 - h} = \frac{2{,}4}{3{,}2}$ saadaan $h = \frac{9{,}6 - 4a}{3}$, joten tilavuus

$V(a) = (2a)^2 h = 12{,}8a^2 - \frac{16}{3}a^3$, $0 \le a \le 2{,}4$.

V on derivoituva

$V'(a) = 25{,}6a - 16a^2 = 0$, kun $a = 0$ tai $a = 1{,}6$

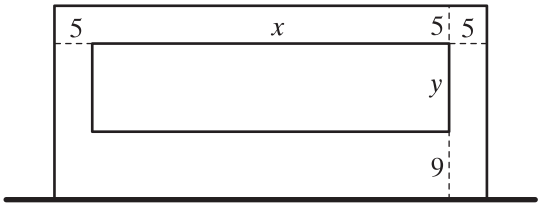
Kulkukaavio



Suurin tilavuus $V(1{,}6) \approx 10{,}9$, jolloin pohjasärmä on 3,2 m ja korkeus 1,07 m.

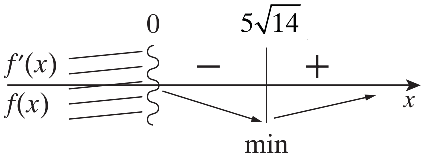
Vastaus: Pohjasärmä 3,2 m, korkeus 1,07 m ja tilavuus 10,9 m^3.

251.



Talo $xy = 490$. Tontti $f(x) = (x+10)\left(\dfrac{490}{x} + 14\right)$, $x > 0$. $f'(x) = 14 - \dfrac{4900}{x^2} = 0$, kun $x = 5\sqrt{14}$.

Kulkukaavio



Pienin arvo $f\left(5\sqrt{14}\right) \approx 1154$.

Vastaus: $A = 18{,}7\ \text{m} \cdot 40{,}2\ \text{m} \approx 1154\ \text{m}^2$.

252.

a = alkuperäinen hinta, b = alkuperäinen myynnin määrä

alennettu hinta $\left(1 - \dfrac{p}{100}\right) \cdot a$, uusi myynnin määrä $\left(1 + \dfrac{1{,}6p}{100}\right) \cdot b$

alkuperäinen myynnin arvo on ab

uusi myynnin arvo on $A(p) = \left(1 - \dfrac{p}{100}\right)\left(1 + \dfrac{1{,}6p}{100}\right)ab = \dfrac{-1{,}6p^2 + 60p + 10000}{10000} \cdot ab$

$A'(p) = (-3{,}2p + 60) \cdot \dfrac{ab}{10000} = 0$, josta saadaan $p = 18{,}75$. <kuva s94t6a>

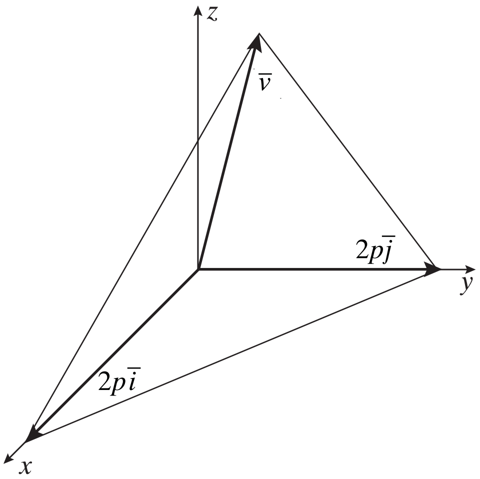
Myynnin arvo on sama kuin alussa, jos $\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)\left(1 + \dfrac{1{,}6p}{100}\right) \cdot ab = ab$ eli

$(100 - p)(100 + 1{,}6p) = 10000$

Saadaan $-1{,}6p^2 + 60p = 0$ ja edelleen $p = 0$ tai $p = 37{,}5$.

Vastaus: Myynnin suurin arvo saadaan, kun $p = 18{,}75$. Ja myynnin arvo on sama kuin alussa, jos $p = 37{,}5$.

253.



Tetraedrin pohjana on tasakylkinen suorakulmainen kolmio ja korkeutena $|z|$.

Tetraedrin tilavuus $V(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4p^2 \cdot |z| = \frac{2}{3} p^2 |z|$. Vektorin $\bar{v}$ pituus on yksi eli

$p^2 + p^2 + z^2 = 1$ eli $2p^2 = 1 - z^2$ ja $-1 \le z \le 1$.

Joten $V(z) = \frac{1}{3}\left(1 - z^2\right)|z|$

Kun $z > 0$

$$V(z) = \frac{1}{3}\left(1 - z^2\right)z = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}z^3$$

$$V'(z) = \frac{1}{3} - z^2 = 0$$

$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ei käy $(z > 0)$

Kun $z < 0$

$$V(z) = \frac{1}{3}\left(1 - z^2\right)(-z) = -\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}z^3$$

$$V'(z) = -\frac{1}{3} + z^2 = 0$$

$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ ei käy $(z < 0)$

Kummassakin tapauksessa $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $V(0) = V(1) = V(-1) = 0$ joten tilavuuden suurin arvo saavutetaan derivaatan nollakohdassa $z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ sijoitetaan:

$$2p^2 = 1 - z^2$$

$$p = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$V(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{9\sqrt{3}} \approx 0{,}13$$

<u>Vastaus</u>: $p = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, suurin tilavuus on $\frac{2}{9\sqrt{3}} \approx 0{,}13$.

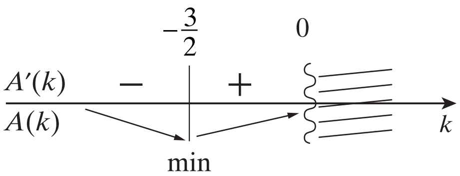
254.
Pisteen (2, 3) kautta kulkevat suorat ovat muotoa $y-3 = k(x-2)$ eli $y = kx - 2k + 3$.
Suoran leikkauspisteet koordinaattiakseleilla (ehto k <0) :
Kun $x = 0,\quad y = 3-2k$

Kun $y = 0,\quad kx - 2k + 3 = 0$ eli $x = 2 - \frac{3}{k},\quad k \neq 0$

Kolmion ala $A(k) = \frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{3}{k}\right)(3-2k) = \frac{1}{2}\left(-4k - \frac{9}{k} + 12\right)$.

$A'(x) = \frac{1}{2}\left(-4+\frac{9}{k^2}\right) = 0$, josta saadaan $k = \pm\frac{3}{2}$ ja näistä vain negatiivinen kelpaa.

Kulkukaavio



Pienin ala on $A(-\frac{3}{2}) = 12.$

<u>Vastaus</u>: Suora on $3x + 2y - 12 = 0$ ja ala on 12.

255.

nopeus v^3	polttoainekulut tunnissa p
20^3	1500
v^3	p

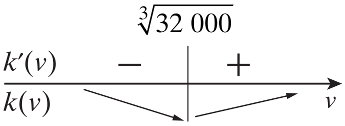
$\frac{20^3}{v^3} = \frac{1500}{p}$ josta $p = \frac{1500v^3}{8000} = 0{,}1875v^3$

Kokonaiskulut tunnissa $0{,}1875v^3 + 12000$. Nopeudella v (km/h) kuluu matkaan s (km) aikaa $t = \frac{s}{v}$ (h).
Kokonaiskulut

$$K(v) = 0{,}1875v^3 \cdot t + 12000t = 0{,}1875v^3 \cdot \frac{s}{v} + 12000\cdot\frac{s}{v} = 0{,}1875v^2 s + 12000sv^{-1}.$$

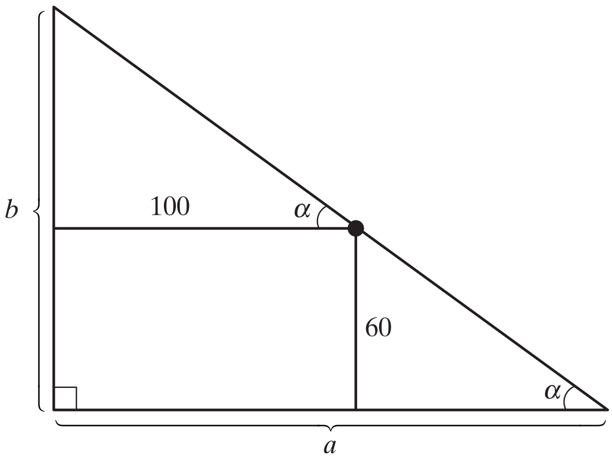
$$K'(v) = 0{,}375sv - 12000sv^{-2} = 0{,}375sv - \frac{12000s}{v^2} = \frac{0{,}375sv^3 - 12000s}{v^2},\quad \text{ehto } v \neq 0$$

Derivaatan nollakohdat $0{,}375sv^3 - 12000s = 0$, josta $v = \sqrt[3]{32000} \approx 32$



Vastaus: nopeudella 32 km/h

256.



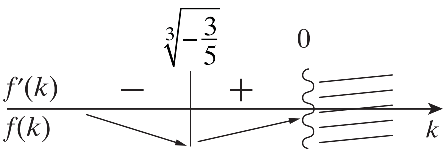
Merkitään polun kulmakerrointa $k = -\tan\alpha$, $0 < \alpha < 90°$. Tällöin polun pituuden neliö on $a^2 + b^2$, missä $a = 100 + \dfrac{60}{\tan\alpha} = 100 - \dfrac{60}{k}$ ja vastaavasti $b = 60 + 100 \cdot \tan\alpha = 60 - 100k$.

Eli $f(k) = (100 - \dfrac{60}{k})^2 + (60 - 100k)^2$, $k < 0$. Funktio on jatkuva ja derivoituva.

$f'(k) = 0$, kun $k^3 = -\dfrac{3}{5}$, kulkukaaviosta nähdään, että tämä on pienin arvo. Saadaan

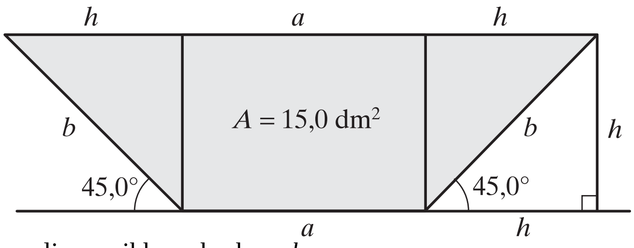
$\tan\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$, josta $\alpha \approx 40°$.

Kulkukaavio



Vastaus: 40 astetta.

257.



puolisuunnikkaan korkeus h

$b = h\sqrt{2}$

puolisuunnikkaan yhdensuuntaiset sivut a ja $a + 2h$

puolisuunnikkaan ala

$$A = \frac{a + a + 2h}{2} \cdot h = ah + h^2$$

$$ah + h^2 = 15$$

$$a = \frac{15 - h^2}{h}$$

minimoitava funktio

$$f(h) = a + 2b = \frac{15 - h^2}{h} + 2h\sqrt{2}$$

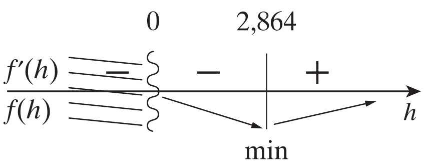
Koska $h > 0$ ja $a = \dfrac{15 - h^2}{h} > 0$ eli $h < \sqrt{15}$, on $0 < h < \sqrt{15}$

$$f'(h) = \frac{-2h \cdot h - (15 - h^2) \cdot 1}{h^2} + 2\sqrt{2} = \frac{-h^2 - 15 + 2\sqrt{2}h^2}{h^2} = \frac{(2\sqrt{2} - 1)h^2 - 15}{h^2}$$

$$(2\sqrt{2} - 1)h^2 - 15 = 0$$

$$h = \sqrt{\frac{15}{2\sqrt{2} - 1}} \approx 2{,}864$$

Kulkukaavio



minimikohtaa $h = \sqrt{\dfrac{15}{2\sqrt{2} - 1}} \approx 2{,}864$ vastaavat a ja b

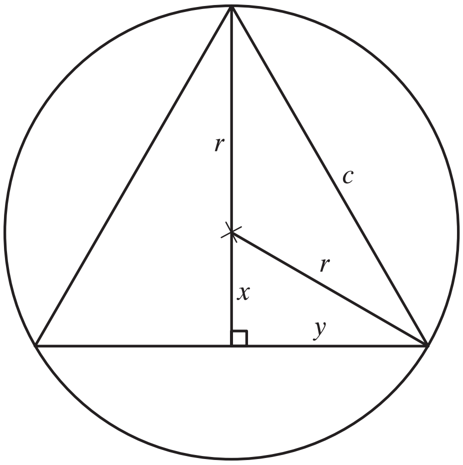
$$a = \frac{15 - \left(\sqrt{\dfrac{15}{2\sqrt{2} - 1}}\right)^2}{\sqrt{\dfrac{15}{2\sqrt{2} - 1}}} \approx 2{,}37$$

$$b = \sqrt{\frac{15}{2\sqrt{2} - 1}} \cdot \sqrt{2} \approx 4{,}05$$

Vastaus: $a \approx 2{,}37\,\text{dm}$, $b \approx 4{,}05$ dm

258.

1) Osoitetaan ensin, että tasasivuinen kolmio on ympyrän sisään piirretyistä tasakylkisistä kolmioista suurin.



$x^2 + y^2 = r^2$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$0 < x < 2r$

Kolmion ala

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot (r + x) = \sqrt{r^2 - x^2}\,(r + x) = \sqrt{(r^2 - x^2)(r + x)} = \sqrt{-x^4 - 2rx^3 + 2r^3x + r^4}$$

Ala saa suurimman arvon, kun juurrettava $-x^4 - 2rx^3 + 2r^3x + r^4$ saa suurimman arvon.

$f(x) = -x^4 - 2rx^3 + 2r^3x + r^4$

$f'(x) = -4x^3 - 6rx^2 + 2r^3$

$-4x^3 - 6rx^2 + 2r^3 = 0$

Kokeilemalla huomataan, että $x = -r$ on yksi juuri. Suoritetaan jakolasku

$$\begin{array}{r|l}
 & -4x^2 - 2rx + 2r^2 \\ \hline
x + r & -4x^3 - 6rx^2 + 2r^3 \\
 & \underline{\pm 4x^3 \pm 4rx^2} \\
 & \quad -2rx^2 \\
 & \quad \underline{\pm 2rx^2 \pm 2r^2x} \\
 & \qquad 2r^2x + 2r^3 \\
 & \qquad \underline{\mp 2r^2x \mp 2r^3} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$-4x^2 - 2rx + 2r^2 = 0$$

$$x = \frac{-(-2r) \pm \sqrt{(-2r)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2r^2}}{2 \cdot (-4)}$$

$$x = \frac{2r \pm \sqrt{36r^2}}{-8}$$

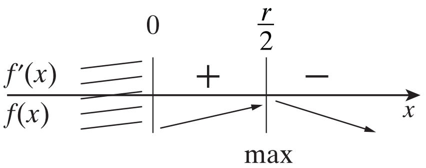
$$x = \frac{2r \pm 6r}{-8}$$

$$x_1 = \frac{-4r}{-8} = \frac{r}{2}$$

$$x_2 = \frac{8r}{-8} = -r$$

Vain juuri $x = \frac{r}{2}$ on välillä $0 < x < 2r$

Kulkukaavio



Kulkukaaviosta nähdään, että $x = \frac{r}{2}$ on funktion maksimikohta.

$$y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Kolmion kannan pituus

$$2y = r\sqrt{3}$$

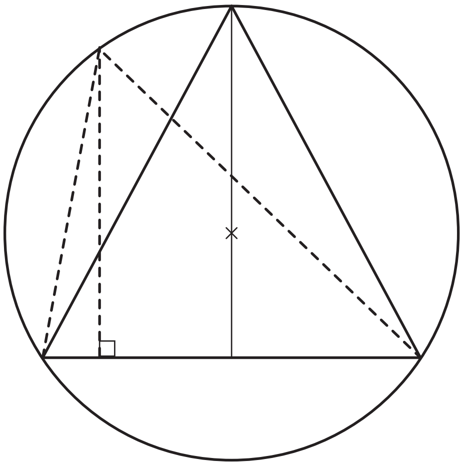
Kolmion kylki c

$$c^2 = (r + x)^2 + y^2$$

$$c = \sqrt{\left(r + \frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2} = r\sqrt{3}$$

Koska kanta ja kylki ovat yhtä pitkät, on kolmio tasasivuinen.

2) Osoitetaan, että tasakylkinen kolmio on ympyrän sisään piirretyistä kolmioista suurin.



Saman kantaisten ympyrän sisään piirrettyjen kolmioiden korkeusjana on pisimmillään, kun se kulkee ympyrän keskipisteen kautta, jolloin kyseessä on tasakylkinen kolmio.

Kohdista 1) ja 2) seuraa, että ympyrän sisään piirretyistä kolmioista alaltaan suurin on tasasivuinen kolmio.

259.
kilohinnan markan suuruisten korotusten määrä *x*
uusi kilohinta 15 + *x*
uusi myyntimäärä 500 − 15*x*

voitto

$V(x) = (500-15x)(15+x)-(500-15x)30 = -15x^2 + 200x + 1\,000$

$V'(x) = -30x + 200$

$-30x + 200 = 0$

$x = \frac{20}{3}$

Koska funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, funktio saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa, joka on derivaatan nollakohta $x = \frac{20}{3}$.

Kilohinta

$15 + \frac{20}{3} = 56\frac{2}{3} \approx 6,67$

Vastaus: 56,67 mk

260.

mustan helmen halkaisija x

punaisen helmen halkaisija $2x$

vihreän helmen halkaisija $\dfrac{40-6x-8\cdot 2x}{10}=\dfrac{40-22x}{10}$

$x > 0$ ja $\dfrac{40-22x}{10}>0$ eli $x<\dfrac{20}{11}$, joten $0<x<\dfrac{20}{11}$

helmien paino on suoraan verrannollinen helmien tilavuuteen

helmien kokonaistilavuus

$$V(x)=6\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3+8\cdot\frac{4}{3}\pi x^3+10\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{20-11x}{10}\right)^3$$

$$=\frac{4\pi}{300}(-456x^3+7\ 260x^2-13\ 200x+8\ 000)$$

$$V'(x)=\frac{4\pi}{300}(-1\ 368x^2+14\ 520x-13\ 200)$$

$$\frac{4\pi}{300}(-1\ 368x^2+14\ 520x-13\ 200)=0$$

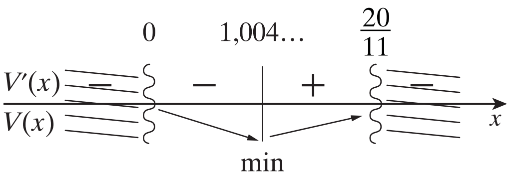
$$-1\ 368x^2+14\ 520x-13\ 200=0$$

$$x=\frac{-14\ 520\pm\sqrt{14\ 520^2-4\cdot(-1368)\cdot(-13200)}}{2\cdot(-1368)}$$

$$x_1=1,004...$$

$$x_2=9,609...>\frac{20}{11}\ \text{ei käy}$$

Kulkukaavio



Tilavuusfunktion pienin arvo saavutetaan, kun x = 1,004..., jolloin

mustan helmen halkaisija on 1,004... cm $\approx$ 10,0 mm

punaisen helmen halkaisija $2\cdot$ 1,004... cm $\approx$ 20,1 mm

vihreän helmen halkaisija $\dfrac{40-22\cdot 1,004...}{10}$ cm $\approx 17,9$ mm

<u>Vastaus</u>: mustan helmen halkaisija on 10,0 mm, punaisen helmen halkaisija 20,1 mm ja vihreän helmen halkaisija 17,9 mm

261.
lieriön korkeus $h > 0$
pohjaympyrän säde $r > 0$
tilavuus $V = \pi r^2 h$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

vaipan ala $2\pi rh$
pohjien kokonaisala $2\pi r^2$
vaipan materiaalin hinta a (mk/m^2)
materiaalikustannukset

$$f(r) = 2\pi rha + 2\pi r^2 \cdot 1{,}4a = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} \cdot a + 2\pi r^2 \cdot 1{,}4a = 2a(\frac{V}{r} + 1{,}4\pi r^2)$$

$$f'(r) = 2a(-\frac{V}{r^2} + 2{,}8\pi r)$$

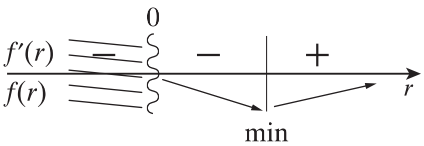
$$2a(-\frac{V}{r^2} + 2{,}8\pi r) = 0$$

$$-\frac{V}{r^2} + 2{,}8\pi r = 0 \qquad \Big| \cdot r^2$$

$$-V + 2{,}8\pi r^3 = 0$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2{,}8\pi}}$$

Kulkukaavio



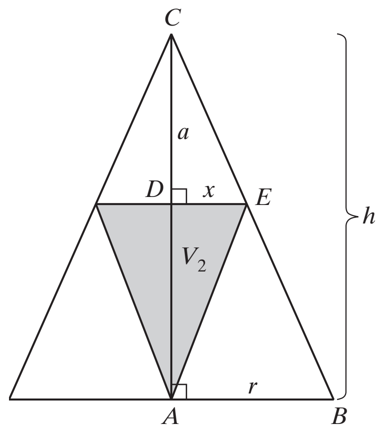
Funktio saa pienimmän arvonsa kohdassa $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2{,}8\pi}}$, jolloin suhde $h : r$ on

$$\frac{\frac{V}{\pi r^2}}{r} = \frac{V}{\pi r^3} \frac{V}{\pi(\sqrt[3]{\frac{V}{2{,}8\pi}})^3} = \frac{V}{\pi \cdot \frac{V}{2{,}8\pi}} = \frac{V}{\frac{V}{2{,}8}} = 2{,}8$$

<u>Vastaus</u>: 2,8

262.

Pienemmän kartion pohjaympyrän säde x, $0 \le x \le r$



Yhdenmuotoisista (kk) kolmioista ABC ja DEC saadaan verranto

$$\frac{r}{x} = \frac{h}{a}$$

$$a = \frac{hx}{r}$$

Pienemmän kartion tilavuus

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi x^2(h-a) = \frac{1}{3}\pi x^2(h - \frac{hx}{r}) = \frac{1}{3}\pi h x^2 - \frac{1}{3}\pi\frac{h}{r}x^3$$

$$V' = \frac{2}{3}\pi h x - \pi\frac{h}{r}x^2$$

Derivaatan nollakohdat

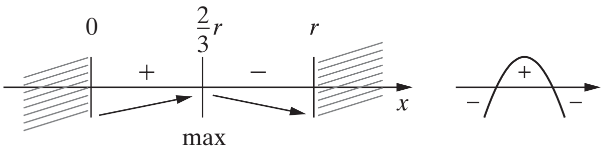
$$\frac{2}{3}\pi h x - \pi\frac{h}{r}x^2 = 0$$

$$\pi h x(\frac{2}{3} - \frac{1}{r}x) = 0$$

$$\pi h x = 0 \qquad \text{tai} \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{r}x = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = \frac{2}{3}r$$

Kulkukaavio

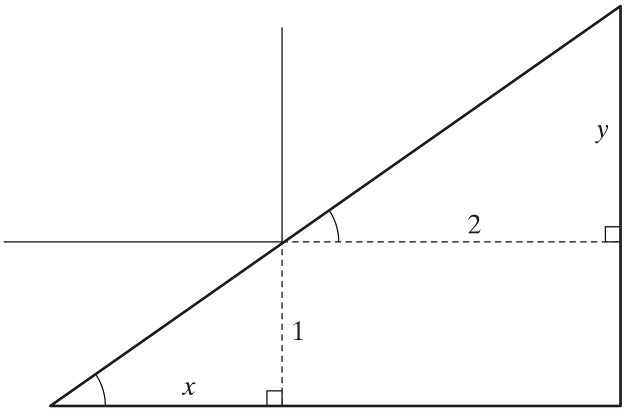


Suurin tilavuus $V_2(\frac{2}{3}r) = \frac{1}{3}\pi h \cdot (\frac{2}{3}r)^2 - \frac{1}{3}\pi\frac{h}{r}\cdot(\frac{2}{3}r)^3 = \frac{4}{81}\pi h r^2$

Tilavuuksien suhde $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\frac{4}{81}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \dfrac{4}{27}$

Vastaus: $\dfrac{4}{27}$

263.



Yhdenmuotoisista (kk) kolmioista saadaan verranto

$$\frac{1}{x}=\frac{y}{2}$$

$$y=\frac{2}{x}$$

$x \leq 10$ ja

$$\frac{2}{x}\leq 10$$

$$x\geq \frac{1}{5}$$

Joten $\frac{1}{5}\leq x\leq 10$

Tangon pituus

$$d=\sqrt{(x+2)^2+(\frac{2}{x}+1)^2}=\sqrt{x^2+4x+4x^{-2}+4x^{-1}+5}$$

Pituus saa suurimman arvonsa, kun juurrettava saa suurimman arvonsa.

$$f(x)=x^2+4x+4x^{-2}+4x^{-1}+5$$

$$f\,'(x)=2x+4-8x^{-3}-4x^{-2}=2x+4-\frac{8}{x^3}-\frac{4}{x^2}=\frac{2x^4+4x^3-8-4x}{x^3}$$

$$\frac{2x^4+4x^3-8-4x}{x^3}=0$$

$$2x^4+4x^3-8-4x=0$$

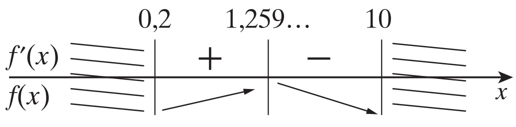
Kokeilemalla nähdään, että $x = -2$ on eräs juuri. Suoritetaan jakolasku

$$
\begin{array}{r}
2x^3-4 \\
x+2\overline{)\,2x^4+4x^3-4x-8} \\
\underline{\mp 2x^4 \mp 4x^3} \\
-4x-8 \\
\underline{\pm 4x \pm 8} \\
0
\end{array}
$$

$2x^3-4=0$

$x=\sqrt[3]{2}=1,259...$

Kulkukaavio



Tangon suurin pituus

$$d=\sqrt{(\sqrt[3]{2}+2)^2+(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}+1)^2}\approx 4,16$$

Vastaus: 4,16 m

264.

Summattavat x ja $3\frac{1}{2}-x$

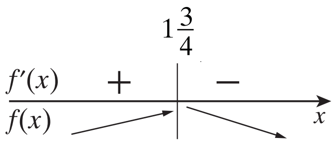
Tulo $f\left(x\right)=x\left(3\frac{1}{2}-x\right)=-x^2+3\frac{1}{2}x$

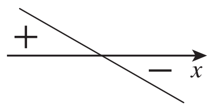
Derivaatta $f'\left(x\right)=-2x+3\frac{1}{2}$

Derivaatan nollakohta $-2x+3\frac{1}{2}=0$

$$x=1\frac{3}{4}$$

Kulkukaavio





Toinen summattava $3\frac{1}{2}-x=3\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}$

Vastaus: $1\frac{3}{4}$ und $1\frac{3}{4}$.

265. Funktio $y = \frac{2}{3}x^3 - 2{,}5x^2 - 3x + 7$

Derivaatta $y'(x) = 2x^2 - 5x - 3$

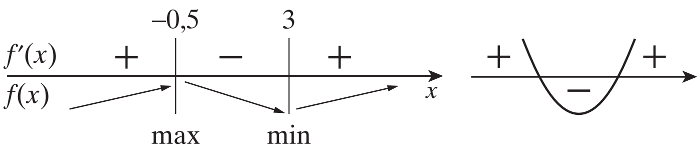
Derivaatan nollakohdat $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{49}}{4} = -0{,}5$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{49}}{4} = 3$$

Kulkukaavio



Vastaus: Kasvamisvahemikud $]-\infty;-0{,}5[$ ja $[3,\infty[$, kahanemisvahemikud [–0,5;3], maksimmumkoht –0,5 ja miinimumkoht 3.

TESTAA HYVÄT TAITOSI 2

1.

Funktio $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Derivaatta $f'(x) = 2x - 2$

Nollakohta $2x - 2 = 0$

$$2x = 2 \quad |:2$$

$$x = 1$$

Vastaus: $x = 1$

2.

Funktio $f(x) = 2x^2 + 8x - 9$

Derivaatta $f'(x) = 4x + 8$

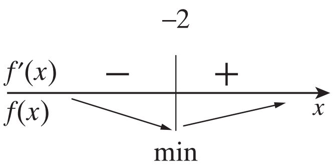
Funktio on kasvava, kun $4x + 8 \geq 0$

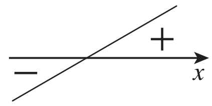
Nollakohta $4x + 8 = 0$

$$4x = -8 \quad |:4$$

$$x = -2$$

Kulkukaavio





<u>Vastaus</u>: Funktio on kasvava, kun $x \geq -2$.

3.

$f(x) = x^3 - 3x - 1$ väli $[-2,2]$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$

$x = \pm 1$

Polynomifunktio saa suljetulla välillä pienimmän arvonsa joko välin päätepisteessä tai välillä olevassa ääriarvokohdassa.

$f(-2) = (-2)^3 - 3\cdot(-2) - 1 = -3$ pienin

$f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) - 1 = 2$

$f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 - 1 = -3$ pienin

$f(2) = 2^3 - 3\cdot 2 - 1 = 1$

<u>Vastaus</u>: -3

4.

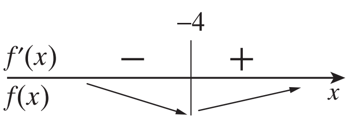
$$f(x) = \frac{(x+4)^2 - 1}{(x+4)^2 + 1} = \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 8x + 17}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+8)(x^2+8x+17) - (x^2+8x+15)(2x+8)}{(x^2+8x+17)^2} = \frac{(2x+8)2}{(x^2+8x+17)^2} = \frac{4x+16}{(x^2+8x+17)^2}$$

$4x + 16 = 0$

$x = -4$

Kulkukaavio



<u>Vastaus</u>: $x \leq -4$

5.

$$y = -5x^3 + 15x^2 - 10\frac{1}{15}$$

$y' = -15x^2 + 30x$

$y'(1) = -15\cdot 1^2 + 30\cdot 1 = 15$

Normaalin kulmakerroin $-\frac{1}{15}$

Normaalin piste

$y(1) = -5\cdot 1^3 + 15\cdot 1^2 - 10\frac{1}{15} = -\frac{1}{15}$ eli piste $(1, -\frac{1}{15})$

Normaalin yhtälö

$$y - (-\frac{1}{15}) = -\frac{1}{15}(x-1)$$
$$y = -\frac{1}{15}x$$

Vastaus: $y = -\frac{1}{15}x$

6.

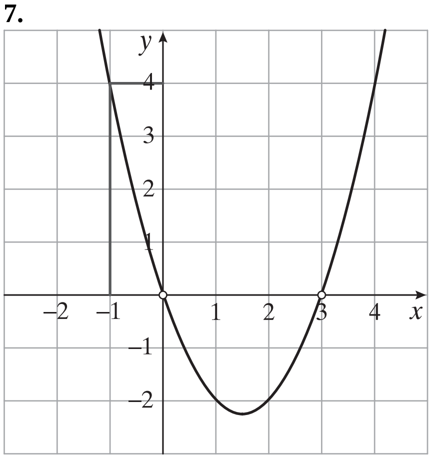
Jänispopulaation koko $N(t) = 0,625t^4 - 3,92t^3 + 5,89t^2 + 16,4t + 76$

Kasvunopeus $N'(t) = 2,5t^3 - 11,76t^2 + 11,78t + 16,4$

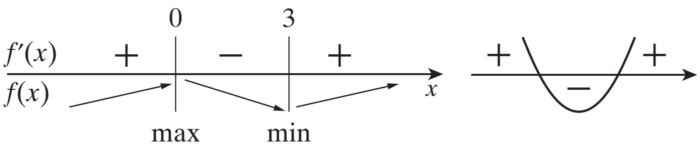
Kasvunopeus toisen vuoden alussa $N'(1,5) = 2,5\cdot 1,5^3 - 11,76\cdot 1,5^2 + 11,78\cdot 1,5 + 16,4 \approx 16$

Vastaus: 16 jänistä/vuosi

7.



Kulkukaavio



Vastaus: maksimikohta $x = 0$, minimikohta $x = 3$, tangentin kulmakerroin 4

8.

$f(x) = 16x^3 + 3ax^2 + 2$

$f'(x) = 48x^2 + 6ax$

$f'(1) = 0$

$48 \cdot 1^2 + 6a \cdot 1 = 0$

$a = -8$

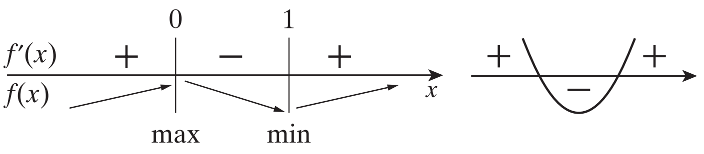
$f'(x) = 48x^2 - 48x$

$48x^2 - 48x = 0$

$48x(x - 1) = 0$

$x = 0$ tai $x = 1$

Kulkukaavio



Vastaus: $a = -8$

9.

$y = \frac{11}{16}x^2$

$y' = \frac{11}{8}x$

$y'(1) = \frac{11}{8}$

Tangentin suuntakulma

$\tan \alpha = \frac{11}{8}$

$\alpha = 53{,}97...°$

$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{17}{48}$

$y' = x^2$

$y'(1) = 1$

Tangentin suuntakulma

$\tan \beta = \frac{11}{8}$

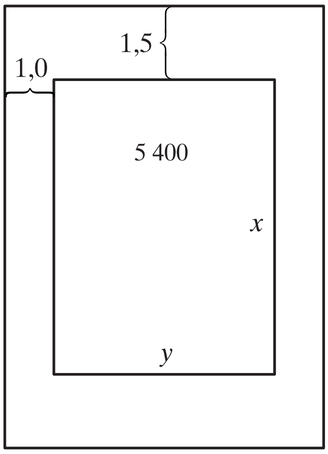
$\beta = 45°$

Käyrien leikkauskulma

$\alpha - \beta = 53{,}97...° - 45° \approx 9{,}0°$

Vastaus: $9{,}0°$

10.



$xy = 5\ 400$

$y = \dfrac{5\ 400}{x}$

Kokonaispinta-ala

$A(x) = (x + 3,0)(\dfrac{5\ 400}{x} + 2) = 5\,400 + 2x + \dfrac{16\ 200}{x} + 6$

$A'(x) = 2 - \dfrac{16\ 200}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 16\ 200}{x^2}$

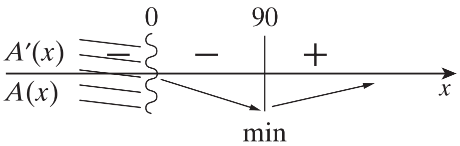
$\dfrac{2x^2 - 16\ 200}{x^2} = 0$

$2x^2 - 16\ 200 = 0 \qquad \mid\ x > 0$

$x = 90$

$y = \dfrac{5\,400}{90} = 60$

Kulkukaavio



<u>Vastaus</u>: 60 m x 90 m

KERTAUSHARJOITUKSIA

1. Rationaalifunktio

266. a) $\frac{1}{3}+\frac{1+3}{3^2}+\frac{3-1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=1\frac{4}{9}$

b) $$\frac{\frac{1}{9}\cdot(\frac{1}{5})^2-2\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+1}=\frac{\frac{1}{9}(\frac{1}{25}-{}^{5)}\frac{2}{5})}{\frac{6}{5}}=\frac{1}{9}\cdot(-\frac{9}{25})\cdot\frac{5}{6}=-\frac{1}{30}$$

<u>Vastaus</u>: a) $1\frac{4}{9}$ b) $-\frac{1}{30}$

267. a) $${}^{a)}\frac{2}{a+1}-\frac{2a+1}{a^2+a}=\frac{2a-2a-1}{a^2+a}=-\frac{1}{a^2+a}$$

b) $$\frac{\cancelto{1}{a}}{\cancelto{1}{a}\,\cancelto{1}{(a+1)}}\cdot\cancelto{a-1}{(a^2-1)}+1=a-1+1=a$$

<u>Vastaus</u>: a) $-\frac{1}{a^2+a}$ b) a

268. $$\frac{a^k\cdot a^k}{a^k+a^k}=\frac{a^k\cdot\cancelto{1}{a^k}}{2\,\cancelto{1}{a^k}}=\frac{1}{2}a^k$$

<u>Vastaus</u>: $\frac{1}{2}a^k$

269. Sievennetään lause

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right):\frac{1}{x^2}=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^2=x^2-1$$

Lausekkeen arvo, kun $x=\sqrt{2}$: $x^2-1=(\sqrt{2})^2-1=2-1=1$

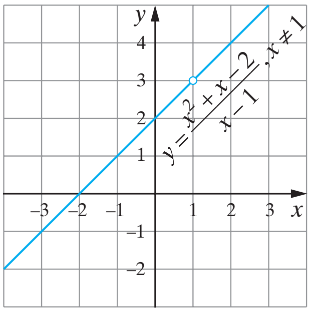
<u>Vastaus</u>: $x^2-1=1$

270. Funktio $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ ei määritelty, kun jakaja on nolla, eli $x \neq 1$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+2 \\
\hline
x-1 & x^2+x-2 \\
 & \underline{\mp x^2 \pm x} \\
 & \quad 2x-2 \\
 & \quad \underline{\mp 2x \pm 2} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

$f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=x+2,\ x\neq 1$. Kuvaaja on suora $y=x+2$, johon ei kuulu kohta $x = 1$.



271. Funktio $f(x)=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{1+x}-2\cdot\dfrac{1}{x^2-1}$

a) määrittelyjoukkoon kuuluvat kaikki muut reaaliluvut, paitsi nimittäjän nollakohdat.

$x^2-1=(x-1)(x+1)\neq 0$, kun $x\neq \pm 1$, joten lauseke on määritelty aina, kun $x\neq \pm 1$.

b) Funktion $f(x)=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{1+x}-2\cdot\dfrac{1}{x^2-1}$ nollakohdat.

$$f(x)=0$$

$$^{x+1)}\dfrac{x}{x-1}-{}^{x-1)}\dfrac{x-1}{1+x}-2\cdot\dfrac{1}{x^2-1}=0$$

$$\dfrac{x^2+x-(x-1)^2-2}{x^2-1}=0$$

Funktion nollakohdat sijaitsevat osoittajan nollakohtien joukossa.

$$x^2+x-x^2+2x-1-2=0$$

$$3x-3=0$$

$$x=1$$

Koska ainoa mahdollinen nollakohta $x = 1$ ei kuulu funktion määrittelyalueeseen, funktiolla ei ole nollakohtia.

Vastaus: a) $x\neq \pm 1$ b) ei nollakohtia

272. a) Yhtälön ratkaisujoukkoon ei kuulu nimittäjän nollakohta, joten $x \neq 2$.

$$\frac{x}{x-2} - {}^{x-2)}1 = 0$$

$$\frac{x-x+2}{x-2} = 0$$

$$\frac{2}{x-2} = 0$$

Osamäärän arvo on nolla vain, jos jaettava on nolla (ja jakaja ei ole nolla), joten yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

b) Epäyhtälön $\frac{x}{x-2} - 1 > 0$ ratkaiseminen perustuu funktion $f(x) = \frac{x}{x-2} - 1$ merkin tutkimiseen.

Funktio $f(x) = \frac{x}{x-2} - {}^{x-2)}1 = \frac{2}{x-2}$ saa positiivisia arvoja, kun jakaja on positiivinen (koska jaettava 2 on positiivinen).

Joten $f(x) > 0$, kun $x-2 > 0$ eli, kun $x > 2$.

Vastaus: a) Ei ratkaisua b) $x > 2$

273. Epäyhtälö $\frac{x}{x+1} \geq |x|$. Jaetaan tarkastelu kahteen osaan: $x < 0$ tai $x \geq 0$.

$x < 0$

$$\frac{x}{x+1} \geq -x$$

$$\frac{x}{x+1} + {}^{x+1)}x \geq 0$$

$$\underbrace{\frac{x^2+2x}{x+1}}_{f(x)} \geq 0$$

Rationaalifunktio voi vaihtaa merkkinsä kohdissa, joissa sitä ei ole määritelty (nimittäjän nollakohdat), tai nollakohdissaan (osoittajan nollakohdat).

Nimittäjän nollakohdat

$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$

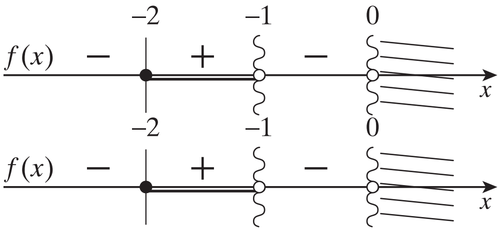
Osoittajan nollakohdat

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = -2$$

Merkkikaavio, kun $x < 0$



$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+1}$$

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 + 2\cdot(-3)}{-3+1} = -\frac{3}{2} < 0$$

$$f(-1,5) = \frac{(-1,5)^2 + 2\cdot(-1,5)}{-1,5+1} = 1,5 > 0$$

$$f(-0,5) = \frac{(-0,5)^2 + 2\cdot(-0,5)}{-0,5+1} = -1,5 < 0$$

$f(x) \geq 0$

$-2 \leq x < -1$

$x \geq 0$

$$\frac{x}{x+1} \geq x$$

$$\frac{x}{x+1} - {}^{x+1)}x \geq 0$$

$$\frac{-x^2}{x+1} \geq 0$$

Rationaalifunktio voi vaihtaa merkkinsä kohdissa, joissa sitä ei ole määritelty (nimittäjän nollakohdat), tai nollakohdissaan (osoittajan nollakohdat). Kun $x \geq 0$, nimittäjä on positiivinen. Näin ollen rationaalifunktio on ei-negatiivinen kun osoittaja on ei-negatiivinen. Osoittaja $-x^2 \geq 0$, kun $x = 0$.

Epäyhtälö $\frac{x}{x+1} \geq |x|$ toteutuu, kun $-2 \leq x < -1$ tai $x = 0$.

Vastaus: $-2 \leq x < -1$ tai $x = 0$.

274. Epäyhtälö $\dfrac{\frac{x}{2} - 2 + \frac{2}{x}}{\frac{x}{2} - \frac{2}{x}} < 1$.

Määritetään aluksi ne muuttujan x arvot, jotka eivät kelpaa ratkaisuiksi, eli jakajan nollakohdat.

Näin ollen $x \neq 0$ ja $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} \neq 0$, eli $\frac{x^2 - 4}{2x} \neq 0$, josta $x^2 \neq 4$ ja tästä edelleen $x \neq \pm 2$.

Epäyhtälön ratkaisu

$$\frac{{}^{x)}\frac{x}{2} - {}^{2x)}2 + {}^{2)}\frac{2}{x}}{\frac{x}{2}-\frac{2}{x}} < 1$$

$$\frac{\overset{x-2}{\cancel{(x^2-4x+4)}}\cdot \overset{1}{\cancel{2x}}}{\underset{1}{\cancel{2x}}\cdot \underset{x+2}{\cancel{(x^2-4)}}} - {}^{x+2)}1 < 0 \qquad \Big|\ x \neq \pm 2,\ x \neq 0$$

$$\frac{x-2-x-2}{x+2} < 0$$

$$\frac{-4}{x+2} < 0$$

Osamäärä $\frac{-4}{x+2}$ on negatiivinen, vain, jos jakaja $x+2$ on positiivinen, siis $x > -2$ ja alkuperäiset ehdot huomioiden $x \neq 2,\ x \neq 0$

Vastaus: $x > -2$ ja $x \neq 2,\ x \neq 0$

2. Funktio raja-arvo ja jatkuvuus

275. a) $\lim\limits_{x \to -1}(1 - x - x^5) = 1 - (-1) - (-1)^5 = 1$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}}(x - 27x^3 - 9x^5) = \frac{1}{3} - 27\cdot(\frac{1}{3})^3 - 9\cdot(\frac{1}{3})^5 = -\frac{19}{27}$

Vastaus: a) 1 b) $-\frac{19}{27}$

276. a) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^3-1}{x-2} = \frac{1^3-1}{1-2} = \frac{0}{-1} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x^2-4}{x+2} = \frac{2^2-4}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -1}\frac{x^3-2x+1}{-2x^2+x-1} = \frac{(-1)^3-2\cdot(-1)+1}{-2\cdot(-1)^2+(-1)-1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

Vastaus: a) 0 b) 0 c) $-\frac{1}{2}$

277. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{3x-3}=\dfrac{9-3^2}{9\cdot 3-3}=\dfrac{0}{24}=0$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x-1}{2x^2-11x+5}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}-1}{2\cdot(\frac{1}{2})^2-11\cdot\frac{1}{2}+5}=\dfrac{0}{0}$. Koska $x=\dfrac{1}{2}$ on sekä osoittajan että nimittäjän nollakohta lauseketta voidaan ensin sieventää.
Nimittäjän nollakohdat

$$2x^2-11x+5=0$$

$$x=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot 2\cdot 5}}{2\cdot 2}$$

$$x_1=\frac{11+9}{4}=5$$

$$x_2=\frac{11-9}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{2x^2-11x+5}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{2(x-\frac{1}{2})(x-5)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cancel{2x-1}^{\,1}}{(\cancel{2x-1})_{1}(x-5)}=\frac{1}{\frac{1}{2}-5}=-\frac{2}{9}$$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x-3}=\dfrac{3^3-5\cdot 3^2+7\cdot 3-3}{3-3}=\dfrac{0}{0}$ Koska $x=3$ on sekä osoittajan että nimittäjän nollakohta, lauseketta voidaan ensin sieventää. Suoritetaan jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x+1 \\ \hline
x-3 & x^3-5x^2+7x-3 \\
 & \underline{\mp x^3\pm 3x^2} \\
 & \quad -2x^2+7x \\
 & \quad \underline{\mp 2x^2 \mp 6x} \\
 & \qquad\quad x-3 \\
 & \qquad\quad \underline{\mp x\pm 3} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+7x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x^2-2x+1)=3^2-2\cdot 3+1=4$$

Vastaus: a) 0 b) $-\dfrac{2}{9}$ c) 4

278. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-1|+2x+1}{|x|}\overset{x<1}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x+1+2x+1}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{|x|}=\dfrac{2}{0}\neq\dfrac{0}{0}$, joten ei-raja-arvoa

Vastaus: Ei raja-arvoa.

279. Funktio $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

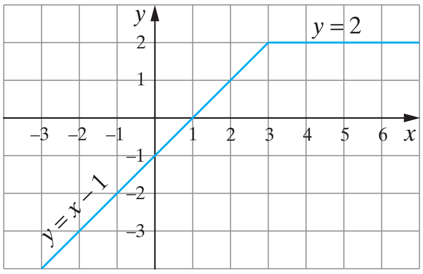
a) Rationaalifunktio on määritelty aina, kun jakaja on nollasta eroava, eli $x\neq 1$.
b) Rationaalifunktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.

Vastaus: a) $x\in\mathbb{R}$, ja $x\neq 1$ b) $x\in\mathbb{R}$, ja $x\neq 1$

280. Funktio $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<a \\ 2, & x\geq a\end{cases}$

Funktio on määritelty polynomifunktiona, kun $x<a$ ja $x>a$. Funktio on määritelty myös kohdassa $x=a$, jos ja vain jos $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$
$$\lim_{x\to a^-}(x-1)=\lim_{x\to a^+}2=2$$
$$a-1=2$$
$$a=3$$



Vastaus: a = 3

281. Funktio $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<a \\ 2, & x\geq a\end{cases}$

Funktio on määritelty polynomifunktiona, kun $x<a$ ja $x>a$. Funktio on määritelty myös kohdassa $x=a$, jos ja vain jos $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

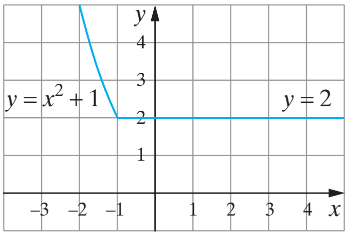
$$\lim_{x\to a^-} (x^2+1) = \lim_{x\to a^+} 2 = 2$$

$$a^2+1 = 2$$

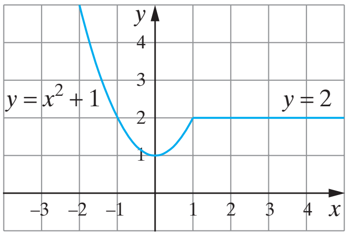
$$a^2 = 1 \qquad \Big|\ \sqrt{\ }$$

$$a = \pm 1$$

$a = -1$



$a = 1$



<u>Vastaus</u>: $a=-1$ tai $a=1$

282. Funktio $f(x) = \begin{cases} x+a, & x<-1 \\ -x^2+1, & -1\le x<1 \\ ax-1, & x\ge 1 \end{cases}$

ON löydettävä sellainen yksikäsitteinen parametrin a arvo, että seuraavat ehdot ovat voimassa:
Funktio on määritelty polynomifunktiona, kun $x<-1$, $-1<x<1$ ja $x>1$. Funktio on määritelty myös kohdassa $x=-1$, jos ja vain jos $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ ja kohdassa $x=1$, jos ja vain jos $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.

Kohta $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x\to -1^-} (x+a) = \lim_{x\to -1^+} (-x^2+1) = -(-1)^2+1$$

$$-1+a = 0$$

$$a = 1$$

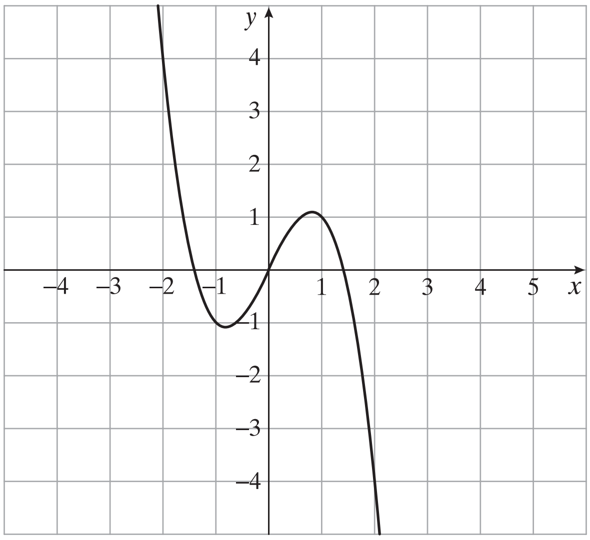
Kohta $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$
$$\lim_{x\to 1^-} (-x^2+1) = \lim_{x\to 1^+} (ax-1) = a\cdot 1 - 1$$
$$-1^2+1 = a-1$$
$$a = 1$$

<u>Vastaus:</u> $a = 1$

3. Funktion derivaatta

283.



a) Funktion *f* keskimääräinen muutosnopeus välillä [–2,1]

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{1-(-2)} = 1$$

b)Funktion *f* keskimääräinen muutosnopeus välillä [0,1]

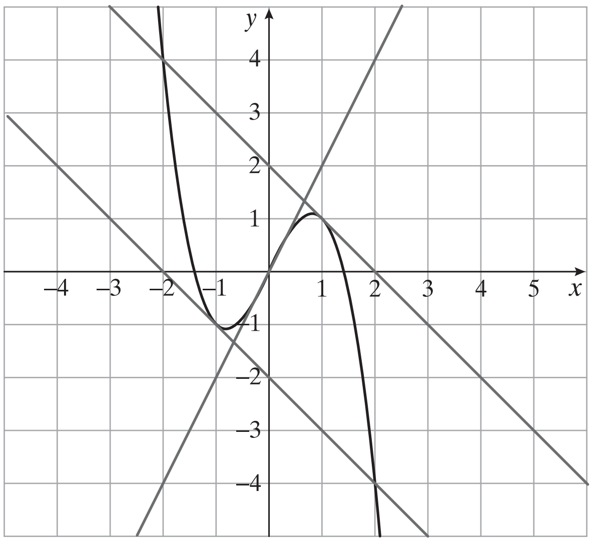
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

c) Funktion *f* keskimääräinen muutosnopeus välillä [0,2]

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-0}{2-0} = -2$$

<u>Vastaus</u>: Funktion *f* keskimääräinen muutosnopeus on a) 1 b) 1 c) –2.

284.



Derivaatan arvo on käyrälle kyseiseen pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin.
Derivaatat

$f'(0) = \ = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{2-0} = 2$

$f'(1) = \ = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-1}{6-1} = -1$

Funktion derivaatta on yhtä suuri kuin $f'(1)$ pisteessä (–1,–1).

<u>Vastaus</u>: Derivaatat ovat $f'(0) = 2$ ja $f'(1) = -1$. Funktion derivaatta on yhtä suuri kuin $f'(1)$ pisteessä (–1,–1).

285. Funktio $f(x) = -x^2 + 4x$

Erotusosamäärä $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Derivaatta $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

a) Erotusosamäärä kohdassa $x = 4$

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = \frac{-x^2 + 4x - 0}{x-4} = \frac{-x\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = -x$

Derivaatta kohdassa $x = 4$

$f'(4) = \lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4}(-x) = -4$

b) Erotusosamäärä kohdassa $x = -2$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \frac{-x^2 + 4x - (-12)}{x + 2} = \frac{-x^2 + 4x + 12}{x + 2}$$

Jaetaan osoittaja tekijöihin nollakohtia käyttäen.

$$-x^2 + 4x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{64}}{-2} = 6$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{64}}{-2} = -2$$

Erotusosamäärä

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\cancel{(x+2)}(x-6)}{\cancel{x+2}} = -x + 6$$

Derivaatta kohdassa $x = -2$

$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (-x + 6) = 8$$

<u>Vastaus</u>: a) Erotusosamäärä on $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -x$ ja derivaatta $f'(4) = -4$.   b) Erotusosamäärä on $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -x + 6$ ja derivaatta $f'(-2) = 8$.

286. Derivaatta $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

a) Funktio $f(x) = \sqrt{x+1}$

Derivaatta $f'(8) = \lim_{x \to 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} = \lim_{x \to 8} {}^{\sqrt{x+1}+3)}\frac{\sqrt{x+1} - 3}{x - 8} = \lim_{x \to 8} \frac{(\sqrt{x+1} + 3)(\sqrt{x+1} - 3)}{(x-8)(\sqrt{x+1} + 3)}$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{x + 1 - 9}{(x-8)(\sqrt{x+1} + 3)} = \lim_{x \to 8} \frac{\cancel{x-8}}{\cancel{(x-8)}(\sqrt{x+1} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{8+1} + 3} = \frac{1}{6}$$

b) Funktio $f(x) = \frac{5}{3x + 4}$

Derivaatta $f'(8) = \lim_{x \to 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} = \lim_{x \to 8} \frac{{}^{28)}\frac{5}{3x+4} - {}^{3x+4)}\frac{5}{28}}{x - 8} = \lim_{x \to 8} \frac{\frac{140 - 15x - 20}{28(3x+4)}}{x - 8}$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{120 - 15x}{28(3x+4)(x-8)} = \lim_{x \to 8} \frac{-15\cancel{(x-8)}}{28(3x+4)\cancel{(x-8)}} = \frac{-15}{28(3 \cdot 8 + 4)} = -\frac{15}{784}$$

<u>Vastaus</u>: a) $\frac{1}{6}$ b) $-\frac{15}{784}$

287. Funktio $f(x)=\dfrac{x^2}{2x+3}$

Erotusosamäärä $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Erotusosamäärä kohdassa $x = –1$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\frac{x^2}{2x+3}-{}^{2x+3)}1}{x+1}=\frac{x^2-2x-3}{(2x+3)(x+1)}$$

Osoittajan nollakohdat

$$x^2-2x-3=0$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}$$

$$x_1=\frac{2-\sqrt{16}}{2}=-1$$

$$x_2=\frac{2+\sqrt{16}}{2}=3$$

Erotusosamäärä kohdassa $x = –1$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\cancel{(x+1)}\,(x-3)}{(2x+3)\,\cancel{(x+1)}}=\frac{x-3}{2x+3}$$

Derivaatta $f\,'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Derivaatta kohdassa $x = –1$

$$f\,'(1)=\lim_{x\to -1}\frac{x-3}{2x+3}=\frac{-1-3}{2\cdot(-1)+3}=-4$$

<u>Vastaus</u>: Erotusosamäärä kohdassa $x = –1$ on $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{x-3}{2x+3}$. Derivaatta on $f\,'(1) = –4$.

288. Derivaatta ilmaisee funktion kasvunopeuden.
Funktio $f(x) = –3x^2 –x + 1$

Derivaatta $f\,'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

a) Kasvunopeus kohdassa $x = 1$

$$f\,'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{-3(1+h)^2-(1+h)+1+3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3h^2-7h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-3h-7)}{\cancel{h}}=-7$$

b) Kasvunopeus kohdassa $x=-\dfrac{1}{2}$

$$f\,'(-\frac{1}{2})=\lim_{h\to 0}\frac{-3(-\frac{1}{2}+h)^2-(-\frac{1}{2}+h)+1+\frac{3}{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-3h+2)}{\cancel{h}}=2$$

<u>Vastaus</u>: Kasvunopeus on a) –7 b) 2.

289. Derivaatta $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

a) Funktio $f(x) = \dfrac{1}{3x}$

Derivaatta kohdassa $x = –2$

$$f'(–2) = \lim_{x \to -2} \frac{{}^{6)}\dfrac{1}{3x} + {}^{3x)}\dfrac{1}{6}}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{\dfrac{6+3x}{18x}}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{3\cancel{(x+2)}}{18x\cancel{(x+2)}} = \frac{3}{18\cdot(-2)} = -\frac{1}{12}$$

b) Funktio $f(x) = \dfrac{4}{x-3}$

Derivaatta kohdassa $x = –2$

$$f'(–2) = \lim_{x \to -2} \frac{{}^{5)}\dfrac{4}{x-3} + {}^{x-3)}\dfrac{4}{5}}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{\dfrac{4x+8}{5(x-3)}}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{4\cancel{(x+2)}}{5(x-3)\cancel{(x+2)}} = \frac{4}{5\cdot(-2-3)} = -\frac{4}{25}$$

c) Funktio $f(x) = \dfrac{3x}{2x+1}$

Derivaatta kohdassa $x = –2$

$$f'(–2) = \lim_{x \to -2} \frac{\dfrac{3x}{2x+1} - {}^{2x+1)}2}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{\dfrac{-x-2}{2x+1}}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{-\cancel{(x+2)}}{(2x+1)\cancel{(x+2)}} = \frac{-1}{2\cdot(-2)+1} = \frac{1}{3}$$

<u>Vastaus</u>: Derivaatta kohdassa $x = –2$ on a) $-\dfrac{1}{12}$ b) $-\dfrac{4}{25}$ c) $\dfrac{1}{3}$.

4. Polynomifunktion derivaatta

290. a) D($x^3 + x^2 + x + 1$) = $3x^2 + 2x + 1$

b) D($(2x^4 - 3x^3 + 5x - 10) = 2\cdot 4x^3 - 3\cdot 3x^2 + 5 = 8x^3 - 9x^2 + 5$) =

c) $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{3}{4}x^4 + \dfrac{7}{3}x^3 - x + \dfrac{21}{47}\right) = \dfrac{1}{5}\cdot 5x^4 - \dfrac{3}{4}\cdot 4x^3 + \dfrac{7}{3}\cdot 3x^2 - 1 = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 1$

<u>Vastaus</u>: a) $3x^2 + 2x + 1$ b) $8x^3 - 9x^2 + 5$ c) $x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 1$

291. Funktio $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 11$

Derivaatta $f'(x) = -\dfrac{1}{3}\cdot 3x^2 + 2\cdot 2x - 3 = -x^2 + 4x - 3$

Derivaatta kohdissa –1, 0 ja 1

$f'(–1) = –(–1)^2 + 4\cdot(–1) – 3 = –8$

$f'(0) = –0^2 + 4\cdot 0 – 3 = –3$

$f'(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 - 3 = 2$

Vastaus: Derivaatta kohdissa –1, 0 ja 1 on –8, –3 ja 0.

292. Laske $f(-1)$ ja $f'(-1)$, Funktio $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 4$
Funktion arvo $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + (-1) - 4 = -9$
Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$
Derivaatan arvo $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 1 = 10$

Vastaus: $f(-1) = -9$ ja $f'(-1) = 10$

293. a) Funktio $f(x) = x^2 - 6x + 7$

Derivaatta $f'(x) = 2x - 6$

Yhtälö

$$f'(x) = 0$$
$$2x - 6 = 0$$
$$x = 3$$

b) Funktio $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{113}{1\,093}$

Derivaatta $f'(x) = 3x^2 + 5x - 2$

Yhtälö

$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$
$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{6} = -2$$
$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{6} = \frac{1}{3}$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisut ovat a) 3 b) –2 tai $\frac{1}{3}$.

294. Funktio $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 13$

Derivaatta $f'(x) = 9x^2 - 8x + 1$

Derivaatan nollakohdat $f'(x) = 0$

$$9x^2 - 8x + 1 = 0$$
$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9}$$
$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{28}}{18} = \frac{4 - \sqrt{7}}{9}$$
$$x_2 = \frac{8 + \sqrt{28}}{18} = \frac{4 + \sqrt{7}}{9}$$

Vastaus: Derivaatan nollakohdat $\frac{4 - \sqrt{7}}{9}$ ja $\frac{4 + \sqrt{7}}{9}$.

295. a) $D(ax^4 + bx^2 + cx + d) = a \cdot 4x^3 + b \cdot 2x + c = 4ax^3 + 2bx + c$
b) $D(nx^4 + 4x^n) = n \cdot 4x^3 + 4 \cdot nx^{n-1} = 4nx^3 + 4nx^{n-1}$
c) $D(2tx^4 + 2t^4x + x + t) = 2t \cdot 4x^3 + 2t^4 + 1 + 0 = 8tx^3 + 2t^4 + 1$

<u>Vastaus</u>: a) $4ax^3 + 2bx + c$ b) $4nx^3 + 4nx^{n-1}$ c) $8tx^3 + 2t^4 + 1$

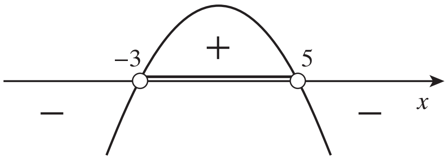
296. Funktio $f(x) = -x^2 + 2x + 15$ saa positiivisia arvoja

$$f(x) > 0$$
$$-x^2 + 2x + 15 > 0$$

Nollakohdat $-x^2 + 2x + 15 = 0 \quad |:(-1)$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$
$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{64}}{2} = -3$$
$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{64}}{2} = 5$$

Merkkikaavio



$$f(x) > 0$$
$$-3 < x < 5$$

Derivaatta $f'(x) = -2x + 2$ saa positiivisia arvoja

$$f(x) > 0$$
$$-2x + 2 > 0$$
$$-2x > -2 \quad |:(-2)$$
$$x < 1$$

<u>Vastaus</u>: Funktio ja sen derivaatta saavat yhtä aikaa positiivisia arvoja, kun $-3 < x < 1$.

297. Polynomifunktio $f(x) = -x^3 + ax^2 - 2x$
Derivaatta $f'(x) = -3x^2 + 2ax - 2$
Derivaatta negatiivinen $f'(x) < 0$

$$-3x^2 + 2ax - 2 < 0$$

Derivaatan kuvaajana on alaspäin aukeava paraabeli. Derivaatta on kaikkialla negatiivinen, kun diskriminantti $D < 0$.

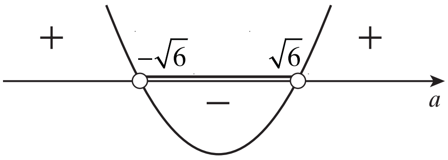
$$(2a)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2) < 0$$
$$4a^2 - 24 < 0$$

Nollakohdat $4a^2 - 24 = 0$

$$a^2 = 6 \quad |\sqrt{}$$

$$a = \pm\sqrt{6}$$

Merkkikaavio



Vastaus: Derivaatta on kaikkialla negatiivinen, kun $-\sqrt{6} < a < \sqrt{6}$.

298. Kävijämäärä $f(t) = -3\,350t^2 + 11\,900t + 228\,700$, missä t on aika vuosina vuodesta 1996 alkaen.

Kävijämäärän keskimääräinen muutosnopeus vuodesta 1996 vuoteen 1999

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{234\,250 - 228\,700}{3} = 1850$$

Kävijämäärän muutosnopeus vuonna 1999 on $f'(3)$.

Derivaatta $f'(t) = -6\,700t + 11\,900$

Kävijämäärän muutosnopeus $f'(3) = -6\,700 \cdot 3 + 11\,900 = -8\,200$

Vastaus: Keskimääräinen muutosnopeus vuodesta 1996 vuoteen 1999 oli 1 850 henkilöä/vuosi ja kävijämäärän muutosnopeus vuonna 1999 oli –8 200 henkilöä/vuosi.

299. Funktio $f(x) = -x^2 + ax + b$

Derivaatta $f'(x) = -2x + a$

Ehdot $f(1) = 0$ ja $f'(1) = 0$

$$\begin{cases} -1 + a + b = 0 \\ -2 + a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vastaus: Vakiot ovat $a = 2$ ja $b = -1$.

5. Käyrän tangentti ja normaali

300. Käyrä $f(x) = x^3 - 2x - 3$

Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 2$

Tangentin kulmakerroin $k_t = f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 2 = 1$

Tangentin yhtälö $y - y_0 = k_t(x - x_0)$ $\quad |x_0 = -1,\ y_0 = f(-1) = (-1)^3 - 2\cdot(-1) - 3 = -2$

$$y - (-2) = 1(x - (-1))$$

$$y = x - 1$$

Vastaus: Tangentin yhtälö on $y = x - 1$.

301. Käyrä $f(x) = x^2 - 3x + 5$
Derivaatta $f'(x) = 2x - 3$
Tangentin kulmakerroin $k_t = f'(-2) = 2\cdot(-2) - 3 = -7$
Suuntakulma $\quad \tan \alpha = -7$

$$\alpha = -81{,}9°$$

Vastaus: Tangentin kulmakerroin on –7 ja suuntakulma –81,9°.

302. Käyrä $f(x) = -x^3 + x - 2$
Derivaatta $f'(x) = -3x^2 + 1$
Tangentin kulmakerroin $k_t = f'(-3) = -3\cdot(-3)^2 + 1 = -26$
Tangentin yhtälö $y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad |x_0 = -3,\ y_0 = f(-1) = -(-3)^3 + (-3) - 2 = 22$

$$y - 22 = -26(x - (-3))$$

$$y = -26x - 56$$

Normaalin kulmakerroin $k_n = -\frac{1}{k_t} = \frac{1}{26}$

Normaalin yhtälö $y - y_0 = k_n(x - x_0) \quad |x_0 = -3,\ y_0 = f(-3) = 22$

$$y - 22 = \frac{1}{26}(x - (-3))$$

$$y = \frac{1}{26}x + 22\frac{3}{26}$$

Vastaus: Tangentin yhtälö on $y = -26x - 56$ ja normaalin $y = \frac{1}{26}x + 22\frac{3}{26}$.

303. Käyrä $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - x^2 - 6x$

Derivaatta $f'(x) = 4x^2 - 2x - 6$
Tangentti on x-akselin suuntainen.
Tangentin kulmakerroin $k_t = 0$
Kohta, jonka kautta tangentti kulkee.

$$f'(x) = k_t$$

$$4x^2 - 2x - 6 = 0 \quad |:2$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{4} = \frac{3}{2}$$

Tangenttien sivuamispisteiden y-koordinaatit

$y_1 = f(-1) = \frac{4}{3}\cdot(-1)^3 - (-1)^2 - 6\cdot(-1) = \frac{11}{3}$

$y_2 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\cdot\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{4}$

Vastaus: x-akselin suuntaisten tangenttien yhtälöt ovat $y = \frac{11}{3}$ ja $y = -\frac{27}{4}$.

304. Käyrällä on y-akselin suuntainen normaali siinä pisteessä, missä käyrällä on x-akselin suuntainen tangentti .

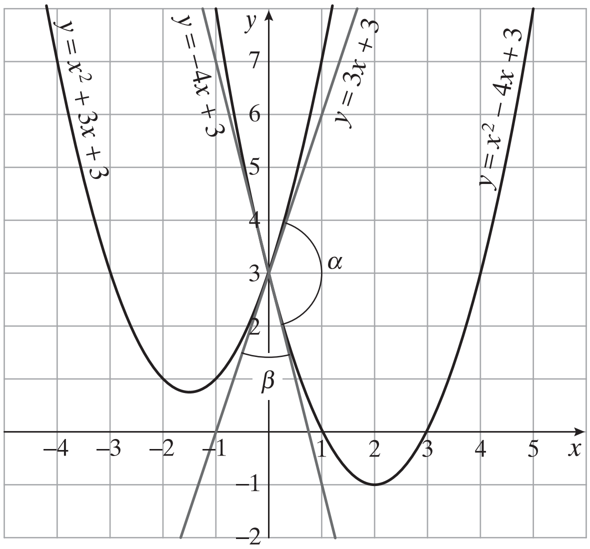
Käyrä $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$

Derivaatta $f'(x) = x^2 - 2x - 3$
Tangentti on x-akselin suuntainen.
Tangentin kulmakerroin $k_t = 0$
Kohta, jonka kautta tangentti kulkee.

$$f'(x) = k_t$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$
$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1$$
$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3$$

Vastaus: y-akselin suuntaisten tangenttien yhtälöt ovat $x = -1$ ja $x = 3$.

305.



Paraabelien $y = x^2 + 3x + 3$ ja $y = x^2 - 4x + 3$ leikkauspisteet.

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x + 3 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$
$$x^2 + 3x + 3 = x^2 - 4x + 3$$
$$7x = 0 \quad |:7$$
$$x = 0$$

Paraabeli 1: $y = x^2 + 3x + 3$
Derivaatta $y'(x) = 2x + 3$

Tangentin kulmakerroin $k_1 = y'(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$
Koska tan $\alpha_1 = 3$, niin tangentin suuntakulma $\alpha_1 = 71{,}56...°$

Paraabeli 2: $y = x^2 - 4x + 3$
Derivaatta $y'(x) = 2x - 4$
Tangentin kulmakerroin $k_2 = y'(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$
Koska tan $\alpha_2 = 2$, niin tangentin suuntakulma $\alpha_2 = -75{,}96...°$
Tangenttien välinen kulma on $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 71{,}56...° - (-75{,}96...°) = 147{,}52...°$.
Käyrien välinen kulma $\beta = 180° - \alpha \approx 32{,}5°$

Vastaus: Käyrien välinen leikkauskulma on 32,5°.

306. Paraabeli $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$
Derivaatta $f'(x) = 2x - 2$
a) Tangentin kulmakerroin on $k_t = 2$
Kohta, jonka kautta tangentti kulkee.

$$f'(x) = k_t$$
$$2x - 2 = 2 \quad |:2$$
$$x = 2$$

Tangenttien sivuamispisteen y-koordinaatti
$y = f(1) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3$
Pisteen P koordinaatit $(2,-3)$

b) Tangentti on suoran $x + 2y + 3 = 0$ suuntainen.
Suora $\quad x + 2y + 3 = 0$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Tangentin kulmakerroin $k_t = -\dfrac{1}{2}$
Kohta, jonka kautta tangentti kulkee.

$$f'(x) = k_t$$
$$2x - 2 = -\frac{1}{2} \quad |:2$$
$$x = \frac{3}{4}$$

Tangenttien sivuamispisteen y-koordinaatti

$$y = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) - 3 = -3\frac{15}{16}$$

Pisteen P koordinaatit $\left(\dfrac{3}{4}, -3\dfrac{15}{16}\right)$

c) Tangentin suuntakulma on 45°
Tangentin kulmakerroin $k_t = \tan 45° = 1$
Kohta, jonka kautta tangentti kulkee.

$$f'(x) = k_t$$
$$2x - 2 = 1 \quad |:2$$

$$x = \frac{3}{2}$$

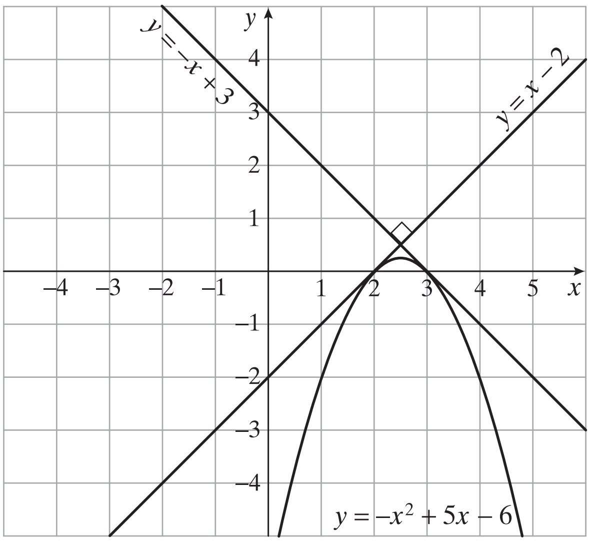
Tangenttien sivuamispisteen *y*-koordinaatti

$$y = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right) - 3 = -3\frac{3}{4}$$

Pisteen *P* koordinaatit $\left(\frac{3}{2}, -3\frac{3}{4}\right)$

Vastaus: Pisteen *P* koordinaatit ovat a) (2,–3) b) $\left(\frac{3}{4}, -3\frac{15}{16}\right)$ c) $\left(\frac{3}{2}, -3\frac{3}{4}\right)$.

307.



Paraabelin ja *x*-akselin leikkauspisteet. Sijoitetaan *y* = 0.

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-6)}}{2\cdot(-1)}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{-2} = 2$$

Paraabeli $y = -x^2 + 5x - 6$

Derivaatta $y'(x) = -2x + 5$

Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 2$: $k_1 = y'(2) = -2\cdot 2 + 5 = 1$

Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 3$: $k_2 = y'(3) = -2\cdot 3 + 5 = -1$

Koska tangenttien kulmakertoimien tulo $k_1\cdot k_2 = 1\cdot(-1) = -1$, tangentit leikkaavat toisensa kohtisuorasti. □

308. Funktio $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
Derivaatta $f\,'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
Funktion nollakohta on 2, joten $f(2) = 0$
Funktion derivaatta on nolla pisteessä (3,2), joten $f(3) = 2$ ja $f\,'(3) = 0$.
Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 8 + 4a + 2b + c = 0 \\ 27 + 9a + 3b + c = 0 \\ 27 + 6a + b = 0 \end{cases}$$

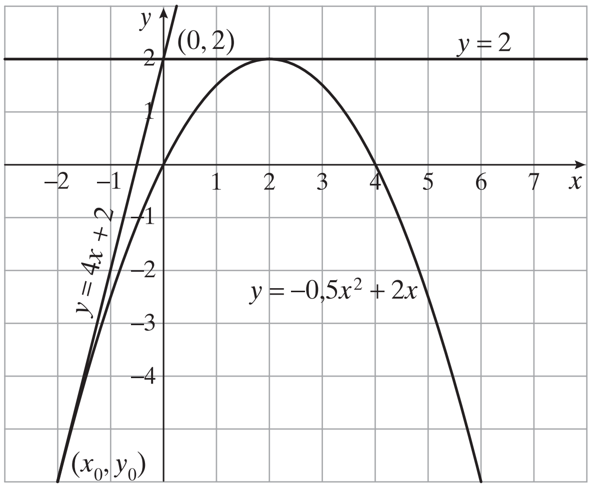
Ratkaisemalla b alimmasta yhtälöstä saadaan $b = -6a - 27$. Sijoitetaan tämä kahteen ylempään yhtälöön.

$$\begin{cases} 8 + 4a + 2(-6a - 27) + c = 0 \\ 27 + 9a + 3(-6a - 27) + c = 0 \end{cases}$$

Ratkaisemalla yhtälöpari saadaan $a = -8$ ja $c = -18$. Tästä edelleen saadaan $b = 21$.

<u>Vastaus</u>: Vakiot ovat $a = -8$, $b = 21$ ja $c = -18$.

309.



Käyrä $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$
Koska $y(0) = 0$, niin piste (0,2) ei ole käyrällä.
Derivaatta $y\,'(x) = -x + 2$
Tangentin kulmakerroin $k_t = y\,'(x_0) = -x_0 + 2$
Pisteen (x_0,y_0) kautta kulkevan tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k_t\,(x - x_0) \quad |\; y_0 = -\frac{1}{2}x_0^2 + 2x_0,\;\; k_t = y\,'(x_0) = -x_0 + 2$$

$$y - (-\frac{1}{2}x_0^2 + 2x_0) = (-x_0 + 2)(x - x_0)$$

Tangentti kulkee pisteen (0,2) kautta

$$2 - (-\frac{1}{2}x_0^2 + 2x_0) = (-x_0 + 2)(0 - x_0)$$

$$2+\frac{1}{2}x_0^2-2x_0 = x_0^2-2x_0$$

$$\frac{1}{2}x_0^2 = 2 \quad |\cdot 2$$

$$x_0^2 = 4 \quad |\sqrt{}$$

$$x_0 = \pm 2$$

Tangentin yhtälö, kun $x_{01} = -2$

$$y - y_0 = k_t\,(x - x_0) \quad |\ y_0 = -6,\ \ k_t = y\,'(-2) = 4$$
$$y - (-6) = 4(x - (-2))$$
$$y = 4x + 2$$

Tangentin yhtälö, kun $x_{02} = 2$

$$y - y_0 = k_t\,(x - x_0) \quad |\ y_0 = 2,\ \ k_t = y\,'(2) = 0$$
$$y - 2 = 0(x - 2)$$
$$y = 2$$

Vastaus: Tangentin yhtälöt ovat $y = 4x + 2$ ja $y = 2$.

6. Tulon ja osamäärän derivaatta

310. a) $\mathrm{D}\left[x^4(2x-5)\right] = 4x^3(2x-5)+x^4\cdot 2 = 10x^4-20x^3$

b) $\mathrm{D}\left[(3x^2-1)(x-2)\right] = 6x(x-2)+(3x^2-1)\cdot 1 = 9x^2-12x-1$

c) $\mathrm{D}[x^4(x^7 + x^6)] = 4x^3(x^7 + x^6) + x^4(7x^6 + 6x^5) = 11x^{10} + 10x^9$

Vastaus: a) $10x^4-20x^3$ b) $9x^2-12x-1$ c) $11x^{10} + 10x^9$

311. a) $\mathrm{D}\left(\dfrac{2x}{x-8}\right) = \dfrac{2(x-8)-2x\cdot 1}{(x-8)^2} = -\dfrac{16}{(x-8)^2}$

b) $\mathrm{D}\left(\dfrac{x^3}{x-3}\right) = \dfrac{3x^2(x-3)-x^3\cdot 1}{(x-3)^2} = \dfrac{2x^3-9x^2}{(x-3)^2}$

c) $\mathrm{D}\left(\dfrac{x^2+x-2}{3x-2}\right) = \dfrac{(2x+1)(3x-2)-(x^2+x-2)\cdot 3}{(3x-2)^2} = \dfrac{3x^2-4x+4}{(3x-2)^2}$

Vastaus: a) $-\dfrac{16}{(x-8)^2}$ b) $\dfrac{2x^3-9x^2}{(x-3)^2}$ c) $\dfrac{3x^2-4x+4}{(3x-2)^2}$

312. a) $\mathrm{D}\,(x^{-7}+x^{-4}) = -7x^{-8}-4x^{-5}$

b) $\mathrm{D}\left(\dfrac{x^4+6x^3-2x^2}{x^5}\right) = \mathrm{D}\left(x^{-1}+6x^{-2}-2x^{-3}\right) = -x^{-2}-12x^{-3}+6x^{-4}$

$$= -\,{}^{x^2)}\frac{1}{x^2} - {}^{x)}\frac{12}{x^3} + \frac{6}{x^4} = \frac{-x^2-12x+6}{x^4}$$

c) $D\left[\frac{(x^2-7)(2x^2+1)}{x^2}\right] = D\left[\frac{2x^4-13x^2-7}{x^2}\right] = D(2x^2-13-7x^{-2}) = 4x+14x^{-3}$

$$= {}^{x^2)}\, 4x + \frac{14}{x^3} = \frac{4x^3+14}{x^3}$$

<u>Vastaus</u>: a) $-7x^{-8}-4x^{-5}$ b) $\frac{-x^2-12x+6}{x^4}$ c) $\frac{4x^3+14}{x^3}$

313. Funktio $f(x) = x^5(x^3 + 2x)$
Derivaatta $f'(x) = 5x^4(x^3 + 2x) + x^5(3x^2 + 2) = 8x^7 + 12x^5$
Derivaatan nollakohdat

$$f'(x) = 0$$
$$8x^7 + 12x^5 = 0$$
$$x^5(8x^2 + 12) = 0$$
$$x^5 = 0 \quad \text{tai} \quad 8x^2 + 12 = 0$$
$$x = 0 \qquad \text{Ei ratkaisua}$$

<u>Vastaus</u>: Derivaatan nollakohta on $x = 0$.

314. a) Funktio $f(x) = \frac{4x}{2x+7}$

Derivaatta $f'(x) = \frac{4\cdot(2x+7)-4x\cdot 2}{(2x+7)^2} = \frac{28}{(2x+7)^2}$

Yhtälö $f'(x) = 0$

$$\frac{28}{(2x+7)^2} = 0$$
$$28 = 0$$

Ei ratkaisua

b) Funktio $f(x) = \frac{3x^2}{5x+1}$

Derivaatta $f(x) = \frac{6x(5x+1)-3x^2\cdot 5}{(5x+1)^2} = \frac{15x^2+6x}{(5x+1)^2}$

Yhtälö $f'(x) = 0$

$$\frac{15x^2+6x}{(5x+1)^2} = 0$$
$$15x^2+6x = 0$$
$$3x(5x+2) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2}{5}$$

<u>Vastaus</u>: a) Ei ratkaisua b) $x = 0$ tai $x = -\frac{2}{5}$

315. Funktio $h(x)=\dfrac{x}{f(x)}$

Derivaatta $h'(x)=\dfrac{1\cdot f(x)-x\cdot f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=\dfrac{f(x)-xf'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$

Funktion arvo $h'(-2)=\dfrac{f(-2)-(-2)\cdot f'(-2)}{\left[f(-2)\right]^2}$ $\quad |f(-2)=2$ ja $f'(-2)=6$

$$=\frac{2+2\cdot 6}{2^2}=3\frac{1}{2}$$

Vastaus: $h'(-2)=3\frac{1}{2}$

316. Käyrä $y=\dfrac{x^2+2}{x-1}$

Derivaatta $y'(x)=\dfrac{2x(x-1)-(x^2+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$

Tangentin kulmakerroin $k_t=y'(2)=\dfrac{2^2-2\cdot 2-2}{(2-1)^2}=-2$

Tangentin ja yhtälö $y-y_0=k_t(x-x_0)$ $\quad |x_0=2,\ y_0=6,\ k_t=-2$

$$y-6=-2(x-2)$$

$$y=-2x+10$$

Normaalin kulmakerroin $k_n=-\dfrac{1}{k_t}=\dfrac{1}{2}$

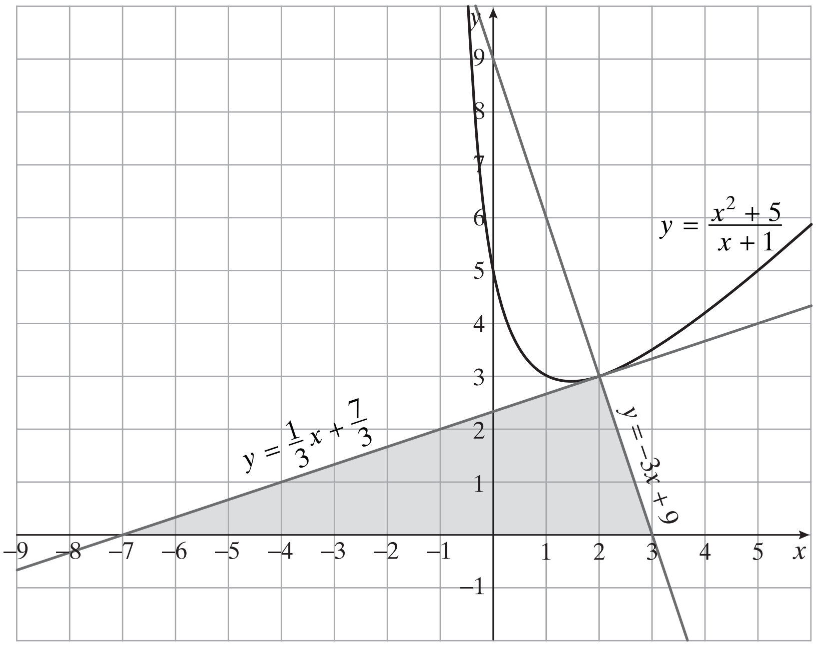
Normaalin yhtälö $y-y_0=k_n(x-x_0)$ $\quad \left|x_0=2,\ y_0=6,\ k_n=\dfrac{1}{2}\right.$

$$y-6=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$y=\frac{1}{2}x+5$$

Vastaus: Tangentin yhtälö on $y=-2x+10$ ja normaalin $y=\dfrac{1}{2}x+5$.

317.



Käyrä $y = \dfrac{x^2+5}{x+1}$

Derivaatta $y'(x) = \dfrac{2x\cdot(x+1)-(x^2+5)\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(2) = \dfrac{2^2+2\cdot 2-5}{(2+1)^2} = \dfrac{1}{3}$

Tangentin ja yhtälö $y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad \Big| x_0 = 2,\ y_0 = 3,\ k_t = \dfrac{1}{3}$

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x-2)$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

Tangentin ja *x*-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $y = 0$.

$$\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} = 0 \quad \Big| \cdot 3$$

$$x = -7$$

Normaalin kulmakerroin $k_n = -\dfrac{1}{k_t} = -3$

Normaalin yhtälö $y - y_0 = k_n(x - x_0) \quad \big| x_0 = 2,\ y_0 = 3,\ k_n = -3$

$$y - 3 = -3(x-2)$$

$$y = -3x + 9$$

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla y = 0.

$$-3x+9=0$$

$$x=3$$

Pinta-ala $A=\dfrac{\left(3-(-7)\right)\cdot 3}{2}=15$

<u>Vastaus</u>: Ala on 15.

7. Funktion kulun tutkiminen

318.

a) Funktio $h(x)=2x+5$

Derivaatta $h'(x)=2$

Derivaatan nollakohta $h'(x)=0$

$2=0$

Ei nollakohtia

Kulkukaavio

Funktio on kasvava kaikilla x:n arvoilla.

b) Funktio $f(x)=x^2-8x+1$

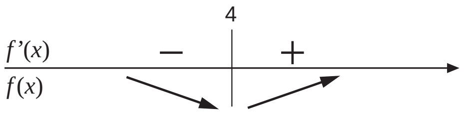
Derivaatta $f'(x)=2x-8$

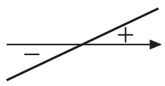
Derivaatan nollakohta $f'(x)=0$

$2x-8=0$

$x=4$

Kulkukaavio





Funktio f on kasvava, kun $x\geq 4$.

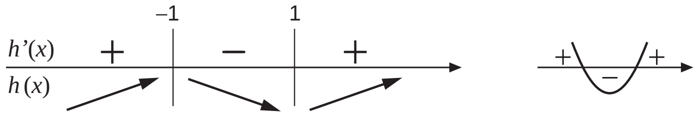
c) Funktio $h(x)=x^3-3x+1$

Derivaatta $h'(x)=3x^2-3$

Derivaatan nollakohta $h'(x)=0$

$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3 \quad |:3$$
$$x^2=1 \quad |\sqrt{\ }$$
$$x=\pm 1$$

Kulkukaavio



Funktio h on vähenevä, kun $-1 \le x \le 1$.

Vastaus: Funktio on a) kasvava kaikilla x:n arvoilla b) kasvava, kun $x \ge 4$ ja vähenevä, kun $x \le 4$ c) kasvava, kun $x \le -1$ tai $x \ge 1$ ja vähenevä, kun $-1 \le x \le 1$.

319.

a) Funktio $f(x)=12$

Derivaatta $f'(x)=0$

Koska $f'(x)=0$ kaikilla muuttujan x arvoilla, niin funktio f on kasvava ja vähenevä kaikkialla.

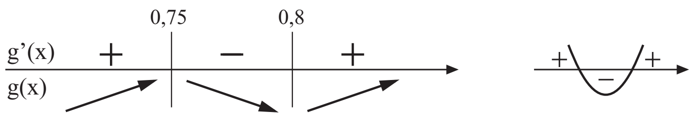
b) Funktio $g(x)=2x^3-4,65x^2+3,6x-1,25$

Derivaatta $g'(x)=6x^2-9,3x+3,6$

Derivaatan nollakohdat $g'(x)=0$

$$6x^2-9{,}3x+3{,}6=0$$
$$x=\frac{-(-9{,}3)\pm\sqrt{(-9{,}3)^2-4\cdot 6\cdot 3{,}6}}{2\cdot 6}$$
$$x_1=\frac{9{,}3+\sqrt{0{,}09}}{12}=0{,}8$$
$$x_2=\frac{9{,}3-\sqrt{0{,}09}}{12}=0{,}75$$

Kulkukaavio



Funktio g on kasvava, kun $x \le 0{,}75$ tai $x \ge 0{,}8$ ja vähenevä, kun $0{,}75 \le x \le 0{,}8$.

c) Funktio $h(x)=x^5-4x^3$

Derivaatta $h'(x)=5x^4-12x^2$

Derivaatan nollakohta $\quad h'(x) = 0$

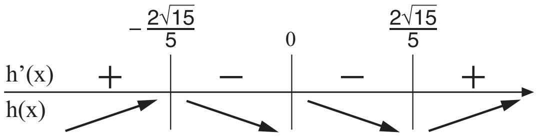
$$5x^4 - 12x^2 = 0$$

$$x^2(5x^2 - 12) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ tai } 5x^2 - 12 = 0$$

$$x = 0 \qquad x = \pm\sqrt{\frac{12}{5}} \overset{\sqrt{5})}{=} \pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2\sqrt{15}}{5} \approx \pm 1{,}55$$

Kulkukaavio



$h'(-2) = 32 > 0$

$h'(-0{,}1) = -0{,}1195 < 0$

$h'(0{,}1) = -0{,}1195 < 0$

$h'(2) = 32 > 0$

Funktio h on kasvava, kun $x \le -\frac{2\sqrt{15}}{5}$ tai $x \ge \frac{2\sqrt{15}}{5}$ ja vähenevä, kun $-\frac{2\sqrt{15}}{5} \le x \le \frac{2\sqrt{15}}{5}$.

<u>Vastaus</u>: Funktio on a) kasvava ja vähenevä kaikkialla, b) kasvava, kun $x \le 0{,}75$ tai $x \ge 0{,}8$ ja vähenevä, kun $0{,}75 \le x \le 0{,}8$, c) kasvava, kun $x \le -\frac{2\sqrt{15}}{5}$ tai $x \ge \frac{2\sqrt{15}}{5}$ ja vähenevä, kun $-\frac{2\sqrt{15}}{5} \le x \le \frac{2\sqrt{15}}{5}$.

320. Funktio $\quad y = 1{,}8x^3 - 15x^2 + 33x - 1{,}3$

Derivaatta $\quad y' = 5{,}4x^2 - 30x + 33$

Derivaatan nollakohdat $\quad y' = 0$

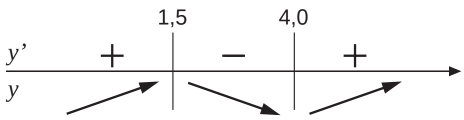
$$5{,}4x^2 - 30x + 33 = 0$$

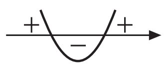
$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 5{,}4 \cdot 33}}{2 \cdot 5{,}4}$$

$$x_1 = \frac{30 + \sqrt{187{,}2}}{10{,}8} \approx 4{,}0$$

$$x_2 = \frac{30 - \sqrt{187{,}2}}{10{,}8} \approx 1{,}5$$

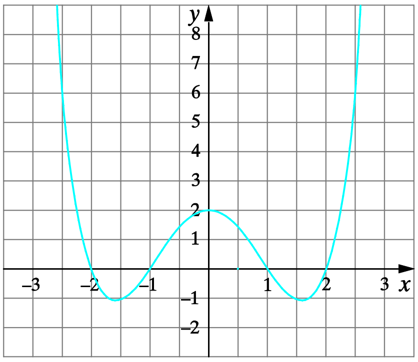
Kulkukaavio



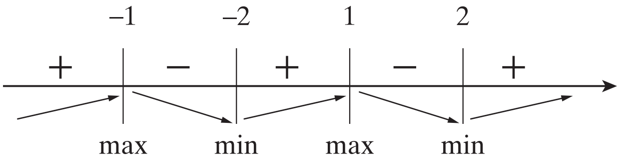


<u>Vastaus</u>: Polku oli alamäkeä välillä [1,5 km; 4,0 km].

321.



Kulkukaavio



Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava väleillä $]-\infty,-2]$, $[-1,1]$ ja $[2,\infty[$, vähenevä väleillä $[-2,-1]$ ja $[1,2]$. Maksimikohdat $x = -2$ ja $x = 1$, minikohdat $x = -1$ ja $x = 2$

Derivaatan kuvaajasta nähdään, että derivaatan eli tangentin kulmakertoimen arvo kohdassa $x = 0$ on 2.
<u>Vastaus</u>: Kasvava väleillä $]-\infty,-2]$, $[-1,1]$ ja $[2,\infty[$, vähenevä väleillä $[-2,-1]$ ja $[1,2]$.
Maksimikohdat $x = -2$ ja $x = 1$, minikohdat $x = -1$ ja $x = 2$, tangentin kulmakerroin 2

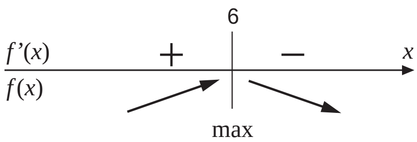
322. a) Funktio $f(x) = -x^2 + 12x$

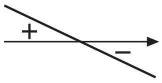
Derivaatta $f'(x) = -2x + 12$

Derivaatan nollakohdat $-2x + 12 = 0$

$x = 6$

Kulkukaavio





Maksimiarvo $f(6) = 36$

b) Funktio $f(x) = x^3 - 3x - 2$

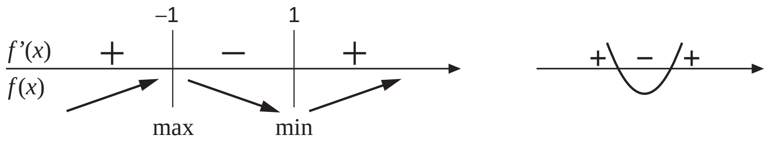
Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 3$

Derivaatan nollakohdat $3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3 \quad |:3$

$$x^2 = 1 \quad \Big|\sqrt{}$$
$$x = \pm 1$$

Kulkukaavio



Maksimiarvo $f(-1) = 0$
Minimiarvo $f(1) = -4$

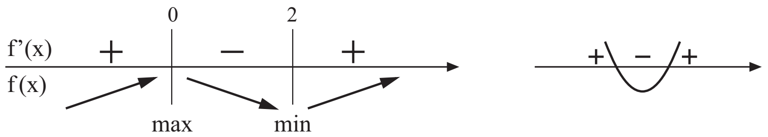
c)

Funktio $f(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4$

Derivaatta $f'(x) = 5x^4 - 10x^3$

Derivaatan nollakohdat $5x^4 - 10x^3 = 0$
$5x^3(x - 2) = 0$
$x = 0$ tai $x = 2$

Kulkukaavio



Maksimiarvo $f(0) = 0$
Minimiarvo $f(2) = -8$

Vastaus: a) Maksimikohta 6, maksimiarvo 36 b) maksimikohta –1, maksimiarvo 0, minimikohta 1, minimiarvo –4 c) maksimikohta 0, maksimiarvo 0, minimikohta 2, minimiarvo –8

323.
a)

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4}, \quad x \neq 0$$

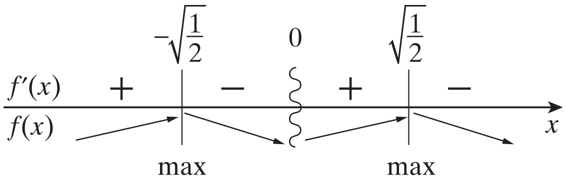
$$f'(x) = \frac{4x \cdot x^4 - (2x^2 - 1)4x^3}{(x^4)^2} = \frac{4x^5 - 8x^5 + 4x^3}{x^8} = \frac{4x^3(-2x^2 + 1)}{x^8}$$

$$4x^3(-2x^2 + 1) = 0$$

$x = 0$ tai $-2x^2 + 1 = 0$

ei käy $\quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Kulkukaavio



$f'(-1) > 0$

$f'(-0{,}1) < 0$

$f'(0{,}1) > 0$

$f'(1) < 0$

maksimikohta $-\sqrt{\frac{1}{2}}$, maksimiarvo $f(-\sqrt{\frac{1}{2}}) = \dfrac{2(-\sqrt{\frac{1}{2}})^2 - 1}{(-\sqrt{\frac{1}{2}})^4} = 0$ ja maksimikohta $\sqrt{\frac{1}{2}}$,

maksimiarvo $f(\sqrt{\frac{1}{2}}) = \dfrac{2(\sqrt{\frac{1}{2}})^2 - 1}{(\sqrt{\frac{1}{2}})^4} = 0$

b)

$f(x) = (1 - x^3)(1 - x^2) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$

$f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2x$

$5x^4 - 3x^2 - 2x = 0$

$x(5x^3 - 3x - 2) = 0$

$x = 0$ tai $5x^3 - 3x - 2 = 0$

kokeilemalla nähdään, että yksi juuri on $x = 1$

Suoritetaan jakolasku

$$
\begin{array}{r l}
 & 5x^2 + 5x + 2 \\
x - 1 \overline{)} & 5x^3 - 3x - 2 \\
 & \underline{\mp 5x^3 \pm 5x^2} \\
 & 5x^2 - 3x \\
 & \underline{\mp 5x^2 \pm 5x} \\
 & 2x - 2 \\
 & \underline{\mp 2x \pm 2} \\
 & 0
\end{array}
$$

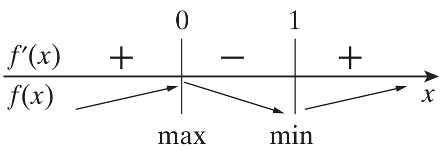
$5x^2 + 5x + 2 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{-15}}{10}$$

ei juuria

Kulkukaavio



$f'(-1) > 0$

$f'(0{,}5) < 0$

$f'(2) > 0$

maksimikohta 0, maksimiarvo $f(0) = (1-0^3)(1-0^2) = 1$

minimikohta 1, minimiarvo $f(1) = (1-1^3)(1-1^2) = 0$

Vastaus: a) maksimikohta $-\sqrt{\frac{1}{2}}$, maksimiarvo 0 ja maksimikohta $\sqrt{\frac{1}{2}}$, maksimiarvo 0

b) maksimikohta 0, maksimiarvo 1 ja minimikohta 1, minimiarvo 0.

324.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$$

$$f'(-1) = 0$$

$$3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + 9 = 0$$

$$a = 6$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

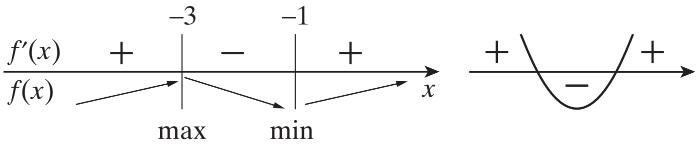
$$3x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -1$$

Kulkukaavio



minimiarvo $f(-1) = (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) = -4$

maksimiarvo $f(-3) = (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) = 0$

Vastaus: $a = 6$, minimiarvo −4 ja maksimiarvo 0

325.

$$f(x) = \frac{a - x^2}{x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x(x+2) - (a - x^2) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-x^2 - 4x - a}{(x+2)^2}$$

$$f'(-3)=0$$

$$\frac{-(-3)^2-4\cdot(-3)-a}{(-3+2)^2}=0$$

$$a=3$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2}$$

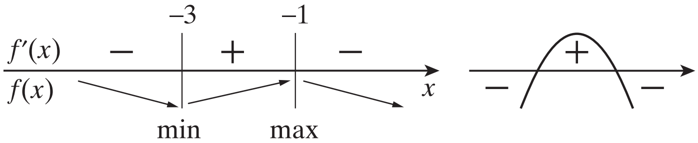
$$-x^2-4x-3=0$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)}}{2\cdot(-1)}$$

$$x_1=-3$$

$$x_2=-1$$

Kulkukaavio



minimiarvo $f(-3)=\dfrac{3-(-3)^2}{-3+2}=6$

<u>Vastaus</u>: a = 3, minimiarvo 6

326.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$\begin{cases} f'(-2)=3\cdot(-2)^2+2a\cdot(-2)+b=0 \\ f'(1)=3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a+b=-12 \quad \cdot(-1) \\ 2a+b=-3 \end{cases}$$

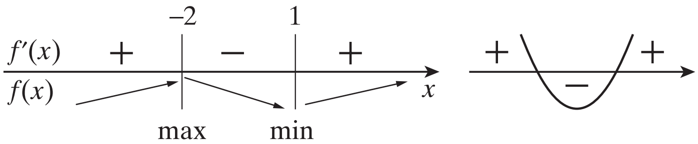
$$6a=9$$

$$a=\frac{3}{2}$$

$$2\cdot\frac{3}{2}+b=-3$$

$$b=-6$$

Kulkukaavio



minimiarvo

$$f(1) = 8\frac{1}{2}$$

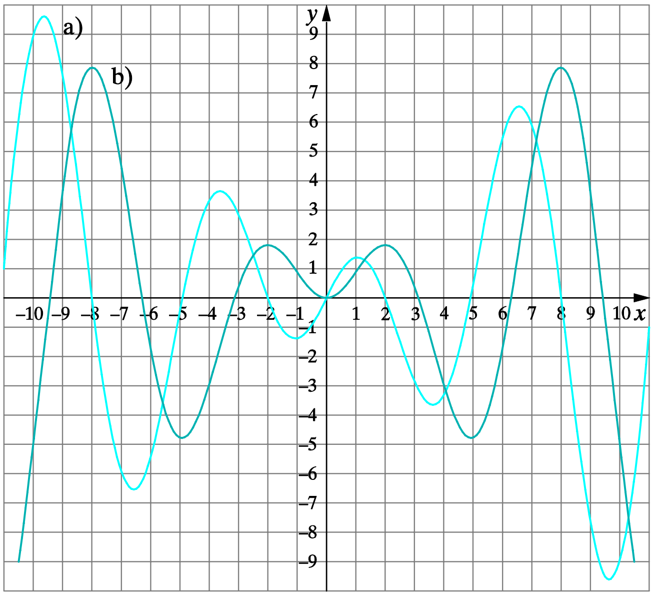
$$1^3 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + c = 8\frac{1}{2}$$

$$c = 12$$

Vastaus: $a = \frac{3}{2}$, $b = -6$, $c = 12$

8. Polynomifunktion kuvaajan piirtäminen

327.



Kuvaaja a) on derivaattafunktion kuvaaja ja b) funktion kuvaaja, koska funktion a) nollakohdissa on funktion b) ääriarvokohdat.

328.

a)

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

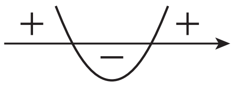
$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$3x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \approx \pm 0,58$$

kulkukaavio

		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗	x

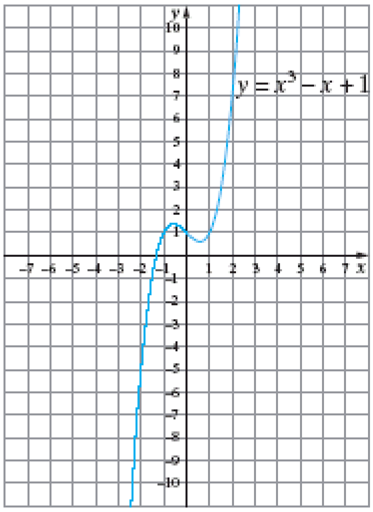


Funktio on kasvava, kun $x \le -\sqrt{\frac{1}{3}}$ tai $x \ge \sqrt{\frac{1}{3}}$ ja vähenevä, kun $-\sqrt{\frac{1}{3}} \le x \le \sqrt{\frac{1}{3}}$

maksimiarvo $f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = (-\sqrt{\frac{1}{3}})^3 - (-\sqrt{\frac{1}{3}}) + 1 \approx 1{,}38$

minimiarvo $f(\sqrt{\frac{1}{3}}) = (\sqrt{\frac{1}{3}})^3 - (\sqrt{\frac{1}{3}}) + 1 \approx 0{,}62$

x	y
-2,5	-12,13
-2	-5,00
-1,5	-0,88
-1	1,00
-0,5	1,38
0	1,00
0,5	0,63
1	1,00
1,5	2,88
2	7,00
2,5	14,13



b)

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 4$

$f'(x) = x^3 - 6x$

$x^3 - 6x = 0$

$x(x^2 - 6) = 0$

$x = 0$ tai $x = \pm\sqrt{6} \approx \pm 2{,}45$

kulkukaavio

		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$		
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘	min	↗	x

$f'(-3) < 0$

$f'(-1) > 0$

$f'(1) < 0$

$f(3) > 0$

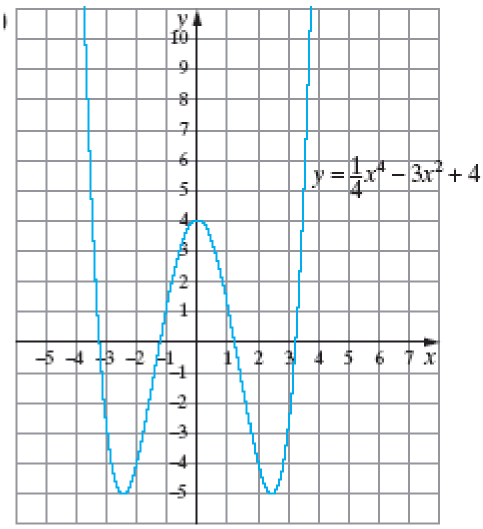
Funktio on kasvava, kun $-\sqrt{6} \le x \le 0$ tai $x \ge \sqrt{6}$ ja vähenevä, kun $x \le -\sqrt{6}$ tai $0 \le x \le \sqrt{6}$

maksimiarvo $f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$

minimiarvo $f(-\sqrt{6}) = \frac{1}{4} \cdot (-\sqrt{6})^4 - 3 \cdot (-\sqrt{6})^2 + 4 = -5$

minimiarvo $f(\sqrt{6}) = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{6})^4 - 3 \cdot (\sqrt{6})^2 + 4 = -5$

x	y
-4	20,00
-3,5	4,77
-3	-2,75
-2,5	-4,98
-2	-4,00
-1,5	-1,48
-1	1,25
-0,5	3,27
0	4,00
0,5	3,27
1	1,25
1,5	-1,48
2	-4,00
2,5	-4,98
3	-2,75
3,5	4,77
4	20,00



329.

a)

$f(x) = x^3 - 150x$

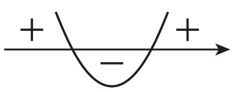
$f'(x) = 3x^2 - 150$

$3x^2 - 150 = 0$

$x = \pm 5\sqrt{2} \approx \pm 7{,}07$

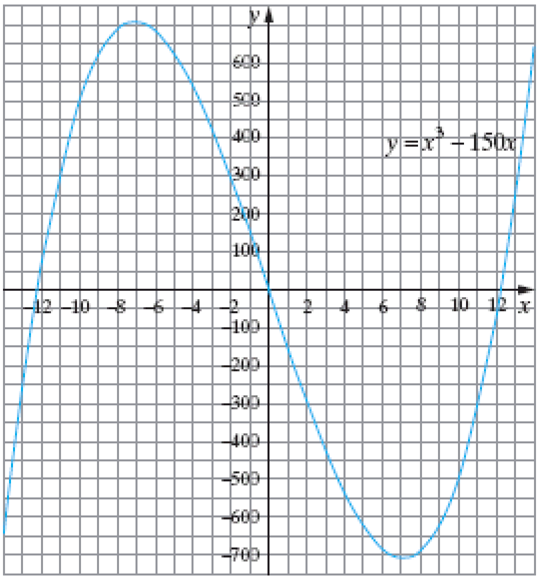
kulkukaavio

		$-5\sqrt{2}$		$5\sqrt{2}$		
$f'(x)$	+		–		+	
$f(x)$	↗		↘		↗	x
		max		min		



Funktio on kasvava, kun $x \le -5\sqrt{2}$ tai $x \ge 5\sqrt{2}$ ja vähenevä, kun $-5\sqrt{2} \le x \le 5\sqrt{2}$
maksimiarvo $f(-5\sqrt{2}) = (-5\sqrt{2})^3 - 150 \cdot (-5\sqrt{2}) \approx 707$
minimiarvo $f(5\sqrt{2}) = (5\sqrt{2})^3 - 150 \cdot (5\sqrt{2}) \approx -707$

x	y
-14	-644,00
-13	-247,00
-12	72,00
-11	319,00
-10	500,00
-9	621,00
-8	688,00
-7	707,00
-6	684,00
-5	625,00
-4	536,00
-3	423,00
-2	292,00
-1	149,00
0	0,00
1	-149,00
2	-292,00
3	-423,00
4	-536,00
5	-625,00
6	-684,00
7	-707,00
8	-688,00
9	-621,00
10	-500,00
11	-319,00
12	-72,00
13	247,00
14	644,00



b)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{5}{4}x^4 + x^2$$

$$f'(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$$

$$3x^5 - 5x^3 + 2x = 0$$

$$x(3x^4 - 5x^2 + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 3x^4 - 5x^2 + 2 = 0 \quad \Big|\,\text{sij. } t = x^2$$

$$3t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3}$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6}$$

$$t_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$t_2 = \frac{5+1}{6} = 1$$

Sijoitetaan $t = x^2$

$$x^2 = \frac{2}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

kulkukaavio

		-1		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		1		x
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$			
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

$f'(-2) < 0$

$f'(-0{,}9) > 0$

$f'(-0{,}5) < 0$

$f'(0{,}5) > 0$

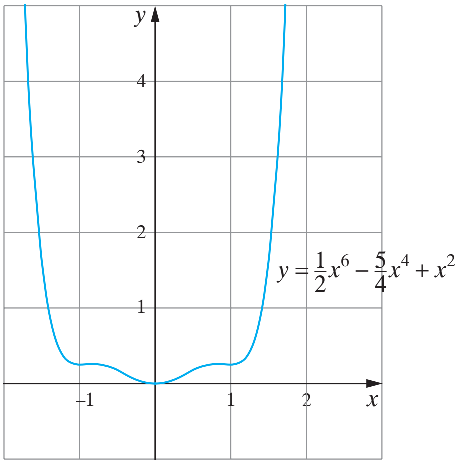
$f'(0{,}9) < 0$

$f'(2) > 0$

Funktio on kasvava, kun $-1 \le x \le -\sqrt{\frac{2}{3}}$ tai $0 \le x \le \sqrt{\frac{2}{3}}$ tai $x \ge 1$ ja vähenevä, kun $x \le -1$ tai $-\sqrt{\frac{2}{3}} \le x \le 0$ tai $\sqrt{\frac{2}{3}} \le x \le 1$

maksimiarvot $f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) \approx 0{,}26$ ja $f(\sqrt{\frac{2}{3}}) \approx 0{,}26$

minimiarvot $f(-1) = 0{,}25$ ja $f(0) = 0$ sekä $f(1) = 0{,}25$



330.

$f(x) = x^4 + ax^2 + 1$

Kun polynomifunktion asteluku on parillinen, on funktiolla vähintään 1 ääriarvokohta.
Funktion f korkeimman asteen termin kerroin on positiivinen, joten funktiolla on ainakin 1 minimikohta kaikilla a:n arvoilla.
Polynomifunktion ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohdissa.

$f\,'(x) = 4x^3 + 2ax$

Derivaatan nollakohdat

$4x^3 + 2ax = 0$

$2x(2x^2 + a) = 0$

$x = 0$ tai $2x^2 + a = 0$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$$

$$-\frac{a}{2} > 0$$

$$a < 0$$

Kohdassa $x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$ derivaatalla on nollakohta, kun $a < 0$.

Jos $a > 0$, derivaatalla on vain nollakohta $x = 0$, joka on funktion minimikohta.

Kulkukaavio

		$-\sqrt{-\frac{a}{2}}$		0		$\sqrt{-\frac{a}{2}}$		x
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘	min	↗	

b) Funktiolla on ääriarvopisteet kohdissa $x = 0$ ja $x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$.

Kun $x = 0$, on $y = 0^4 - a \cdot 0^2 + 1 = 1$ eli ääriarvopiste on (0,1).
Muut ääriarvopisteet

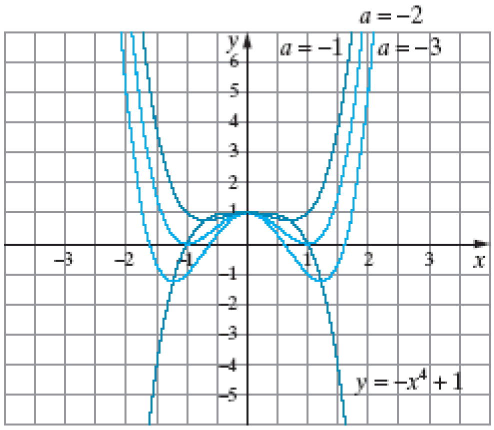
$2x^2 + a = 0$

$a = -2x^2$

$f(x) = x^4 + ax^2 + 1 = x^4 - 2x^2x^2 + 1 = -x^4 + 1$

Koska myös piste (0,1) toteuttaa yhtälön $y = -x^4 + 1$, funktion kaikki ääriarvopisteet sijaitsevat käyrällä $y = -x^4 + 1$.

c) Piirretään käyrä $y = -x^4 + 1$sekä funktion $f(x) = x^4 + ax^2 + 1$ kuvaajia, kun a =−1, −2 ja −3.



Vastaus: a) Kaikilla a:n arvoilla b) funktion kaikkia ääriarvopisteet sijaitsevat käyrällä $y = -x^4 + 1$.

9. Funktion suurin ja pienin arvo

331.

a) Funktio $f(x) = -2x^2 + 9x + 5, \quad x \in [-3,2]$

Derivaatta $f'(x) = -4x + 9$

Derivaatan nollakohdat $-4x + 9 = 0$

$x = 2\frac{1}{4}$ Ei kuulu välille $[-3,2]$

Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

$f(-3) = -40$ pienin

$f(2) = 15$ suurin

b)

Funktio $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8, \quad x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$

Derivaatta $f'(x) = 3x^2 + 2x - 10$

Derivaatan nollakohdat

$3x^2 + 2x - 10 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{124}}{6} = -2{,}19.. < -1 \text{ ei käy}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{124}}{6} = 1{,}52.. > \frac{3}{2} \text{ ei käy}$$

Polynomifunktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 10 \cdot (-1) + 8 = 18$ suurin

$f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^3 + (\frac{3}{2})^2 - 10 \cdot (\frac{3}{2}) + 8 = -\frac{11}{8}$ pienin

Vastaus: a) Pienin arvo −40, suurin 15 b) Pienin arvo $-\frac{11}{8}$, suurin 18

332. a) Funktio $f(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{21}{4}x + 12, \quad x \in [-1{,}2]$

Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 12x + \frac{21}{4}$

Derivaatan nollakohdat $3x^2 - 12x + \frac{21}{4} = 0$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{21}{4}}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{81}}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{81}}{6} = 3\frac{1}{2} \quad \text{ei kuulu välille } [-1{,}2]$$

Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

$f(-1) = -\frac{1}{4}$ pienin

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 13\frac{1}{4}$ suurin

$f(2) = 6\frac{1}{2}$

b) Funktio $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5, \quad x \in [-2, 3]$

Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 8x$

Derivaatan nollakohdat

$$3x^2 - 8x = 0$$
$$x(3x - 8) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{3}{8}$$

Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

$f(-2) = -19$ pienin

$f(0) = 5$ suurin

$f\left(\frac{8}{3}\right) = -4\frac{13}{27}$

$f(3) = -4$

<u>Vastaus</u>: a) Pienin arvo $-\frac{1}{4}$, suurin $13\frac{1}{4}$ b) Pienin arvo –19, suurin 5

333.

a)

$f(x) = x + \frac{1}{x}$, välillä $[-3, -\frac{1}{2}]$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$\frac{x^2 - 1}{x^2} = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x_1 = -1$

$x_2 = 1$ ei kuulu välille

Funktio on jatkuva välillä $[-3, -\frac{1}{2}]$ ja derivoituva vastaavalla avoimella välillä, joten funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

$f(-3) = -3 + \frac{1}{-3} = -3\frac{1}{3}$ pienin

$f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$ suurin

$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2\frac{1}{2}$

b)

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$$, välillä $[-100,100]$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+1)-(x^2-2x+1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}=0$$

$$2x^2-2=0$$

$$x=\pm 1$$

Funktio on jatkuva välillä $[-100,100]$ ja derivoituva vastaavalla avoimella välillä, joten funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

$$f(-100)=\frac{(-100-1)^2}{(-100)^2+1}=\frac{10\ 201}{10\ 001}$$

$$f(-1)=\frac{(-1-1)^2}{(-1)^2+1}=2 \text{ suurin}$$

$$f(1)=\frac{(1-1)^2}{1^2+1}=0 \text{ pienin}$$

$$f(100)=\frac{(100-1)^2}{(100)^2+1}=\frac{9\ 801}{10\ 001}$$

<u>Vastaus</u>: a) pienin $-3\frac{1}{3}$, suurin -2 b) pienin 0, suurin 2

334. Funktio $f(x)=x\cdot\left(-2x+\frac{1}{2}\right)^2=4x^3-2x^2+\frac{1}{4}x,\quad x\in\left]0,\frac{1}{4}\right[$

Derivaatta $f'(x)=12x^2-4x+\frac{1}{4}$

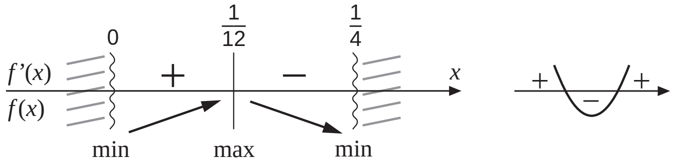
Derivaatan nollakohdat $12x^2-4x+\frac{1}{4}=0$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 12\cdot\frac{1}{4}}}{2\cdot 12}$$

$$x_1=\frac{4-\sqrt{4}}{24}=\frac{1}{12}$$

$$x_2=\frac{4+\sqrt{4}}{24}=\frac{1}{4}$$ ei kuulu välille $\left]0,\frac{1}{4}\right[$

Kulkukaavio



Suurin arvo ainoassa maksimikohdassa $f\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{108}$

<u>Vastaus</u>: Luku $\frac{1}{12}$ antaa lausekkeelleele suurimman arvon.

335. Funktio $f(r) = \pi \cdot r^2 \cdot (2 - r) = 2\pi r^2 - \pi r^3, \quad r > 0$

Derivaatta $\quad f'(r) = 4\pi r - 3\pi r^2$

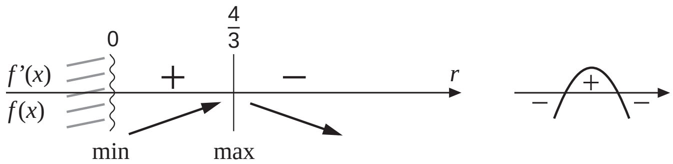
Derivaatan nollakohdat $4\pi r - 3\pi r^2 = 0$

$$\pi r(4 - 3r) = 0$$

$$\pi r = 0 \quad \text{tai} \quad 4 - 3r = 0$$

$$r = 0 \quad \text{tai} \quad r = \frac{4}{3}$$

Kulkukaavio



<u>Vastaus</u>: Suurin arvo, kun $r = \frac{4}{3}$.

336.

$f(x) = -x^6 + 6x^4 - 36$

$f'(x) = -6x^5 + 24x^3$

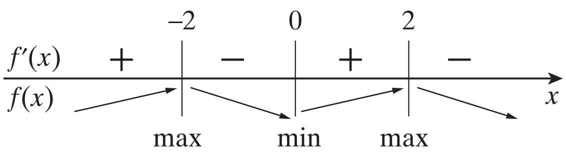
$-6x^5 + 24x^3 = 0$

$6x^3(-x^2 + 4) = 0$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -x^2 + 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

Kulkukaavio



$f'(-3) > 0$

$f'(-1) < 0$

$f'(1) > 0$

$f'(3) < 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktion suurin arvo on jompi kumpi maksimeista

$f(-2) = -(-2)^6 + 6 \cdot (-2)^4 - 36 = -4$

$f(2) = -2^6 + 6 \cdot 2^4 - 36 = -4$

Koska funktion suurin arvo negatiivinen, funktio saa vain negatiivisia arvoja.

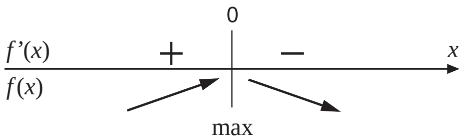
337. Funktio $f(x) = -x^4 - 5$

Derivaatta $f'(x) = -4x^3$

Derivaatan nollakohdat $-4x^3 = 0$

$x = 0$

Kulkukaavio



$f'(-1) = 4 > 0$

$f'(1) = -4 < 0$

Funktion *f* maksimiarvo $f(0) = -5$ on samalla *f*:n suurin arvo.

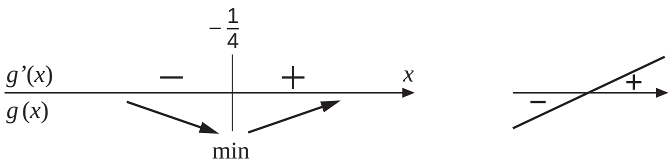
Funktio $g(x) = 2x^2 + x + 3$

Derivaatta $g'(x) = 4x + 1$

Derivaatan nollakohdat $4x + 1 = 0$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Kulkukaavio



Funktion *g* minimiarvo $g\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\frac{7}{8}$ on samalla *g*:n pienin arvo

Koska *f*:n suurin arvo –5 on pienempi kuin *g*:n pienin arvo $2\frac{7}{8}$, niin kuvaajat eivät leikkaa toisiaan.

338. Paraabelin huipun *x*-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Paraabeli $y = 3x^2 + ax + 5$

Derivaatta $y' = 6x + a$

$$y'(1) = 0$$
$$6 \cdot 1 + a = 0$$
$$a = -6$$

<u>Vastaus</u>: $y = 3x^2 - 6x + 5$

339. Paraabeli kulkee pisteen (0,–3), joten pisteen koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön.

Sijoitetaan pisteen (0, –3) koordinaatit paraabelin yhtälöön $y = ax^2 + bx + c$.

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -3$$
$$c = -3$$

Sijoitetaan c ja pisteen (1, –4) koordinaatit paraabelin yhtälöön.

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 3 = -4$$
$$a + b = -1$$

Paraabelin huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$

Derivaatta $y' = 2ax + b$

Derivaatan nollakohta $2ax + b = 0$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Paraabelin huippu on pisteessä (1,–4), joten saadaan yhtälö

$$-\frac{b}{2a} = 1$$

$b = -2a$ sijoitetaan yhtälöön $a + b = -1$

$$a - 2a = -1$$

$a = 1$ sijoittamalla saadaan

$b = -2a = -2$

<u>Vastaus</u>: $y = x^2 - 2x - 3$

340. Funktio $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$

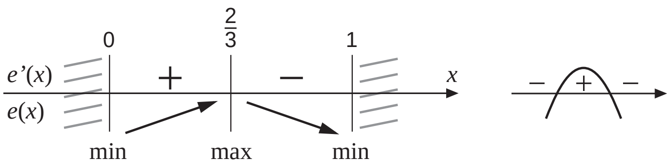
Erotus $e(x) = f(x) - g(x) = x^2 - x^3$, $x \in [0,1]$

Derivaatta $e'(x) = 2x - 3x^2$

Derivaatan nollakohdat $2x - 3x^2 = 0$

$$x(2 - 3x) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2 - 3x = 0$$
$$x = \frac{2}{3}$$

Kulkukaavio



Maksimi $e\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$

Vastaus: Suurin pystysuora etäisyys $\frac{4}{27}$, kun $x = \frac{2}{3}$

10. Ääriarvosovelluksia

341. Luku x

Tutkitaan funktiota $f(x) = x^2 - x^4, \quad x < 0$

Derivaatta $f'(x) = 2x - 4x^3$

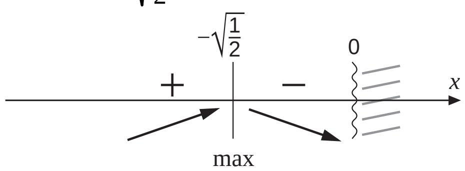
Derivaatan nollakohdat $2x - 4x^3 = 0$

$$2x(1 - 2x^2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 1 - 2x^2 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Juuret 0 ja $\sqrt{\frac{1}{2}}$ eivät kuulu välille $x < 0$



Ainoa maksimi $f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$ on suurin arvo.

Vastaus: Luvun $-\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

342. Luku x

Tutkitaan funktiota $f(x) = x - x^4$

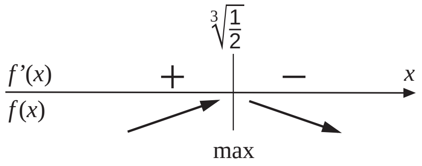
Derivaatta $f'(x) = 1 - 4x^3$

Derivaatan nollakohdat $1 - 4x^3 = 0$

$$4x^3 = 1$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0{,}63$$

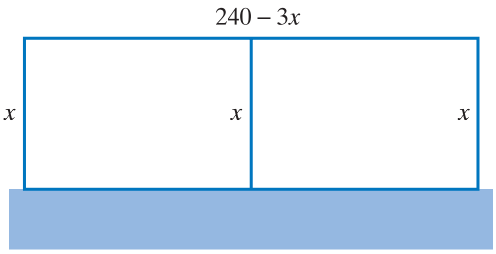
Kulkukaavio



$f'(0) = 1 > 0$
$f(1) = -2 < 0$

<u>Vastaus</u>: Luku $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

343.



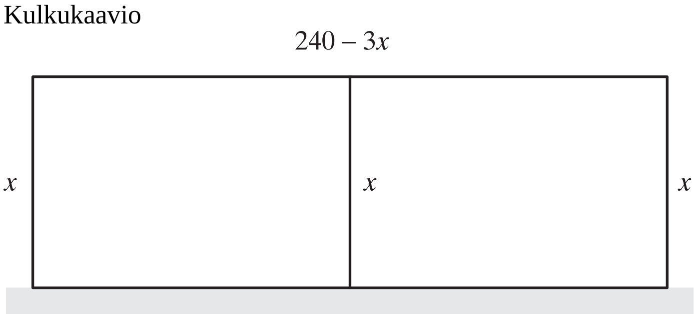
Ala $\quad A(x) = x(240-3x) = 240x - 3x^2$

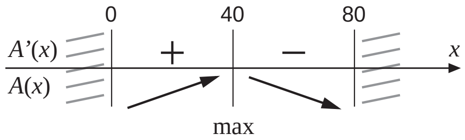
Derivaatta $A'(x) = 240 - 6x$

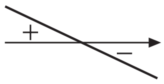
Derivaatan nollakohdat $\quad 240 - 6x = 0$

$$x = 40$$

Kulkukaavio



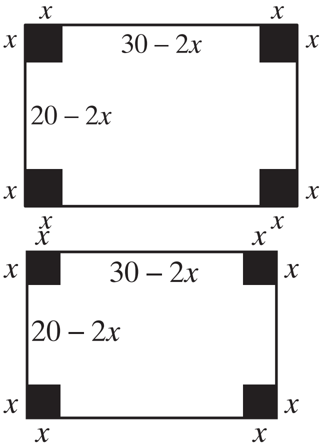




Ala suurin, kun toinen sivu 40 ja toinen $240 - 3 \cdot 40 = 120$

<u>Vastaus</u>: Rantaa vastaan kohtisuora sivu 40 m ja rannan suuntainen 120 m.

344.



Pois leikattavan neliön sivun pituus $x \geq 0$
$20 - 2x \geq 0$ eli $x \leq 10$
$30 - 2x \geq 0$ eli $x \leq 15$
Joten $0 \leq x \leq 10$

Tilavuus $V(x) = x(20-2x)(30-2x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

Derivaatta $V'(x) = 12x^2 - 200x + 600$

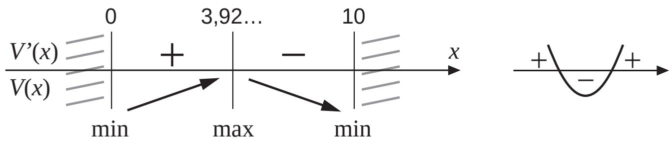
Derivaatan nollakohdat $12x^2 - 200x + 600 = 0$

$$x = \frac{-(-200) \pm \sqrt{(-200)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 600}}{2 \cdot 12}$$

$$x_1 = \frac{200 - \sqrt{11\,200}}{24} = 3{,}923\ldots$$

$$x_2 = \frac{200 + \sqrt{11\,200}}{24} = 12{,}749\ldots \quad \text{ei käy}$$

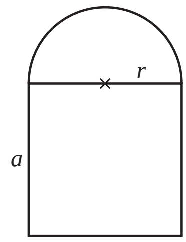
Kulkukaavio



Maksimi $V(3{,}923\ldots) = 1056{,}305\ldots \approx 1100$

<u>Vastaus</u>: Tilavuuden lauseke $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$, $0 \leq x \leq 10$ ja suurin tilavuus 1 100 cm^3.

345. Ikkunan ympärysmitta



$\pi r + 2r + 2a = 12{,}0$

$$a = \frac{12{,}0 - \pi r - 2r}{2}$$

Ala $A(r) = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2ra = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2r \cdot \frac{12{,}0 - \pi r - 2r}{2} = \left(-\frac{1}{2}\pi - 2\right)r^2 + 12{,}0r$

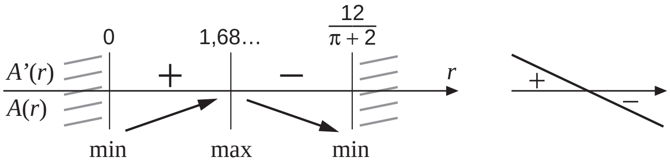
Derivaatta $A'(r) = \left(-\frac{1}{2}\pi - 2\right) \cdot 2r + 12{,}0 = (-\pi - 4)r + 12{,}0$

Derivaatan nollakohta $(-\pi - 4)r + 12{,}0 = 0$

$$(-\pi - 4)r = -12{,}0 \quad \big| :(-\pi - 4)$$

$$r = \frac{-12{,}0}{-\pi - 4} = \frac{12{,}0}{\pi + 4} = 1{,}680\ldots \approx 1{,}68$$

Kulkukaavio



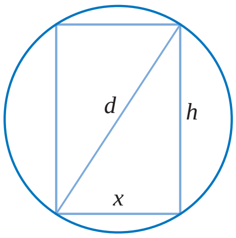
Suorakulmion korkeus

$$a = \frac{12{,}0 - \pi r - 2r}{2} = 6 - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)r = \left(6 - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\right) \cdot \frac{12}{\pi + 4} = 6 - \frac{6\pi + 12}{\pi + 4} = \frac{12}{\pi + 4} = r$$

Maksimi $A\left(\frac{12}{\pi + 4}\right) = \left(-\frac{1}{2}\pi - 2\right) \cdot \left(\frac{12}{\pi + 4}\right)^2 + 12 \cdot \frac{12}{\pi + 4} = 10{,}081\ldots \approx 10{,}1$

<u>Vastaus</u>: Puoliympyrän säde ja suorakulmion korkeus 1,68 m, jolloin ala on 10,1 m^2.

346.



Suorakulmaisesta kolmiosta $x^2 + h^2 = 25{,}0^2$

$$h = \sqrt{25{,}0^2 - x^2}$$

Tulo $\quad T(x) = xh^2 = x \cdot \left(\sqrt{25{,}0^2 - x^2}\right)^2 = -x^3 + 625x, \quad x > 0$

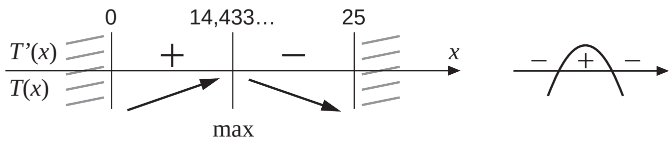
Derivaatta $T'(x) = -3x^2 + 625$

Derivaatan nollakohdat $-3x^2 + 625 = 0$

$$x = \pm\sqrt{\frac{625}{3}} \qquad |\, x > 0$$

$$x = 14{,}433\ldots \approx 14{,}4$$

Kulkukaavio



Hirren korkeus $h = \sqrt{25{,}0^2 - 14{,}433\ldots^2} \approx 20{,}4$

Vastaus: Hirren leveys x = 14,4 cm ja korkeus h = 20,4 cm.

347.

yhden euron korotusten määrä x

Tuottofunktio

$$T(x) = (5{,}00 + x)(4000 - 400x) - 3{,}00(4\,000 - 400x)$$
$$= 20\,000 - 2000x + 4\,000x - 400x^2$$
$$= -400x^2 + 3200x + 8000$$

$$T'(x) = -800x + 3200$$
$$-800x + 3200 = 0$$
$$x = 4$$

Tuottofunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa x = 4.

Tuotteen hinta 5 € + 4 € = 9 €

Vastaus: 9 €

348.

Suoran yhtälö

$y = -x - 3$

$x + y + 3 = 0$

Paraabelin piste (x, x^2)

Suoran ja paraabelin pisteen etäisyys

$$d(x) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad |\; a = 1, b = 1, c = 3, x_0 = x, y_0 = x^2$$
$$= \frac{|1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$
$$= \frac{|x^2 + x + 3|}{\sqrt{2}}$$

Tutkitaan funktiota $f(x) = x^2 + x + 3$

$f\ '(x) = 2x + 1$
$2x + 1 = 0$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Funktion $f(x) = x^2 + x + 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa pienimmän arvonsa huipussa $x = -\frac{1}{2}$.

f:n pienin arvo

$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}) + 3 = 2\frac{3}{4} > 0$

Koska f:n pienin arvo on positiivinen, saa etäisyysfunktio $d(x) = \frac{|x^2 + x + 3|}{\sqrt{2}}$ pienimmän arvonsa, kun $f(x) = x^2 + x + 3$ saa pienimmän arvonsa eli kohdassa $x = -\frac{1}{2}$.

Pienin etäisyys

$$d(-\frac{1}{2}) = \frac{\left|(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}) + 3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{11}{4\sqrt{2}} \approx 1{,}94$$

<u>Vastaus</u>: $\frac{11}{4\sqrt{2}} \approx 1{,}94$

Harjoituskoe 1

1. a) Funktio $f(x) = -\frac{1}{5}x^5 + 2x^4 - 2x + k$, $k \in \mathbb{R}$

Derivaatta $f\,'(x) = -\frac{1}{5} \cdot 5x^4 + 2 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 1 + 0 = -x^4 + 8x^3 - 2$

b) Funktio $g(x) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

Derivaatta $g\,'(x) = 4 \cdot 2x + 4 \cdot 1 + 0 = 8x + 4$

c) Funktio $h(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Derivaatta $h\,'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

<u>Vastaus</u>: a) $f\,'(x) = -x^4 + 8x^3 - 2$ b) $g\,'(x) = 8x + 4$ c) $h\,'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

2. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)}{2-4}=-1-\sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}[1:(\dfrac{2}{x-1}+1)]=\lim\limits_{x\to 1}[1:(\dfrac{x+1}{x-1})]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1-1}{1+1}=\dfrac{0}{2}=0$

<u>Vastaus</u>: a) $-1-\sqrt{2}$ b) 0

3. a) Funktion nollakohdilla tarkoitetaan niitä muuttujan *x* arvoja, joissa kuvaaja joko leikkaa tai sivuaa *x*-akselia.
Kuvasta saadaan $x\approx -4$, $x\approx 0$ ja $x\approx 4$.
Funktion derivaattafunktio saa arvon nolla funktion ääriarvokohdissa. Kuvasta $x\approx -2$ ja $x\approx 2$.

b) Laaditaan derivaattafunktion perusteella funktion kulkukaavio.
Kulkukaavio

		-4		0		4		
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	x
		min		max		min		

Kulkukaaviosta nähdään, että funktion minimit ovat kohdissa $x\approx -4$ ja $x\approx 4$ sekä maksimi kohdassa $x\approx 0$.

Funktion kohtaan $x=2$ piirretyn tangentin kulmakerroin on sama kuin funktion derivaatan arvo tässä kohdassa. Kuvaajasta $k=f'(2)\approx -2$.

<u>Vastaus</u>: a) Funktion nollakohdat $x\approx -4$, $x\approx 0$ ja $x\approx 4$. Derivaatan nollakohdat $x\approx -2$ ja $x\approx 2$
b) minimikohdat $x\approx -4$ ja $x\approx 4$, maksimikohta $x\approx 0$, $k\approx -2$.

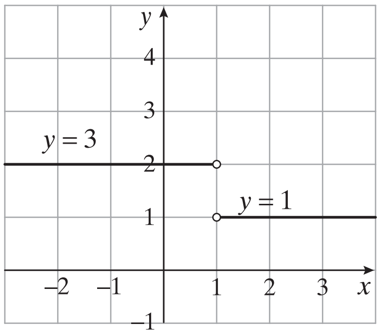
4. $f(x)=2x-|x-1|=\begin{cases}2x-(-x+1), & x-1<0\\ 2x-(x-1), & x-1\geq 0\end{cases}=\begin{cases}3x-1, & x<1\\ x+1, & x\geq 1\end{cases}$

Itseisarvo ei muuta funktion jatkuvuutta, joten polynomifunktiona $f(x)$ on jatkuva aina.

Derivaatta $f'(x)=\begin{cases}3, & x<1\\ 1, & x>1\end{cases}$

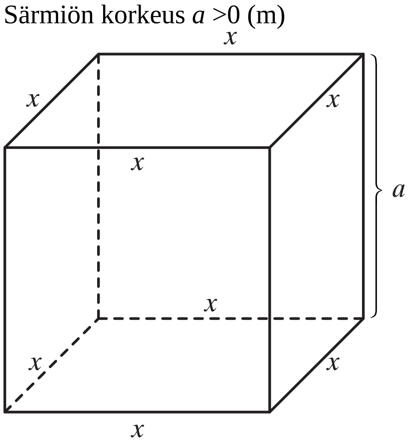
Funktio on derivoituva, kun $x<1$ ja $x>1$. Koska funktion derivaatta ei ole yksikäsitteinen lähestyttäessä kohtaa 1, funktio ei ole derivoituva kohdassa 1.

Derivaattafunktion kuvaaja



Vastaus: Funktio on jatkuva, kun $x \in \mathbb{R}$ ja derivoituva, kun $x \neq 1$.

5. Pohjasärmä $x > 0$ (m)
Särmiön korkeus $a > 0$ (m)



Rautalankaa käytössä 2,00 m, joten $8x + 4a = 2$ eli $a = \frac{1}{2} - 2x$

Koska pituudet ovat positiivisia $\frac{1}{2} - 2x > 0$ eli $x < \frac{1}{4}$.

Tilavuus

$V = x^2 \cdot a$

$V(x) = x^2(\frac{1}{2} - 2x) = -2x^3 + \frac{1}{2}x^2, \quad 0 < x < \frac{1}{4}$

Haetaan tilavuuden suurin mahdollinen arvo. Tilavuusfunktio on polynomifunktiona derivoituva, kun $0 < x < \frac{1}{4}$.

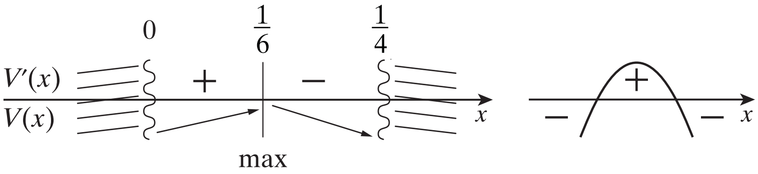
Derivaatta

$V'(x) = -6x^2 + x$

Derivaatan nollakohdat

$$V'(x) = 0$$
$$-6x^2 + x = 0$$
$$-x(6x-1) = 0$$
$$-x = 0 \quad \text{tai} \quad 6x - 1 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = \frac{1}{6}$$

Kulkukaavio, kun $0 < x < \frac{1}{4}$



Kulkukaaviosta nähdään, että funktion suurin arvo on kohdassa $x = \frac{1}{6}$.

Pyydystimen mitat

pohjan särmä $\frac{1}{6}$ m = 0,166... m $\approx$ 1,67 dm ja korkeus

$a = \frac{1}{2} - 2x = (\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{6})$ m $= \frac{1}{6}$ m $\approx$ 1,67 dm

<u>Vastaus</u>: Kuutio, jonka särmät ovat 1,67 dm.

6. Funktio $f(x) = x^2(2x-1)^2 = x^2(4x^2 - 4x + 1) = 4x^4 - 4x^3 + x^2$

Funktio on polynomifunktiona derivoituva, kun $x \in \mathbb{R}$. Ääriarvot sijaitsevat derivaatan nollakohdissa.

Derivaatta $f'(x) = 16x^3 - 12x^2 + 2x$

Derivaatan nollakohdat

$$f'(x) = 0$$
$$16x^3 - 12x^2 + 2x = 0$$
$$2x(8x^2 - 6x + 1) = 0$$
$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad 8x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8}$$
$$x_1 = \frac{6+2}{16} = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4}$$

Kulkukaavio

		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	x
		min		max		min		

$f'(x) = 16x^3 - 12x^2 + 2x$

$f'(-1) = 16\cdot(-1)^3 - 12\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1) = -30 < 0$

$f'(\frac{1}{8}) = 16\cdot(\frac{1}{8})^3 - 12\cdot(\frac{1}{8})^2 + 2\cdot(\frac{1}{8}) = 0,09375 > 0$

$f'(\frac{1}{3}) = 16\cdot(\frac{1}{3})^3 - 12\cdot(\frac{1}{3})^2 + 2\cdot(\frac{1}{3}) = -0,074... < 0$

$f'(1) = 16\cdot 1^3 - 12\cdot 1^2 + 2\cdot 1 = 6 > 0$

Funktion miniarvot $f(0) = 0^2(2\cdot 0 - 1)^2 = 0$ ja $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2(2\cdot\frac{1}{2} - 1) = 0$

maksimiarvo $f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^2(2\cdot\frac{1}{4} - 1)^2 = \frac{1}{64}$

Vastaus: Funktion miniarvo on 0 ja maksimiarvo on $\frac{1}{64}$

7. Funktio $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Derivaatta kohdassa 1

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{{}^{x^2)}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1}}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{\overset{1+x}{\cancel{1 - x^2}}}{x^2\underset{-1}{\cancel{(x-1)}}} = \lim_{x\to 1}\frac{1+x}{-x^2} = \frac{1+1}{-1^2} = -2$$

Vastaus: $f'(1) = -2$

8. Funktio $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ on jatkuva ja derivoituva, kun $x \neq 0$.

Derivaattafunktio $f'(x) = \frac{3x^2\cdot x^2 - (x^3 - 1)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^4 + 2x}{x^4}$, $x \neq 0$

Haetaan derivaattafunktion suurin arvo, kun $x \geq 1$.

Merkitään $g(x) = f'(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^4} = 1 + 2x^{-3}$.

Funktio $g(x)$ on jatkuva ja derivoituva, kun $x \geq 1$.

Derivaattafunktio $g'(x) = 2\cdot(-3)\cdot x^{-4} = -\frac{6}{x^4} < 0$ aina, kun $x \geq 1$, koska $x^4 > 0$. Koska derivaatta on negatiivinen, niin funktio on aidosti vähenevä, kun $x \geq 1$. Näin ollen funktion suurin arvo on puoliavoimen välin alkupisteessä.

Funktion $g(x) = f'(x)$ suurin arvo $g(1) = f'(1) = 1 + 2\cdot 1^{-3} = 3$.

Vastaus: Derivaattafunktion suurin arvo on 3.

Harjoituskoe 2

1. Funktio $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x - 11$
Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$
Derivaatan nollakohdat

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
3x^2 - 12x - 15 &= 0 \quad |:3 \\
x^2 - 4x - 5 &= 0
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{36}}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{36}}{2} = 5$$

<u>Vastaus</u>: Derivaatan nollakohdat ovat –1 ja 5.

2. Käyrä $y = f(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + 5$

Koska $f(6) = \frac{6^2}{3} - 2 \cdot 6 + 5 = 5$, piste (6,5) on käyrällä

Derivaatta $f'(x) = \frac{2}{3}x - 2$

Normaalin kulmakerroin $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(6)} = -\frac{1}{2}$

Normaalin yhtälö $y - y_0 = k_n(x - x_0) \quad \Big| \, x_0 = 6,\ y_0 = 5,\ k_n = -\frac{1}{2}$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 6)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 8$$

Normaalin ja käyrän toinen leikkauspiste

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{3} - 2x + 5 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 8 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y = -\frac{1}{2}x + 8$ ylempään yhtälöön

$$\frac{x^2}{3} - 2x + 5 = -\frac{1}{2}x + 8$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}x - 3 = 0 \quad |\cdot 6$$

$$2x^2 - 9x - 18 = 0$$

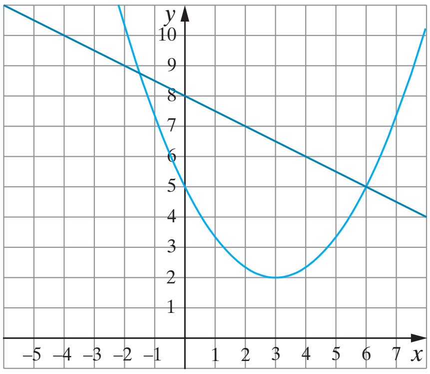
$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4\cdot 2\cdot(-18)}}{2\cdot 2}$$

$$x_1 = \frac{9-\sqrt{225}}{4} = -1\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{9+\sqrt{225}}{4} = 6$$

Leikkauspisteen y-koordinaatti $y = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{3} - 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + 5 = 8\frac{3}{4}$

Normaalin ja käyrän toinen leikkauspiste $\left(-1\frac{1}{2}, 8\frac{3}{4}\right)$



Vastaus: Normaalin yhtälö on $y = -\frac{1}{2}x + 8$. Normaalin ja käyrän toinen leikkauspiste on $\left(-1\frac{1}{2}, 8\frac{3}{4}\right)$

3. a) Raja-arvo $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 + 8x + 7}{3x + 3}$

Jaetaan osoittaja tekijöihin käyttäen apuna osoittajan nollakohtia.
Osoittajan nollakohdat

$$x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{36}}{2} = -7$$

$$x_2 = \frac{-8 + \sqrt{36}}{2} = -1$$

Raja-arvo $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 8x + 7}{3x + 3} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\cancel{(x+1)}(x+7)}{3\cancel{(x+1)}} = \dfrac{-1+7}{3} = 2$

b) Raja-arvo $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{27 - 3x^2}{4x^2 - 13x + 3}$

Jaetaan nimittäjä tekijöihin käyttäen apuna osoittajan nollakohtia.

Nimittäjän nollakohdat

$$4x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4}$$

$$x_1 = \frac{13 - \sqrt{121}}{8} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{13 + \sqrt{121}}{8} = 3$$

Raja-arvo $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{27 - 3x^2}{4x^2 - 13x + 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-3(x^2 - 9)}{4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-3\cancel{(x-3)}(x+3)}{(4x-1)\cancel{(x-3)}} = -\dfrac{18}{11}$

Vastaus: Raja-arvo on a) 2 b) $-\dfrac{18}{11}$.

4. Funktio $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

Derivaatta $f'(x) = 3x^2 + 6x$

Derivaatan nollakohdat $f'(x) = 0$

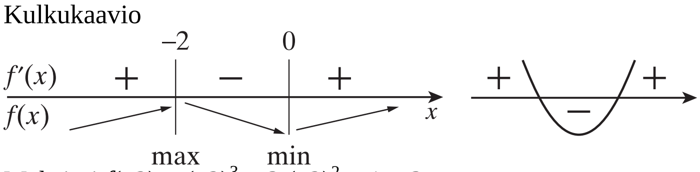
$$3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(x + 2) = 0$$

$3x = 0$ tai $x + 2 = 0$

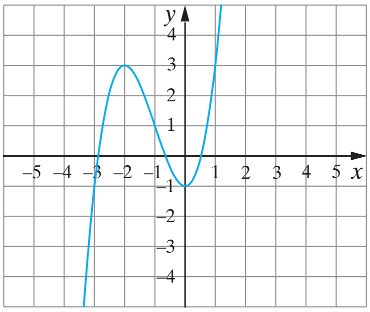
$x = 0$ tai $x = -2$

Kulkukaavio



Maksimi $f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 1 = 3$

Minimi $f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 1 = -1$



Vastaus: Paikallinen maksimi on 3 ja minimi –1.

5. Funktio $f(x)=\dfrac{2x^2-9x}{2x+3}$

Funktio on jatkuva, kun $0 \le x \le 5$ ja derivoituva, kun $0 < x < 5$.

Nollakohdat $f(x) = 0$

$$\frac{2x^2-9x}{2x+3}=0$$

$$2x^2-9x=0$$

$$x(2x-9)=0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad x=4\frac{1}{2}$$

Derivaatta $f\,'(x)=\dfrac{(4x-9)(2x+3)-(2x^2-9x)\cdot 2}{(2x+3)^2}=\dfrac{4x^2+12x-27}{(2x+3)^2}$

Derivaatan nollakohdat $f\,'(x) = 0$

$$\frac{4x^2+12x-27}{(2x+3)^2}=0$$

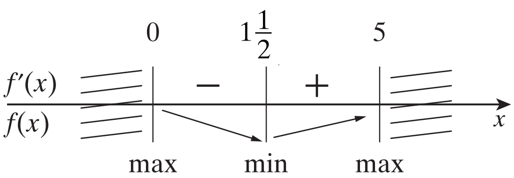
$$4x^2+12x-27=0$$

$$x=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 4\cdot(-27)}}{2\cdot 4}$$

$$x_1=\frac{-12-\sqrt{576}}{8}=-4\frac{1}{2} \quad \Big|\text{Ei käy} \quad 0\le x\le 5$$

$$x_2=\frac{-12+\sqrt{576}}{8}=1\frac{1}{2}$$

Kulkukaavio



Minimi $f\left(1\frac{1}{2}\right)=\dfrac{2\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^2-9\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)}{2\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)+3}=-1\frac{1}{2}$ Pienin arvo

Maksimit $f(0)=\dfrac{2\cdot 0^2-9\cdot 0}{2\cdot 0+3}=0$

$f(5)=\dfrac{2\cdot 5^2-9\cdot 5}{2\cdot 5+3}=\dfrac{5}{13}$ Suurin arvo

Funktion arvojoukko on $-1\frac{1}{2}\le y\le\frac{5}{13}$.

<u>Vastaus</u>: Funktion nollakohdat ovat 0 ja $4\frac{1}{2}$. Funktion arvojoukko on $-1\frac{1}{2}\le y\le\frac{5}{13}$.

6. Funktio $f(x)=\begin{cases} a+1-x^2, \text{ kun } x<2 \\ \dfrac{3a-2}{x}-5, \text{ kun } x\ge 2\end{cases}$

Funktio on jatkuva kohdassa x = 2, kun funktion raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo tässä kohdassa.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^-}(a+1-x^2)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{3a-2}{x}-5\right)=f(2)$$

$$a+1-4=\frac{3a-2}{2}-5=\frac{3a-2}{2}-5$$

$$a-3=\frac{3a-2}{2}-5 \quad |\cdot 2$$

$$2a-6=3a-12$$

$$a=6$$

<u>Vastaus</u>: Vakio a = 6.

7. Tangentti kohtaan $x=6\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$

Käyrä $y=f(x)=2\sqrt{x}=2x^{\frac{1}{2}},\quad x\ge 0$

Derivaatta $f'(x)=2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Tangentin kulmakerroin $k_t = f'\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{4}}} = \frac{2}{5}$

Tangentin yhtälö $y - y_0 = k_t\,(x - x_0)$ $\quad |x_0 = \frac{25}{4}$, $y_0 = f(\frac{25}{4}) = 2\sqrt{\frac{25}{4}} = 5$

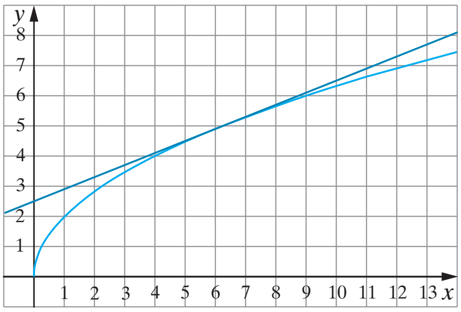
$$y - 5 = \frac{2}{5}\left(x - \frac{25}{4}\right)$$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{5}{2}$$

Tangentin suuntakulma

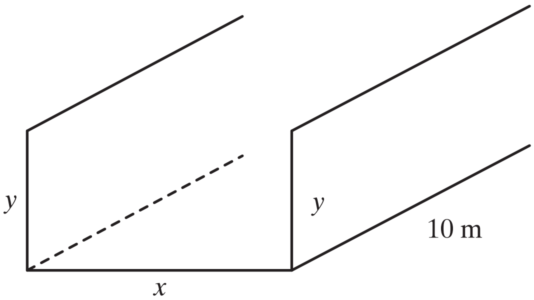
$$\tan\alpha = \frac{2}{5}$$

$$\alpha = 21{,}8°$$



<u>Vastaus</u>: Tangentin yhtälö on $y = \frac{2}{5}x + \frac{5}{2}$. Tangentin suuntakulma on 21,8°.

8.

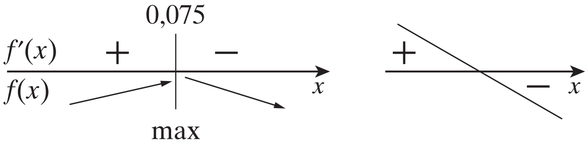


Peltilevyn leveys on 30 cm, joten $x + 2y = 0{,}3$ eli $x = 0{,}3 - 2y$.
Kouru kuljettaa mahdollisimman runsaasti vettä, kun sen poikkileikkauksen pinta-ala on mahdollisimman suuri.
Pinta-ala $A = xy = (0{,}3 - 2y)y = 0{,}3y - 2y^2$, $\quad 0 \le y \le 0{,}15$
Derivaatta $A'(y) = 0{,}3 - 4y$
Derivaatan nollakohdat

$$0{,}3 - 4y = 0$$

$$y = 0{,}075$$

Kulkukaavio

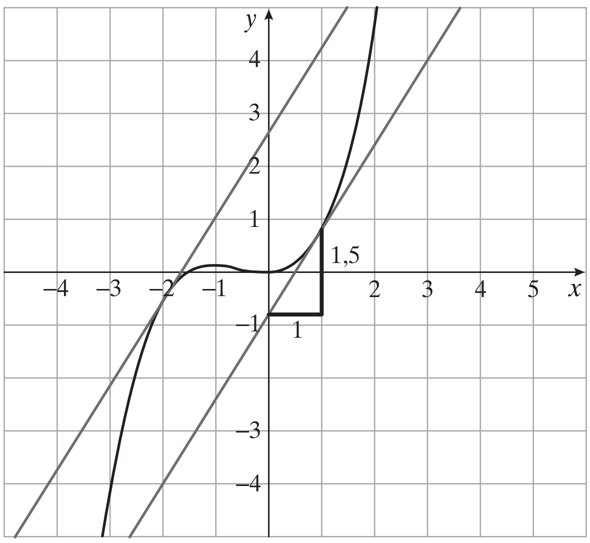


Kouru kuljettaa mahdollisimman paljon vettä, kun kourun korkeus on 0,075 m = 7,5 cm ja leveys 0,3 m – 2·0,075 m = 0,15 m = 15 cm.

<u>Vastaus</u>: Kourun leveys on 15 cm ja korkeus 7,5 cm.

Harjoituskoe 3

1.



Kuvaajasta lukien tangentin kulmakerroin eli derivaatan arvo kohdassa $x = 1$ on 1,5 ja myös kohdassa $x = -2$.

<u>Vastaus</u>: 1,5 ja kohdassa $x = -2$

2.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 9$$

$$f'(x) = 2x^2 - x - 1$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 1$$

Vastaus: $-\frac{1}{2}$ ja 1

3.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{0 - 1 \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-2x - 2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

$$\frac{-2x - 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = 0$$

$-2x - 2 = 0$

$x = -1$

Kulkukaavio

		-1		
$f'(x)$	$+$		$-$	
$f(x)$	↗		↘	x

Vastaus: $x \leq -1$

4.

$$y = \frac{x}{3x^2 + 1}$$

$$y' = \frac{1 \cdot (3x^2 + 1) - x \cdot 6x}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 + 1}{(3x^2 + 1)^2}$$

tangentin kulmakerroin $y'(1) = \frac{-3 \cdot 1^2 + 1}{(3 \cdot 1^2 + 1)^2} = -\frac{1}{8}$

normaalin kulmakerroin 8

tangentin ja käyrän sivuamispisteen *y*-koordinaatti

$$y(1) = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

tangentin yhtälö

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$$

normaalin yhtälö

$$y-\frac{1}{4}=8(x-1)$$

$$y=8x-7\frac{3}{4}$$

Vastaus: tangentti $y=-\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}$, normaali $y=8x-7\frac{3}{4}$

5.

Funktio $f(x) = x^2 + x$

Erotusosamäärä $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Derivaatta $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

a) Erotusosamäärä kohdassa $x = 1$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2+x-2}{x-1}$$

Polynomin $x^2 + x - 2$ nollakohdat

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}$$

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{9}}{2}=-2$$

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=1$$

Erotusosamäärä $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$

b) Derivaatta $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$

Vastaus: a) Erotusosamäärä on $\frac{\Delta f}{\Delta x}=x+2$ b) derivaatta $f'(1) = 3$.

6.

$$f(x)=x^{93}+x^{47}+x+1$$

$$f'(x)=93x^{92}+47x^{46}+1$$

$$93x^{92}+47x^{46}+1=0$$

sijoitetaan $t = x^{46}$

$93t^2 + 47t + 1 = 0$

$$t = \frac{-47 \pm \sqrt{47^2 - 4 \cdot 93 \cdot 1}}{2 \cdot 93}$$

$$t = \frac{-47 \pm \sqrt{1837}}{186}$$

$$t_1 = -5,20...$$

$$t_2 = -0,021...$$

sijoitus $t = x^{46}$
$x^{46} = -5,20...$
ei ratkaisua

$x^{46} = -0,021...$
ei ratkaisua

Koska polynomifunktiolla $f(x) = x^{93} + x^{47} + x + 1$ ei ole derivaatan nollakohtia, ei funktiolla ole ääriarvokohtia.

7.
narun pituus a
osat x ja $a - x$, missä $x \in [0, a]$
ympyrän kehän pituus
$2\pi r = x$

$$r = \frac{x}{2\pi}$$

ympyrän ala

$$A_{\text{ymp}} = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

neliön piiri
$4s = a - x$

$$s = \frac{a - x}{4}$$

neliön ala

$$A_{\text{neliö}} = \left(\frac{a - x}{4}\right)^2$$

kokonaisala

$$A(x) = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{a - x}{4}\right)^2$$

$$= \frac{4x^2}{16\pi} + \frac{\pi a^2 - 2a\pi x + \pi x^2}{16\pi}$$

$$= \frac{(4 + \pi)x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$$

$$A'(x) = \frac{1}{16\pi}[(8 + 2\pi)x - 2a\pi]$$

$$\frac{1}{16\pi}[(8+2\pi)x-2a\pi]=0$$

$$x=\frac{\pi a}{4+\pi}<a$$

Pinta-alafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa pienimmän arvonsa paraabelin huipussa $x=\frac{\pi a}{4+\pi}<a$ ja suurimman arvonsa välin $[0,a]$ päätepisteessä.

$$A(0)=\pi\cdot(\frac{0}{2\pi})^2+(\frac{a-0}{4})^2=\frac{a^2}{16}$$

$$A(\frac{\pi a}{4+\pi})=\pi\cdot\left(\frac{\frac{\pi a}{4+\pi}}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{a-\frac{\pi a}{4+\pi}}{4}\right)^2=\pi\cdot\left(\frac{a}{8+2\pi}\right)^2+\left(\frac{\frac{4a+\pi a-\pi a}{4+\pi}}{4}\right)^2$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{a}{8+2\pi}\right)^2+\left(\frac{2a}{8+2\pi}\right)^2=\frac{\pi a^2+4a^2}{(8+2\pi)^2}\quad \text{pienin}$$

$$A(a)=\pi\cdot(\frac{a}{2\pi})^2+(\frac{a-a}{4})^2=\frac{a^2}{4\pi}>\frac{a^2}{16}\ \text{suurin}$$

Vastaus: suurin ala, kun koko naru käytetään ympyrään ja pienin ala, kun toinen osa on $\frac{\pi a}{4+\pi}$ ja toinen $\frac{4a}{4+\pi}$.

8.

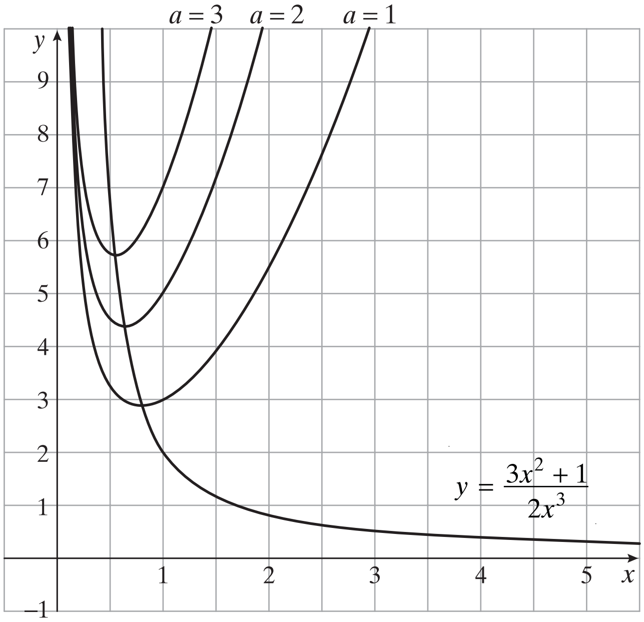
$$f(x)=ax^2+\frac{1}{x}+a\quad (a\neq 0)$$

$$f'(x)=2ax-\frac{1}{x^2}=\frac{2ax^3-1}{x^2}$$

$$\frac{2ax^3-1}{x^2}=0$$

$$a=\frac{1}{2x^3}$$

$$f(x)=\frac{1}{2x^3}\cdot x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^3}=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}=\frac{x^2+2x^2+1}{2x^3}=\frac{3x^2+1}{2x^3}$$



Vastaus: $y = \frac{3x^2 + 1}{2x^3}$

MAA 7 KOE 1

TEE SEURAAVISTA TEHTÄVISTÄ KUUSI.

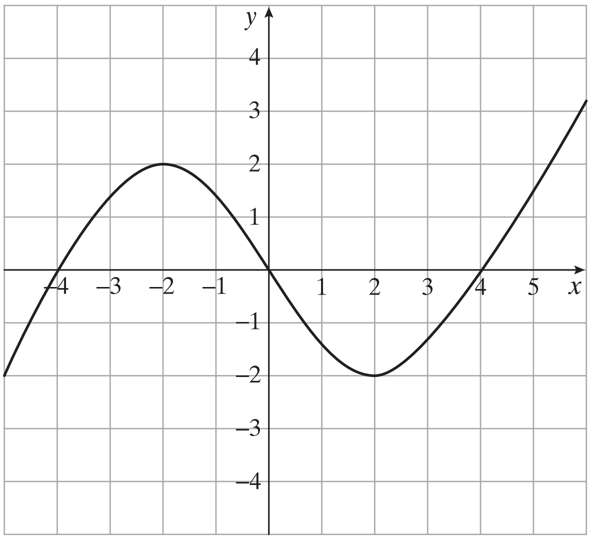
1. Derivoi.

a) $f(x)=5x^4-\frac{3}{4}x^3-x+\pi$ b) $f(x)=(1-x)^2$ c) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$

2. Määritä raja-arvo.

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{-x-1}$ b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$

3. a) Kuvassa on funktion $f(x)$ kuvaaja.



Määritä funktion $f(x)$ nollakohdat ja kohdat, joissa funktion tangentti on vaakasuora.

b) Kuvassa (a-kohdan kuva) on funktion $f(x)$ derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja. Määritä funktion $f(x)$ ääriarvokohdat ja kohtaan $x=-2$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

4. Määritä funktion $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ääriarvot.

5. Ratkaise epäyhtälö $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x}\geq\frac{1}{x^2-x}$

6. Käyrälle $y=\sqrt{x}$ kohtaan $x = a$ $(a > 0)$ piirretyt tangentti ja normaali erottavat x-akselista janan. Osoita, että janan pituus on aina suurempi kuin $\frac{1}{2}$.

7. Pallon säde on 3. Määritä pallon sisään asetetun suurimman suoran ympyrälieriön pohjaympyrän säde.

MAA 7 KOE 1 RATKAISUT

1. Derivoi.

a) $f(x)=5x^4-\frac{3}{4}x^3-x+\pi$ b) $f(x)=(1-x)^2$ c) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$

Ratkaisu

a) Funktio $f(x)=5x^4-\frac{3}{4}x^3-x+\pi$

Derivaatta $f'(x)=5\cdot 4x^3-\frac{3}{4}\cdot 3x^2-1=20x^3-\frac{9}{4}x^2-1$

b) Funktio $f(x)=(1-x)^2=x^2-2x+1$

Derivaatta $f'(x)=2x-2$

c) Funktio $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$

Derivaatta $f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-1)-(x+2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2-4x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}$

Vastaus: a) $f'(x)=20x^3-\frac{9}{4}x^2-1$ b) $f'(x)=2x-2$ c) $f'(x)=\frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}$

2. Määritä raja-arvo.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$

Ratkaisu:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{-x-1}=\frac{1^2+1}{-1-1}=\frac{2}{-2}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$

Kun sijoitetaan x = 1, päädytään muotoon $\frac{0}{0}$.

Jaetaan osoittaja tekijöihin nollakohtiensa avulla.

$$x^2+3x-4=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}$$

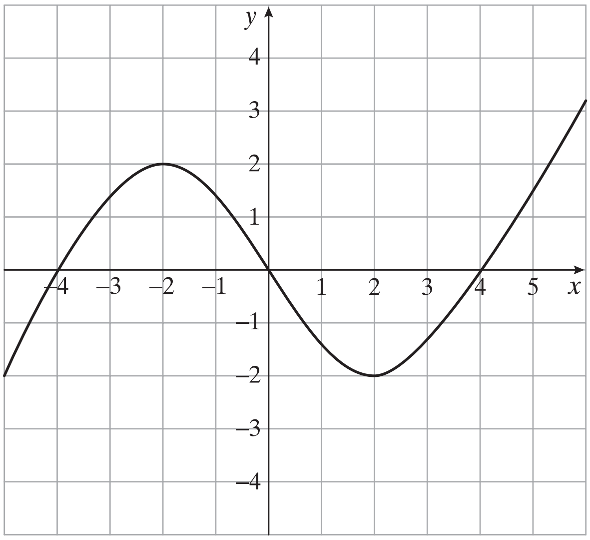
$$x_1=\frac{-3+5}{2}=1$$

$$x_2=\frac{-3-5}{2}=-4$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+4)=1+4=5$$

<u>Vastaus</u>: a) –1   b) 5

3. a) Kuvassa on funktion $f(x)$ kuvaaja. Määritä funktion $f(x)$ nollakohdat ja kohdat, joissa funktion tangentti on vaakasuora.
Määritä funktion $f(x)$ nollakohdat ja kohdat, joissa funktion



b) Kuvassa on funktion $f(x)$ derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja.
Määritä funktion $f(x)$ ääriarvokohdat ja kohtaan $x=-2$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Ratkaisu
a) Funktion nollakohdat eli kohdat, joissa kuvaaja joko leikkaa x- akselin tai sivuaa sitä.
Nollakohdat $x = -4$, $x = 0$ ja $x = 4$

Funktion tangentti on vaakasuora kohdissa $x = -2$ ja $x = 2$

b) Kulkukaavio

Derivaattafunktion kuvaajasta saadaan kulkukaavio.

		-4		0		4		
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	↘		↗		↘		↗	x
		min		max		min		

Kulkukaavioista nähdään, että funktion ääriarvokohdat ovat
minimit $x=-4$ ja $x=4$
maksimi $x=0$

Funktion kohtaan $x=-2$ piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion derivaatan arvo kohdassa $x=-2$, eli $f'(-2)$.
Kuvaajasta $f'(-2)=2$

<u>Vastaus</u>: a) Nollakohdat $x = -4$, $x = 0$ ja $x = 4$, tangentti vaakasuora, kun $x = -2$ ja $x = 2$
b) Minimikohdat $x=-4$ ja $x=4$ ja maksimikohta $x=0$, tangentin kulmakerroin 2

4. Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ ääriarvot.

Ratkaisu

Funktio $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ on määritelty, kun $x\in\mathbb{R}$, koska $x^2+1>0$ aina.
Ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohdissa.
Derivaatta

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Derivaatan nollakohdat

$$\begin{aligned}
f'(x)&=0\\
\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}&=0\\
-x^2+1&=0\\
x^2&=1 \qquad \mid \sqrt{\ }\\
x&=\pm 1
\end{aligned}$$

Kulkukaavio

		-1		1		
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		min		max		x

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(-2) = \frac{-2^2+1}{(2^2+1)^2} = \frac{-3}{25} < 0$$

$$f'(0) > 0$$

$$f'(1) < 0$$

Kulkukaavion perusteella funktion $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

minimiarvo on $f(-1) = \dfrac{-1}{(-1)^2+1} = -\dfrac{1}{2}$

maksimiarvo on $f(1) = \dfrac{1}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$

<u>Vastaus</u>: Minimiarvo on $-\dfrac{1}{2}$ ja maksimiarvo on $\dfrac{1}{2}$.

5. Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{x^2-x}$

Ratkaisu

Siirretään termit epäyhtälön samalle puolelle.

$$\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x^2-x}$$

$$\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-x} \geq 0$$

Lavennetaan termit samannimisiksi.

$$^{x)}\frac{x}{x-1} + {}^{x-1)}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-x} \geq 0$$

$$\frac{x^2}{x(x-1)} + \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{x^2+x-2}{x(x-1)} \geq 0$$

Tutkitaan funktiota $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x(x-1)}$

Funktio voi vaihtaa merkkinsä kohdissa, joissa sitä ei ole määritelty (nimittäjän nollakohdat), tai nollakohdissaan (osoittajan nollakohdat).

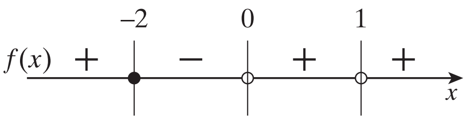
Kohdat, joissa funktio $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x(x-1)}$ ei ole määritelty

$$x(x-1)=0$$
$$x=0 \quad \text{tai} \quad x-1=0$$
$$x=1$$

Funktion $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x(x-1)}$ nollakohdat

$$f(x)=0$$
$$\frac{x^2+x-2}{x(x-1)}=0$$
$$x^2+x-2=0$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}$$
$$x_1=\frac{-1+3}{2}=1$$
$$x_2=\frac{-1-3}{2}=-2$$

Merkkikaavio



$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x(x-1)}$$
$$f(-3)=\frac{(-3)^2-3-2}{-3\cdot(-3-1)}=\frac{1}{3}>0$$
$$f(-1)<0$$
$$f(0,5)>0$$
$$f(2)>0$$

Epäyhtälön ratkaisu

$$f(x)\geq 0$$
$$\frac{x^2+x-2}{x(x-1)}\geq 0$$
$$x\leq -2 \quad \text{tai} \quad 0<x<1 \quad \text{tai} \quad x>1$$

Vastaus: $x\leq -2$ tai $0<x<1$ tai $x>1$

6. Käyrälle $y=\sqrt{x}$ kohtaan $x = a$ ($a > 0$) piirretyt tangentti ja normaali erottavat x-akselista janan. Osoita, että janan pituus on aina suurempi kuin $\dfrac{1}{2}$.

Ratkaisu

Käyrän $y = \sqrt{x}$ kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $y'(a)$.

Derivoidaan funktio $f(x) = \sqrt{x}$

Derivaatta $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Tangentin kulmakerroin $k_t = f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$, $a > 0$

Tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k_t(x - x_0) \qquad \Big|\ x_0 = a, y_0 = f(a) = \sqrt{a}, k_t = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$y - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a)$$

Tangentti leikkaa x-akselin pisteessä, jossa $y = 0$
Leikkauspiste

$$y - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a) \qquad \Big|\ y = 0$$

$$-\sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a) \qquad \Big|\ \cdot 2\sqrt{a} > 0$$

$$-2a = x - a$$

$$x = -a$$

Normaali ja tangentti ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, joten kulmakertoimien tulo on –1.
Normaalin kulmakerroin ($a > 0$)

$$k_n k_t = -1 \qquad \Big|\ k_t = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$k_n = -2\sqrt{a}$$

Normaalin yhtälö

$$y - y_0 = k_n(x - x_0) \qquad \Big|\ x_0 = a, y_0 = f(a) = \sqrt{a}, k_n = -2\sqrt{a}$$

$$y - \sqrt{a} = -2\sqrt{a}(x - a)$$

Normaali leikkaa x-akselin pisteessä, jossa $y = 0$
Leikkauspiste

$$y - \sqrt{a} = -2\sqrt{a}(x - a) \qquad \Big|\ y = 0$$

$$-\sqrt{a} = -2\sqrt{a}(x - a) \qquad \Big|\ : (-2\sqrt{a}) \neq 0$$

$$\frac{1}{2} = x - a$$

$$x = a + \frac{1}{2}$$

Leikkauspisteiden välisen janan pituus $\left|-a - (a + \frac{1}{2})\right| = \left|-a - a - \frac{1}{2}\right| = \left|-2a - \frac{1}{2}\right|$.

Koska $a > 0$, $-2a - \frac{1}{2} < 0$, joten $\left|-2a - \frac{1}{2}\right| = -(-2a - \frac{1}{2}) = 2a + \frac{1}{2}$

Funktio $j(a) = 2a + \frac{1}{2}$ on nouseva suora, joten sen pienin arvo on välin alkupisteessä. Koska $a > 0$, lasketaan raja-arvo, kun a rajatta lähenee arvoa nolla.

Raja-arvo $\lim_{a \to 0^+} (2a + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Funktion $j(a) = 2a + \frac{1}{2}$ eli janan pienin arvo on aina suurempi, kuin tämä raja-arvo, koska funktio ei koskaan saavuta tätä arvoa.

7. Pallon säde on 3. Määritä pallon sisään asetetun suurimman suoran ympyrälieriön pohjaympyrän säde.

Ratkaisu

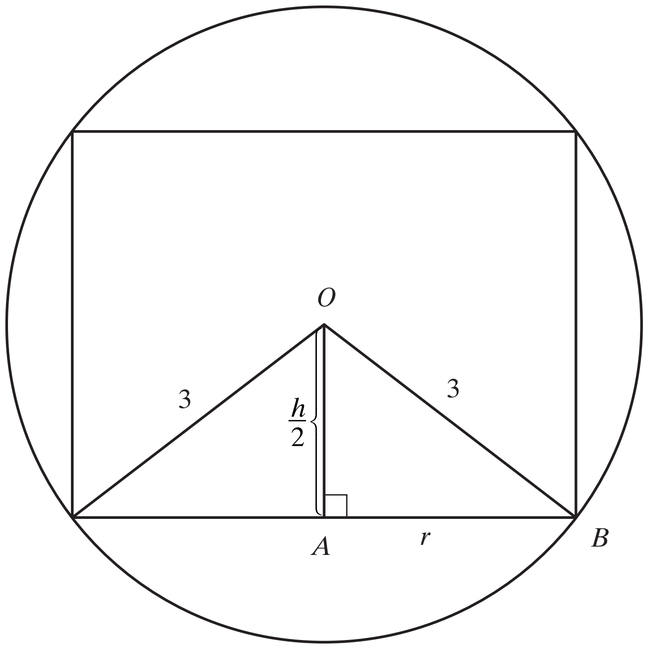
Ympyrälieriön pohjan säde r

Ympyrälieriön korkeus h

Ympyrälieriö suurin, kun sen tilavuus on suurin.

Ympyrälieriön tilavuus $V = \pi r^2 h$

Suorakulmaisesta kolmiosta OAB saadaan säde korkeuden avulla.



$$r^2 + (\frac{h}{2})^2 = 3^2$$

$$r^2 = 9 - \frac{1}{4}h^2$$

Tilavuusfunktion muuttujaksi kannattaa valita korkeus h, sillä tällöin tutkittava funktio on polynomifunktio.

$$V = \pi r^2 h$$

$$V(h) = \pi(9 - \frac{1}{4}h^2)h = -\frac{1}{4}\pi h^3 + 9\pi h$$

Koska sekä r että h ovat positiivisia, niin $0 < h < 6$

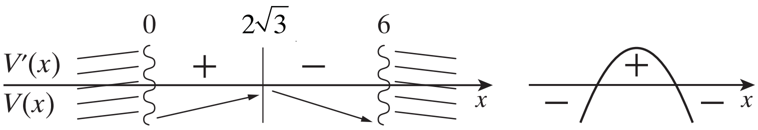
Haetaan tilavuusfunktion suurin arvo.

Derivaatta $V'(h) = -\frac{3}{4}\pi h^2 + 9\pi$

Derivaatan nollakohdat

$$
\begin{aligned}
V'(h) &= 0 \\
-\frac{3}{4}\pi h^2 + 9\pi &= 0 \\
h^2 &= \frac{-9\pi}{-\frac{3}{4}\pi} \\
h^2 &= 12 \qquad \Big| \sqrt{} \\
h &= \pm\sqrt{12} \qquad \Big| \, h > 0 \\
h &= 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Kulkukaavio



Lieriö on suurin, kun sen korkeus on $2\sqrt{3}$.

Tällöin lieriön pohjan säde on $r = \sqrt{9 - \frac{1}{4}h^2} = \sqrt{9 - \frac{1}{4}(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$

<u>Vastaus</u> : $\sqrt{6}$

MAA 7 KOE 2

1. Ratkaise yhtälö $f'(x) = 0$, kun $f(x) = x^3 + x^2 - x + 14$.

2. Määritä raja-arvot a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{3x - 12}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 7x - 18}{3x^2 + 2x - 8}$.

3. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = x^3 - 15x^2 + 36x - 7$ on aidosti kasvava?

4. Ratkaise a) $\dfrac{7}{x-5} - \dfrac{12}{x-3} = 3$ b) $\dfrac{5x+7}{x-5} \leq 3x$.

5. Määritä rationaalifunktion $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-1}$ paikalliset ääriarvokohdat.

6. Määritä vakio a siten, että funktio $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9}, \text{ kun } x \neq -3 \\ a, \text{ kun } x = -3 \end{cases}$

on jatkuva, kohdassa $x = -3$.

7. Käyrälle $y = \dfrac{4}{x}$, $x > 0$ kohtaan $x = a$ piirretty tangentti rajoittaa positiivisten koordinaattiakseleiden kanssa kolmion. Osoita, että kolmion ala ei riipu kohdan a valinnasta.

8. Tehdas valmisti kannetonta litran vetoista muoviastiaa, johon meni mahdollisimman vähän muovia. Mitkä olivat astian mitat, kun se oli suoran ympyrälieriön muotoinen?

1. Ratkaise yhtälö $f'(x) = 0$, kun $f(x) = x^3 + x^2 - x + 14$.

Funktio $f(x) = x^3 + x^2 - x + 14$
Derivaatta $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$
Yhtälö $f'(x) = 0$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{6} = \frac{1}{3}$$

<u>Vastaus</u>: Yhtälön juuret ovat –1 ja $\frac{1}{3}$.

2. Määritä raja-arvot a) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{3x - 12}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 7x - 18}{3x^2 + 2x - 8}$.

a) Raja-arvo $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{3x - 12} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{3\cancel{(x-4)}} = \frac{4+4}{3} = 2\frac{2}{3}$

b) Raja-arvo $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 7x - 18}{3x^2 + 2x - 8}$

Jaetaan osoittaja ja nimittäjä tekijöihin osoittajan ja nimittäjän nollakohtia apuna käyttäen.
Osoittaja

$$x^2 - 7x - 18 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{121}}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{7 + \sqrt{121}}{2} = 9$$

Nimittäjä

$$3x^2+2x-8=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot(-8)}}{2\cdot 3}$$

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{100}}{6}=-2$$

$$x_2=\frac{-2+\sqrt{100}}{6}=\frac{4}{3}$$

Raja-arvo

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-7x-18}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-9)}{3(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x-9)}{\cancel{(x+2)}(3x-4)}=\frac{-2-9}{3\cdot(-2)-4}=1\frac{1}{10}$$

<u>Vastaus</u>: Raja-arvo on a) $2\frac{2}{3}$ b) $1\frac{1}{10}$.

3. Millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x)=x^3-15x^2+36x-7$ on aidosti kasvava?

Funktio f on aidosti kasvava, kun $f'(x)\geq 0$.
Funktio $f(x)=x^3-15x^2+36x-7$
Derivaatta $f'(x)=3x^2-30x+36$
Derivaatan nollakohdat $f'(x)=0$

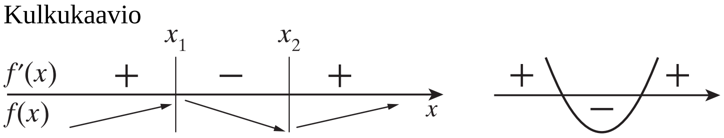
$$3x^2-30x+36=0 \quad |:3$$
$$x^2-10x+12=0$$

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1}$$

$$x_1=\frac{10-\sqrt{52}}{2}=5-\sqrt{13}$$

$$x_2=\frac{10+\sqrt{52}}{2}=5+\sqrt{13}$$

Kulkukaavio



<u>Vastaus</u>: Funktio on aidosti kasvava, kun $x\leq 5-\sqrt{13}$ tai $x\geq 5+\sqrt{13}$.

4. Ratkaise a) $\frac{7}{x-5}-\frac{12}{x-3}=3$ b) $\frac{5x+7}{x-5}\leq 3x$.

a) Ratkaistaan murtoyhtälö

$$ {}^{x-3)}\frac{7}{x-5} - {}^{x-5)}\frac{12}{x-3} = {}^{(x-5)(x-3)}3 \quad \Big| x \neq 3,\ x \neq 5 $$

$$ \frac{7x-21}{(x-3)(x-5)} - \frac{12x-60}{(x-3)(x-5)} = \frac{3(x-3)(x-5)}{(x-3)(x-5)} \quad \Big| \cdot (x-3)(x-5) $$

$$ 7x-21-(12x-60) = 3(x^2-8x+15) $$

$$ 3x^2-19x+6=0 $$

$$ x = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2-4\cdot 3\cdot 6}}{2\cdot 3} $$

$$ x_1 = \frac{19-\sqrt{289}}{6} = \frac{1}{3} $$

$$ x_2 = \frac{19+\sqrt{289}}{6} = 6 $$

b) Ratkaistaan murtoepäyhtälö

$$ \frac{5x+7}{x-5} \leq 3x $$

$$ \frac{5x+7}{x-5} - {}^{x-5)}3x \leq 0 $$

$$ \frac{5x+7}{x-5} - \frac{3x^2-15x}{x-5} \leq 0 $$

$$ \frac{-3x^2+20x+7}{x-5} \leq 0 $$

Osoittajan nollakohdat

$$ -3x^2+20x+7=0 $$

$$ x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2-4\cdot(-3)\cdot 7}}{2\cdot(-3)} $$

$$ x_1 = \frac{-20-\sqrt{484}}{-6} = 7 $$

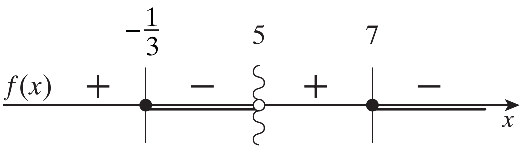
$$ x_2 = \frac{-20+\sqrt{484}}{-6} = -\frac{1}{3} $$

Nimittäjän nollakohdat

$$ x-5=0 $$

$$ x=5 $$

Merkkikaavio



Epäyhtälön ratkaisu $\dfrac{-3x^2+20x+7}{x-5} \le 0$

$$-\frac{1}{3} \le x < 5 \ \text{ tai } x \ge 7$$

<u>Vastaus</u>: a) Yhtälön juuret ovat $\frac{1}{3}$ ja 6. b) Epäyhtälön ratkaisu on $-\frac{1}{3} \le x < 5$ tai $x \ge 7$.

5. Määritä rationaalifunktion $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-1}$ paikalliset ääriarvokohdat.

Rationaalifunktio $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-1}$, $x \ne \pm 1$

Derivaatta $f'(x) = \dfrac{-1\cdot(x^2-1)-(2-x)2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2-4x+1}{(x^2-1)^2}$

Derivaatan nollakohdat $f'(x) = 0$

$$\frac{x^2-4x+1}{(x^2-1)^2} = 0$$

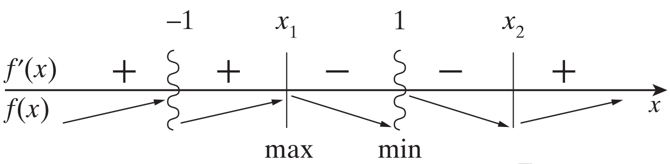
$$x^2-4x+1 = 0$$

$$x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$$

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{12}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

Kulkukaavio



<u>Vastaus</u>: Paikallinen maksimikohta on $x = 2-\sqrt{3}$ ja minimikohta $x = 2+\sqrt{3}$.

6. Määritä vakio *a* siten, että funktio $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}, & \text{kun } x \ne -3 \\ a, & \text{kun } x = -3 \end{cases}$

on jatkuva, kohdassa $x = -3$.

Funktio $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}, \text{ kun } x\neq -3\\ a, \text{ kun } x=-3\end{cases}$

Funktio on jatkuva kohdassa $x = -3$, kun funktion raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo tässä kohdassa.

$$\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3)$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{2x^2+5x-3}{x^2-9} = f(-3)$$

Raja-arvon laskemiseksi jaetaan osoittaja tekijöihin nollakohtia apuna käyttäen.

$$2x^2+5x-3=0$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}$$

$$x_1=\frac{-5-\sqrt{49}}{4}=-3$$

$$x_2=\frac{-5+\sqrt{49}}{4}=\frac{1}{2}$$

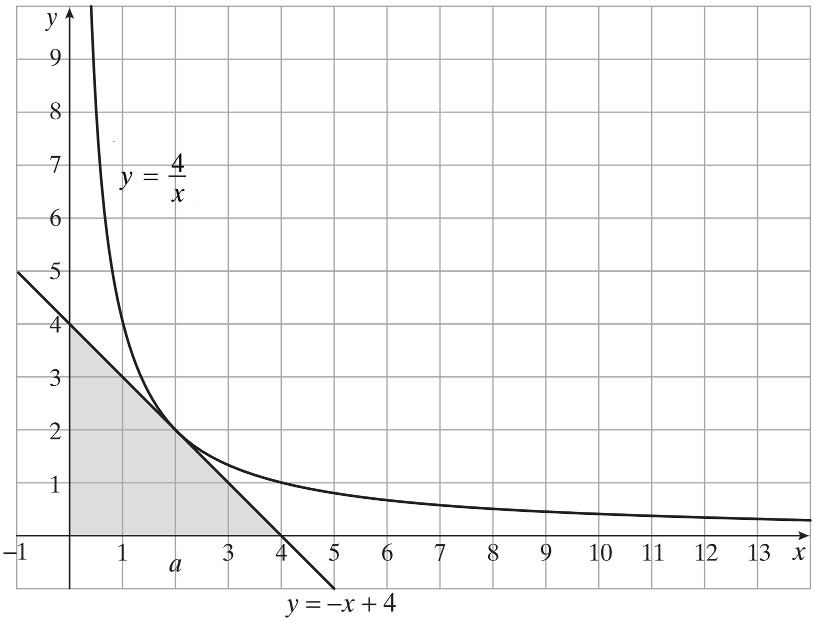
Raja-arvo $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-3)(x+3)}$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\cancel{(x+3)}\,(2x-1)}{(x-3)\,\cancel{(x+3)}}=\frac{2\cdot(-3)-1}{-3-3}=1\frac{1}{6}$$

Kun valitaan $f(-3)=1\frac{1}{6}$, funktio on jatkuva kohdassa $x = -3$.

<u>Vastaus</u>: Vakio $a = 1\frac{1}{6}$.

7. Käyrälle $y=\dfrac{4}{x}$, $x>0$ kohtaan $x = a$ piirretty tangentti rajoittaa positiivisten koordinaattiakseleiden kanssa kolmion. Osoita, että kolmion ala ei riipu kohdan a valinnasta.



Käyrä $f(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1}, \quad x > 0$

Derivaatta $f'(x) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$

Tangentin kulmakerroin $k_t = f'(a) = -\frac{4}{a^2}$

Tangentin yhtälö $y - y_0 = k_t(x - x_0) \quad |x_0 = a, y_0 = f(a) = \frac{4}{a}$

$$y - \frac{4}{a} = -\frac{4}{a^2}(x - a)$$

$$y = -\frac{4}{a^2}x + \frac{8}{a}$$

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste

$$y = -\frac{4}{a^2}x + \frac{8}{a} \quad \Big| y = 0$$

$$0 = -\frac{4}{a^2}x + \frac{8}{a}$$

$$\frac{4}{a^2}x = \frac{8}{a} \quad \Big| \cdot \frac{a^2}{4}$$

$$x = 2a$$

Tangentin ja y-akselin leikkauspiste

$$y=-\frac{4}{a^2}x+\frac{8}{a} \quad \Big| x=0$$

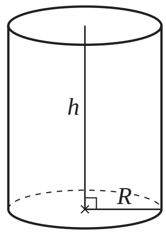
$$y=\frac{8}{a}$$

Kolmion ala $A=\frac{xy}{2}=\frac{2a\cdot\frac{8}{a}}{2}=8$

Ala ei riipu vakiosta a. $\square$

8. Tehdas valmisti kannetonta litran vetoista muoviastiaa, johon meni mahdollisimman vähän muovia. Mitkä olivat astian mitat, kun se oli suoran ympyrälieriön muotoinen?

Astian tilavuus on 1 l = 1 dm^3



$$V=\pi R^2 h \quad \Big| V=1$$

$$\pi R^2 h=1$$

$$h=\frac{1}{\pi R^2}$$

Pinta-ala $A(R)=\pi R^2+2\pi R\cdot\frac{1}{\pi R^2}=\pi R^2+2R^{-1}$, $R>0$

Derivaatta $A'(R)=2\pi R-2R^{-2}=2\pi R-\frac{2}{R^2}$

Derivaatan nollakohdat

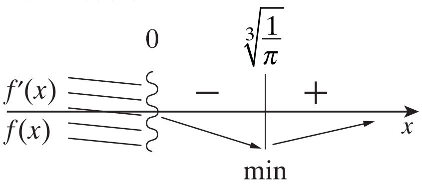
$$2\pi R-\frac{2}{R^2}=0$$

$$\frac{2\pi R^3-2}{R^2}=0$$

$$2\pi R^3-2=0$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\approx 0,68$$

Kulkukaavio



$A'(R)=2\pi R-\frac{2}{R^2}$

$A'(0,5)<0$

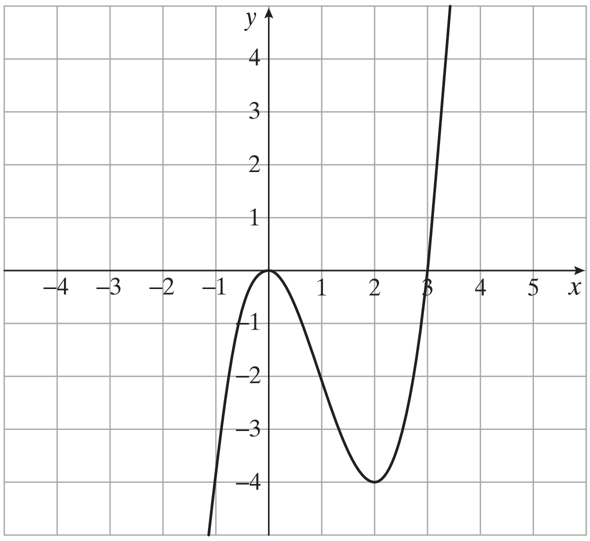
$A'(1)>0$

Astian korkeus $h=\frac{1}{\pi R^2}=\frac{1}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\approx 0,68$

<u>Vastaus</u>: Astian pohjan säde 0, 68 dm ja korkeus 0,68 dm

MAA7 KOE 3

1. Kuvassa on funktion *f* derivaattafunktion kuvaaja. Määritä funktion *f* ääriarvokohdat ja niiden laatu sekä funktion kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin.



2. Mitä tarkoitetaan funktion suurimmalla arvolla? Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 1$ suurin arvovälillä $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

3. Määritä a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + x - 15}{6x + 18}$ b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5x^2 - 80}{5x^2 - 19x - 4}$

4. Laadi funktion $f(x) = \dfrac{3(x^2 + 1)}{2x}$ kulkukaavio.

5. Millä *a*:n arvoilla suora $y = -2x$ on käyrän $y = x^3 - 8x + a$ tangentti?

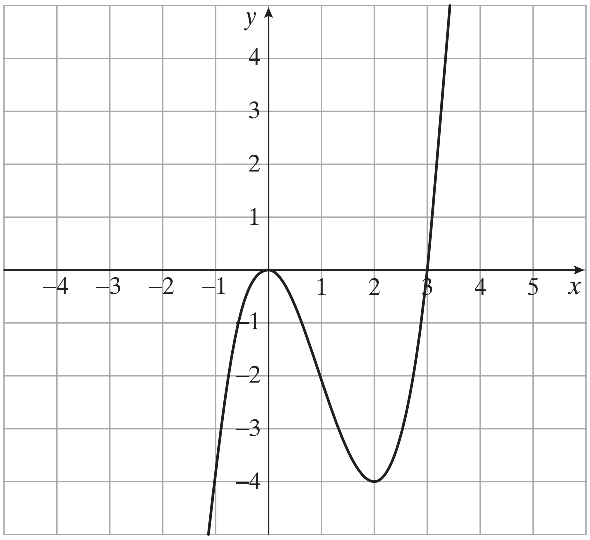
6. Missä kulmassa paraabelit $y = -2x^2 + x - 1$ ja $y = -4x^2 + 2x + 2$ leikkaavat toisensa, kun leikkauspisteen *x*-koordinaatti on positiivinen?

7. Suoran ympyräkartion sivujanan pituus on 10. Määritä tilavuuden suurin arvo.

8. (9 pisteen tehtävä)
Käyrälle $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ on piirretty origoon tangentti ja normaali. Määritä sen kolmion ala, jonka muodostavat origoon piirretyt tangentti ja normaali sekä toinen tangentti, joka on piirretty origoon piirretyn tangentin ja käyrän leikkauspisteeseen.

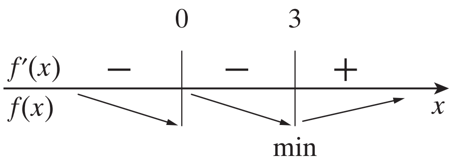
MAA 7 KOE 3 RATKAISUT

1.
Kuvassa on funktion *f* derivaattafunktion kuvaaja. Määritä funktion *f* ääriarvokohdat ja niiden laatu sekä funktion kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin.



Ratkaisu:

Laaditaan kulkukaavio derivaattafunktion kuvaajan avulla.
Kulkukaavio



Kulkukaaviosta nähdään, että funktiolla on vain yksi ääriarvokohta $x = 3$, joka on minimikohta.

Derivaattafunktion kuvaajasta nähdään, että funktion *f* kuvaajalle kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin on −4.

<u>Vastaus</u>: Ainoa ääriarvokohta on minimikohta on $x = 3$ ja kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin on −4.

2. Mitä tarkoitetaan funktion suurimmalla arvolla? Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 1$ suurin arvovälillä $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ratkaisu:
Funktion suurimmalla arvolla tarkoitetaan suurinta arvoa kaikista funktion saamista arvoista. Jatkuva funktio saa suljetulla välillä suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa tai kohdassa, jossa derivaattaa ei ole.

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 4x$

Derivaatan nollakohdat

$$6x^2 - 4x = 0$$
$$2x(3x-2) = 0$$
$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x - 2 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = \frac{2}{3}$$

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{4} = 0,75$$
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{19}{27} \approx 0,7$$
$$f(1) = 2\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 1 = 1 \quad \text{suurin}$$

Vastaus: Suurin arvo on 1.

3. Määritä a) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2x^2 + x - 15}{6x + 18}$ b) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{5x^2 - 80}{5x^2 - 19x - 4}$

Ratkaisu:
a)

$$2x^2 + x - 15 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-15)}}{2\cdot 2}$$
$$x_1 = -3$$
$$x_2 = \frac{5}{2}$$

Joten $2x^2 + x - 15 = 2(x+3)(x - \frac{5}{2}) = (x+3)(2x-5)$

$$\lim_{x\to -3} \frac{2x^2 + x - 15}{6x + 18} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(2x-5)}{6(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{2x-5}{6} = -\frac{11}{6}$$

b)

$5x^2 - 19x - 4 = 0$

$$x = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5}$$

$$x_1 = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = 4$$

Joten $5x^2 - 19x - 4 = 5(x + \frac{1}{5})(x-4) = (5x+1)(x-4)$

$$\lim_{x \to 4} \frac{5x^2 - 80}{5x^2 - 19x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{5(x^2 - 16)}{(5x+1)(x-4)} = \lim_{x \to 4} \frac{5(x+4)(x-4)}{(5x+1)(x-4)} = \lim_{x \to 4} \frac{5(x+4)}{(5x+1)} = \frac{40}{21}$$

Vastaus: a) $-\frac{11}{6}$ b) $\frac{40}{21}$

4. Laadi funktion $f(x) = \frac{3(x^2+1)}{2x}$ kulkukaavio.

Ratkaisu:

$$f(x) = \frac{3(x^2+1)}{2x} = \frac{3x^2+3}{2x}, x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{6x \cdot 2x - 2 \cdot (3x^2+3)}{4x^2} = \frac{12x^2 - 6x^2 - 6}{4x^2} = \frac{6x^2 - 6}{4x^2}$$

Derivaatan nollakohdat ovat osoittajan nollakohdat.

$6x^2 - 6 = 0$

$x = \pm 1$

Kulkukaavio

		1		0		1		
$f'(x)$	+		−		−		+	
$f(x)$	↗		↘		↘		↗	x
		max				min		

$f'(-2) = 1{,}125 > 0$

$f'(-0{,}5) = -4{,}5 < 0$

$f'(0{,}5) = -4{,}5 < 0$

$f'(2) = 1{,}125 > 0$

$f'(-2) = 1{,}125>0$

$f'(-0{,}5) = -4{,}5<0$

$f'(0{,}5) = -4{,}5<0$

$f'(2) = 1{,}125>0$

5. Millä a:n arvoilla suora $y = -2x$ on käyrän $y = x^3 - 8x + a$ tangentti?

Ratkaisu:

Derivaatta = tangentin kulmakerroin

$y = x^3 - 8x + a$

$y' = 3x^2 - 8$

Saadaan yhtälö

$$3x^2 - 8 = -2$$
$$3x^2 = 6$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

Tangentin ja käyrän leikkauspisteet toteuttavat yhtälöparin.

$$\begin{cases} y = x^3 - 8x + a \\ y = -2x \end{cases}$$

$$x^3 - 8x + a = -2x$$
$$a = -x^3 + 6x$$

Tangentin ja käyrän sivuamispisteiden *x*-koordinaatit ovat $x = \pm\sqrt{2}$.
Ratkaistaan *a* näillä *x*:n arvoilla.

$$a_1 = -(-\sqrt{2})^3 + 6\cdot(-\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$$
$$a_2 = -(\sqrt{2})^3 + 6\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

<u>Vastaus</u>: $a = \pm 4\sqrt{2}$

6. Missä kulmassa paraabelit $y = -2x^2 + x - 1$ ja $y = -4x^2 + 2x + 2$ leikkaavat toisensa, kun leikkauspisteen *x*-koordinaatti on positiivinen?
Ratkaisu:
Leikkauskulmalla tarkoitetaan leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välistä kulmaa.
Käyrien leikkauspisteet

$$\begin{cases} y = -2x^2 + x - 1 \\ y = -4x^2 + 2x + 2 \end{cases}$$

$$-2x^2 + x - 1 = -4x^2 + 2x + 2$$
$$2x^2 - x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4}$$
$$x_1 = \frac{3}{2}$$
$$x_2 = -1$$

Käyrien positiivinen leikkauspisteen *x*-koordinaatti on $\frac{3}{2}$.

Tangenttien kulmakertoimet kohdassa $x = \frac{3}{2}$

$y = -2x^2 + x - 1$
$$y' = -4x + 1$$
$$y'(\frac{3}{2}) = -4\cdot\frac{3}{2} + 1 = -5$$
ja
$y = -4x^2 + 2x + 2$

$y' = -8x + 2$

$y'(\frac{3}{2}) = -8 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -10$

Tangenttien suuntakulmat

$\tan \alpha_1 = -5$

$\alpha_1 \approx -78,69°$

$\tan \alpha_1 = -10$

$\alpha_1 \approx -84,29°$

Tangenttien välinen kulma on suuntakulmien erotus

$\alpha_1 - \alpha_2 = -78,69° - (-84,29°) \approx 5,6°$

<u>Vastaus</u>: $5,6°$

7. Suoran ympyräkartion sivujanan pituus on 10. Määritä tilavuuden suurin arvo.

Ratkaisu:

Kartion korkeus h $(0 < h < 10)$

Pohjaympyrän säde r

Pythagoraan lauseella saadaan

$h^2 + r^2 = 10^2$

$r = \sqrt{100 - h^2}$

Kartion tilavuus

$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{100 - h^2})^2 h = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$

$V'(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot 100 - \pi h^2$

Derivaatan nollakohdat

$\frac{1}{3}\pi \cdot 100 - \pi h^2 = 0$

$-\pi h^2 = -\frac{1}{3}\pi \cdot 100 \quad \Big| \; : (-\pi)$

$h^2 = \frac{100}{3} \quad \Big| \; h > 0$

$h = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,8$

Kulkukaavio

	0		$\frac{10}{\sqrt{3}}$		10	
$V'(x)$		$+$		$-$		$f'(1) > 0$
$V(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$		x $f'(6) < 0$

$V'(1) > 0$

$V'(6) < 0$

Funktio saa suurimman arvonsa ainoassa maksimikohdassaan.

Suurin arvo

$$V(h)=\frac{1}{3}\pi(100\cdot\frac{10}{\sqrt{3}}-\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^3)=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1000}{\sqrt{3}}-\frac{1000}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2000}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{2000\pi}{9\sqrt{3}}\approx 403$$

<u>Vastaus</u>: $\frac{2000\pi}{9\sqrt{3}}\approx 403$

8. (9 pisteen tehtävä)
Käyrälle $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ on piirretty origoon tangentti ja normaali. Määritä sen kolmion ala, jonka muodostavat origoon piirretyt tangentti ja normaali sekä toinen tangentti, joka on piirretty origoon piirretyn tangentin ja käyrän leikkauspisteeseen.
Ratkaisu:
$y = x^3 - 3x^2 + 2x$

$y' = 3x^2 - 6x + 2$

Origoon piirretyn tangentin kulmakerroin on $y'(0) = 3\cdot 0^2 - 6\cdot 0 + 2 = 2$ ja tangentin yhtälö on $y = 2x$.

Origoon piirretyn normaalin yhtälö on $y = -\frac{1}{2}x$.

Origoon piirretyn tangentin ja käyrän leikkauspisteet

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + 2x \\ y = 2x \end{cases}$$

$x^3 - 3x^2 + 2x = 2x$

$x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2(x-3) = 0$

$x^2 = 0$ tai $x - 3 = 0$

$x = 0$ tai $x = 3$

Kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin

$y'(0) = 3\cdot 3^2 - 6\cdot 3 + 2 = 11$

Sivuamispisteen y-koordinaatti $y = 3^3 - 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3 = 6$

Tangentin yhtälö

$y - 6 = 11(x-3)$

$y = 11x - 27$

Tangentin ja origoon piirretyn normaalin leikkauspiste

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ y = 11x - 27 \end{cases}$$

$$11x - 27 = -\frac{1}{2}x$$

$$11\frac{1}{2}x = 27$$

$$x = \frac{54}{23}$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{54}{23} = -\frac{27}{23}$$

Kolmion kärkipisteet ovat (0,0), (3,6) ja $\left(\frac{54}{23}, -\frac{27}{23}\right)$. Kolmio on suorakulmainen ja suorakulma on origossa.

Kateettien pituudet

$$\sqrt{(6-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \quad \text{ja} \quad \sqrt{\left(\frac{54}{23} - 0\right)^2 + \left(-\frac{27}{23} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{3645}{529}}$$

Kolmion pinta-ala

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3645}{529}} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{405}{46} \approx 8{,}8$$

<u>Vastaus</u>: Kolmion ala on $\frac{405}{46} \approx 8{,}8$