1 Kertausta geometriasta

1.1 Monikulmiota

1.

a) Kolmion kulmien summa on 180°. Koska tiedetään kaksi kulmaa, kulma x voidaan laskea.

$$\begin{aligned} 180^\circ &= x + 35^\circ + 80^\circ \\ x &= 180^\circ - 35^\circ - 80^\circ \\ x &= 65^\circ \end{aligned}$$

b) Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuria, joten suunnikkaassa on kaksi 65°:n kulmaa ja kaksi x kulmaa. Suunnikkaan kulmien summa on 360°, joten voidaan laskea:

$$\begin{aligned} 360^\circ &= 65^\circ + 65^\circ + x + x \\ 2x &= 360^\circ - 65^\circ - 65^\circ \\ 2x &= 230^\circ && |:2 \\ x &= 115^\circ \end{aligned}$$

c) Tasakylkisen kolmien kantakulmat ovat yhtä suuret, joten kolmiossa on kaksi x kulmaa. Kolmion kulmien summa on 180°, joten voidaan laskea:

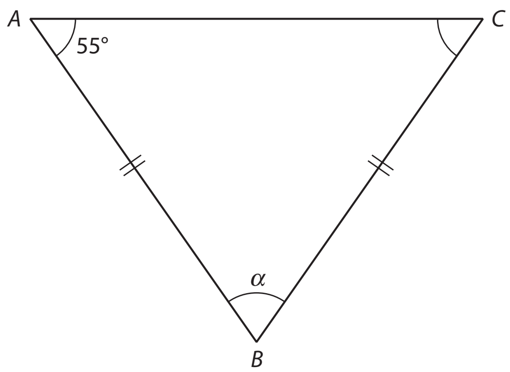
$$
\begin{aligned}
180^\circ &= 40^\circ + x + x \\
2x &= 180^\circ - 40^\circ \\
2x &= 140^\circ \qquad \qquad \Big| :2 \\
x &= 70^\circ
\end{aligned}
$$

d) Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantakulmat ovat keskenään yhtä suuria, samoin kannan vastaiset kulmat, joten puolisuunnikkaassa on kaksi 125°:n kulmaa ja kaksi x kulmaa. Tasakylkisen puolisuunnikkaan kulmien summa on 360°, joten voidaan laskea:

$$
\begin{aligned}
360^\circ &= 125^\circ + 125^\circ + x + x \\
2x &= 360^\circ - 125^\circ - 125^\circ \\
2x &= 110^\circ \qquad \qquad \Big| :2 \\
x &= 55^\circ
\end{aligned}
$$

2.

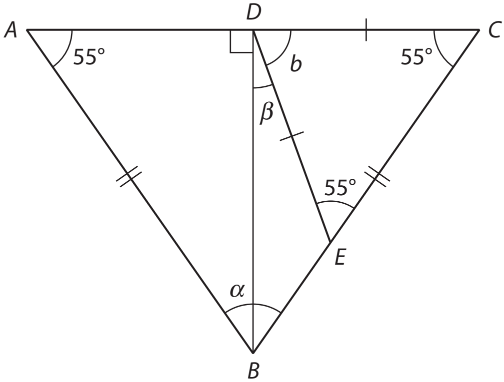
Kolmio *ABC* on tasakylkinen kolmio. Tasakylkisen kulmien summa on 180°.



Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α.

$$\begin{aligned} 55° + 55° + \alpha &= 180° \\ \alpha &= 180° - 55° - 55° \\ \alpha &= 70° \end{aligned}$$

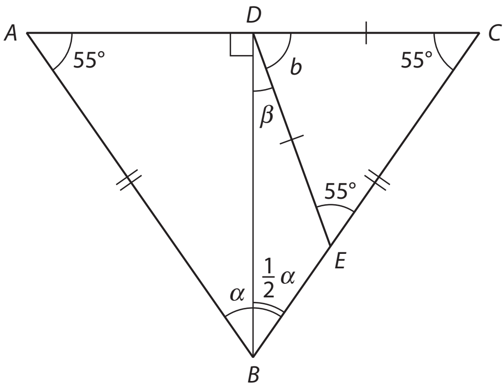
Tarkastellaan tasakylkistä kolmiota *EDC*.



Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *b*.

$$
\begin{aligned}
b + 55° + 55° &= 180° \\
b &= 180° - 55° - 55° \\
b &= 70°
\end{aligned}
$$

Tarkastellaan kolmiota *DBC*.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä β.

$$\frac{1}{2}\alpha + \beta + 70° + 55° = 180°$$

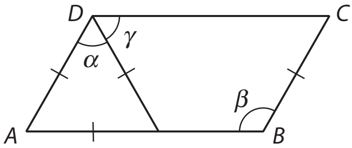
$$\beta = 180° - \left(\frac{1}{2}\cdot 70°\right) - 70° - 55°$$

$$\beta = 180° - 35° - 70° - 55°$$

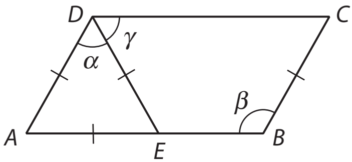
$$\beta = 20°$$

3.

a) Piirretään suunnikas *ABCD*.



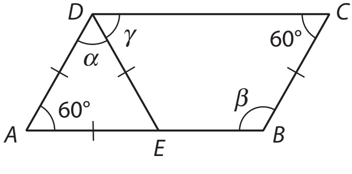
Tarkastellaan suunnikkaan sisällä olevaa tasasivuista kolmiota *AED*.



Tasasivuisen kolmion kulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α.

$$\begin{aligned} \alpha+\alpha+\alpha &= 180° \\ 3\alpha &= 180° \quad \mid :3 \\ \alpha &= 60° \end{aligned}$$

Tarkastellaan suunnikasta *ABCD*. Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.



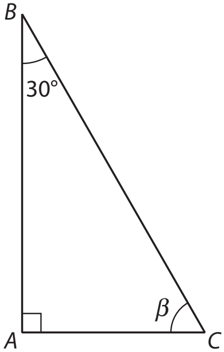
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä β.

$$\begin{aligned}
\gamma+\alpha+\beta+60^\circ+60^\circ &= 360^\circ && \big|\ \gamma+\alpha=\beta \\
\beta+\beta &= 360^\circ-60^\circ-60^\circ \\
2\beta &= 240^\circ && \big|\ :2 \\
\beta &= 120^\circ
\end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea γ.

$$\begin{aligned}
\alpha+\gamma &= \beta \\
\gamma &= \beta-\alpha \\
\gamma &= 120^\circ-60^\circ \\
\gamma &= 60^\circ
\end{aligned}$$

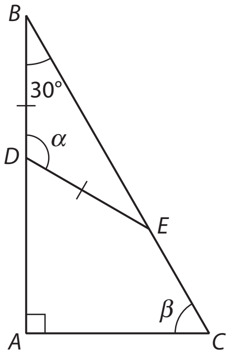
b) Piirretään suorakulmainen kolmio *ABC*.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä β.

$$
\begin{aligned}
90° + 30° + \beta &= 180° \\
\beta &= 180° - 90° - 30° \\
\beta &= 60°
\end{aligned}
$$

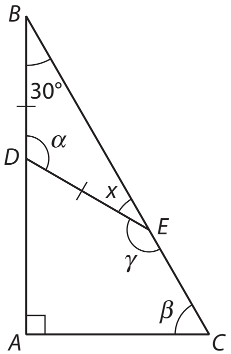
Tarkastellaan suorakulmaisen kolmion sisällä olevaa tasasivuista kolmiota *BDE*.



Tasasivuisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α.

$$\begin{aligned} 30° + \alpha + 30° &= 180° \\ \alpha &= 180° - 30° - 30° \\ \alpha &= 120° \end{aligned}$$

Kulma γ ja kulma x muodostavat oikokulman.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan γ.

$$\begin{aligned} x + \gamma &= 180° \qquad \mid x = 30° \\ \gamma &= 180° - 30° \\ \gamma &= 150° \end{aligned}$$

4.

a) Merkataan kantakulmia α:lla, tällöin huippukulmaa kuvaava lauseke on $\alpha + 30°$. Kolmion kumien summa on 180°. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α.

$$
\begin{aligned}
\alpha + \alpha + \alpha + 30° &= 180° \\
3\alpha &= 180° - 30° \\
3\alpha &= 150° \qquad \Big| :3 \\
\alpha &= 50°
\end{aligned}
$$

Kantakulmat ovat 50° ja huippukulma on $50° + 30° = 80°$.

b) Merkataan suorakulmaisen kolmion teräviä kulmia $2x$ ja $7x$. Suorakulmaisessa kolmiossa yksi kulma on 90°. Kolmion kulmien summa on 180°. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$
\begin{aligned}
2x + 7x + 90° &= 180° \\
2x + 7x &= 180° - 90° \\
9x &= 90° \qquad \Big| :9 \\
x &= 10°
\end{aligned}
$$

Terävät kulmat ovat $2 \cdot 10° = 20°$ ja $7 \cdot 10° = 70°$.

5.

a) Muodostetaan yhtälö ratkaistaan siitä *x*.

$$\begin{aligned} 3x+4x+5x &= 48\,\text{cm} \\ 12x &= 48\,\text{cm} \qquad \left|:12\right. \\ x &= 4\,\text{cm} \end{aligned}$$

Sivut ovat $3\cdot 4\,\text{cm}=12\,\text{cm}$, $4\cdot 4\,\text{cm}=16\,\text{cm}$ ja $5\cdot 4\,\text{cm}=20\,\text{cm}$.

b) Kolmion pinta-ala voidaan laskea kaavalla:

$$A=\frac{\text{kanta}\cdot\text{korkeus}}{2}=\frac{16\,\text{cm}\cdot 12\,\text{cm}}{2}=96\,\text{cm}^2.$$

6.

a) Merkataan kolmion lyhyempää kateettia kirjaimella x, tällöin pidempää kateettia kuvaa lauseke x + 7 cm.

Muodostetaan piirin yhtälö ja ratkaistaan x.

$$
\begin{aligned}
x+(x+7\,\text{cm})+13\,\text{cm} &= 30\,\text{cm} \\
x+x &= 30\,\text{cm}-7\,\text{cm}-13\,\text{cm} \\
2x &= 10\,\text{cm} \qquad \Big|:2 \\
x &= 5\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

Kateettien pituudet ovat 5 cm ja 5 cm + 7 cm = 12 cm.

b) Kolmion pinta-ala on 4,0 cm^2. Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{x\cdot(x+7)}{2}=4 \qquad \Big|\cdot 2$$

$$x\cdot(x+7)=8$$

$$x^2+7x=8$$

$$x^2+7x-8=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{2}$$

$$x=\frac{-7\pm9}{2}$$

$$x=\frac{-7+9}{2}=1 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-7-9}{2}=-8$$

Koska sivun pituus on aina positiivinen, $x = 1$ (cm).

Kateettien pituudet ovat 1 cm ja 1 cm + 7 cm = 8 cm.

7.

a) Tasakylkisen kolmion kylkien pituudet ovat yhtä suuret. Merkataan sivun pituutta kirjaimella x, tällöin kantaa kuvaa lauseke x + 3 cm.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$
\begin{aligned}
x+x+(x+3\,\text{cm}) &= 18\,\text{cm} \\
x+x+x &= 18\,\text{cm}-3\,\text{cm} \\
3x &= 15\,\text{cm} \qquad |:3 \\
x &= 5\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

Kolmion sivut ovat 5 cm, 5 cm ja 5 cm + 3cm = 8cm.

b) Merkataan kannan pituutta kirjaimella x, tällöin korkeus on $6x$. Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$
\begin{aligned}
\frac{x\cdot(6x)}{2} &= 12 \qquad |\cdot 2 \\
6x^2 &= 24 \qquad |:6 \\
x^2 &= 4 \\
x &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Koska kannan pituus on aina positiivinen, $x = 2$ (cm).

Korkeus on $6\cdot 2\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$.

8.

Merkataan erisuuntaisia sivuja 3*x* ja 4*x*. Muodostetaan piirin yhtälö ja ratkaistaan siitä *x*.

$$
\begin{aligned}
3x+4x+3x+4x &= 42\text{ cm} \\
14x &= 42\text{ cm} \quad \Big| :14 \\
x &= 3\text{ cm}
\end{aligned}
$$

Suorakulmion erisuuntaiset sivut ovat:

- $3\cdot 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$
- $4\cdot 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$

Lasketaan suorakulmion pinta-ala.

$9\,\text{cm}\cdot 12\,\text{cm} = 108\,\text{cm}^2$.

9.

Merkataan suorakulmion lyhyempää sivua kirjaimella *x*, tällöin pidempää sivua kuvaa lauseke *x* + 2 cm. Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$x^2 + 2x = 35$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 12}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 12}{2} = 5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 12}{2} = -7$$

Koska sivun pituus on aina positiivinen, *x* = 5 (cm). Pidemmän sivun pituus on tällöin 5 cm + 2 cm.

Lasketaan piiri.

$$5\text{ cm} + 7\text{ cm} + 5\text{ cm} + 7\text{ cm} = 24\text{ cm}$$

10.

a) Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantakulmat ovat yhtä suuria, samoin kannan vastaiset kulmat. Merkataan kantakulmia kirjaimella x, tällöin kannan vastaisia kulmia kuvaa lauseke $x + 20°$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$
\begin{aligned}
x + x + (x + 20°) + (x + 20°) &= 360° \\
x + x + x + x &= 360° - 20° - 20° \\
4x &= 320° \qquad \big| :4 \\
x &= 80°
\end{aligned}
$$

Kantakulmat ovat 80° ja kannan vastaiset kulmat ovat 80° + 20° = 100°.

b) Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuria. Merkataan kulmia $4x$ ja $5x$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$
\begin{aligned}
4x + 5x + 4x + 5x &= 360° \\
18x &= 360° \qquad \big| :18 \\
x &= 20°
\end{aligned}
$$

Suunnikkaan kulmat ovat $4 \cdot 20° = 80°$ ja $5 \cdot 20° = 100°$.

11.

Merkataan korkeutta kirjaimella h. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan sen avulla korkeus h.

$$\frac{4+8}{2}\cdot h = 30 \qquad \Big| : \frac{4+8}{2}$$

$$h = \frac{4+8}{2} : 30$$

$$h = \frac{2}{12}\cdot 30$$

$$h = \frac{60}{12} = 5$$

Tasakylkisen puolisuunnikkaan korkeus on 5 cm.

12.

Merkataan yhdensuuntaisia sivuja x ja $3x$. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\frac{x+3x}{2}\cdot 3=12 \qquad \Big| : \frac{3}{2}$$

$$x+3x=12:\frac{3}{2}$$

$$4x=12\cdot\frac{2}{3}$$

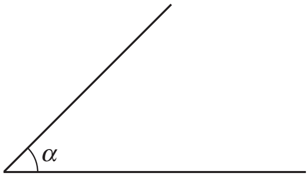
$$4x=8 \qquad \Big| : 4$$

$$x=2\ \text{(cm)}$$

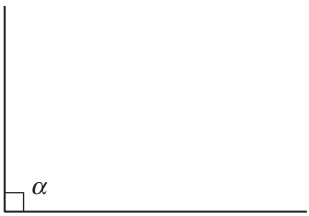
Yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 2 cm ja $3\cdot 2\ \text{cm}=6\ \text{cm}$.

13.

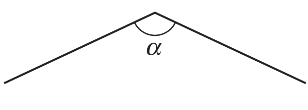
a)



b)

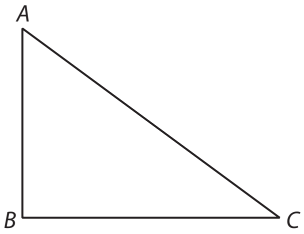


c)

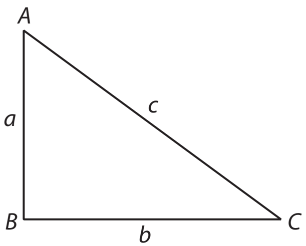


14.

a)

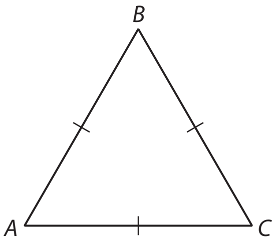


b)

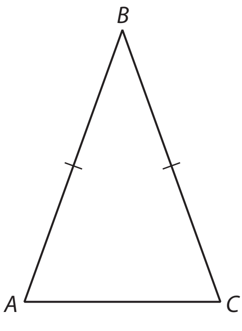


15.

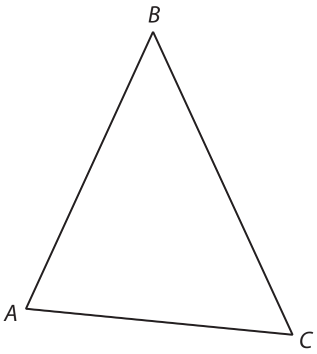
a)



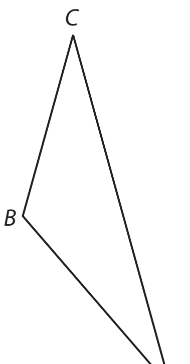
b)



c)

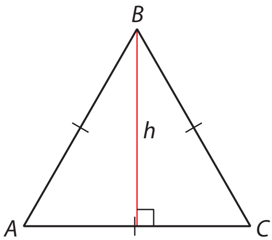


d)

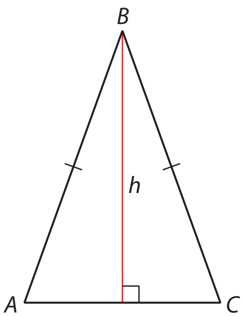


16.

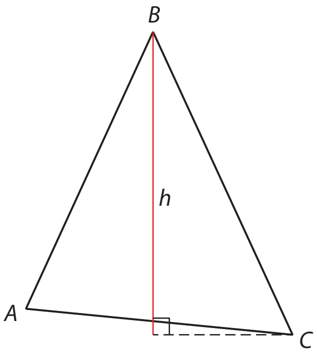
a)



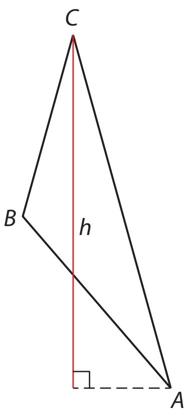
b)



c)

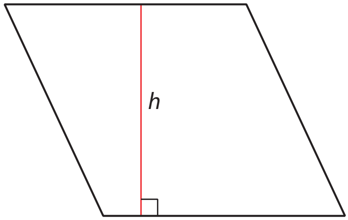


d)

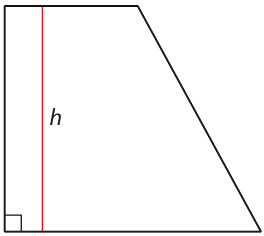


17.

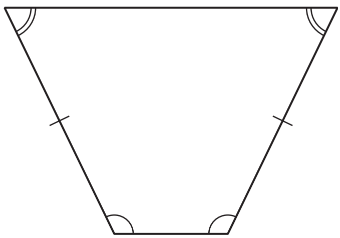
a)



b)



c)



18.

a) Lasketaan liikkeen A aurinkosuojan pinta-ala.

$$\frac{3{,}6 \cdot 3{,}1}{2} = 5{,}58\ (\mathrm{m}^2)$$

Lasketaan liikkeen B aurinkosuojan pinta-ala.

$$\frac{2{,}8 \cdot 4{,}2}{2} = 5{,}88\ (\mathrm{m}^2)$$

Nyt voidaan laskea, kuinka paljon liikkeen B aurinkosuojan pinta-ala on suurempi kuin liikkeen A aurinkosuojan pinta-ala.

$$\frac{5{,}88 - 5{,}58}{5{,}58} = 0{,}05376344... \approx 5{,}4\ \%$$

Liikkeen B aurinkosuoja varjostaa 5,4 % suuremman pinta-alan verrattuna liikkeen A aurinkosuojaan.

b) Merkataan liikkeen B aurinkosuojan toista kateettia kirjaimella x.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{2,8 \cdot x}{2} = 5,58$$
$$x = 3,9857142...$$
$$x \approx 4,0$$

Toisen kateetin tulisi olla 4,0 m pitkä.

19.

Lasketaan yhden puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A_1 = \frac{15,0+7,0}{2} \cdot 6,0 = 66\ (\text{m}^2)$$

Lasketaan yhden tasasivuisen kolmion pinta-ala.

$$A_2 = \frac{8,0 \cdot 6,0}{2} = 24\ (\text{m}^2)$$

Nyt voidaan laskea koko katon pinta-ala.

$$A = 2A_1 + 2A_2 = 2 \cdot 66\ \text{m}^2 + 2 \cdot 24\ \text{m}^2 = 180\ \text{m}^2$$

Koska tiiliä tilataan 5 % katon pinta-alaa suuremmalle määrälle, kerrotaan tämä vielä prosenttikertoimella 1,05.

$$180\ \text{m}^2 \cdot 1,05 = 189\ \text{m}^2$$

Nyt voidaan laskea kuinka paljon 189 m^2 kattotiiliä tulee maksamaan.

$$189\ \text{m}^2 \cdot 9,20\ €/\text{m}^2 = 1738,8\ € \approx 1739\ €$$

20.

a) 2,5 km = 2500 m.

Lasketaan nurmialueen piiri.

$$p = 335\text{ m} + 40\text{ m} + 335\text{ m} + 40\text{ m} = 750\text{ m}$$

Merkataan kierroksien määrää kirjaimella x. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 750 \cdot x &= 2500 \\ x &= 3{,}333... \end{aligned}$$

Nurmialue tulee kiertää vähintään 4 kertaa, jotta kävelymatkan pituus olisi yli 2,5 km.

b) Lasketaan nurmialueen pinta-ala.

$$A = 335\text{ m} \cdot 40\text{ m} = 13\,400\text{ m}^2 = 134\text{ a}$$

Lasketaan, kuinka paljon siemeniä tarvitaan nurmikon kylvämiseen.

$$134\text{ a} \cdot 1{,}8\text{ kg/a} = 241{,}2\text{ kg} \approx 240\text{ kg}$$

Siemeniä tarvitaan 240 kg.

21.

Kuvan kolmio *ABC* on tasakylkinen kolmio, koska kolmion sivut ovat yhtä pitkät. Tasakylkisessä kolmiossa kantakulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α.

$$\begin{aligned} 38° + \alpha + \alpha &= 180° \\ 2\alpha &= 142° && \Big| :2 \\ \alpha &= 71° \end{aligned}$$

Kolmion sisällä on tasakylkinen puolisuunnikas. Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantakulmat ovat keskenään yhtä suuria, samoin kannan vastaiset kulmat. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan β.

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + \beta + \beta &= 360° && \Big| \alpha = 71° \\ 71° + 71° + \beta + \beta &= 360° \\ 2\beta &= 218° && \Big| :2 \\ \beta &= 109° \end{aligned}$$

22.

a) Tasakylkisen kolmion kyljet ovat yhtä pitkiä. Merkataan kolmion kyljen pituutta kirjaimella x. Muodostetaan piirin yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} x + x + (x+4) &= 64 \\ x + x + x + 4 &= 64 \\ 3x &= 60 \qquad \Big| :3 \\ x &= 20 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Kolmion kyljet ovat 20 cm ja kolmion kanta on 20 cm + 4 cm = 24 cm.

b) Merkataan kolmion korkeutta kirjaimella h. Muodostetaan panta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä h.

$$\begin{aligned} \frac{24 \cdot h}{2} &= 192 \qquad \Big| :\frac{24}{2} \\ h &= 192 : \frac{24}{2} \\ h &= 192 \cdot \frac{2}{24} \\ h &= 16 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

23.

Merkataan tasakylkisen puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituuksia x ja $5x$. Koska puolisuunnikkaan korkeus on yhtä pitkä kuin lyhyempi yhdensuuntaisista sivuista, merkataan sitäkin kirjaimella x. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

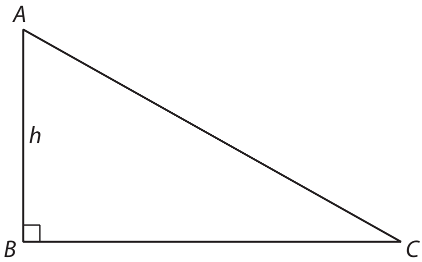
$$
\begin{aligned}
\frac{x+5x}{2}\cdot x &= 12 && \big|\cdot 2\\
6x\cdot x &= 24\\
6x^2 &= 24 && \big|:6\\
x^2 &= 4\\
x &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Koska pituus on aina positiivista, $x = 2$.

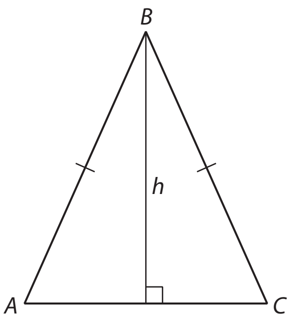
Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 2 cm ja $5\cdot 2\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$.

24.

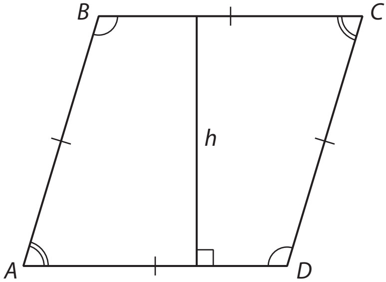
a)



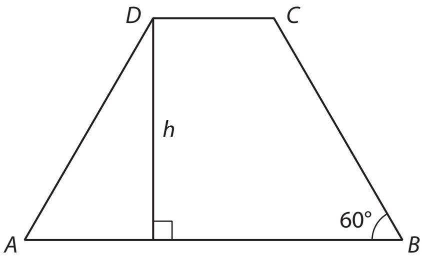
b)



c)



d)



25.

Magneettitaulun leveys on 180 cm = 1,80 m ja korkeus 110 cm = 1,10 m. Lasketaan magneettitaulun pinta-ala.

$$A = 1,80\,\text{m} \cdot 1,10\,\text{m} = 1,98\,\text{m}^2$$

Koska magneettitaulu maalataan kolmeen kertaan, niin maalia tulee ostaa $3 \cdot 1,98\,\text{m}^2 = 5,94\,\text{m}^2$ pinta-alalle.

Litralla saadaan maalattua 1,4 neliömetriä. Lasketaan, kuinka monta litraa magneettimaalia menee yhteensä.

$$\frac{5,94\,\text{m}^2}{1,4\,\text{m}^2/\text{l}} = 4,24285...\,\text{l}$$

Koska maalia myydään 0,5 litran purkissa purkkeja tulee ostaa

$$\frac{4,24285...\,\text{l}}{0,5\,\text{l}} = 8,4857... \approx 9\ \text{kpl}\,.$$

Lasketaan kuinka paljon 9 purkkia maalia maksaa.

$$52,90\ € \cdot 9 = 476,10\ €$$

Maalaamista varten ostettava magneettimaali maksaa 476 euroa.

1.2 Ympyrä

26.

a) $2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi$

b) $2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\pi$

c) $2 \cdot \pi \cdot \pi = 2\pi^2$

27.

a) Kun halkaisijan pituus on 14, säteen pituus on $14:2=7$.

Ympyrän pinta-ala on $\pi\cdot7^2=49\pi$.

b) Kun halkaisijan pituus on $\frac{2}{5}$, säteen pituus on $\frac{2}{5}:2=\frac{1}{5}$.

Ympyrän pinta-ala on $\pi\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}\pi=\frac{\pi}{25}$

c) Kun halkaisijan pituus on $\frac{\pi}{2}$, säteen pituus on $\frac{\pi}{2}:2=\frac{\pi}{4}$.

Ympyrän pinta-ala on $\pi\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\pi\cdot\frac{\pi^2}{4^2}=\pi\cdot\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^3}{16}$.

28.

a) Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$$p = 2 \cdot \pi \cdot 10 = 20\pi$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$\pi \cdot 10^2 = 100\pi$$

b) Merkataan ympyrän sädettä kirjaimella *r*. Muodostetaan ympyrän pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä *r*.

$$\pi r^2 = 36 \quad \Big| : \pi$$

$$r^2 = \frac{36}{\pi}$$

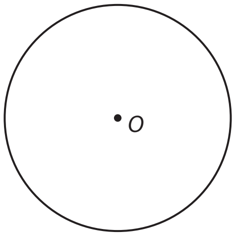
$$r = \pm\sqrt{\frac{36}{\pi}} = \pm\frac{6}{\sqrt{\pi}}$$

Koska pinta-ala on aina positiivista, $r = \dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$.

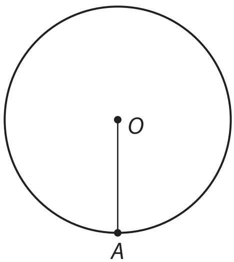
Lasketaan ympyrän halkaisija.

$$d = 2r = 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{12}{\sqrt{\pi}}$$

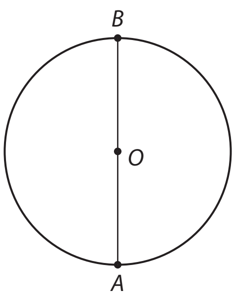
29.



a)

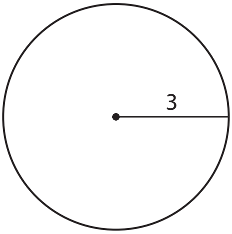


b)



30.

a)



b) Lasketaan ympyrän halkaisija säteen avulla.

$d = 2r = 2 \cdot 3$

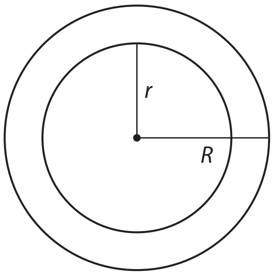
c) Kehän pituus on halkaisijan ja piin tulo:

$p = d \cdot \pi = 6 \cdot \pi = 6\pi$

d) Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^3 = 9\pi$

31.



32.

a) Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$p = 2 \cdot \pi \cdot 13{,}2\ \text{cm} = 82{,}938046...\ \text{cm} \approx 82{,}9\ \text{cm}$

b) Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$A = \pi \cdot (13{,}2\ \text{cm})^2 = 547{,}391103...\ \text{cm}^2 \approx 547\ \text{cm}^2$

33.

a) Lasketaan ensin koko nelikulmion pinta-ala ja vähennetään siitä ympyröiden pinta-ala.

Nelikulmion korkeus on 7,2 cm, joten ympyrän halkaisija on 7,2 cm. Koska nelikulmion sisällä on kaksi ympyrää, joiden halkaisija on 7,2 cm, nelikulmion leveys on $2 \cdot 7,2\text{ cm} = 14,4\text{ cm}$.

Lasketaan nelikulmion pinta-ala.

$$A_1 = 14,4\text{ cm} \cdot 7,2\text{ cm} = 103,68\text{ cm}^2$$

Koska ympyrän halkaisija on 7,2 cm, ympyrän säde on $7,2\text{ cm} : 2 = 3,6\text{ cm}$.

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A_2 = \pi \cdot (3,6\text{ cm})^2 = 40,715040...\text{ cm}^2$$

Lasketaan molempien ympyröiden pinta-ala.

$$2A_2 = 2 \cdot 40,715040...\text{ cm}^2 = 81,4300815...\text{ cm}^2$$

Nyt voidaan laskea väritetyn alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_3 &= A_1 - 2A_2 \\ &= 103,68\text{ cm}^2 - 81,4300815\text{ cm}^2 \\ &= 22,24991...\text{ cm}^2 \\ &\approx 22\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin koko nelikulmion pinta-ala ja vähennetään siitä ympyröiden pinta-ala.

Nelikulmion leveys on 25,0 mm ja kahden ympyrän halkaisija on 25,0 mm, joten ympyrän halkaisija on $25,0\text{ mm} : 2 = 12,5\text{ mm}$. Nelikulmion korkeus on myös kaksi ympyrän halkaisijaa, joten nelikulmion korkeus on myös 25,0 mm.

Lasketaan nelikulmion pinta-ala.

$$A_1 = 25,0\text{ mm} \cdot 25,0\text{ mm} = 625\text{ mm}^2$$

Ympyrän halkaisija on 12,5 mm, joten ympyrän säde on $12,5\text{ mm} : 2 = 6,25\text{ mm}$.

Lasketaan yhden ympyrän pinta-ala.

$$A_2 = \pi \cdot (6,25\text{ mm})^2 = 122,718463...\text{ mm}^2$$

Lasketaan kaikkien ympyröiden pinta-ala.

$$4A_2 = 4 \cdot 122,718463...\text{ mm}^2 = 490,8738521...\text{ mm}^2$$

Nyt voidaan laskea väritetyn alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_3 &= A_1 - 4A_2 \\ &= 625\text{ mm}^2 - 490,8738521...\text{ mm}^2 \\ &= 134,126147876...\text{ mm}^2 \\ &\approx 134\text{ mm}^2 \end{aligned}$$

34.

Kuvio muodostuu neliöstä ja kahdesta puoliympyrästä. Neliön sivun pituus on 3,0 cm ja puoliympyröiden halkaisijat ovat 3,0 cm, joten puoliympyröiden säde on $3,0\text{ cm} : 2 = 1,5\text{ cm}$. Kuvion piiri muodostuu neliön kahdesta sivusta sekä puoliympyröiden kehistä.

Lasketaan kahden puoliympyrän eli yhden ympyrän kehän pituus.

$$p_1 = 2 \cdot \pi \cdot 1,5\text{ cm} = 9,424777960...\text{ cm}$$

Lasketaan koko kuvion pinta-ala.

$$p = p_1 + 3,0\text{ cm} + 3,0\text{ cm} = 15,424777960...\text{ cm} \approx 15\text{ cm}$$

Kuvion pinta-ala muodostuu neliöstä ja ympyrästä.

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A_1 = \pi \cdot (1,5\text{ cm})^2 = 7,0685834...\text{ cm}^2$$

Lasketaan neliön pinta-ala.

$$A_2 = 3,0\text{ cm} \cdot 3,0\text{ cm} = 9,0\text{ cm}^2$$

Nyt voidaan laskea koko kuvion pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= 7,0685834...\text{ cm}^2 + 9,0\text{ cm}^2 \\ &= 16,068534...\text{ cm}^2 \\ &\approx 16\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

35.

a) Maalauksen halkaisija on 130,8 cm, joten maalauksen säde on

130,8 cm : 2 = 65,4 cm.

Lasketaan maalauksen ympärysmitta eli kehän pituus.

$2 \cdot \pi \cdot 65{,}4 \text{ cm} = 410{,}920319... \text{ cm} \approx 410{,}9 \text{ cm}$

b) Lasketaan maalauksen pinta-ala.

$\pi \cdot (65{,}4 \text{ cm})^2 = 13\,437{,}09443... \text{ cm}^2 \approx 13\,440 \text{ cm}^2$

36.

a) Muodostetaan ympyrän kehän yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$\begin{aligned}2\pi r &= 75 \text{ cm}\\ r &= 11{,}936620... \text{ cm}\end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea ympyrän halkaisija.

$$d = 2r = 2 \cdot 11{,}936620... \text{ cm} = 23{,}8732414... \text{ cm} \approx 24 \text{ cm}$$

b) Nyt kun tiedetään ympyrän säde *r*, voidaan laskea ympyrän pinta-ala.

$$\begin{aligned}A &= \pi r^2\\ &= \pi \cdot (11{,}936620... \text{ cm})^2\\ &= 447{,}623277... \text{ cm}^2\\ &\approx 450 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

37.

Pöydän ympärysmitta eli kehän pituus on 314 cm. Muodostetaan kehän yhtälö ja ratkaistaan siitä *r*.

$$2\pi r = 314 \text{ cm}$$
$$r = \frac{314 \text{ cm}}{2\pi}$$

Nyt voidaan laskea ympyrän pinta-ala.

$$A = \pi r^2$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{314 \text{ cm}}{2\pi}\right)^2$$
$$= 7846{,}0203845... \text{ cm}^2$$
$$\approx 7850 \text{ cm}^2$$

38.

Lasketaan kaula-aukon säde ja kauluksen säde. Merkitään kaula-aukon sädettä kirjaimella x ja kauluksen sädettä kirjaimella y.

Muodostetaan kaula-aukon kehänpituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$2\pi x = 35$$
$$x = \frac{35}{2\pi}$$

Muodostetaan kauluksen kehänpituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä y.

$$2\pi y = 85$$
$$y = \frac{85}{2\pi}$$

Kauluksen leveys lasketaan vähentämällä kaula-aukon säde kauluksen säteestä.

$$\begin{aligned} y - x &= \frac{85}{2\pi}\ \text{cm} - \frac{35}{2\pi}\ \text{cm} \\ &= \frac{50}{2\pi}\ \text{cm} \\ &= 7{,}957747...\ \text{cm} \\ &\approx 8{,}0\ \text{cm} \end{aligned}$$

39.

a) Merkitään ympyrän säteen pituutta kirjaimella r. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä säde r.

$$\pi r^2 = 230$$
$$r = \pm\sqrt{\frac{230}{\pi}}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = \sqrt{\frac{230}{\pi}}$.

Ympyrän halkaisija d on kaksi kertaa pitempi kuin säde. Lasketaan ympyrän halkaisija.

$$\begin{aligned} d &= 2r \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{230}{\pi}} \text{ cm} \\ &= 17{,}112717\ldots \text{ cm} \\ &\approx 17 \text{ cm} \end{aligned}$$

b) Merkitään ympyrän säteen pituutta kirjaimella r. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä säde r.

$$\pi r^2 = 12,6$$
$$r = \pm\sqrt{\frac{12,6}{\pi}}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = \sqrt{\frac{12,6}{\pi}}$.

Ympyrän halkaisija d on kaksi kertaa pitempi kuin säde. Lasketaan ympyrän halkaisija.

$$\begin{aligned} d &= 2r \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{12,6}{\pi}} \text{ cm} \\ &= 4,005348\ldots \text{ cm} \\ &\approx 4,01 \text{ cm} \end{aligned}$$

40.

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä r.

$$\pi r^2 = 63{,}6$$
$$r = \pm\sqrt{\frac{63{,}6}{\pi}}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = \sqrt{\frac{63{,}6}{\pi}}$.

Muodostetaan ympyrän kehäpituuden yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 2\pi\sqrt{\frac{63{,}6}{\pi}}\ \text{cm} \\ &= 28{,}270500...\ \text{cm} \\ &\approx 28{,}3\ \text{cm} \end{aligned}$$

41.

Muutetaan Lehtijärven pinta-ala neliökilometreiksi.

$700 \text{ ha} = 7 \text{ km}^2$

Merkitään järven sädettä kirjaimella *r*. Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä *r*.

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= 7 \\ r &= \pm\sqrt{\frac{7}{\pi}} \end{aligned}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = \sqrt{\frac{7}{\pi}}$.

Halkaisija *d* on kaksi kertaa suurempi kuin säde. Lasketaan halkaisijan pituus.

$$\begin{aligned} d &= 2r \\ &= 2{,}98541066... \text{ km} \\ &= 3{,}0 \text{ km} \end{aligned}$$

42.

Merkitään ympyrän ja neliön piiriä kirjaimella p. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x. Lasketaan neliön sivun pituus.

$$x + x + x + x = p$$

$$x = \frac{p}{4}$$

Lasketaan neliön pinta-ala.

$$A_{\text{neliö}} = x \cdot x = \frac{p}{4} \cdot \frac{p}{4} = \frac{p^2}{16}$$

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r. Muodostetaan ympyrän kehäpituuden yhtälö ja ratkaistaan r.

$$2\pi r = p$$

$$r = \frac{p}{2\pi}$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = \pi \cdot \frac{p^2}{4\pi^2} = \frac{p^2}{4\pi}$$

Lasketaan, kuinka paljon neliön pinta-ala on pienempi kuin ympyrän pinta-ala.

$$\frac{A_{\text{ympyrä}} - A_{\text{neliö}}}{A_{\text{ympyrä}}} = \frac{\frac{p^2}{4\pi} - \frac{p^2}{16}}{\frac{p^2}{4\pi}}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$= 0{,}2146018366...$$

$$\approx 0{,}215$$

$$= 21{,}5\%$$

b) Lasketaan kuinka paljon ympyrän pinta-ala on suurempi kuin neliön pinta-ala.

$$\frac{A_{\text{ympyrä}} - A_{\text{neliö}}}{A_{\text{neliö}}} = \frac{\frac{p^2}{4\pi} - \frac{p^2}{16}}{\frac{p^2}{16}}$$

$$= \frac{4}{\pi} - 1$$

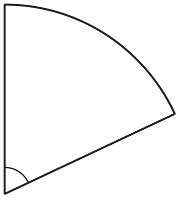
$$= 0{,}273239...$$

$$\approx 0{,}273$$

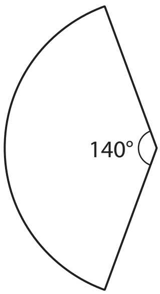
$$= 27{,}3\%$$

43.

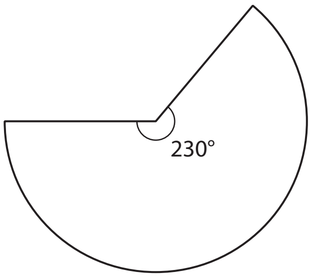
a)



b)

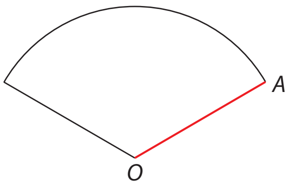


c)

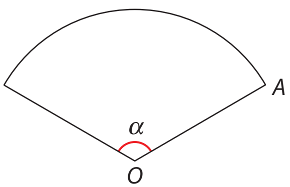


44.

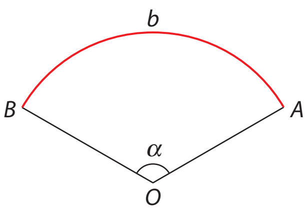
a)



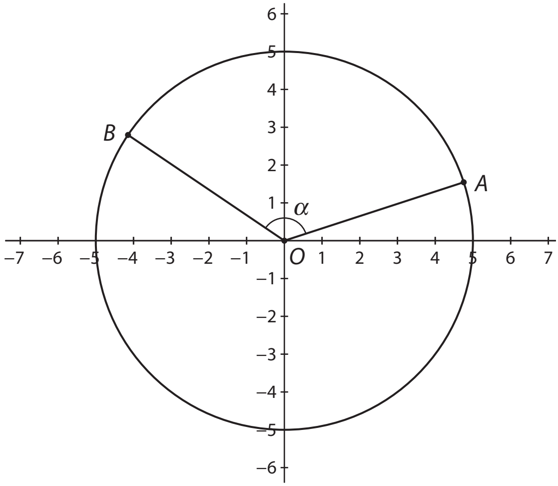
b)



c)



45.



46.

a) Lasketaan sektorin kaarenpituus.

$$b = \frac{70,87°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 2,9 \text{ cm} = 3,587053... \text{ cm} \approx 3,6 \text{ cm}$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A = \frac{70,87°}{360°} \cdot \pi \cdot (2,9 \text{ cm})^2 = 5,2012269... \text{ cm}^2 \approx 5,2 \text{ cm}^2$$

b) Lasketaan sektorin kaarenpituus.

$$b = \frac{300,94°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 1,55 \text{ m} = 8,141210... \text{ m} \approx 8,14 \text{ m}$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A = \frac{300,94°}{360°} \cdot \pi \cdot (1,55 \text{ m})^2 = 6,309438... \text{ m}^2 \approx 6,31 \text{ m}^2$$

47.

a) Pitsanpalan säde on puolet pitsan halkaisijasta eli $34\ \text{cm} : 2 = 17\ \text{cm}$.

Pitsanpalan pinta-ala on

$$\frac{25°}{360°} \cdot \pi \cdot (17\ \text{cm})^2 = 63{,}05001...\ \text{cm}^2 \approx 63\ \text{cm}^2$$

b) Lasketaan pitsanpalan ulkoreunan eli kehänpituus.

$$p = \frac{25°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 17\ \text{cm} = 7{,}417649...\ \text{cm} \approx 7{,}4\ \text{cm}$$

48.

a) Viuhkan pinta-ala on

$$A=\frac{75°}{360°}\cdot\pi\cdot(24\text{ cm})^2=376{,}99111...\text{ cm}^2\approx 380\text{ cm}^2$$

b) Lasketaan viuhkan ulkoreunan pituus eli sektorin kehänpituus.

$$b=\frac{75°}{360°}\cdot 2\pi\cdot 24\text{ cm}=31{,}415926...\text{ cm}\approx 31\text{ cm}$$

49.

Lasketaan ensin sektorin pinta-ala ja vähennetään siitä suorakolmion pinta-ala.

Koska keskuskulma on suorakulma, se on 90°. Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A_{\text{sektori}} = \frac{90°}{360°} \cdot \pi \cdot (13\text{ cm})^2 = 132{,}732289...\text{ cm}^2$$

Lasketaan suorakolmion pinta-ala.

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{13\text{ cm} \cdot 13\text{ cm}}{2} = 84{,}5\text{ cm}^2$$

Nyt voidaan laskea väritetyn alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} &= 132{,}732289...\text{ cm}^2 - 84{,}5\text{ cm}^2 \\ &= 48{,}232289...\text{ cm}^2 \\ &\approx 48\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

50.

Lasketaan, kuinka paljon rimaa tarvitaan puoliympyrän alla olevaan nelikulmioon.

Nelikulmiossa on 12 x:n suuntaista riman pätkää sekä 10 y:n suuntaista riman pitkää. Lasketaan, kuinka paljon rimaa nelikulmioon tarvitaan.

$$12x+10y=12\cdot 20\,\text{cm}+10\cdot 40\,\text{cm}=240\,\text{cm}+400\,\text{cm}=640\,\text{cm}$$

Puoliympyrän säde on $2x$. Puoliympyrässä on kolme säteen pituista rimaa. Lasketaan niiden pituus.

$$2x\cdot 3=2\cdot 20\,\text{cm}\cdot 3=120\,\text{cm}.$$

Puoliympyrässä on käytetty rimaa kahteen kaareen. Pienemmän kaaren säde on x (20 cm) ja puolikaari on oikokulma eli 180°. Lasketaan lyhyemmän kaaren pituus.

$$b_1=\frac{180°}{360°}\cdot 2\pi\cdot 20\text{ cm}=62{,}831853...\text{ cm}$$

Suuremman kaaren pituus on $2x$ $(2x=2\cdot 20\text{ cm}=40\text{ cm})$. Lasketaan suuremman kaaren pituus.

$$b_2=\frac{180°}{360°}\cdot 2\pi\cdot 40\text{ cm}=125{,}663706...\text{ cm}$$

Lasketaan kaikki pituudet yhteen, niin saadaan, kuinka paljon rimaa tarvitaan kyseiseen kaari-ikkunaan.

$$\begin{aligned}640\text{ cm}+120\text{ cm}+62{,}831853...\text{ cm}+125{,}663706\text{ cm}&=948{,}49555...\text{ cm}\\&\approx 948\text{ cm}\end{aligned}$$

51.

Pinta-alan laskemiseen tarvitaan sektorin keskuskulma. Merkitään sitä kirjaimella α.

Aukon halkaisija on 3,4 cm, eli ananasrenkaan aukon säde on $3,4\text{ cm} : 2 = 1,7\text{ cm}$.

Ananasrenkaan säde on
$\text{aukon säde} + \text{renkaan leveys} = 1,7\text{ cm} + 3,2\text{ cm} = 4,9\text{ cm}$.

Koska pienemmän sektorin kaaren pituus ja säteen pituus tunnetaan, α voidaan ratkaista yhtälön avulla.

$$4,4 = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi \cdot 4,9$$
$$\alpha = 51,44927...^\circ$$

Suuremman sektorin ala on

$$A_1 = \frac{51,44927...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (4,9\text{ cm})^2 = 10,78\text{ cm}^2$$

Pienemmän sektorin ala on

$$A_2 = \frac{51,44927...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (1,7\text{ cm})^2 = 1,29755...\text{ cm}^2$$

Leikatun palan pinta-ala on tällöin

$$A_1 - A_2 = 10,78\text{ cm}^2 - 1,29755...\text{ cm}^2 = 9,48244...\text{ cm}^2 \approx 9,5\text{ cm}^2$$

52.

Heittokehän halkaisija on 2,1 m, joten sen säde on $2{,}1\text{ m} : 2 = 1{,}05\text{ m}$.

Koska kuulantyönnön pituus mitataan heittoringin etuosasta, putoamisalue on $1{,}05\text{ m} + 25\text{ m} = 26{,}05\text{ m}$:n päässä heittokehän keskipisteestä.

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A_1 = \frac{34{,}9°}{360°} \cdot \pi \cdot (26{,}05\text{ m}) = 206{,}675...\text{ m}^2$$

Lasketaan heittoringin sektorin pinta-ala.

$$A_2 = \frac{34{,}9°}{360°} \cdot \pi \cdot (1{,}05\text{ m})^2 = 0{,}3357...\text{ m}^2$$

Putoamisalueen ala saadaan vähentämällä heittoringin sektorin ala ison sektorin alasta.

$$A_1 - A_2 = 206{,}675...\text{ m}^2 - 0{,}3357...\text{ m}^2 = 206{,}339...\text{ m}^2 \approx 206\text{ m}^2$$

53.

Lasketaan sektorin keskuskulma, merkitään sitä kirjaimella α.

$$5,5 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 5,5$$

$$\alpha = 57,295...°$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A = \frac{57,295...°}{360°} \cdot \pi \cdot (5,5 \text{ dm})^2 = 15,125 \text{ dm}^2 \approx 15 \text{ dm}^2$$

54.

Lasketaan sektorin säteen pituus. Merkataan sitä kirjaimella *r*.

$$125 = \frac{65°}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$$
$$r = \pm 14,844... \text{ cm}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = 14,844... \text{ cm}$.

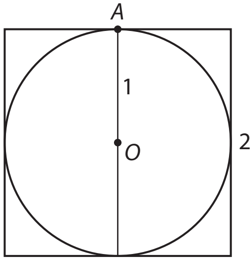
Lasketaan sektorin kehänpituus.

$$b = \frac{65°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 14,844... \text{ cm} = 16,8409... \text{ cm}$$

Sektorissa on kaksi sädettä ja ulkokaari, joten paperin piiri on

$$2r + b = (14,844... \text{ cm}) \cdot 2 + 16,8409... \text{ cm} = 46,52... \text{ cm} \approx 47 \text{ cm}$$

55.



Lasketaan neliön pinta-ala.

$$A_{\text{neliö}} = 2 \cdot 2 = 4$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

Lasketaan, kuinka paljon neliön pinta-ala on suurempi kuin ympyrän pinta-ala.

$$\frac{A_{\text{neliö}} - A_{\text{ympyrä}}}{A_{\text{ympyrä}}} = \frac{4-\pi}{\pi} = 0,27323... \approx 0,27 = 27\ \%$$

Neliön pinta-ala on 27 % suurempi kuin ympyrän pinta-ala.

56.

Muodostetaan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä ruokalautasen säde *r*.

$$\pi r^2 = 531$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{531}{\pi}} \text{ cm}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = \sqrt{\frac{531}{\pi}} \text{ cm}$.

Lautasen halkaisija on

$$d = 2r = 2 \cdot \sqrt{\frac{531}{\pi}} \text{ cm} = 26{,}00173452... \text{ cm} \approx 26{,}0 \text{ cm}$$

Lasketaan lautasen ympärysmitta.

$$p = 2\pi r = 2\pi\sqrt{\frac{531}{\pi}} \text{ cm} = 81{,}686858... \text{ cm} \approx 81{,}7 \text{ cm}$$

57.

Muodostetaan ympyräsektorin kaaren pituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä keskuskulma α.

$$5,62 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot (8,0 + 3,5)$$
$$\alpha = 28,0001...°$$

Lasketaan suuren ympyräsektorin pinta-ala.

$$A_1 = \frac{28,0001...°}{360°} \cdot \pi \cdot (8,0 + 3,5)^2 = 32,315 \text{ cm}^2$$

Lasketaan pienemmän ympyräsektorin pinta-ala.

$$A_2 = \frac{28,0001...°}{360°} \cdot \pi \cdot 8,0^2 = 15,638260... \text{ cm}^2$$

Väritetyn alueen ala saadaan vähentämällä suuren ympyräsektorin alasta pienen ympyräsektorin ala.

$$A_1 - A_2 = 32,315 \text{ cm}^2 - 15,638260... \text{ cm}^2 = 16,6767... \text{ cm}^2 \approx 17 \text{ cm}^2$$

58.

Muodostetaan ympyräsektorin kaaren pituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$5{,}1 = \frac{9°}{360°} \cdot 2\pi r$$

$$r = 32{,}4676\ldots \text{ m} \approx 32{,}5 \text{ m}$$

59.

CD-levyssä olevan aukon halkaisija on 15 mm, joten sen säde on $15\,\text{mm} : 2 = 7,5\,\text{mm}$.

Lasketaan CD-levyssä olevan aukon pinta-ala.

$$A_1 = \pi \cdot (7,5\,\text{mm})^2 = 176,71458...\,\text{mm}^2$$

Lasketaan koko CD-levyn pinta-ala.

$$11\,130\,\text{mm}^2 + 176,71458...\,\text{mm}^2 = 11\,306,71458...\,\text{mm}^2$$

Muodostetaan CD-levyn pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$\pi r^2 = 11\,306,71458...\,\text{mm}^2$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{11\,306,71458...\,\text{mm}^2}{\pi}}$$

Koska pituus on aina positiivista, $r = \sqrt{\dfrac{11\,306,71458...\,\text{mm}^2}{\pi}}$.

Lasketaan CD-levyn halkaisija.

$$d = 2r = 2 \cdot \sqrt{\frac{11\,306,71458...\,\text{mm}^2}{\pi}} = 119,9839...\,\text{mm} \approx 120\,\text{mm}$$

1.3 Avaruuskappaleita

60.

Suorakulmaisessa särmiössä on kaksi pohjaa ja vaippa. Pohjien pinta-alat ovat

$$A_{\text{pohja}} = 5,0\ \text{cm} \cdot 6,0\ \text{cm} = 30\ \text{cm}^2$$

Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri p.

$$p = 2 \cdot 5,0\ \text{cm} + 2 \cdot 6,0\ \text{cm} = 22\ \text{cm}$$

Muodostetaan lieriön pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä korkeus h.

$$\begin{aligned}
A_{\text{lieriö}} &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\
104\ \text{cm}^2 &= 2 \cdot 30\ \text{cm}^2 + ph \\
104\ \text{cm}^2 &= 60\ \text{cm}^2 + 22\ \text{cm} \cdot h \\
44\ \text{cm}^2 &= 22\ \text{cm} \cdot h \qquad \Big|: 22\ \text{cm} \\
h &= \frac{44\ \text{cm}^2}{22\ \text{cm}} = 2,0\ \text{cm}
\end{aligned}$$

61.

Merkataan pohjan sivua kirjaimella x, tällöin särmiön korkeus on $h = x + 1$.

Lasketaan pohjien pinta-ala.

$A_{\text{pohja}} = x \cdot x = x^2$

Koska pohja on neliö, pohjan piiri on $p = 4 \cdot x = 4x$.

Muodostetaan lieriön pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$A_{\text{lieriö}} = 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}}$$
$$10 = 2 \cdot x^2 + 4x \cdot (x+1)$$
$$10 = 2x^2 + 4x^2 + 4x$$

$6x^2 + 4x - 10 = 0$

Käytetään ratkaisukaavaa

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-10)}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{12}$$

$$x = \frac{-4 \pm 16}{12}$$

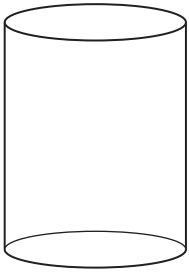
$$x = \frac{-4+16}{12} = 1 \text{ tai } x = \frac{-4-16}{12} = -\frac{5}{3}$$

Koska pituus on aina positiivista, $x = 1$.

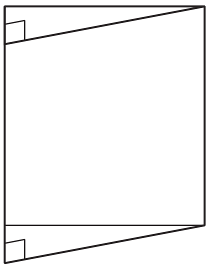
Pohjan sivut ovat 1 cm ja särmiön korkeus on 1 cm + 1 cm = 2 cm.

62.

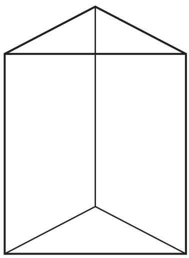
a)



b)

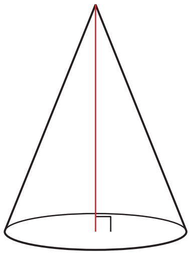


c)

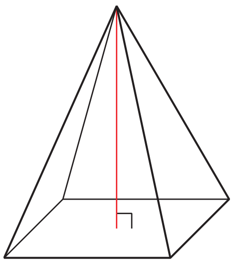


63.

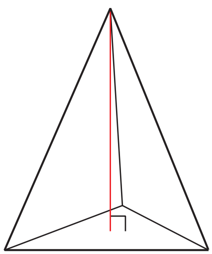
a)



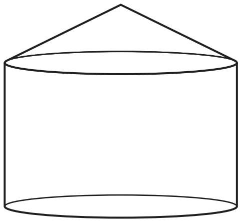
b)



c)



64.



65.

a) Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri.

$$p = 2\pi \cdot 4{,}0\ \text{cm} = 8\pi\ \text{cm}$$

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= p \cdot h \\ &= 8\pi\ \text{cm} \cdot 7{,}0\ \text{cm} \\ &= 175{,}929...\ \text{cm} \approx 180\ \text{cm} \end{aligned}$$

b) Muutetaan arvot samoiksi yksiköiksi. 3,2 m = 320 cm.

Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri.

$$p = 2 \cdot 46\ \text{cm} + 2 \cdot 320\ \text{cm} = 732\ \text{cm}$$

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= p \cdot h \\ &= 732\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm} \\ &= 7320\ \text{cm}^2 \approx 7300\ \text{cm}^2 = 0{,}73\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

c) Muutetaan arvot samoiksi yksiköiksi. 1,1 m = 110 cm.

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A_{\text{vaippa}} &= \pi r s \\
&= \pi \cdot 110\ \text{cm} \cdot 42\ \text{cm} \\
&= 14\,514{,}158...\ \text{cm}^2 \approx 15\,000\ \text{cm}^2 = 1{,}5\ \text{m}^2
\end{aligned}
$$

d) Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$A_{\text{vaippa}} = \frac{25\ \text{cm} \cdot 75\ \text{cm}}{2} \cdot 3 = 2\,812{,}5\ \text{cm}^2 \approx 2\,800\ \text{cm}^2 = 28\ \text{dm}^2$$

66.

Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri.

$$p = 2 \cdot 3,5\ \text{m} + 2 \cdot 2,5\ \text{m} = 12\ \text{m}$$

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= p \cdot h \\ &= 12\ \text{m} \cdot 1,8\ \text{m} \\ &= 21,6\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

Kasvihuoneen katto muodostuu kahdesta nelikulmiosta. Lasketaan niiden pinta-ala.

$$A_{\text{katto}} = 2 \cdot 3,5\ \text{m} \cdot 1,35\ \text{m} = 9,45\ \text{m}$$

Lasketaan vielä kahden kolmion pinta-ala.

$$A_{\text{kolmiot}} = 2 \cdot \frac{0,5\ \text{m} \cdot 2,5\ \text{m}}{2} = 1,25\ \text{m}^2$$

Nyt voidaan laskea kaikki pinta-alat yhteen.

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{vaippa}} + A_{\text{katto}} + A_{\text{kolmiot}} \\ &= 21,6\ \text{m}^2 + 9,45\ \text{m}^2 + 1,25\ \text{m}^2 \\ &= 32,3\ \text{m}^2 \\ &\approx 32\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

67.

a) Lasketaan lieriön pohjien pinta-alat.

$$A_{\text{pohja}} = \pi \cdot (5,2 \text{ cm})^2 = 84,948... \text{ cm}^2$$

Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri.

$$p = 2\pi \cdot 5,2 \text{ cm} = 32,672... \text{ cm}$$

Lasketaan lieriön pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{lieriö}} &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= 2 \cdot 84,948... \text{ cm}^2 + 32,672... \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} \\ &= 659,98... \text{ cm}^2 \approx 660 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

b) Lasketaan lieriön pohjien pinta-alat.

$$A_{\text{pohja}} = 43 \text{ cm} \cdot 43 \text{ cm} = 1849 \text{ cm}^2$$

Lasketaan vaipan pinta-alaa varten pohjan piiri.

$$p = 43 \text{ cm} \cdot 4 = 172 \text{ cm}$$

Lasketaan lieriön pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{lieriö}} &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= 2 \cdot 1849 \text{ cm}^2 + 172 \text{ cm} \cdot 65 \text{ cm} \\ &= 14\,878 \text{ cm}^2 \approx 15\,000 \text{ cm}^2 = 1,5 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

68.

Muodostetaan pohjan piirin yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$
\begin{aligned}
75,4 &= 2\pi r \\
r &= \frac{75,4}{2\pi}
\end{aligned}
$$

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A_{\text{vaippa}} &= \pi r s \\
&= \pi \cdot \frac{75,4}{2\pi} \cdot 32,3 \\
&= 1217,71 \text{ cm}^2 \\
&\approx 1220 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

69.

a) Vaipassa on 4 yhtä suurta tasasivuista kolmiota, joiden kanta on 16,0 cm ja korkeus on 32,0 cm. Lasketaan niiden ala.

$$
\begin{aligned}
A_{\text{vaippa}} &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16{,}0 \text{ cm} \cdot 32{,}0 \text{ cm} \\
&= 1024 \text{ cm}^2 \approx 1020 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan pohjan piiri.

$$p = 16{,}0 \text{ cm} + 16{,}0 \text{ cm} + 16{,}0 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$$

Muodostetaan vaipan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä korkeus *h*.

$$
\begin{aligned}
A_{\text{vaippa}} &= p \cdot h \\
1024 &= 48 \cdot h \\
h &= 21{,}333... \text{ cm} \approx 21{,}3 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

70.

a) Muodostetaan vaipan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä pohjaympyrän säde r.

$$A_{\text{vaippa}} = \pi rs$$

$$17\ \text{dm}^2 = \pi r \cdot 4,8\ \text{dm}$$

$$r = 1,127...\ \text{dm} \approx 1,1\ \text{dm}$$

b) Merkataan paketin mittoja $2x$, $10x$ ja $15x$.

Paketin pohjan piiri on tällöin.

$$p = 2 \cdot 2x + 2 \cdot 10x = 24x$$

Muodostetaan lieriön pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$A_{\text{lieriö}} = 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}}$$

$$16 = 2 \cdot (2x \cdot 10x) + (24x \cdot 15x)$$

$$16 = 40x^2 + 360x^2$$

$$400x^2 = 16$$

$$x = \pm 0,2\ \text{(dm)}$$

Koska pituus on aina positiivista, $x = 0,2\ \text{dm} = 2,0\ \text{cm}$.

Muropaketin mitat ovat:

$$2x = 2 \cdot 2,0\ \text{cm} = 4,0\ \text{cm}$$

$$10x = 10 \cdot 2,0\ \text{cm} = 20\ \text{cm}$$

$$15x = 15 \cdot 2,0\ \text{cm} = 30\ \text{cm}$$

71.

Muutetaan arvot samoiksi yksiköiksi. $1,5\ \text{dm}^2 = 150\ \text{cm}^2$

Kartion pohjan halkaisija on 6,0 cm, joten sen halkaisija on
6,0 cm : 2 = 3,0 cm.

Muodostetaan kartion vaipan pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä kartion sivujanan *s* pituus.

$$A_{\text{vaippa}} = \pi rs$$
$$150 = \pi \cdot 3,0 \cdot s$$
$$s = 15,915...\ \text{cm} \approx 16\ \text{cm}^2$$

72.

Merkataan leivoslaatikon pohjan sivua kirjaimella x. Tällöin korkeus on $(1-0,6)x = 0,4x$.

Lasketaan pohjan pinta-ala.

$$A_{\text{pohja}} = x \cdot x = x^2$$

Lasketaan pohjan piiri vaipan pinta-alaa varten.

$$p = 4 \cdot x = 4x$$

Muodostetaan leivoslaatikon pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ 2,6 &= x^2 + 4x \cdot 0,4x \\ x &= \pm 1 \text{ (dm)} \end{aligned}$$

Koska pituus on aina positiivinen, $x = 1 \text{ dm}$.

Laatikon leveys on 1 dm = 10 cm.

73.

Merkitään pohjasärmää $4x$ ja sivutahkon korkeutta $7x$.

Lasketaan pohjan pinta-ala.

$$A_{\text{pohja}} = 4x \cdot 4x = 16x^2$$

Pyramidin vaippa koostuu 4 yhtä suuresta kolmiosta. Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$A_{\text{vaippa}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 7x = 56x^2$$

Kun pyramidin kokonaispinta-ala on 2 592 cm^2, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 2\,592 &= 16x^2 + 56x^2 \\ x &= \pm 6 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Koska pituus on aina positiivista, $x = 6$ cm .

Sivutahkon korkeus on $7 \cdot 6$ cm $= 42$ cm .

74.

Lasketaan sivujanan pituus s 180° ympyräsektorin pinta-alasta.

$$A = 6,90$$

$$\frac{180°}{360°} \cdot \pi \cdot s^2 = 6,90$$

$$s = \pm 2,0958... \approx \pm 2,10 \text{ (dm)}$$

Koska pituus on aina positiivista, $s = 2,10 \text{ dm}$.

Nyt voidaan laskea ympyräkartion pohjan säde r ympyräkartion vaipan pinta-alan yhtälöstä.

$$A = \pi r s$$

$$6,9 = \pi \cdot 2,10 \cdot r$$

$$r = 1,04587...$$

$$r \approx 1,05 \text{ (dm)}$$

75.

a) Lasketaan suoran lieriön tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= A_{\mathrm{p}} \cdot h \\
&= \pi \cdot (3,0)^2 \cdot 6,0 \\
&= 169,6460... \\
&\approx 170 \text{ cm}^3
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan suoran särmiön tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= A_{\mathrm{p}} \cdot h \\
&= 240 \cdot 51 \\
&= 12\,240 \\
&\approx 12\,000 \text{ cm}^3 = 12 \text{ dm}^3
\end{aligned}
$$

c) Lasketaan kartion tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{A_{\mathrm{p}} \cdot h}{3} \\
&= \frac{\pi \cdot 4,1^2 \cdot 28}{3} \\
&= 492,89494... \\
&\approx 490 \text{ cm}^3
\end{aligned}
$$

d) Lasketaan pyramidin tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{A_{\mathrm{p}} \cdot h}{3} \\ &= \frac{23 \cdot 13 \cdot 65}{3} \\ &= 6478{,}333... \\ &\approx 6500\ \mathrm{cm}^3 = 6{,}5\ \mathrm{dm}^3 \end{aligned}$$

76.

a) Lasketaan pallon tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot (6{,}8)^3 \\ &= 1317{,}08968...\ \text{cm}^3 \\ &\approx 1300\ \text{cm}^3 = 1{,}3\ \text{dm}^3 = 1{,}3\ \text{l} \end{aligned}$$

b) Pallon halkaisija *d* on 16,0 cm, joten pallon säde *r* on

$$d = 2r$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{16{,}0\ \text{cm}}{2} = 8\ \text{cm}$$

Lasketaan pallon tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot (8{,}0)^3 \\ &= 2144{,}6605...\ \text{cm}^3 \\ &\approx 2100\ \text{cm}^3 = 2{,}1\ \text{dm}^3 = 2{,}1\ \text{l} \end{aligned}$$

77.

Helmen säde voidaan ratkaista helmen ympärysmitan avulla. Merkitään helmen sädettä kirjaimella *r*.

$$
\begin{aligned}
2\pi r &= 2{,}4 \\
r &= 0{,}38197...\ \text{(cm)}
\end{aligned}
$$

Lasketaan yhden helmen tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}38197...\ \text{cm})^3 \\
&= 0{,}23344...\ \text{cm}^3
\end{aligned}
$$

Pallon tiheys ρ lasketaan massan m ja tilavuuden V avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Jos tilavuus ja tiheys tunnetaan, massa saadaan näiden tulona.

$$m = \rho \cdot V$$

Lasketaan 34 samankokoisen helmen massa.

$$
\begin{aligned}
m &= 34 \cdot \rho \cdot V \\
&= 34 \cdot 2{,}8\ \text{g/cm}^3 \cdot 0{,}23344...\ \text{cm}^3 \\
&= 22{,}2238...\ \text{g} \\
&\approx 22\ \text{g}
\end{aligned}
$$

78.

Kuun halkaisija *d* on 3 474 km, joten Kuun säde *r* on

$$d = 2r$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{3474}{2} = 1737 \text{ (km)}$$

Lasketaan Kuun tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot (1737 \text{ km})^3 \\ &= 2{,}1952... \cdot 10^{10} \text{ km}^3 \end{aligned}$$

Maan halkaisija *d* on 12 756 km, joten Maan säde on

$$d = 2r$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{12\,756}{2} = 6378 \text{ (km)}$$

Lasketaan Maan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot (6378 \text{ km})^3 \\ &= 1{,}086781... \cdot 10^{12} \text{ km}^3 \end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka paljon Kuun tilavuus on Maan tilavuudesta.

$$
\begin{aligned}
1-\frac{V_{\text{maa}}-V_{\text{kuu}}}{V_{\text{maa}}} &= 1-\frac{1,086781\ldots\cdot 10^{12}\ \text{km}^3-2,1952\ldots\cdot 10^{10}\ \text{km}^3}{1,086781\ldots\cdot 10^{12}\ \text{km}^3} \\
&= 0,0201997\ldots \\
&\approx 0,020 = 2,0\ \%
\end{aligned}
$$

79.

Jäätelöpallon tilavuus on 1,20 dl = 0,12 l = 0,12 dm^3 = 120 cm^3.

Jäätelöpallon säde voidaan ratkaista tilavuuden avulla. Merkitään jäätelöpallon sädettä kirjaimella *r*.

$$120 = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$r = 3{,}05983...\text{ cm}$$

Lasketaan pallon pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= 4\pi r^2 \\ &= 4\pi \cdot (3{,}05983...\text{ cm})^2 \\ &= 117{,}653528...\text{ cm}^2 \\ &\approx 118\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

80.

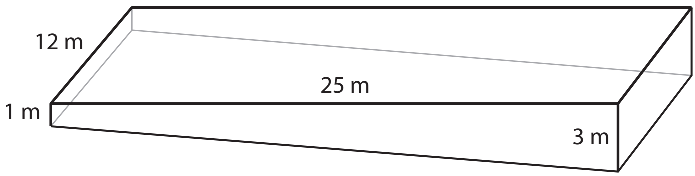
Muutetaan arvot desimetreiksi.

- 7,0 mm = 0,07 dm
- 4,5 m = 45 dm
- 3,7 m = 37 dm

Lasketaan veden määrä.

$V = 45 \text{ dm} \cdot 37 \text{ dm} \cdot 0,07 \text{ dm} = 116,55 \text{ dm}^3 \approx 117 \text{ dm}^3 = 117 \text{ l}$

81.



Lasketaan ensin suora särmiön muotoinen alue, jonka mitat ovat
1 m × 12 m × 25 m.

$$V_1 = 1\ \text{m} \cdot 12\ \text{m} \cdot 25\ \text{m} = 300\ \text{m}^3 = 300\,000\ \text{dm}^3$$

Lasketaan jäljelle jäänyt kolmiomuotoisen lieriön tilavuus.

$$V_2 = A_\text{p} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2\ \text{m} \cdot 25\ \text{m} \cdot 12\ \text{m} = 300\ \text{m}^3 = 300\,000\ \text{dm}^3$$

Lasketaan tilavuudet yhteen.

$$V_2 + V_1 = 300\,000\ \text{dm}^3 + 300\,000\ \text{dm}^3 = 600\,000\ \text{dm}^3 = 600\,000\ \text{l}$$

82.

Lasketaan ensin harjakaton tilavuus.

Harjakattoinen talo muodostuu suorasta särmiöstä sekä kolmion muotoisesta lieriöstä.

Lasketaan särmiön tilavuus.

$$V_1 = 22{,}0\text{ m} \cdot 14{,}0\text{ m} \cdot 3{,}20\text{ m} = 985{,}6\text{ m}^3$$

Kolmiomuotoisen lieriön korkeus on 4,82 m – 3,20 m = 1,62 m, leveys on 14 m ja syvyys on 22 m. Lasketaan tämän tilavuus.

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}62\text{ m} \cdot 14\text{ m} \cdot 22\text{ m} = 249{,}48\text{ m}^3$$

Lasketaan harjakattoisen talon tilavuus.

$$\begin{aligned} V_{\text{harjakattoinen}} &= V_1 + V_2 \\ &= 985{,}6\text{ m}^3 + 249{,}48\text{ m}^3 \\ &= 1235{,}08\text{ m}^3 \end{aligned}$$

Lasketaan tasakattoisen talon tilavuus.

$$V_{\text{tasakattoinen}} = 22{,}0\text{ m} \cdot 14{,}0\text{ m} \cdot 4{,}82\text{ m} = 1\,484{,}56\text{ m}^3$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia suurempi on tasakattoinen talon tilavuus harjakattoiseen talon tilavuuteen verrattuna.

$$\begin{aligned}\frac{V_{\text{tasakattoinen}} - V_{\text{harjakattoinen}}}{V_{\text{harjakattoinen}}} &= \frac{1\,484,56\ \text{m}^3 - 1\,235,08\ \text{m}^3}{1\,235,08\ \text{m}^3} \\ &= 0,201995... \\ &\approx 0,202 = 20,2\,\%\end{aligned}$$

83.

Paperirullan poikkileikkaus muodostuu kahdesta sisäkkäisestä ympyrästä.

Pienemmän ympyrän säde on 4,5 cm : 2 = 2,25 cm.

Suuremman ympyrän säde on 12 cm : 2 = 6,0 cm.

Paperirulla on muodoltaan ympyrälieriö.

Lieriön korkeus on sama kuin paperirullan leveys (23,0 cm).

$$\begin{aligned} V_{\text{paperirulla}} &= \pi \cdot (6{,}0\ \text{cm})^2 \cdot 23{,}0\ \text{cm} \\ &= 2\,601{,}238...\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Myös paperirullan ontto sisäosa on suora ympyrälieriö, jonka korkeus on 23,0 cm.

$$\begin{aligned} V_{\text{sisäosa}} &= \pi \cdot (2{,}25\ \text{cm})^2 \cdot 23{,}0\ \text{cm} \\ &= 365{,}79919...\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Paperirullan paperiosan tilavuus on

$$\begin{aligned} V_{\text{paperirulla}} - V_{\text{sisäosa}} &= 2601{,}238...\ \text{cm}^3 - 365{,}79919...\ \text{cm}^3 \\ &= 2235{,}438...\ \text{cm}^3 \approx 2200\ \text{cm}^3 = 2{,}2\ \text{dm}^3 \end{aligned}$$

84.

Lautasliinarenkaan poikkileikkaus muodostuu kahdesta sisäkkäisestä ympyrästä.

Pienemmän ympyrän säde on 3,2 cm : 2 = 1,6 cm

Suuremman ympyrän säde on
1,6 cm + 2,0 mm = 1,6 cm + 0,2 cm = 1,8 cm

Lautasliinarengas on muodoltaan ympyrälieriö. Lieriön korkeus on 1,5 cm.

$$\begin{aligned} V_{\text{lautaliinarengas}} &= \pi \cdot (1{,}8 \text{ cm})^2 \cdot 1{,}5 \text{ cm} \\ &= 15{,}268... \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Myös lautasliinarenkaan ontto sisäosa on suora ympyrälieriö, jonka korkeus on 1,5 cm.

$$\begin{aligned} V_{\text{sisäosa}} &= \pi \cdot (1{,}6 \text{ cm})^2 \cdot 1{,}5 \text{ cm} \\ &= 12{,}063... \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Hopeisen renkaan tilavuus on

$$\begin{aligned} V_{\text{lautasliinarengas}} - V_{\text{sisäosa}} &= 15{,}268... \text{ cm}^3 - 12{,}063... \text{ cm}^3 \\ &= 3{,}204... \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Lautasliinarenkaan tiheys ρ lasketaan massan m ja tilavuuden V avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Jos tilavuus ja tiheys tunnetaan, massa saadaan näiden tulona.

$$m = \rho \cdot V$$

Lasketaan lautasliinarenkaan massa.

$$\begin{aligned} m &= 10,5 \text{ g/cm}^3 \cdot 3,204... \text{ cm}^3 \\ &= 33,646... \text{ g} \approx 34 \text{ g} \end{aligned}$$

85.

Koristeena olevan pallon säde on 3,0 mm = 0,3 cm ja tilavuus on

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0,3\ \text{cm})^3$$
$$= 0,113...\ \text{cm}^3$$

Sormuksen poikkileikkaus muodostuu kahdesta sisäkkäisestä ympyrästä.

Pienemmän ympyrän säde on 2,0 cm : 2 = 1,0 cm.

Suuremman ympyrän säde on 2,2 cm : 2 = 1,1 cm.

Sormus on muodoltaan ympyrälieriö, jonka korkeus on sormuksen leveys 5,0 mm = 0,5 cm.

$$V_{\text{sormus}} = \pi \cdot (1,1\ \text{cm})^2 \cdot 0,5\ \text{cm}$$
$$= 1,900...\ \text{cm}^3$$

Myös sormuksen ontto sisäosa on ympyrälieriö, jonka korkeus on 0,5 cm.

$$V_{\text{sisöosa}} = \pi \cdot (1,0\ \text{cm})^2 \cdot 0,5\ \text{cm}$$
$$= 1,570...\ \text{cm}^3$$

Sormuksen tilavuus on

$$V_{\text{pallo}} + V_{\text{sormus}} - V_{\text{sisäosa}} = 0,113...\ \text{cm}^3 + 1,900...\ \text{cm}^3 - 1,570...\ \text{cm}^3$$
$$= 0,442...\ \text{cm}^3$$

Sormuksen tiheys ρ lasketaan massan m ja tilavuuden V avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Jos tilavuus ja tiheys tunnetaan, massa saadaan näiden tulona.

$$m = \rho \cdot V$$

Lasketaan sormuksen massa.

$$\begin{aligned} m &= 4{,}54\ \text{g/cm}^3 \cdot 0{,}442...\ \text{cm}^3 \\ &= 2{,}011...\ \text{g} \approx 2{,}0\ \text{g} \end{aligned}$$

86.

Merkitään särmiön pohjan lyhyempää särmää kirjaimella x, jolloin pidempi särmä on $x – 3$.

Muodostetaan särmiön tilavuuden yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$V = x \cdot (x+3) \cdot 12$$

$$254 = 12x^2 + 36x$$

$$x = -6,339... \quad \text{tai} \quad x = 3,339...$$

Pituus on aina positiivista, joten $x = 3,339... \approx 3,3 \text{ (cm)}$.

Särmiön pohjan lyhyempi särmä on 3,3 cm ja pidempi särmä on 3,3 cm + 3,0 cm = 6,3 cm.

87.

Lasin tilavuus on 1,8 dl = 0,18 l = 0,18 dm^3 = 180 cm^3.

Merkitään kartion korkeutta kirjaimella *x*, jolloin pohjaympyrän säde on $x \cdot 1,5 : 2 = 0,75x$.

Muodostetaan ympyräkartion tilavuuden yhtälö ja ratkaistaan siitä *x*.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (0,75x)^2 \cdot x$$

$$180 = 0,589...x^3$$

$$x = 6,7355...\text{ cm} \approx 6,7\text{ cm}$$

88.

Merkitään lasin alaosan kartion pohjaympyrän sädettä kirjaimella x, jolloin yläosan säde on $2x$.

Alaosan pinta-ala on

$$A_{\text{alaosa}} = \pi \cdot x \cdot 5,4 = 16,964x\ldots\ \text{cm}^2$$

Yläosan pinta-ala on

$$A_{\text{yläosa}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (2x)^2 = 25,132x^2\ldots\ \text{cm}^2$$

Muodostetaan lasin pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$143 = 16,964\ldots x + 25,132\ldots x^2$$
$$x = 2,071\ldots\ \text{cm} \quad \text{tai} \quad x = -2,746\ldots\ \text{cm}$$

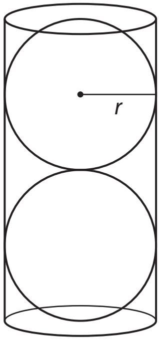
Koska pituus on aina positiivista, $x = 2,071\ldots\ \text{cm}$.

Alaosan kartion halkaisija on $2x = 2 \cdot 2,071\ldots\ \text{cm} = 4,143\ldots\ \text{cm}$.

Yläosan halkaisija on $2 \cdot 4,143\ldots\ \text{cm} = 8,286\ldots\ \text{cm} \approx 8,29\ \text{cm}$.

89.

Piirretään tilanteesta havainnollistava kuva.



Purkissa olevien kuulien säde on sama kuin ympyrälieriön pohjan säde ja ympyrälieriön korkeus on $4r$.

Kuulien tilavuus on

$$V_{\text{kuulat}} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{8}{3}\pi r^3$$

Ympyrälieriön tilavuus on

$$\begin{aligned} V_{\text{lieriö}} &= A_{\text{p}} \cdot h \\ &= \pi r^2 \cdot 4r \\ &= 4\pi r^3 \end{aligned}$$

Kuulien tilavuus koko rasian tilavuudesta on

$$\frac{V_{\text{kuulat}}}{V_{\text{lieriö}}} = \frac{\frac{8}{3}\pi r^3}{4\pi r^3} = \frac{\frac{8}{3}}{4} = 0,666... = 66,66...\% \approx 67\%$$

90.

Vesikourun säde on 12,5 cm : 2 = 6,25 cm ja sen pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (6{,}25\ \text{cm})^2 = 61{,}359...\ \text{cm}^2 = 0{,}61359...\ \text{dm}^2$$

$$5\ \text{min} = 5 \cdot 60\ \text{s} = 300\ \text{s}$$

Kun tiedetään aika ja nopeus, voidaan laskea matka.

$$\text{matka} = \text{nopeus} \cdot \text{aika}$$

Vesi liikkuu viidessä minuutissa

$$\text{matka} = 0{,}09\ \text{m/s} \cdot 300\ \text{s} = 27\ \text{m} = 270\ \text{dm}$$

270 dm:n pitkän vesikourun tilavuus on

$$V = A_\text{p} \cdot h = 0{,}61359...\ \text{dm}^2 \cdot 270\ \text{dm} = 165{,}6699...\ \text{dm}^3 \approx 166\ \text{dm}^3 = 166\ \text{l}$$

91.

Alustan pinta-ala on

$$A_{\text{alusta}} = 12\text{ m} \cdot 12\text{ m} = 144\text{ m}^2$$

Lasketaan särmiön piiri vaipan pinta-alaa varten.

$$p_{\text{särmiö}} = 1,0\text{ m} + 1,0\text{ m} + 1,0\text{ m} + 1,0\text{ m} = 4,0\text{ m}$$

Särmiön vaipan pinta-ala on

$$A_{\text{särmiö}} = p \cdot h = 4,0\text{ m} \cdot 6,3\text{ m} = 25,2\text{ m}^2$$

Teoksen pinta-ala on

$$A_{\text{alusta}} + 4 \cdot A_{\text{vaippa}} = 144\text{ m}^2 + 4 \cdot 25,2\text{ m}^2 = 244,8\text{ m}^2 \approx 245\text{ m}^2$$

92.

Muutetaan arvot samoiksi yksiköiksi.

2,40 m = 24,0 dm

6,50 m = 65,0 dm

10,0 cm = 1,00 dm

Betonipohjan tilavuus on

$V = 24,0\ \text{dm} \cdot 65,0\ \text{dm} \cdot 1,00\ \text{dm} = 1\,560\ \text{dm}^3$

Betonin tiheys ρ lasketaan massan m ja tilavuuden V avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Jos tilavuus ja tiheys tunnetaan, massa saadaan näiden tulona.

$m = \rho \cdot V$

$m = 1,50\ \text{kg/dm}^3 \cdot 1\,650\ \text{dm}^3 = 2\,340\ \text{kg}$

93.

a) Lasketaan ensin ympärysmitaltaan 68 cm olevan pallon pinta-ala ja tilavuus. Muodostetaan pallon kehän pituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$\begin{aligned} 68\ \text{cm} &= 2\pi r \\ r &= 10{,}822...\ \text{cm} \end{aligned}$$

Pallon pinta-ala on

$$A_1 = 4\pi \cdot (10{,}822...\ \text{cm})^2 = 1471{,}864...\ \text{cm}^2 \approx 1470\ \text{cm}^2 = 14{,}7\ \text{dm}^2$$

Pallon tilavuus on

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot (10{,}822\ \text{cm})^3 = 5309{,}770...\ \text{cm}^3 \approx 5310\ \text{cm}^3 = 5{,}31\ \text{dm}^3$$

Lasketaan ympärysmitaltaan 70 cm olevan pallon pinta-ala ja tilavuus. Muodostetaan pallon kehän pituuden yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$\begin{aligned} 70\ \text{cm} &= 2\pi r \\ r &= 11{,}140...\ \text{cm} \end{aligned}$$

Pallon pinta-ala on

$$A_2 = 4\pi \cdot (11{,}140...\ \text{cm})^2 = 1559{,}718...\ \text{cm}^2 \approx 1560\ \text{cm}^2 = 15{,}6\ \text{dm}^2$$

Pallon tilavuus on

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot (11{,}140\ldots\ \text{cm})^3 = 5792{,}194\ldots\ \text{cm}^3 \approx 5790\ \text{cm}^3 = 5{,}79\ \text{dm}^3$$

Pallon pinta-ala vaihtelee välillä 14,7 dm^2 – 15,6 dm^2.

Pallon tilavuus vaihtelee välillä 5,31 dm^3 – 5,79 dm^3.

b) Lasketaan kuinka paljon suurempi on suurimman sääntöjen mukaisen pallon tilavuus pienimpään sääntöjen mukaiseen palloon verrattuna.

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{5{,}792\ldots\ \text{dm}^3 - 5{,}309\ldots\ \text{dm}^3}{5{,}309\ldots\ \text{dm}^3} = 0{,}0908\ldots \approx 0{,}091 = 9{,}1\ \%$$

94.

Mittariin on satanut vettä 0,50 dl = 0,05 l = 0,05 dm^3 = 50 cm^3.

Mittarin pohjan halkaisija on 4,5 cm, joten pohjan säde on
4,5 cm : 2 = 2,25 cm.

Merkataan lieriön korkeutta kirjaimella *x*. Muodostetaan lieriön tilavuuden yhtälö ja ratkaistaan siitä *x*.

$$
\begin{aligned}
V &= A_{\mathrm{p}} \cdot h \\
50\ \mathrm{cm}^2 &= \pi \cdot (2{,}25\ \mathrm{cm})^2 \cdot x \\
x &= 3{,}143...\ \mathrm{cm} \\
x &\approx 3{,}1\ \mathrm{cm} = 31\ \mathrm{mm}
\end{aligned}
$$

95.

Merkataan kartion pohjaympyrän sädettä kirjaimella x, jolloin kartion korkeus on x + 2 cm.

Muodostetaan kartion tilavuuden yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$V = \frac{A_\mathrm{p} \cdot h}{3}$$

$$35 = \frac{(\pi x^2) \cdot (x+2)}{3}$$

$$\pi x^3 + 2\pi x^2 - 105 = 0$$

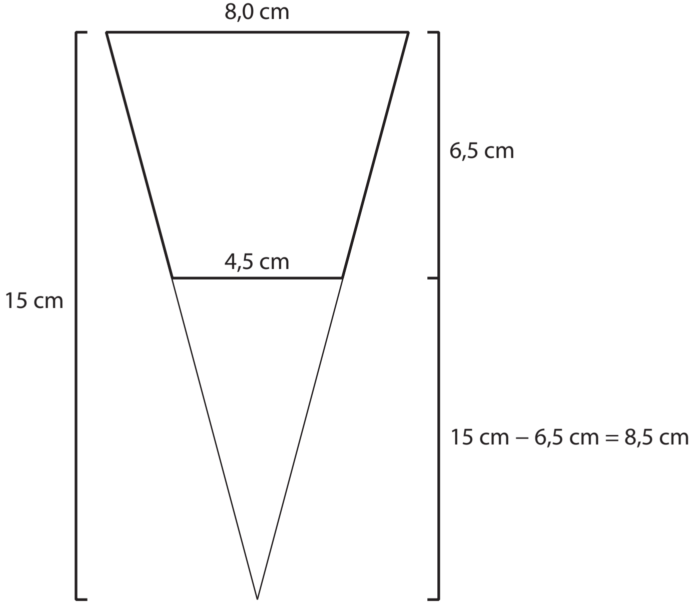
$$x = 2{,}674... \text{ (cm)} \approx 2{,}7 \text{ cm}$$

Kartion korkeus on 2,7 cm + 2,0 cm = 4,7 cm.

96.

Lasketaan ensin koko kartion tilavuus, sen jälkeen lasketaan pienen kartion tilavuus. Lasin tilavuus on kartioitten erotus.

Piirretään tilanteesta havainnollistava kuva.



Suuren kartion pohjan säde on 8,0 cm : 2 = 4,0 cm. Suuren kartion tilavuus on

$$V_1 = \frac{\pi \cdot (4,0\text{ cm})^2 \cdot 15\text{ cm}}{3} = 251,327...\text{ cm}^3$$

Pienen kartion pohjan säde on 4,5 cm : 2 = 2,25 cm. Pienen kartion tilavuus on

$$V_2 = \frac{\pi(2,25\ \text{cm})^2 \cdot 8,5\ \text{cm}}{3} = 45,062...\ \text{cm}^3$$

Lasin tilavuus on

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= 251,327...\ \text{cm}^3 - 45,062...\ \text{cm}^3 \\ &= 206,265...\ \text{cm}^3 \approx 210\ \text{cm}^3 = 0,21\ \text{dm}^3 = 0,21\ \text{l} = 2,1\ \text{dl} \end{aligned}$$