Tehtävien ratkaisut

Heikki Lehto • Raimo Havukainen • Jukka Maalampi • Janna Leskinen

FYSIIKKA 5

Pyöriminen ja gravitaatio

Kustannusosakeyhtiö Tammi • Helsinki

1. painos

ISBN: 978-951-31-5470-7

Painatus: Hansaprint Direct Oy, Vantaa 2010

Sisällys

Johdantotehtäviä

1. a) Esimerkiksi kellon sekuntiviisari on pyörivä kappale.

b) Vierivä kappale on esimerkiksi auton rengas (normaalissa ajossa).

c) Paikallaan oleva kappale on esimerkiksi asemalla seisova veturi. Se on paikallaan maanpinnan suhteen.

2. a) Merkintä 1200 rpm tarkoittaa pesukoneen rummun pyörimisnopeutta: 1200 kierrosta minuutissa.

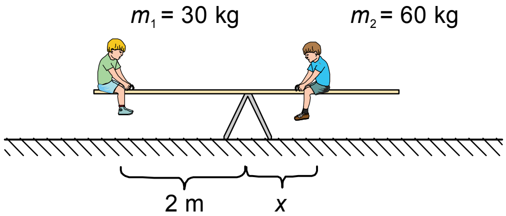
b) Pesukoneen linkousvaiheessa pyykissä oleva vesi irtoaa ja pyykin vesipitoisuus pienenee.

3. Kun lanka katkeaa, pallo lähtee radan tangentin suuntaan.

4. a) Mutterin vääntäminen on helpompaa, kun pitää kiinni jakoavaimen päästä. Tällöin mutteriin kohdistuva vääntövaikutus suurenee. Jakoavainta käytettäessä varteen kohdistuvan voiman on hyvä olla kohtisuorassa avaimen vartta vastaan.

b) Pihdeissä ja saksissa olevat pitkät varret vaikuttavat varsissa tarvittavan puristusvoiman suuruuteen: pitkä varsi pienentää tarvittavaa voimaa.

5. Keinulauta asettuu tasapainoon, kun vääntövaikutukset ovat yhtä suuret. Kokemuksesta tiedetään, että painavamman henkilön tulee olla vain 1,0 m päässä keinulaudan keskikohdasta, jotta keinulauta asettuisi tasapainoon.



6. a) Taitoluistelija nopeuttaa pyörimistään vetämällä kätensä ja jalkansa mahdollisimman lähelle pyörimisakselia.

b) Vastaavia urheilulajeja ovat mm. uimahyppy ja voimistelu.

7. Umpinainen pallo on helpompi saada pyörimään kuin samankokoinen ontto pallo (koska umpinaisen pallon hitausmomentti on pienempi kuin onton pallon).

8. a) Maapallo ei ole täysin pyöreä vaan hiukan navoiltaan litistynyt. Tämä johtuu siitä, että Maa pyörii akselinsa ympäri, ja siitä, että Maalla on vain ohut kiinteä pinta, jonka alla on nestemäinen sisus.

b) Maapallon pyörimissuunta on itään.

9. a) Tietoliikennesatelliitti pysyy Maasta katsottuna saman paikan yläpuolella, jos satelliitin kiertoaika Maan ympäri on yksi vuorokausi, ja kiertosuunta sama kuin Maan pyörimissuunta.

b) Tällainen paikka voi sijaita vain päiväntasaajan yläpuolella.

10. Kun pallo on ratansa korkeimmassa kohdassaan eli lakikorkeudella, sen nopeus on hetkellisesti nolla.

1 Pyörimisliike

1-1. Kiertokulma on $5 \cdot 360° \approx 1800°$.

Kiertokulma on radiaaneina $5 \cdot 2\pi \text{ rad} = 10\pi \text{ rad} \approx 31 \text{ rad}$.

1-2.

Kulma asteina θ/°	Kulma radiaaneina φ/rad	Kierroksien lukumäärä / r	Kaaren pituus s/m
30	0,52	0,083	0,052
57	1,0	0,16	0,10
1260	22	3,5	2,2
1100	20	3,2	2,0

1. rivi

Kulma radiaaneina on $\varphi = \dfrac{30°}{360°} \cdot 2\pi \text{ rad} = 0,5236 \text{ rad} \approx 0,52 \text{ rad}$.

Kierrosten lukumäärä on $\dfrac{0,5236 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \approx 0,083$.

Kaaren pituus on $s = \dfrac{30°}{360°} \cdot 2\pi r = \dfrac{30°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 0,10 \text{ m} \approx 0,052 \text{ m}$.

Ensimmäinen rivi: 30; 0,52; 0,083; 0,052.

2. rivi

Kulman suuruus radiaaneina on 1,0 rad. Kulman suuruus asteina on

$$\varphi = 1,0 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} \approx 57°.$$

Kierrosten lukumäärä on $\dfrac{1,0 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \approx 0,16$.

Kaaren pituus on $s = \varphi r = 1,0 \cdot 0,10 \text{ m} = 0,10 \text{ m}$.

Toinen rivi: 57; 1,0; 0,16; 0,10.

3. rivi

Yhden kierroksen kiertokulma on $\varphi = 360°$. Koska kierrosten lukumäärä on 3,5, kiertokulma asteina on $\varphi = 3,5 \cdot 360° = 1260°$.

Yksi aste on radiaaneina $1° = \dfrac{2\pi}{360}$ rad. Ilmoitetaan kiertokulma radiaaneina:

$$1260° = 1260 \cdot \frac{2\pi}{360} = 21,99 \text{ rad} \approx 22 \text{ rad}.$$

Kaaren pituus $s = \varphi r = 21,99 \cdot 0,10 \text{ m} \approx 2,2 \text{ m}$.

Kolmas rivi: 1260; 22; 3,5; 2,2.

4. rivi

Koska kaaren pituus on 2,0 m, kiertokulmaksi saadaan

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{2,0\text{ m}}{0,10\text{ m}} = 20\text{ rad} = 20 \cdot \frac{360°}{2\pi} \approx 1100°.$$

Kierrosten lukumäärä on $\dfrac{20\text{ rad}}{2\pi\text{ rad}} \approx 3,2.$

Neljäs rivi: 1100; 20; 3,2; 2,0.

1-3. Pyörimisnopeus 12 500 rpm vastaa pyörimisnopeutta $\dfrac{12500}{60\text{ s}}\dfrac{\text{r}}{\text{s}} \approx 210\,\text{r/s}$.

Akseli pyörii sekunnissa 210 kierrosta.

1-4. a) Kuusen latvan kulkema matka on $s = \varphi r = \dfrac{\pi}{2} \cdot 15\text{ m} \approx 24\text{ m}$.

b) Kuusen keskikohdan kulkema matka on $s = \varphi r = \dfrac{\pi}{2} \cdot 7,5\text{ m} \approx 12\text{ m}$.

1-5. a) Pyörimisnopeus (kierrostaajuus) on $n = \dfrac{1\text{ r}}{10,8\text{ s}} = 0,092593\,\text{r/s} \approx 0,093\,\text{r/s}.$

b) Lautanen pyörii 0,092593 kierrosta sekunnissa, joten 2,0 minuutissa eli 120 sekunnissa kierrosten lukumäärä on $120 \cdot 0,092593\text{ r} \approx 11,11111\text{ r}.$ Yksi kierros vastaa kiertokulmaa 2π rad, joten kiertokulma 2,0 minuutissa on $\varphi = 11,11111 \cdot 2\pi\text{ rad} \approx 70\text{ rad}.$

1-6. Siiven pyörimisnopeus on $n = \dfrac{10\,\text{r}}{11,1\text{ s}} \approx 0,90\ \dfrac{\text{r}}{\text{s}}\left(= 0,90\ \dfrac{1}{\text{s}}\right)$ ja kierrosaika

$$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{\frac{10}{11,1}\frac{1}{\text{s}}} = \frac{11,1\,\text{s}}{10} \approx 1,1\,\text{s}.$$

1-7. a) Venttiili on kiertänyt $\dfrac{2250\text{ rad}}{2\pi\text{ rad}} = 358,09862 \approx 358$ täyttä kierrosta.

b) Venttiilin pyörimisnopeus on $n = \dfrac{358,09862\,\text{r}}{17,0\,\text{s}} \approx 21,1\text{ r/s}\ (= 21,1\,1/\text{s})$.

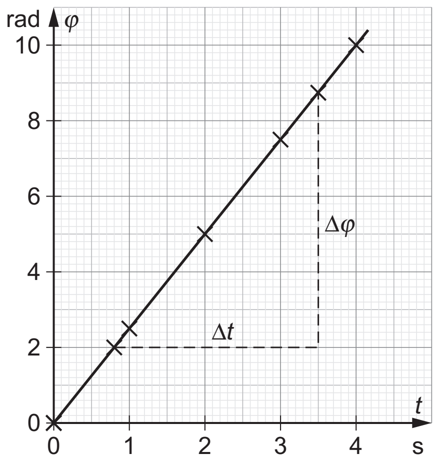
1-8. a) Koska levyn A kuvaaja on jyrkempi kuin B:n, levyn A kulmanopeus on suurempi. Levyn A kulmanopeus on

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{40,0\,\text{rad} - 0,0\,\text{rad}}{3,0\,\text{s} - 0,0\,\text{s}} = \frac{40,0\,\text{rad}}{3,0\,\text{s}} \approx 13\,\text{rad/s}.$$

b) Kolmea täyttä kierrosta vastaava kiertokulma on 3 · 2π rad ≈ 18,8 rad. Näin ollen levy A saavuttaa kiertokulman 18,8 rad hetkellä t = 1,4 s ja B:n hetkellä t = 3,8 s.

1-9. Keskikulmanopeus on

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{8{,}6\text{ rad} - 2{,}0\text{ rad}}{3{,}5\text{ s} - 0{,}80\text{ s}} = \frac{6{,}6\text{ rad}}{2{,}7\text{ s}} \approx 2{,}4\text{ rad/s}.$$



1-10. a) Pyörimisnopeus on $n = \frac{1}{T} = \frac{1\text{ r}}{7{,}0\text{ s}} \approx 0{,}14\text{ r/s}.$

b) Kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi\text{ rad} \cdot \frac{1}{7{,}0\text{ s}} \approx 0{,}90\text{ rad/s}.$

1-11. a) Kierrosajat ovat

$$T_1 = \frac{1}{n_1} = \frac{1}{900\frac{\text{r}}{\text{min}}} = \frac{1}{\frac{900}{60}\frac{1}{\text{s}}} \approx 0{,}066667\text{ s ja}$$

$$T_2 = \frac{1}{n_2} = \frac{1}{3000\frac{\text{r}}{\text{min}}} = \frac{1}{\frac{3000}{60}\frac{1}{\text{s}}} = 0{,}02\text{ s}.$$

Kierrosaika pienenee $0{,}066667\text{ s} - 0{,}02\text{ s} \approx 0{,}05\text{ s}.$

b) Kulmanopeudet ovat

$$\omega_1 = 2\pi n_1 = 2\pi\frac{1}{T_1} = 2\pi\text{ rad} \cdot \frac{1}{0{,}066667\text{ s}} \approx 94{,}24731\text{ rad/s ja}$$

$$\omega_2 = 2\pi n_2 = 2\pi\frac{1}{T_2} = 2\pi\text{ rad} \cdot \frac{1}{0{,}02\text{ s}} \approx 314{,}15927\text{ rad/s}.$$

Kulmanopeus suurenee $314{,}15927\text{ rad/s} - 94{,}24731\text{ rad/s} \approx 200\text{ rad/s}.$

1-12. a) Maa pyörähtää akselinsa ympäri kerran vuorokaudessa. Pyörimisnopeus on

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1\text{ r}}{23\text{ h }56\text{ min }4{,}10\text{ s}} = \frac{1\text{ r}}{86\,164{,}1\text{ s}} = 1{,}16058 \cdot 10^{-5}\text{ r/s} \approx 1{,}16 \cdot 10^{-5}\text{ r/s}.$$

b) Kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 1{,}16058 \cdot 10^{-5}\text{ rad/s} \approx 7{,}29 \cdot 10^{-5}\text{ rad/s}$.

1-13. Rummun kiertokulma on $\varphi = \omega t = 2\pi n \cdot t = 2\pi \cdot \dfrac{1200\text{ rad}}{60\text{ s}} \cdot 55\text{ s} \approx 6900\text{ rad}$.

1-14. Kiertokulman yhtälöstä $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ ajaksi t saadaan

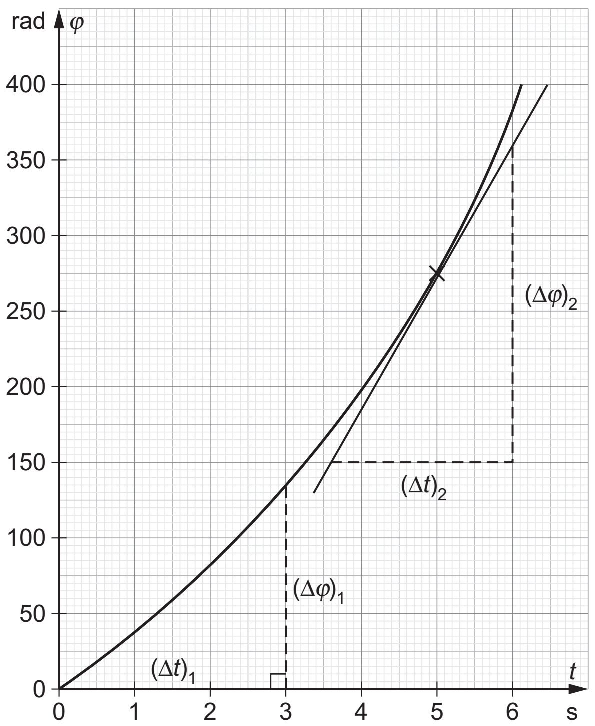
$$t = \frac{\varphi - \varphi_0}{\omega} = \frac{140\,\text{rad} - 5{,}0\,\text{rad}}{12\,\text{rad/s}} \approx 11\,\text{s}.$$

Valokuva sivulla 19:
Esimerkiksi valokuvan oikeassa reunassa selkeänä näkyvä pitkä kaari: kaaren asteluku on noin 60 astetta. Näin ollen kameran valotusaika on $\dfrac{60}{360} \cdot 24\,\text{h} \approx 4\,\text{h}$.

1-15. a) Rummun kiertokulma 4,0 sekunnin kuluttua on 200 rad.

b) Kun rumpu on kiertänyt 50 täyttä kierrosta, kiertokulma on 50 · 2π rad ≈ 314 rad.
Tähän on kulunut kuvaajan mukaan aikaa 5,4 s.

c)



Keskikulmanopeus välillä 0,0 s … 3,0 s on

$$\omega_k = \frac{(\Delta\varphi)_1}{(\Delta t)_1} = \frac{135 \text{ rad} - 0{,}0 \text{ rad}}{3{,}0 \text{ s} - 0{,}0 \text{ s}} = \frac{135 \text{ rad}}{3{,}0 \text{ s}} = 45 \text{ rad/s.}$$

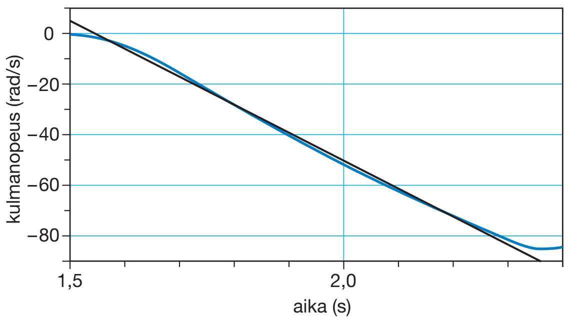
Hetkellinen kulmanopeus saadaan kuvaajalle kohtaan $t = 5{,}0$ s piirretyn tangentin kulmakertoimena:

$$\omega(5{,}0\,\text{s}) = \frac{(\Delta\varphi)_2}{(\Delta t)_2} = \frac{210\,\text{rad}}{2{,}4\,\text{s}} \approx 88\,\text{rad/s.}$$

1-16. a) Kappale voi pyöriä kahteen suuntaan, joten mittausohjelmalle pyörimisanturin pyörimissuunta oli negatiivinen.

b) Pyörimisliike on likimain tasaisesti kiihtyvää liikettä, koska (aika, kulmanopeus)-koordinaatistossa kuvaaja on lähes suora.

c)



Keskikulmakiihtyvyys saadaan (aika, kulmanopeus)-koordinaatiston käyrälle sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta:

$$\alpha_k = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{-90{,}0\,\text{rad/s} - 5{,}0\,\text{rad/s}}{2{,}36\,\text{s} - 1{,}5\,\text{s}} \approx -110\,\text{rad/s}^2.$$

1-17. Tasaisesti kiihtyvää pyörimisliikettä esittävät kuvaajat 2, 3 ja 4.

1-18. a) Aikavälillä 0,0 s … 20,0 s levy on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, aikavälillä 20,0 s … 30,0 s levy pyörii vakiokulmanopeudella ja aikavälillä 30,0 s … 35,0 s levyn pyöriminen hidastuu tasaisesti ja lopulta levy pysähtyy.

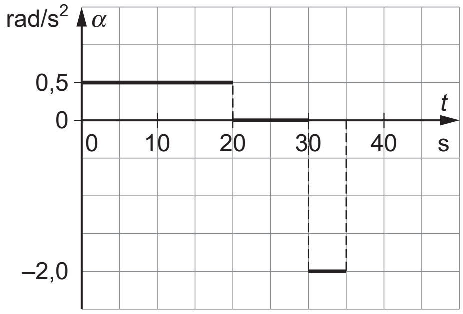
b) Levyn kulmakiihtyvyys on suurin aikavälillä 30,0 s … 35,0 s.

c) Kulmakiihtyvyydet:

aikavälillä 0,0 s … 20,0 s: $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{10,0\,\text{rad/s} - 0,0\,\text{rad/s}}{20,0\,\text{s} - 0,0\,\text{s}} = 0,50\,\text{rad/s}^2$,

aikavälillä 20,0 s … 30,0 s: $\alpha = 0\,\text{rad/s}^2$,

aikavälillä 30,0 s … 35,0 s: $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{0,0\,\text{rad/s} - 10,0\,\text{rad/s}}{35,0\,\text{s} - 30,0\,\text{s}} = -2,0\,\text{rad/s}^2$.

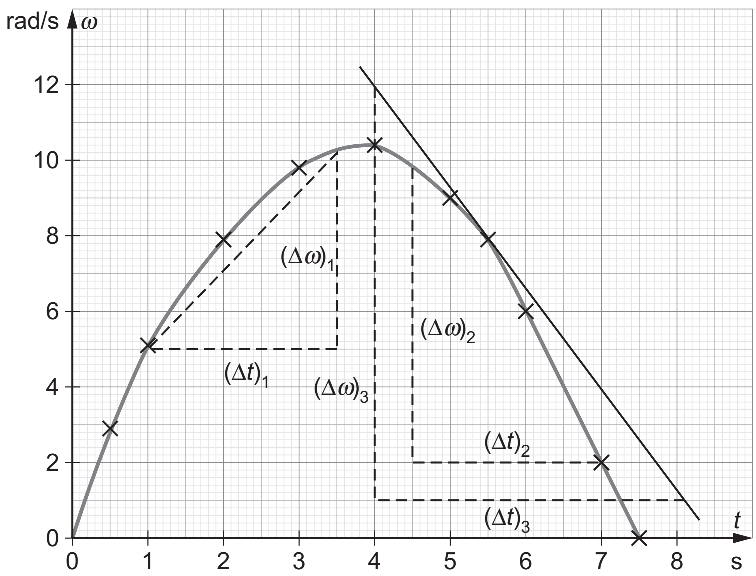


d) Kiertokulma saadaan välillä 0,0 s … 30,0 s kuvaajan ja t-akselin väliin jäävän alueen fysikaalisena pinta-alana. Koordinaatiston yhtä ruutua vastaa kiertokulma 5,0 s · 2,0 rad/s = 10,0 rad. Kuvaajan ja t-akselin väliin jäävä pinta-ala ruutuina on

$$0,5 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 20.$$

Näin ollen kiertokulma on 20 · 10,0 rad = 200 rad.

1-19. a)



b) Keskikulmakiihtyvyys aikavälillä 1,0 s…3,5 s on

$$\alpha_k = \frac{(\Delta\omega)_1}{(\Delta t)_1} = \frac{10,2\,\text{rad/s} - 5,0\,\text{rad/s}}{3,5\,\text{s} - 1,0\,\text{s}} \approx 2,1\,\text{rad/s}^2.$$

Keskikulmakiihtyvyys aikavälillä 4,5 s… 7,0 s on

$$\alpha_k = \frac{(\Delta\omega)_2}{(\Delta t)_2} = \frac{2,0\,\text{rad/s} - 9,8\,\text{rad/s}}{7,0\,\text{s} - 4,5\,\text{s}} \approx -3,1\,\text{rad/s}^2.$$

c) Kulmakiihtyvyys hetkellä 5,5 s on

$$\alpha(5{,}5\ \mathrm{s}) = \frac{(\Delta\omega)_3}{(\Delta t)_3} = \frac{1{,}0\ \mathrm{rad/s} - 11{,}8\ \mathrm{rad/s}}{8{,}1\ \mathrm{s} - 4{,}0\ \mathrm{s}} \approx -2{,}6\ \mathrm{rad/s^2}\,.$$

d) Kiertokulma saadaan kuvaajan ja aika-akselin väliin jäävän alueen fysikaalisena pinta-alana. Yhtä ruutua vastaa kiertokulmaa 1,0 s · 2,0 rad/s = 2,0 rad. Koska ruutujen määrä on 26, kiertokulma on 26 · 2,0 rad ≈ 52 rad.

1-20. Voimistelijan keskikulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot \dfrac{3}{2{,}9}\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \approx 6{,}5\ \mathrm{rad/s}$.

1-21. a) Akselin kierrosaika on $T = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\dfrac{2400}{60}\dfrac{1}{\mathrm{s}}} = 0{,}025\ \mathrm{s}$.

b) Akselin kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot \dfrac{2400}{60}\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 251{,}32741\ \mathrm{rad/s} \approx 250\ \mathrm{rad/s}$.

c) Keskikulmakiihtyvyys on $\alpha_\mathrm{k} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{251{,}32741\ \mathrm{rad/s} - 0{,}0\ \mathrm{rad/s}}{4{,}0\ \mathrm{s} - 0{,}0\ \mathrm{s}} \approx 63\ \mathrm{rad/s^2}$.

1-22. a) Siiven kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 2{,}5\ \mathrm{rad/s} \approx 15{,}70796\ \mathrm{rad/s}$.
Keskikulmakiihtyvyys on

$$\alpha_\mathrm{k} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0{,}0\ \mathrm{rad/s} - 15{,}70796\ \mathrm{rad/s}}{13\ \mathrm{s}} = -1{,}20830\ \mathrm{rad/s^2} \approx -1{,}2\ \mathrm{rad/s^2}\,.$$

b) Kiertokulma on

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 15{,}70796\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \cdot 13\ \mathrm{s} + \frac{1}{2}\cdot(-1{,}20830\ \mathrm{rad/s^2})\cdot(13\ \mathrm{s})^2 = 102{,}10213\ \mathrm{rad}\,.$$

Kierrosten lukumäärä on $\dfrac{102{,}10213\ \mathrm{rad}}{2\pi\ \mathrm{rad}} \approx 16$.

1-23. a) Vauhtipyörän keskikulmakiihtyvyys on

$$\alpha_\mathrm{k} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{45\ \mathrm{rad/s} - 110\ \mathrm{rad/s}}{5{,}0\ \mathrm{s}} = -13\ \mathrm{rad/s^2}.$$

b) Tasaisesti muuttuvassa pyörimisliikkeessä kiertokulma on

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 110\ \mathrm{rad/s}\cdot 5{,}0\ \mathrm{s} + \frac{1}{2}\cdot(-13\ \mathrm{rad/s^2})\cdot(5{,}0\ \mathrm{s})^2 = 387{,}5\ \mathrm{rad}.$$

Vauhtipyörä pyörii kokonaisia kierroksia $\dfrac{\varphi}{2\pi} = \dfrac{387{,}5\ \mathrm{rad}}{2\pi\ \mathrm{rad}} \approx 62\ \mathrm{kpl}$.

1-24. Keskiön maksimipyörimisnopeus on n = 170 rpm ja maksimikulmanopeus

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot \frac{170}{60} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 17,80236\,\text{rad/s}.$$

Kiihdytyksen aikana kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{17,80236\,\text{rad/ s} - 0,0\,\text{rad/ s}}{40\,\text{s}} = 0,445059\,\text{rad/ s}^2.$$

Kiertokulma tämän kiihdytyksen aikana on

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,445059\,\text{rad/s}^2 \cdot (40\,\text{s})^2 = 356{,}0472\,\text{rad}.$$

Harjoituksen loppuaika on tasaista pyörimisliikettä, ja silloin kiertokulma on

$$\varphi = \omega t = 17,80236\,\text{rad/s} \cdot 140\,\text{s} = 2492{,}3304\,\text{rad}.$$

Kiertokulma koko harjoituksen aikana on

356,0472 rad + 2492,3304 rad = 2848,3776 rad,

joka vastaa $\frac{2848,3776\,\text{rad}}{2\pi\,\text{rad}} \approx 450$ kierrosta.

1-25. a) Jojo on palannut takaisin käteen hetkillä 5,0 s ja 10,0 s.

b) Aikavälillä 0,0 s … 2,5 s jojo on menossa alaspäin. Pyörimisliike on kiihtyvää pyörimisliikettä.

Aikavälillä 2,5 s … 5,0 s jojo on tulossa ylöspäin. Pyörimisliike on hidastuvaa pyörimisliikettä.

Aikavälillä 5,0 s … 7,5 s jojo on menossa alaspäin kiihtyen ja pyörimissuunta on vaihtunut.

Aikavälillä 7,5 s … 10,0 s jojo on tulossa ylöspäin hidastuen.

c) Ensimmäisen 2,5 s aikana jojon kulmakiihtyvyys on $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{45\,\text{rad/s}}{2{,}5\,\text{s}} = 18\,\text{rad/s}.$

Tänä aikana jojon kiertokulma on $\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} \cdot 18\,\text{rad/s}^2 \cdot (2{,}5\,\text{s})^2 = 56{,}25\,\text{rad}.$

Koska kuvaaja on symmetrinen ajanhetken 2,5 s suhteen, aikavälillä 0,0 s … 5,0 s kiertokulma on 2 · 56,25 rad = 112,5 rad eli jojo pyörii $\frac{112,5\,\text{rad}}{2\pi\,\text{rad}} \approx 18$ kierrosta.

Testaa, osaatko sivu 27

1. a b **2.** c **3.** b c **4.** a b c **5.** a **6.** a **7.** c **8.** a c **9.** b c

2 Ympyräliike

2-1. a) Tarran A ratanopeus on suurempi kuin B:n ratanopeus, koska tarra A on kauempana ympyräliikkeen keskipisteestä. Tällöin sen esimerkiksi yhden kierroksen aikana kulkema matka on pitempi kuin lähempänä akselia olevan tarran kulkema matka.

b) Molemmilla on sama kulmanopeus.

2-2. a) Sekuntiviisarin pään ratanopeus on suurin, koska se kiertää täyden kierroksen nopeammin kuin minuutti- tai tuntiviisari.

b) Sekuntiviisarin

1) kierrosaika $T = 60$ s,

2) pyörimisnopeus on $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{60\ \text{s}} \approx 0{,}017\,\text{r/s}$,

3) kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \frac{1}{60\ \text{s}} \approx 0{,}10\,\text{rad/s}$.

4) Sekuntiviisarin pään ratanopeus on

$$v = \omega r = 2\pi n r = 2\pi \cdot \frac{1}{60\ \text{s}} \cdot 0{,}15\ \text{m} = 0{,}01570796\,\text{m/s} \approx 0{,}016\ \text{m/s}.$$

ja yhden vuorokauden aikana kulkema matka

$$s = vt = 0{,}01570796\ \text{m/s} \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s} \approx 1400\ \text{m}.$$

2-3. a) Pisteen ratanopeus on

$$v = \omega r = 2\pi n r = 2\pi \cdot \frac{5400}{60} \frac{1}{\text{s}} \cdot \frac{3{,}5 \cdot 2{,}540 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{2} \approx 25\ \text{m/s}.$$

b) Ratanopeus on verrannollinen etäisyyteen ympyräliikkeen keskipisteestä: pisteen ratanopeus on pienempi lähempänä kiintolevyn keskustaa.

2-4. a) Pyörän B kehäpisteen nopeus on

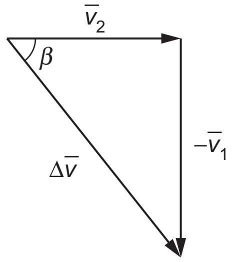
$$v_{\text{B}} = \omega r = 2\pi n r = 2\pi \cdot 96 \frac{1}{\text{s}} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 6{,}03186\,\text{m/s} \approx 6{,}0\ \text{m/s}.$$

b) Rattaiden kehäpisteiden ratanopeudet ovat yhtä suuret, koska ne on kiinnitetty toisiinsa. Näin ollen $v_{\text{A}} = v_{\text{B}} = 6{,}0$ m/s.

c) Rattaan A pyörimisnopeus on $n_{\text{A}} = \frac{\omega_{\text{A}}}{2\pi} = \frac{\frac{v}{r_{\text{A}}}}{2\pi} = \frac{\frac{6{,}03186\ \text{m/s}}{0{,}030\ \text{m}}}{2\pi} \approx 32\,\text{r/s}$.

2-5. a) Ralliauton kiihtyvyys saadaan yhtälöstä $\overline{a}_{\text{k}} = \dfrac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} = \dfrac{\overline{v}_2 - \overline{v}_1}{\Delta t}$.

Nopeuden muutos $\Delta\overline{v}$ voidaan kirjoittaa muotoon $\Delta\overline{v} = \overline{v}_2 - \overline{v}_1 = \overline{v}_2 + (-\overline{v}_1)$.



Koska nopeuksien suuruudet ovat $|\overline{v}_2| = v_2$ ja $|\overline{v}_1| = |-\overline{v}_1| = v_1$, nopeuden muutoksen $\Delta\overline{v}$ suuruudeksi saadaan $\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(42\,\text{m/s})^2 + (35\,\text{m/s})^2} \approx 54{,}67175\,\text{m/s}$.

Keskikiihtyvyyden suuruus on $a_{\text{k}} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{54{,}67175\,\text{m/s}}{8{,}2\,\text{s}} = 6{,}66729\,\text{m/s}^2 \approx 6{,}7\,\text{m/s}^2$ ja

suunta on nopeuden muutoksen suunta: $\tan\beta = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{42\,\text{m/s}}{35\,\text{m/s}}$, josta kulma $\beta \approx 50°$.

b) Autoon vaikuttava keskimääräinen kokonaisvoima on

$$F = ma_{\text{k}} = 1300\text{ kg} \cdot 6{,}66729\text{ m/s}^2 \approx 8{,}7\text{ kN}.$$

Kokonaisvoima ja kiihtyvyys ovat samansuuntaiset.

2-6. a) Ympyräradalle autoon vaikuttavan voiman suuruus on

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{1200\,\text{kg} \cdot \left(\dfrac{18}{3{,}6}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{22\,\text{m}} \approx 1{,}4\,\text{kN}.$$

b) Auto pysyy ympyräradalla kitkan ansiosta. Auton liikeyhtälö on $\sum\overline{F} = m\overline{a}_{\text{n}}$ eli $\overline{F}_{\mu} = m\overline{a}_{\text{n}}$, koska kitka aiheuttaa normaalikiihtyvyyden. Valitaan suunta kohti ympyräradan keskipistettä positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $\mu mg = \dfrac{mv^2}{r}$ saadaan kitkakertoimeksi

$$\mu = \frac{v^2}{gr} = \frac{\left(\dfrac{18}{3{,}6}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 22\text{ m}} \approx 0{,}12.$$

Riittävän suuri kitkakerroin auton pitämiseksi ympyräradalla on 0,12. Jos kitkakerroin on 0,20, auto pysyy ympyräradalla.

2-7. a) Langan jännitysvoiman ansiosta pallo pysyy ympyräradalla. Voiman suuruus katkeamishetkellä on $F = \dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{0{,}055\,\text{kg} \cdot (15\,\text{m/s})^2}{0{,}20\,\text{m}} \approx 62\,\text{N}$.

b) Pallo lähtee radalta radan tangentin suuntaan suoraviivaisesti jatkavuuden lain mukaan.

2-8. a) Elektronin normaalikiihtyvyys on $a_\text{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{(2{,}18\,\text{Mm/s})^2}{52{,}8\,\text{pm}} \approx 9{,}00\cdot 10^{22}\ \text{m/s}^2$.

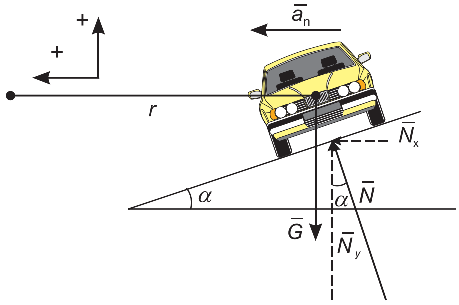
b) Yhteen kierrokseen kuluva aika on

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\cdot 52{,}8\ \text{pm}}{2{,}18\ \text{Mm/s}} \approx 1{,}521799\cdot 10^{-16}\ \text{s}.$$

Elektroni kiertää yhdessä sekunnissa $\frac{1{,}0\,\text{s}}{1{,}521799\cdot 10^{-16}\ \text{s}} \approx 6{,}57\cdot 10^{15}$ kierrosta.

2-9. Tasaisessa ympyräliikkeessä olevalla kappaleella on vain normaalikiihtyvyyttä. Agentin kiihtyvyys on $a_\text{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r = (2\pi n)^2 r = 4\pi^2 n^2 r$ eli yhtälöstä $4\pi^2 n^2 r = 12g$ agentin pyörimisnopeus on $n = \sqrt{\frac{12g}{4\pi^2 r}} = \sqrt{\frac{12\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{4\pi^2\cdot 10\ \text{m}}} \approx 0{,}55\ \text{r/s}$.

2-10. Kun vastusvoimat ovat pienet, autoon kohdistuvat voimat ovat paino ja tienpinnan tukivoima. Auton radan säteeksi oletetaan kohtisuora etäisyys radan keskipisteeseen. Auton tiellä pitävä kokonaisvoima suuntautuu kaarteen keskipistettä kohti ja on vaakasuora. Liikeyhtälö vaakasuunnassa on $\sum \bar{F}_x = m\bar{a}_\text{n}$. Pystysuunnassa liikeyhtälö on $\sum \bar{F}_y = \bar{0}$, koska autolla ei ole kiihtyvyyttä pystysuunnassa.



Kun valitaan suunnat keskipistettä kohti ja ylös positiivisiksi, saadaan skalaariyhtälöt $N\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$ ja $N\cos\alpha - mg = 0$. Tukivoimalle saadaan yhtälö $N = \frac{mg}{\cos\alpha}$.

Kun yhtälö $N = \frac{mg}{\cos\alpha}$ sijoitetaan yhtälöön $N\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$, saadaan $\frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$, josta nopeudeksi saadaan

$$v = \sqrt{\frac{rg}{\cos\alpha}\sin\alpha} = \sqrt{rg\tan\alpha} = \sqrt{135\,\text{m}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot\tan 9{,}5°} \approx 15\,\text{m/s}.$$

Toinen tapa: Merkitään yhtälöt allekkain:

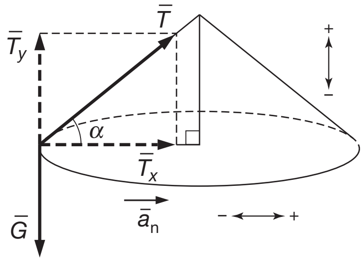
$$N\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$$
$$N\cos\alpha = mg.$$

Kun yhtälöt jaetaan puolittain, saadaan $\dfrac{N\sin\alpha}{N\cos\alpha} = \dfrac{m\frac{v^2}{r}}{mg}$ eli $\tan\alpha = \dfrac{v^2}{gr}$,

josta saadaan nopeudeksi

$$v = \sqrt{rg\tan\alpha} = \sqrt{135\ \text{m}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot\tan 9{,}5°} \approx 15\ \text{m/s}.$$

2-11. a) Koneeseen kohdistuvat voimat ovat langan jännitysvoima $\overline{T}$ ja paino $\overline{G}$, ilmanvastus voidaan olettaa pieneksi. Langan jännitysvoiman vaakasuuntainen komponentti T_x pitää koneen ympyräradalla ja antaa sille normaalikiihtyvyyden a_n.



b) Lasketaan ensin langan suunta vaakatasoon nähden:

$$\cos\alpha = \frac{0{,}70\ \text{m}}{0{,}90\ \text{m}},\ \text{josta saadaan kulma}\ \alpha \approx 38{,}94244°.$$

Koska kone kiertää ympyrärataa korkeuttaan muuttamatta, koneen liikeyhtälö pystysuunnassa on $\sum\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{T}_y + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $T_y - G = 0$. Skalaariyhtälöstä saadaan $T_y = G$ eli $T\sin\alpha = mg$, josta langan jännitysvoima on

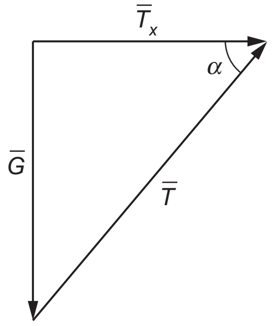
$$T = \frac{mg}{\sin\alpha} = \frac{0{,}200\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\sin 38{,}94244°} \approx 3{,}12152\ \text{N}.$$

Koneen liikeyhtälö vaakasuunnassa on $\sum\overline{F} = m\overline{a}_\text{n}$. Valitaan suunta kohti ympyräradan keskipistettä positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö $T_x = m\dfrac{v^2}{r}$ eli $T\cos\alpha = m\dfrac{v^2}{r}$.

Ratkaistaan tästä yhtälöstä koneen nopeus:

$$v = \sqrt{\frac{Tr\cos\alpha}{m}} = \sqrt{\frac{3{,}12152\ \text{N}\cdot 0{,}70\ \text{m}\cdot\cos 38{,}94244°}{0{,}200\ \text{kg}}} \approx 2{,}9\ \text{m/s}.$$

Toinen tapa: Lentokoneeseen vaikuttavat voimat ovat suorakulmaisen kolmion sivuina:



Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan $\tan\alpha = \dfrac{G}{T_x}$, josta

$$T_x = \frac{mg}{\tan\alpha} = \frac{0{,}200\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{\tan 38{,}94244} \approx 2{,}42785\,\text{N}.$$

Nopeus saadaan yhtälöstä $T_x = m\dfrac{v^2}{r}$, josta nopeus on

$$v = \sqrt{\frac{T_x \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{2{,}42785\ \text{N}\cdot 0{,}70\ \text{m}}{0{,}200\ \text{kg}}} \approx 2{,}9\ \text{m/s}.$$

2-12. a) Renkaan säde on $r = \dfrac{26"}{2} = \dfrac{26\cdot 2{,}540\cdot 10^{-2}\ \text{m}}{2} = 0{,}3302\ \text{m}.$ Kuvaajan perusteella hetkellä 5,0 min kulmanopeus on 25 rad/s ja tätä vastaava ratanopeus on

$$v = \omega r = 25\ 1/\text{s}\cdot 0{,}3302\ \text{m} = 8{,}255\ \text{m/s} \approx 30\ \text{km/h}.$$

b) Määritetään (t,ω)-kuvaajasta pinta-ala, joka vastaa kiertokulmaa. Yksi ruutu vastaa kiertokulmaa $5\ \text{rad/s}\cdot 60\ \text{s} = 300\ \text{rad}$.

Koska ruutuja on noin 23,8, saadaan kiertokulmaksi $\varphi = 23{,}8\cdot 300\ \text{rad} = 7140\ \text{rad}$.

Harjoituksen aikana Eevan polkema matka on $s = \varphi r = 7140\cdot 0{,}3302\,\text{m} \approx 2{,}4\ \text{km}$.

2-13. a) Ensimmäisen sekunnin aikana auto liikkuu tasaisesti 30 cm aloituspisteestä vastapäivään. Auton suunta muuttuu ja seuraavan 2,0 s:n aikana auto palaa taaksepäin 20 cm. Aikavälillä 3,0 s … 4,0 s auto liikkuu jälleen vastapäivään ja kuljettu matka on 30 cm. Ajanhetkellä 4,0 s auto pysähtyy.

b) Auton keskivauhti on $v_\text{k} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{30\,\text{cm} + 20\,\text{cm} + 30\text{cm}}{5{,}0\ \text{s}} = 16\ \text{cm/s}.$

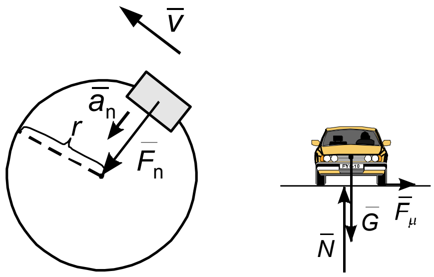
c) Hetkellinen nopeus saadaan kuvaajalle kohtaan $t = 2{,}0$ s piirretyn tangentin fysikaalisena kulmakertoimena:

$$v(2{,}0s) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\,\text{cm} - 30\,\text{cm}}{3{,}0\,\text{s} - 1{,}0\,\text{s}} = \frac{-20\,\text{cm}}{2{,}0\,\text{s}} = -10\,\text{cm/s}\ \text{ja suunta myötäpäivään.}$$

d) Auton liike ei voi muuttua yhtäkkisesti kuvan esittämällä tavalla. Suunnan muuttumiseen kuluu aina hieman aikaa. Tätä ei kuvaajassa ole otettu huomioon. Todellisuudessa kuvaajan kärjet olisivat hieman pyöristyneet.

2-14. a) Jos auto ajaa maksiminopeudella, auton ratanopeus v_{max} on vakio:

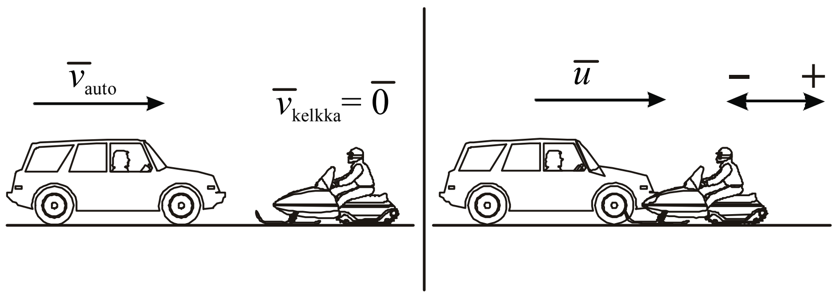
$$v_{\text{max}} = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi \cdot 30\ \text{m}}{33{,}5\ \text{s}} \approx 5{,}62673\ \text{m/s}.$$



Auton liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\text{n}}$ eli $\overline{F}_\mu = m\overline{a}_{\text{n}}$. Valitaan suunta kohti ympyräradan keskipistettä positiiviseksi. Auton normaalikiihtyvyys on $a_{\text{n}} = \frac{v_{\text{max}}^2}{r}$. Auto pysyy ympyräradalla renkaiden ja tien pinnan välisen lepokitkan takia. Koska auto etenee maksiminopeudella, renkaiden ja tien välinen kitka on täysin kehittynyt lepokitka: $F_\mu = \mu_0 N = \mu_0 mg$. Yhtälöstä $\mu_0 mg = ma_{\text{n}}$ eli $\mu_0 mg = m\frac{v_{\text{max}}^2}{r}$ saadaan renkaiden ja tien pinnan väliseksi lepokitkakertoimeksi

$$\mu_0 = \frac{v_{\text{max}}^2}{rg} = \frac{v_{\text{max}}^2}{rg} = \frac{(5{,}62673\ \text{m/s})^2}{30\ \text{m} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}11.$$

b) Oletetaan, että auton ja kelkan törmäys on täysin kimmoton.



Auton ja kelkan liikemäärä säilyy törmäyksessä eli $m_{\text{auto}}\overline{v}_{\text{auto}} = (m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}})\overline{u}$.
Kun auton liikkeen suunta on positiivinen, auton ja kelkan yhteinen nopeus u heti törmäyksen jälkeen on

$$u = \frac{m_{\text{auto}} v_{\text{auto}}}{m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}}} = \frac{1080\ \text{kg} \cdot \frac{17}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1080\ \text{kg} + 380\ \text{kg}} \approx 3{,}49315\ \text{m/s}.$$

Oletetaan ilmanvastus pieneksi. Energiaperiaatteen mukaan auto ja kelkka pysähtyvät, kun kitkan tekemä työ on yhtä suuri kuin auton ja kelkan liike-energia heti törmäyksen jälkeen eli $E_{\text{kin}} = W_{\mu 1} + W_{\mu 2}$.

Kun energiaperiaatteen yhtälöön sijoitetaan liike-energian ja töiden yhtälöt, saadaan

$$\frac{1}{2}(m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}})u^2 = F_{\mu_1}s + F_{\mu_2}s\ .$$

Ratkaistaan edellisestä yhtälöstä auton ja kelkan liukuma matka s:

$$\frac{1}{2}(m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}})u^2 = (\mu_1 N_{\text{auto}} + \mu_2 N_{\text{kelkka}})s$$

$$\frac{1}{2}(m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}})u^2 = (\mu_1 m_{\text{auto}} g + \mu_2 m_{\text{kelkka}} g)s$$

$$\frac{1}{2}(m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}})u^2 = (\mu_1 m_{\text{auto}} + \mu_2 m_{\text{kelkka}})gs.$$

Auton ja kelkan liukuma matka on

$$s = \frac{(m_{\text{auto}} + m_{\text{kelkka}})u^2}{2g(\mu_1 m_{\text{auto}} + \mu_2 m_{\text{kelkka}})} = \frac{(1080\ \text{kg} + 380\ \text{kg}) \cdot (3{,}49315\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}090 \cdot 1080\ \text{kg} + 0{,}20 \cdot 380\ \text{kg})} \approx 5{,}2\ \text{m}\ .$$

2-15. a) Väite on oikein; tasaisessa ympyräliikkeessä normaalikiihtyvyyden suunta on kohti radan keskipistettä.

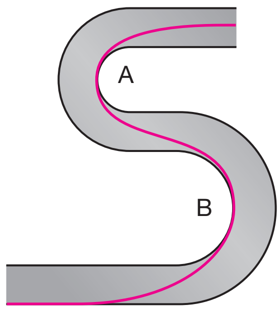
b) Väite on oikein; normaalikiihtyvyyden aiheuttaa renkaiden ja tienpinnan välinen lepokitka.

c) Väite on oikein; tietä kallistettaessa tiellä pysymiseen tarvittava kitka pienenee.

d) Väite on oikein; auton nopeutta kaarteessa pienennettäessä tien ja auton renkaiden välinen kitka pienenee.

2-16. a) Kuljettajaan vaikuttava normaalikiihtyvyys on suurempi mutkassa A, koska ko. mutkan säde on pienempi kuin mutkan B.

b)



2-17. a) Gravitaatiovoima pitää Maan Auringon kiertoradalla.

b) Kitka karusellin istuimen ja Annan välillä estää Annan liukumisen. Joskus myös rakenteiden, kuten kaiteiden tukivoimat estävät liukumisen.

c) Sähköinen vetovoima pitää elektronin atomiydintä kiertävällä radalla.

d) F1-auton pitää kaarteessa tien pinnan kitka.

e) Tarzanin pitää radallaan liaanista Tarzanin käteen vaikuttava kitka.

f) Ovenkahvan pitää paikallaan kahvan kiinnityksestä johtuva tukivoima.

2-18. a) Väite on oikein. Ympyräradalla nopeusvektorin suunta on radan tangentin suunta. Radan säde ja nopeusvektori ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

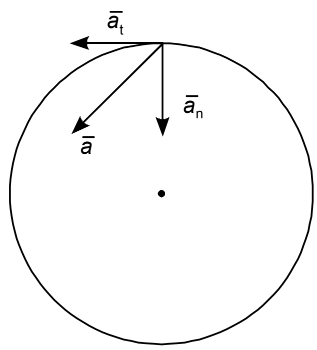
b) Väite on väärin. Ympyräradalla liikkuvan kappaleen nopeusvektorin suunta muuttuu koko ajan. Silloin nopeus muuttuu ja kyseessä on kiihtyvä liike. Kappaleen ratavauhti voi olla vakio, mutta silloinkin kyseessä on kiihtyvä liike, koska nopeuden suunta muuttuu. Jos lisäksi ratavauhti suurenee tai pienenee, kokonaiskiihtyvyys on tangenttikiihtyvyyden ja normaalikiihtyvyyden vektorisumma.

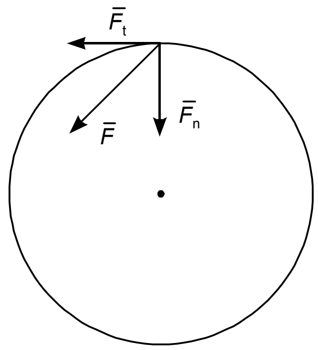
c) Väite on väärin. Kiihtyvyys ei ole vakio, koska kiihtyvyyden suunta muuttuu kappaleen liikkuessa ympyräradalla. (Kulmakiihtyvyys pysyy vakiona).

d) Väite on oikein. Kun ympyräradalla liikkuvan kappaleen nopeus on pieni ja säde suuri, normaalikiihtyvyys voi olla hyvin pieni. Jos kappaleen ratavauhti pienenee hyvin nopeasti, tangenttikiihtyvyys voi olla paljon suurempi kuin normaalikiihtyvyys

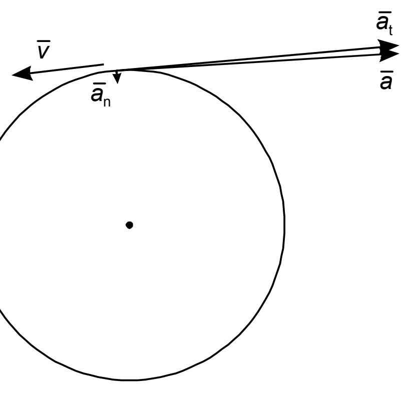
e) Väite on väärin. Kokonaisvoima, joka vaikuttaa kappaleeseen, aiheuttaa kappaleen kiihtyvyyden.

Kiihtyvyyden suunta on sama kuin kokonaisvoiman suunta.





f) Väite on oikein. Jos ratanopeus on hyvin pieni ja säde suuri, normaalikiihtyvyys on pieni. Tangenttikiihtyvyys voi olla suuri, jos ratavauhti pienenee nopeasti. Siinä tilanteessa kappaleen nopeuden suunta voi olla kuvan mukaisesti vasemmalle ja kokonaiskiihtyvyyden suunta likimain vastakkaissuuntainen oikealle. Kokonaiskiihtyvyys on likimain tangenttikiihtyvyyden suuntainen.



2-19. Kun levy alkaa pyöriä, laatikot ovat ympyräliikkeessä. Levyllä olevan laatikon liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$, jossa puupalan kiihtyvyys on normaalikiihtyvyyden ja tangenttikiihtyvyyden vektorisumma: $\overline{a} = \overline{a}_\mathrm{n} + \overline{a}_\mathrm{t}$. Kun levyn pyörimisnopeutta lisätään vähitellen, laatikoiden ratanopeus kasvaa: $v = \omega r$. Laatikot pysyvät ympyräradalla kitkan takia. Ensimmäisenä irtoaa tulitikkulaatikko, jonka etäisyys on suurin pyörimisakselista. Sen ratanopeus on suurempi kuin muiden laatikoiden.

2-20. a) Kelan kulmanopeus on $\omega = \dfrac{v}{r} = \dfrac{1{,}2\ \mathrm{m/s}}{\dfrac{0{,}045\ \mathrm{m}}{2}} = 53{,}33333\,\mathrm{rad/s} \approx 53\ \mathrm{rad/s}$.

Yhtälöstä $\omega = 2\pi n$ pyörimisnopeudeksi saadaan $n = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{53{,}33333\ \mathrm{rad/s}}{2\pi} \approx 8{,}5$ r/s.

b) Kelan kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\cdot 53{,}33333\ \mathrm{rad/s} - 53{,}33333\ \mathrm{rad/s}}{1{,}4\ \mathrm{s}} \approx 38{,}09524\ \mathrm{rad/s^2}.$$

Kelan tangenttikiihtyvyys on $a_t = \alpha r = 38{,}09524\ 1/\mathrm{s}^2 \cdot \dfrac{0{,}045\,\mathrm{m}}{2} \approx 0{,}86\,\mathrm{m/s^2}$.

2-21. a) Laikka lähtee levosta ja saavuttaa lopuksi kierrostaajuuden 40 r/s: tällöin laikan kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi\cdot 40\ \mathrm{rad/s} \approx 251{,}32741\ \mathrm{rad/s}$.

Yhtälöstä $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ kiihdytykseen kuluvaksi ajaksi saadaan

$$\Delta t = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{251{,}32741\ \mathrm{rad/s} - 0{,}0\,\mathrm{rad/s}}{3{,}5\ \mathrm{rad/s^2}} = 71{,}80783\,\mathrm{s} \approx 72\ \mathrm{s}.$$

b) Koska kulmakiihtyvyys on vakio, kyseessä on tasaisesti kiihtyvä pyörimisliike. Koska laikka lähtee levosta, kiertymä on

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\cdot 3{,}5\ \mathrm{rad/s^2}\cdot(71{,}80783\ \mathrm{s})^2 = 9023{,}63779\,\mathrm{rad}.$$

Kokonaisten kierrosten lukumäärä on $\dfrac{\varphi}{2\pi} = \dfrac{9023{,}63779\,\mathrm{rad}}{2\pi\,\mathrm{rad}} \approx 1400$.

c) Laikan kehällä olevan pisteen ratanopeus on $v = \omega r = 251{,}32741\ 1/\mathrm{s}\cdot 0{,}10\ \mathrm{m} \approx 25\ \mathrm{m/s}$.

2-22. a) Savihiukkasen kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{2\pi\Delta n}{t} = \frac{2\pi\cdot\left(\dfrac{33{,}3}{60\ \mathrm{s}} - 0{,}0\dfrac{1}{\mathrm{s}}\right)}{2{,}9\ \mathrm{s}} = 1{,}20247\ \mathrm{rad/s^2} \approx 1{,}2\ \mathrm{rad/s^2}.$$

b) Kulmanopeus hetkellä t = 1,5 s on

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0{,}0\ \text{rad/s} + 1{,}20247\frac{1}{\text{s}^2}\cdot 1{,}5\ \text{s} = 1{,}803705\frac{\text{rad}}{\text{s}}\ \text{ja}$$

ratanopeus $v = \omega r = 1{,}803705\frac{1}{\text{s}}\cdot 0{,}058\ \text{m} = 0{,}10461\ \text{m/s} \approx 0{,}10\ \text{m/s}.$

c) Savihiukkasen tangenttikiihtyvyys on

$$a_\text{t} = \alpha r = 1{,}20247\frac{1}{\text{s}^2}\cdot 0{,}058\ \text{m} \approx 0{,}069743\ \text{m/s}^2$$

ja normaalikiihtyvyys

$$a_\text{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{(0{,}10461\ \text{m/s})^2}{0{,}058\ \text{m}} \approx 0{,}18868\ \text{m/s}^2.$$

Pölyhiukkasen kiihtyvyys hetkellä 1,5 s on

$$a = \sqrt{a_\text{t}^2 + a_\text{n}^2} = \sqrt{(0{,}069743\,\text{m/s}^2)^2 + (0{,}18868\,\text{m/s}^2)^2} \approx 0{,}20\,\text{m/s}^2\ \text{ja suunta:}$$

$$\tan\theta = \frac{a_\text{t}}{a_\text{n}} = \frac{0{,}069743\ \text{m/s}^2}{0{,}18868\ \text{m/s}^2},\ \text{josta suuntakulma on}\ \theta \approx 20°.$$

2-23. a) Pyörän kulmakiihtyvyys on

$$\alpha_\text{k} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{2{,}0\frac{1}{\text{s}} - 6{,}0\frac{1}{\text{s}}}{2{,}0\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}} = \frac{-4{,}0\frac{1}{\text{s}}}{2{,}0\ \text{s}} = -2{,}0\ \text{rad/s}^2.$$

b) Kehällä olevan pisteen normaalikiihtyvyys on

$$a_\text{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega_2 r)^2}{r} = \omega_2^2 r = (2{,}0\frac{1}{\text{s}})^2\cdot 0{,}30\ \text{m} = 1{,}2\ \text{m/s}^2\ \text{ja}$$

tangenttikiihtyvyys

$$a_\text{t} = \alpha r = -2{,}0\frac{1}{\text{s}^2}\cdot 0{,}30\ \text{m} = -0{,}60\ \text{m/s}^2.$$

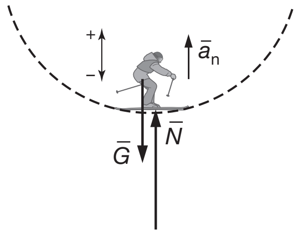
Kiihtyvyyden suuruus on

$$a = \sqrt{a_\text{t}^2 + a_\text{n}^2} = \sqrt{(-0{,}60\ \text{m/s}^2)^2 + (1{,}2\ \text{m/s}^2)^2} \approx 1{,}3\ \text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta saadaan yhtälöstä $\tan\theta = \frac{a_\text{t}}{a_\text{n}} = \frac{-0{,}60\ \text{m/s}^2}{1{,}2\ \text{m/s}^2}$, josta kulma ympyräradan säteen suhteen on $\theta \approx -27°$.

2-24. Tarkastellaan autoon vaikuttavia voimia mäennyppylän ylimmässä kohdassa. Auton liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$. Kun suunta alas on positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $-N + mg = \dfrac{mv^2}{r}$. Radan ylimmässä kohdassa, kun auto juuri ja juuri on irtoamassa tien pinnasta, tien pinnasta autoon kohdistuva tukivoima on $N = 0$. Yhtälöstä $mg = \dfrac{mv^2}{r}$ auton nopeudeksi saadaan $v = \sqrt{gr} = \sqrt{9{,}81 \cdot \mathrm{m/s^2} \cdot 45\,\mathrm{m}} \approx 21\,\mathrm{m/s} \approx 76\,\mathrm{km/h}$.

2-25. Laskijan liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$.

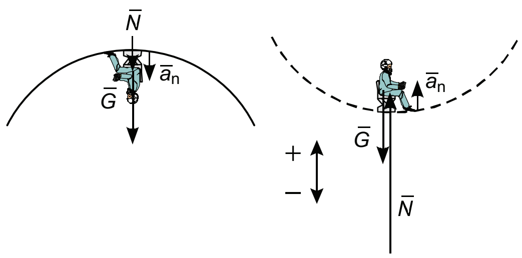


Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälöstä $N - G = \dfrac{mv^2}{r}$ rinteen tukivoiman suuruudeksi alimmassa kohdassa saadaan

$$N = \frac{mv^2}{r} + G = \frac{mv^2}{r} + mg = \frac{82\,\mathrm{kg} \cdot \left(\dfrac{45}{3{,}6}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{22\,\mathrm{m}} + 82\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 1{,}4\,\mathrm{kN}.$$

Rinteestä laskijan jalkoihin kohdistuvan voiman suuruus on yhtä suuri kuin rinteen tukivoiman suuruus eli 1,4 kN.

2-26. a)



b) Lentokoneen liikeyhtälö ympyräradalla on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälöstä $N - G = \dfrac{mv^2}{r}$ istuimen tukivoiman suuruudeksi silmukan alimmassa kohdassa saadaan

$$N = \frac{mv^2}{r} + G = \frac{mv^2}{r} + mg = \frac{85\,\mathrm{kg} \cdot \left(\dfrac{360}{3{,}6}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{1000\,\mathrm{m}} + 85\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 1{,}7\,\mathrm{kN}.$$

Tukivoima on yli 2-kertainen lentäjään kohdistuvaan painoon verrattuna.

2-27. Sangossa olevaan veteen kohdistuvat paino ja sangon pohjasta veteen kohdistuva tukivoima. Sangon liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$. Tarkastellaan tilannetta ylimmässä kohdassa. Kun suunta alas on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $N + G = \dfrac{mv^2}{r}$.

Kun sankoa radan ylimmässä kohdassa pyöritettäessä vesi juuri ja juuri pysyy sangossa, sangon pohjasta veteen kohdistuva tukivoima $N = 0$, jolloin yhtälö $N + G = \dfrac{mv^2}{r}$ saadaan muotoon $mg = \dfrac{mv^2}{r}$.

Oletetaan, että ympyräliikkeen säde on 0,90 m. Sangon nopeudeksi saadaan

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}90\ \mathrm{m}} = 2{,}97136\ \mathrm{m/s} \approx 3{,}0\ \mathrm{m/\,s}.$$

Yhteen pyörähdykseen kuluva aika on $T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi \cdot 0{,}90\ \mathrm{m}}{2{,}97136\ \mathrm{m/s}} = 1{,}90312\ \mathrm{s} \approx 1{,}9\ \mathrm{s}.$

Tällöin sangon pyörimisnopeus on $n = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{1{,}90312\ \mathrm{s}} \approx 0{,}5\ \dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$.

2-28. Leikkiauton liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$. Kun silmukan ylimmässä kohdassa suunta alaspäin on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $-N + mg = \dfrac{mv_1^{\,2}}{r}$.

Kun auto on silmukan ylimmässä kohdassa juuri ja juuri irtoamassa alustastaan, radasta autoon kohdistuva tukivoima $N = 0$. Tällöin yhtälö $-N + mg = \dfrac{mv_1^{\,2}}{r}$ saadaan muotoon

$mg = \dfrac{mv_1^{\,2}}{r}$, josta auton miniminopeudeksi silmukan ylimmässä kohdassa saadaan $v_1 = \sqrt{gr}$. Koska leikkiauto on herkkäliikkeinen, siihen voidaan soveltaa mekaanisen energian säilymislakia. Aluksi auto on alhaalla ja autolla on vain liike-energiaa. Koska autolla on nopeutta ylimmässä kohdassa, autolla on potentiaalienergian lisäksi myös liike-energiaa.

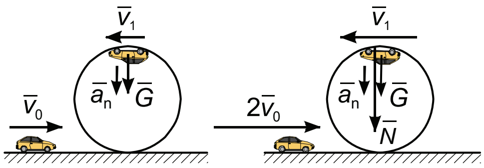
Mekaanisen energian säilymislain mukaan on $\frac{1}{2}mv_0^2 = mg \cdot 2r + \frac{1}{2}mv_1^2$.

Ratkaistaan yhtälöstä auton alkunopeus v_0:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg \cdot 2r + \frac{1}{2}m(\sqrt{gr})^2$$
$$v_0^2 = 4gr + gr = 5gr.$$

Leikkiauton alkunopeudeksi saadaan $v_0 = \sqrt{5gr} = \sqrt{5 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}25\ \mathrm{m}} \approx 3{,}5\ \mathrm{m/s}$.

Kun auton alkunopeus on $2v_0$, radan ylimmässä kohdassa tukivoima on suurempi kuin alkunopeuden ollessa v_0.



2-29. a) Koska alusta on kitkaton ja kolikko pieni (eli ilmanvastus pieni), mekaaninen energia säilyy. Kolikko nousee siis alkuperäiselle korkeudelle 25 cm.

b) Aluksi kolikolla on potentiaalienergiaa asemansa perusteella. Kun se päästetään irti, potentiaalinenergia muuntuu liike-energiaksi. Mekaanisen energian säilymislain mukaan maljan pohjalla kolikon nopeus saadaan yhtälöstä $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ eli $mgR = \frac{1}{2}mv^2$.

Kolikon nopeus on $v = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}25\,\text{m}} \approx 2{,}21472\,\text{m/s}$.

Kolikkoon maljan pohjalla kohdistuvat voimat ovat paino $\overline{G}$ ja maljan pinnan tukivoima $\overline{N}$. Koska kolikko on ympyräradalla, jonka säde on maljan säde R, kolikon liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\text{n}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}_\text{n}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

$$N - G = m\frac{v^2}{R}.$$

Tukivoima on

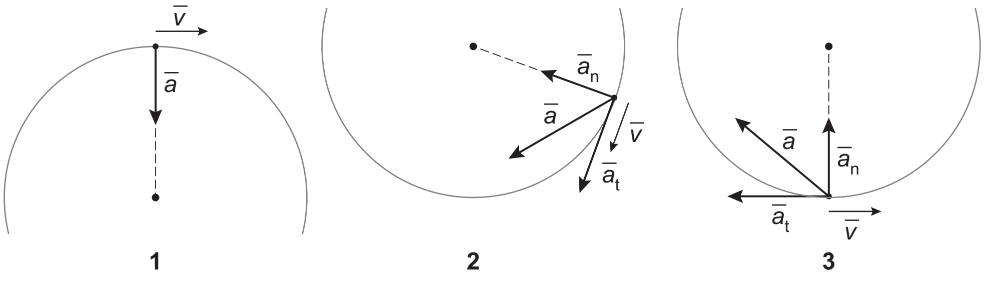
$$\begin{aligned} N &= G + \frac{mv^2}{R} = mg + \frac{mv^2}{R} \\ &= 0{,}025\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 + \frac{0{,}025\text{ kg} \cdot (2{,}21472\text{ m/s})^2}{0{,}25\text{ m}} \approx 0{,}74\text{ N}. \end{aligned}$$

2-30. a)1: Koska kappaleella on vain normaalikiihtyvyyttä, kappaleen ratanopeus on vakio ja kappale on tasaisessa ympyräliikkeessä.

2: Koska kappaleen tangenttikiihtyvyys on nopeuden kanssa samansuuntainen, kappale on kiihtyvässä ympyräliikkeessä.

3: Koska kappaleen tangenttikiihtyvyys on kappaleen nopeuden kanssa vastakkaissuuntainen, kappale on hidastuvassa ympyräliikkeessä.

b)



2-31. a) Kelkan tangenttikiihtyvyyden suuruus on

$$a_\mathrm{t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{80}{3{,}6}\ \mathrm{m/s} - \frac{30}{3{,}6}\ \mathrm{m/s}}{15\,\mathrm{s}} = \frac{\frac{50}{3{,}6}\ \mathrm{m/s}}{15\ \mathrm{s}} \approx 0{,}93\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

Tangenttikiihtyvyys pysyy vakiona koko kiihdytyksen ajan, koska kiihdytys on tasaista.

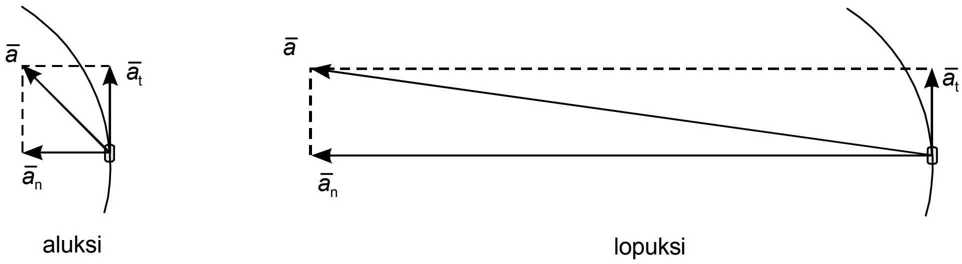
b) Kelkan normaalikiihtyvyyden suuruus kiihdytyksen alussa on

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{30}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{75\,\mathrm{m}} \approx 0{,}93\,\mathrm{m/s^2}.$$

c) Kelkan normaalikiihtyvyyden suuruus kiihdytyksen lopussa on

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{80}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{75\,\mathrm{m}} \approx 6{,}6\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

d)



2-32. Liike on tasaisesti hidastuvaa ja sen keskinopeus on

$$v_\mathrm{k} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{12{,}5\,\mathrm{m/s} + 2{,}5\,\mathrm{m/s}}{2} = 7{,}5\mathrm{m/s}\,.$$

Jarrutukseen kulunut aika on $t = \dfrac{s}{v_\mathrm{k}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 2\pi r}{v_\mathrm{k}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 34\ \mathrm{m}}{7{,}5\ \mathrm{m/s}} \approx 14{,}24189\ \mathrm{s}.$

Pyörän tangenttikiihtyvyys on

$$a_\mathrm{t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2{,}5\,\mathrm{m/s} - 12{,}5\,\mathrm{m/s}}{14{,}24189\ \mathrm{s}} = \frac{-10{,}0\,\mathrm{m/s}}{14{,}24189\ \mathrm{s}} \approx -0{,}70215\ \mathrm{m/s^2}.$$

Pyörän normaalikiihtyvyys sillä hetkellä, kun ratanopeus on 7,5 m/s, on

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{(7{,}5\ \mathrm{m/s})^2}{34\ \mathrm{m}} \approx 1{,}65441\,\mathrm{m/s^2}.$$

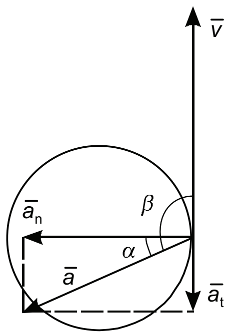
Pyörän kiihtyvyys on $\bar{a} = \bar{a}_\mathrm{n} + \bar{a}_\mathrm{t}$ ja kiihtyvyyden suuruus

$$a = \sqrt{a_\mathrm{n}^2 + a_\mathrm{t}^2} = \sqrt{(1{,}65441\ \mathrm{m/s^2})^2 + (-0{,}70215\,\mathrm{m/s^2})^2} \approx 1{,}8\ \mathrm{m/s^2}.$$

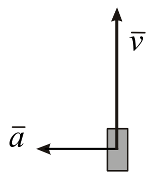
Kiihtyvyyden suuntakulma α saadaan trigonometrian avulla:

$$\tan\alpha = \left|\frac{a_\mathrm{t}}{a_\mathrm{n}}\right| = \left|\frac{-0{,}70215\,\mathrm{m/s^2}}{1{,}65441\,\mathrm{m/s^2}}\right|, \text{ josta saadaan } \alpha = 22{,}99691°.$$

Nopeus- ja kiihtyvyysvektorin välinen kulma $\beta = 90° + 22{,}99692° \approx 113°$.



2-33. a) Koska auton nopeus on pohjoiseen ja kiihtyvyys suoraan länteen, auton nopeus ja kiihtyvyys ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tällöin autolla on ainoastaan normaalikiihtyvyyttä.

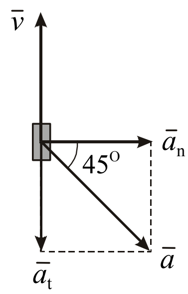


Normaalikiihtyvyyden yhtälöstä $a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{r}$ tien kaarevuussäteeksi saadaan

$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(\dfrac{60}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{0{,}95\,\mathrm{m/s^2}} \approx 290\,\mathrm{m}.$$

Auto ajaa kyseisellä hetkellä vakiovauhdilla vaakasuoralla tiellä, joka kaartuu (r = 290 m) länteen.

b) Koska auton kiihtyvyys on kaakkoon, autolla on sekä tangentti- että normaalikiihtyvyyttä. Koska auton nopeus ja tangenttikiihtyvyys ovat vastakkaissuuntaiset kuvan osoittamalla tavalla, auton nopeus pienenee. Auton normaalikiihtyvyyden suunta on itään, joten vaakasuora tie kaartaa itään.

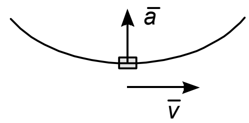


Kuvion mukaan on $\cos 45° = \dfrac{a_\mathrm{n}}{a} = \dfrac{a_\mathrm{n}}{2{,}1\,\mathrm{m/s^2}}$, josta auton normaalikiihtyvyys on

$$a_\mathrm{n} = 2{,}1\,\mathrm{m/s^2} \cdot \cos 45° \approx 1{,}485\,\mathrm{m/s^2}.$$

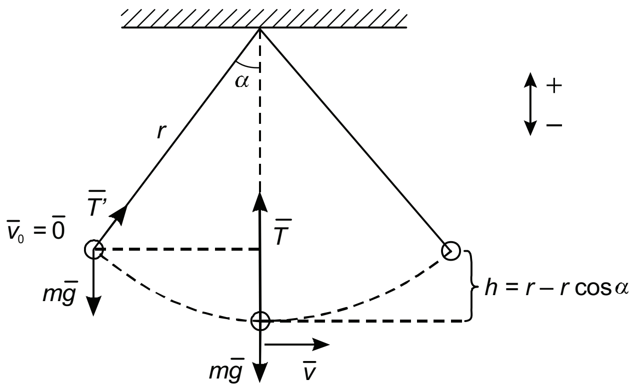
Tien kaarevuussäde on $r = \dfrac{v^2}{a_\mathrm{n}} = \dfrac{\left(\dfrac{60}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{1{,}485\,\mathrm{m/s^2}} \approx 190\,\mathrm{m}$.

c) Auton kiihtyvyys on ylöspäin. Koska auton nopeus ja kiihtyvyys ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan kuvan osoittamalla tavalla, auto on notkon alimmassa kohdassa.



Auton ratavauhti on vakio. Tällöin autolla on vain normaalikiihtyvyyttä. Tien kaarevuussäde pystytasossa on $r = \dfrac{v^2}{a_\mathrm{n}} = \dfrac{\left(\dfrac{60}{3{,}6}\ \mathrm{m/s}\right)^2}{1{,}7\ \mathrm{m/s^2}} \approx 160\ \mathrm{m}.$

2-34. a) Kuulan liikeyhtälö on $\Sigma\bar{F} = m\bar{a}_\mathrm{n}$ eli $\bar{T} + \bar{G} = m\bar{a}_\mathrm{n}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $T - mg = \dfrac{mv^2}{r}$ eli $T = mg + \dfrac{mv^2}{r}$, jossa T on langan jännitysvoima. Koska liikevastusvoimat ovat vähäiset, mekaaninen energia säilyy. Mekaanisen energian säilymislain mukaan kuulan potentiaalienergia muuntuu liike-energiaksi: $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2$.



Korkeudelle h saadaan kuvion mukaan yhtälö $h = r - r\cos\alpha = r(1-\cos\alpha)$. Kun $h = r(1-\cos\alpha)$ sijoitetaan mekaanisen energian säilymislakiin $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2$, yhtälöstä $mgr(1-\cos\alpha) = \dfrac{1}{2}mv^2$ saadaan nopeuden neliöksi $v^2 = 2gr(1-\cos\alpha)$.

Kun $v^2 = 2gr(1-\cos\alpha)$ sijoitetaan langan jännitysvoiman T yhtälöön, saadaan

$$\begin{aligned} T &= mg + m\frac{v^2}{r} = mg + m\frac{2gr(1-\cos\alpha)}{r} = mg(1+2-2\cos\alpha) \\ &= mg(3-2\cos\alpha) = 0{,}32\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}\cdot(3-2\cdot\cos 55°) \approx 5{,}8\ \mathrm{N}. \end{aligned}$$

b) Tasapainoasemassa tangenttikiihtyvyys on nolla, koska nopeuden kanssa samansuuntaisia voimia ei ole, joten kiihtyvyys on normaalikiihtyvyyttä:

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{2gr(1-\cos\alpha)}{r} = 2g(1-\cos\alpha) = 2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(1-\cos 55°) \approx 8{,}4\ \mathrm{m/s^2}.$$

Ääriasennossa normaalikiihtyvyys on nolla, joten kiihtyvyys on tangenttikiihtyvyyttä. Yhtälöstä $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{t}$ eli skalaarimuodossa $mg\sin\alpha = ma_\mathrm{t}$ tangenttikiihtyvyydeksi saadaan

$$a_\mathrm{t} = g\sin\alpha = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot\sin 55° \approx 8{,}0\,\mathrm{m/s^2}$$: suunta on radan tangentin suunta.

Testaa, osaatko sivu 51

1. a b c **2.** a b c **3.** a b c **4.** b c **5.** a b c **6.** a **7.** a b c **8.** b **9.** a c **10.** c

3 Jäykän kappaleen mekaniikka

3-1. a) Koska voimien summa on nolla, kappale on paikallaan tai tasaisessa liikkeessä. Koska momenttien summa on nolla, kappale ei pyöri tai sen pyöriminen ei muutu. Tällainen kappale on esimerkiksi seinällä oleva taulu.

b) Kappaleeseen kohdistuu nollasta poikkeava kokonaisvoima, joten kappale on kiihtyvässä etenemisliikkeessä. Koska momenttien summa on nolla, kappale ei pyöri tai sen pyörimisnopeus ei muutu. Tällainen kappale on esimerkiksi kaltevaa tasoa pitkin kiihtyvässä liikkeessä liukuva kappale.

c) Koska voimien summa on nolla, kappale on paikallaan tai tasaisessa liikkeessä. Momenttien summa on nollasta poikkeava, joten voimilla on vääntövaikutus. Kappaleen pyöriminen muuttuu. Tällainen kappale on esimerkiksi karuselli pyörimisliikkeen alkaessa.

d) Kappaleeseen kohdistuu nollasta poikkeava kokonaisvoima, joten kappale on kiihtyvässä etenemisliikkeessä. Momenttien summa on nollasta poikkeava, joten voimilla on vääntövaikutus. Kappaleen pyöriminen muuttuu. Tällainen kappale on esimerkiksi auton pyörä, kun auto lähtee kiihtyen liikkeelle.

3-2. a) Kun momentin kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, voiman $\overline{F}_1$ momentti akselin A suhteen on

$$M_A = -F_1 r_1 = -4{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}110\ \text{m} = -0{,}44\ \text{Nm}.$$

b) Kun kulma $\alpha = 90°$, voimien momenttien summa on

$$\sum M_A = -F_1 r_1 - F_2 r_2 = -4{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}110\ \text{m} - 6{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}220\ \text{m} \approx -1{,}8\ \text{Nm}.$$

Jos kulma $\alpha = 50°$, voiman $\overline{F}_2$ vartta vastaan kohtisuora komponentti on

$$F_{2y} = F_2 \sin 50° = 6{,}0\ \text{N} \cdot \sin 50° \approx 4{,}59627\ \text{N}.$$

Momenttien summa akselin A suhteen on

$$\sum M_A = -F_1 r_1 - F_{2y} r_2 = -0{,}44\ \text{Nm} - 4{,}59627\ \text{N} \cdot 0{,}220\ \text{m} \approx -1{,}5\ \text{Nm}.$$

(Samaan lopputulokseen päädytään myös siten, että lasketaan voimalle sitä vastaan kohtisuora vääntövarsi

$$r_{2,\ \text{kohtisuora}} = r_2 \sin 50° = 0{,}220\ \text{m} \cdot \sin 50° \approx 0{,}168530\ \text{m}.$$

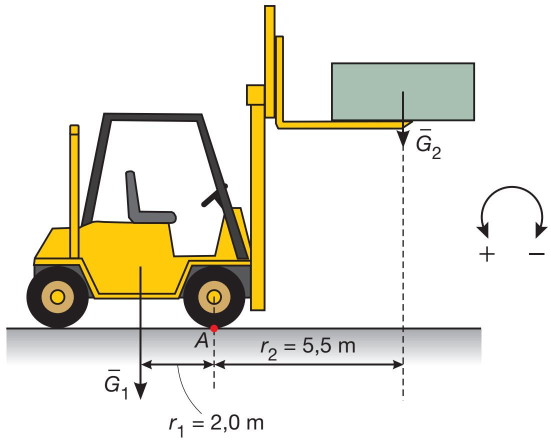
Momenttien summa on silloin

$$\sum M_A = -F_1 r_1 - F_2 r_{2,\ \text{kohtisuora}} = -0{,}44\ \text{Nm} - 6{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}168530\ \text{m} \approx -1{,}5\ \text{Nm}.)$$

3-3. Tarvittava voima on pienin, kun voima on kohtisuorassa voiman vartta vastaan. Voiman momentti on $M = Fr$, joten pienimmän voiman suuruus on

$$F = \frac{M}{r} = \frac{130\ \text{Nm}}{0,24\ \text{m}} \approx 540\ \text{N}.$$

3-4.



Momenttien summa tasapainotilanteessa on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien tasapainoehdoksi akselin A suhteen saadaan

$$\sum M_A = G_1 r_1 - G_2 r_2 = 0.$$

Yhtälöstä saadaan kuormaksi

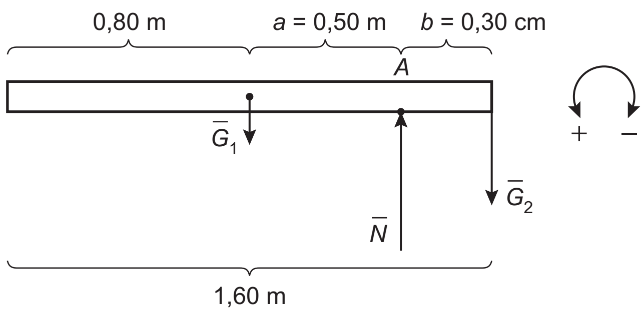
$$G_2 = \frac{G_1 r_1}{r_2} = \frac{36\,\text{kN} \cdot 2,0\,\text{m}}{5,5\,\text{m}} \approx 13,0909\,\text{kN}.$$

Koska kuormaan kohdistuvan painon suuruus on $G_2 = m_2 g$, kuorman massa on

$$m_2 = \frac{G_2}{g} = \frac{13,0909\ \text{kN}}{9,81\ \text{m/s}^2} \approx 1300\ \text{kg}.$$

Kuormaa voitaisiin suurentaa asettamalla kuorma lähemmäksi trukkia, käyttämällä massaltaan suurempaa trukkia tai pidentämällä trukin akseliväliä.

3-5.



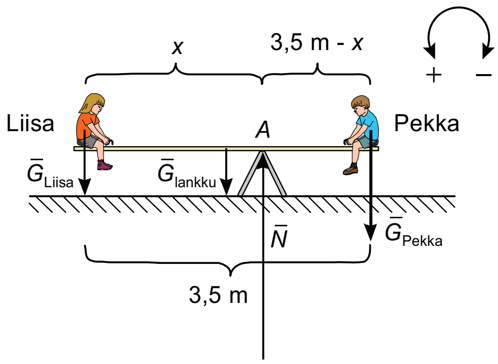
Sauvaan vaikuttavat voimat ovat sauvaan kohdistuva paino $\bar{G}_1$, pisteeseen A kohdistuva tukivoima $\bar{N}$ ja esineeseen kohdistuva paino $\bar{G}_2$. Asetetaan kiertoakseli pisteeseen A, jolloin tukivoima $\bar{N}$ ei aiheuta vääntöä, koska sen varsi on nolla. Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla. Kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, joten akselin A suhteen saadaan momenttiyhtälö

$$\sum M_A = G_1 a - G_2 b = m_1 g \cdot a - m_2 g \cdot b = 0.$$

Momenttiyhtälöstä saadaan massaksi

$$m_2 = \frac{m_1 a}{b} = \frac{3{,}0\ \text{kg} \cdot 0{,}50\ \text{m}}{0{,}30\ \text{m}} = 5{,}0\ \text{kg}.$$

3-6.



Tarkastellaan keinulaudan akselin A suhteen laskettuja momentteja. Tukivoiman $\bar{N}$ vaikutussuora kulkee akselin A kautta, joten sillä ei ole momenttia akselin A suhteen. Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla. Kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, joten akselin A suhteen saadaan momenttiyhtälö

$$\sum M_A = M_{\text{Liisa}} - M_{\text{lankku}} - M_{\text{Pekka}} = 0.$$

Merkitään x:llä Liisan etäisyyttä akselista. Pekan etäisyys akselista on 3,5 m – x. Lankun keskipisteen etäisyys akselista on x − 1,75 m. Momenttiehto saa muodon

$$G_{\text{Liisa}} x + G_{\text{lankku}} \cdot (x - 1{,}75\ \text{m}) - G_{\text{Pekka}} \cdot (3{,}5\ \text{m} - x) = 0\,.$$

Ratkaistaan momenttiehdosta etäisyys x:

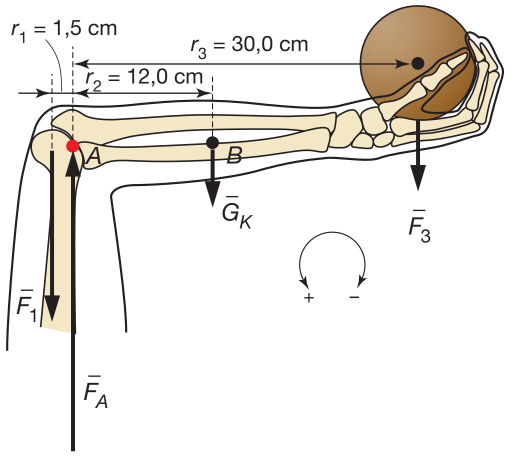
$$m_{\text{Liisa}} g \cdot x + m_{\text{lankku}} g \cdot (x - 1{,}75\ \text{m}) - m_{\text{Pekka}} g \cdot (3{,}5\,\text{m} - x) \ = 0$$
$$xg(m_{\text{Liisa}} + m_{\text{lankku}} + m_{\text{Pekka}}) = g(m_{\text{Pekka}} \cdot 3{,}5\,\text{m} + m_{\text{lankku}} \cdot 1{,}75\ \text{m}).$$

Etäisyys x on

$$x = \frac{m_{\text{Pekka}} \cdot 3{,}5\ \text{m} + m_{\text{lankku}} \cdot 1{,}75\ \text{m}}{m_{\text{Liisa}} + m_{\text{lankku}} + m_{\text{Pekka}}}$$
$$= \frac{47\ \text{kg} \cdot 3{,}5\ \text{m} + 24\ \text{kg} \cdot 1{,}75\ \text{m}}{35\ \text{kg} + 24\ \text{kg} + 47\ \text{kg}} \approx 1{,}9\ \text{m}.$$

Lankku on tuettava Liisan puoleisesta päästä lukien 1,9 m:n päästä.

3-7.



(Piirroksessa voimien pituudet eivät ole oikeissa suhteissa toisiinsa.) Lasketaan momenttien summa akselin A suhteen, jolloin voimalla $\overline{F}_A$ ei ole vääntövaikutusta. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, käsivarren tasapainoehto on $\sum M_A = F_1 \cdot r_1 - G_K r_2 - F_3 r_3 = 0$. Lihaksen luun päähän kohdistama voima on $\overline{F}_1$, joka on suuruudeltaan $F_1 = \dfrac{G_K r_2 + F_3 r_3}{r_1}$, kun $\overline{G}_K$ on käsivarteen kohdistuva paino, ja $\overline{F}_3$ on kuulan kämmeneen kohdistama voima. Voima $\overline{F}_3$ on kuulaan kohdistuvan painon suuruinen eli $F_3 = G_{kuula} = m_{kuula}g$, joten voiman $\overline{F}_1$ suuruus on

$$F_1 = \frac{G_K r_2 + G_{kuula} r_3}{r_1} = \frac{m_k g r_2 + m_{kuula} g r_3}{r_1}$$

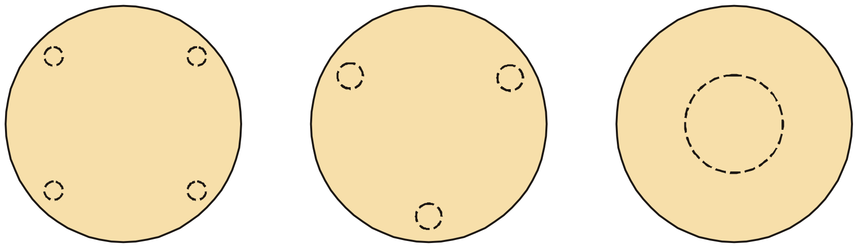
$$= \frac{2{,}2\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 12{,}0\ \text{cm} + 2{,}9\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 30{,}0\ \text{cm}}{1{,}5\ \text{cm}} \approx 740\ \text{N}.$$

3-8. a) Nelijalkaisen tuolin tukipinta on jalkojen väliin jäävän alueen pinta-ala jalkojen alla oleva alue mukaan lukien.

b) Nelijalkainen tuoli pysyy paremmin tasapainossa kuin kolmijalkainen. Jos alusta on epätasainen, nelijalkainen tuoli keikkuu helposti tuolissa istuttaessa, mutta kolmijalkainen ei keiku. Kolmijalkainen tuoli asettuu tasapainoon epätasaisillakin lattiapinnoilla, koska sen kaikki jalat koskettavat aina maata riippumatta epätasaisuuksista.

c) Jos systeemin painopisteeseen asetettu painovoimavektori ei kulje tukipinnan kautta, syöttötuoli kaatuu. Näin voi tapahtua, jos lapsi kurkottelee ja yrittää tulla pois tuolista tai jos lapsi tönäisee käsillä tai jaloilla pöytää. Tuolin yläosan tönäisyssä voi syntyä myös kiertoliike, jos lattia ei luista. Koska syöttötuolit ovat usein kapeita ja korkeita, kaatumisen vaara on olemassa. Nykyään monet tuolien valmistajat asentavat tuolien jalkojen alle liukupinnat. Niiden tarkoitus on, että tuoli tönäistäessä liukuu, eikä kaadu.

d) Jos pyöreäkantisella pöydällä on yksi jalka, sen on oltava tukeva ja alaosastaan levenevä, jotta tukipinta muodostuisi mahdollisimman suureksi. Nelijalkaisella pöydällä on usein suurempi tukipinta kuin esimerkiksi kolmijalkaisella pöydällä; kolmijalkaisia pöytiä on hyvin vähän käytössä.



e) Keskellä olevan yhden kartiomaisen jalan tukipinta on usein pienempi verrattuna pöytään, jossa on neljä jalkaa. Pöytä voi kaatua, jos esimerkiksi nojaa pöydän reunaan koko painollaan. Pöytä kaatuu, jos yhdistelmän painopisteestä piirretty luotisuora ei leikkaa tukipintaa.

f) Rautainen joulukuusen jalka on painava, ja sen horjuttamiseen tarvitaan suurempi voima kuin kevyen muovisen joulukuusen jalan horjuttamiseen. Kun kuusi imee itseensä jalassa olevan veden, muovinen jalka on yksinään kevyt, jolloin pienikin sivusuuntainen kuusen tönäisy voi kaataa kuusen. Rautainen kuusenjalka on jäykkä kappale. Muovinen jalka voi taipua sivusuuntaisten voimien vaikutuksesta. Tämäkin edesauttaa kuusen kaatumista. Rautainen kuusenjalka on myös yleensä kaikin tavoin kestävämpi kuin muovinen.

3-9. a) Linnun painopiste on kohdassa 3. Kun levy on ripustettu eri kohdista ja levyyn piirretään luotiviivat suoraan alas, luotiviivat leikkaavat kohdassa 3. Lintu pysyy tasapainossa, jos se tuetaan kohdasta 3.

b) Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla. Yhtälöstä $\sum M = G_{\text{varsi}} r_{\text{varsi}} - G_{\text{harja}} r_{\text{harja}} = 0$ saadaan $G_{\text{harja}} r_{\text{harja}} = G_{\text{varsi}} r_{\text{varsi}}$. Harjaosan ja varsiosan momentit sormen kosketuskohdan suhteen ovat yhtä suuret. Harjaosan painopiste on lähempänä tukipistettä, joten harjaosan voiman varsi on pienempi kuin varsiosan. Siksi harjaosa on painavampi.

3-10. a) Painonnostokilpailussa painoja on helpompi nostaa, jos painot ovat yhtä suuret ja tangon eri päissä. Painopiste on tangon geometrisessä keskipisteessä. Painonnostaja pyrkii asettamaan kätensä yhtä kauas tangon painopisteestä (geometrisestä keskipisteestä).

b) Painonnostossa käytetään leveää otetta, jolloin tanko on mahdollisimman helppo pitää tasapainossa. Raskaat levyt tangon päissä aiheuttavat suuren momentin tankoon. Jos kädet olisivat lähekkäin, pienikin ero käsien ja tangon keskipisteen välisissä etäisyyksissä aiheuttaisi suuren eron vasempaan ja oikeaan käteen kohdistuvissa voimissa. Samoin pienikin tangon kiertoliike tangon keskipisteen ympäri noston aikana olisi vaikea pysäyttää, nostaja menettäisi helposti tasapainonsa sivusuunnassa.

3-11. a) Suunnikkaan painopiste on sen geometrisessä keskipisteessä, eli lävistäjien leikkauspisteessä.

b) Ripusta kappale useista kohdista riippumaan ja käytä luotilankaa. Piirrä levyyn suorat ylhäältä alas luotilankaa pitkin. Suorien leikkauskohdassa on levyn painopiste.

c) Suomen keskipiste sijaitsee Leskelän kylässä, Pulkkilan kunnassa, valtatien 4 varrella, noin 120 km Oulusta etelään. Liimaa maantiekartta tasapaksulle pahville. Leikkaa pahvista Suomen muotoinen kappale rajoja pitkin. Riiputtamalla kappaletta eri kohdista voit piirtää luotilangan avulla suoria, joiden leikkauspisteessä on Suomen painopiste.

3-12. a) Mehun määrä ei vaikuta lasin tasapainoon, jos alusta on vaakasuora. Astia on sitä vakaampi vinolla pinnalla, mitä alempana sen painopiste on. Täyden astian painopiste on pystysuunnassa suunnilleen astian puolessa välissä. Kun nesteen pinta alenee, siirtyy painopiste myös alemmaksi ja samalla astian kaatuminen tulee vaikeammaksi. Painopiste on alimmillaan silloin, kun nesteen pinta on samalla tasolla painopisteen kanssa. Mitä kevytrakenteisempi astia, sitä lähempänä pohjaa tämä tapahtuu. Kun nesteen määrä vähenee tästä, painopiste alkaa jälleen nousta ylemmäksi ja palaa lähes astian puolen välin kohdalle, kun astia on tullut tyhjäksi.

Toisaalta täyden astian hitaus on suurempi, joten sen vuoksi se ei kaadu niin helposti. Esimerkiksi ulkosalla sivulta puhaltava tuuli voi kaataa helposti tyhjän, kevyen lasin, mutta mehua täynnä oleva lasi pysyy yleensä pystyssä tuulessakin.

b) Joidenkin kukkien, esimerkiksi tulppaanien, varsi kasvaa nopeasti maljakossa. Samalla maljakon pohjalla oleva vesi vähenee sen noustessa varteen. Kukat voivat taipua kasvaessaan kauas reunan yli, ja kukka-asetelman painopiste muuttuu. Maljakon, veden ja kukkien yhteinen painopiste voi siirtyä maljakon kapean pohjan tukipinnan ulkopuolelle, varsinkin jos kukat taipuvat samaan suuntaan. Näin maljakko voi kaatua itsestään.

3-13. a) Veneen reunan ulkopuolella roikkuva purjehtija saa aikaan vääntömomentin, joka on vastakkaissuuntainen tuulen aiheuttamalle kallistumiselle. Purjehtijan tarkoitus on saada purje sellaiseen asentoon, että veneen nopeus olisi mahdollisimman suuri. Purjeveneen nopeus riippuu monista tekijöistä, esimerkiksi tuulesta ja sen suunnasta, purjeista ja niiden asennosta tuulen suhteen sekä kölistä. Joissakin tilanteissa purjehtija voi roikkumisellaan estää veneen kaatumisen.

b) 1) Useimpien vaakasuorilla tai loivilla vinoilla pinnoilla olevien esineiden tasapaino on vakaa. Esimerkiksi ruokapöydälle katettujen astioiden ja lattialla olevien huonekalujen tasapaino on vakaa. Monenlaisten ripustettujen esineiden tasapaino on vakaa. Esimerkiksi vaatepuihin tai naulakkoon ripustettujen vaatteiden tasapaino on vakaa. Katoissa riippuvien lamppujen, seinillä koukuissa riippuvien esineiden kuten pyyhkeiden, avainnippujen, taulujen ja työvälineiden tasapaino on vakaa.

2) Kappale on horjuvassa tasapainoasemassa yleensä vain lyhyen ajan, koska hyvin pieni voima riittää siirtämään kappaleen pois tasapainotilastaan. Esimerkiksi, kun taitoluistelija seisoo yhden luistimen kärjen varassa tai sirkustaiteilija on ohuen pystyssä olevan sauvan varassa, kummankin tasapaino on horjuva. Esimerkiksi kuulakärkikynän tai terävän lyijykynän asettaminen pystyyn kärjelleen tasaiselle kovalle alustalle tuskin onnistuu. Jos onnistuisi, kynien tasapaino olisi horjuva.

3) Esimerkiksi pyöreät paristot lähtevät helposti vierimään tasaisella alustalla, jos niitä hiukankin tönäistään tai pintaa vähän kallistetaan. Tällaisen pariston tasapaino on epämääräinen. Muita vastaavia kappaleita ovat esimerkiksi lieriöt, kuulat pallot ja autojen pyörät. Tällaisten kappaleiden painopiste tulee olla pyörimisakselilla tai keskipisteessä. Autojen pyörät tasapainotetaan aina renkaiden vaihdon yhteydessä tai tarvittaessa. Indifferentti tasapaino pyörissä estää pyörien tärinän ajettaessa.

3-14. Lekan painopisteen x-koordinaatti on

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{7{,}0\text{ kg} \cdot 4{,}0\text{ cm} + 0{,}50\text{ kg} \cdot 44\text{ cm}}{7{,}0\text{ kg} + 0{,}50\text{ kg}} \approx 6{,}7\text{ cm}.$$

Painopiste sijaitsee symmetria-akselilla 6,7 cm:n etäisyydellä vasemmasta päästä.

3-15. Kuulien painopisteen koordinaatit ovat

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3{,}0\,\text{kg} \cdot 0{,}0\,\text{m} + 8{,}0\,\text{kg} \cdot 1{,}0\,\text{m} + 4{,}0\,\text{kg} \cdot 2{,}0\,\text{m}}{15{,}0\,\text{kg}} \approx 1{,}1\,\text{m},$$

$$y_0 = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3{,}0\,\text{kg} \cdot 0{,}0\,\text{m} + 8{,}0\,\text{kg} \cdot 2{,}0\,\text{m} + 4{,}0\,\text{kg} \cdot 1{,}0\,\text{m}}{15{,}0\,\text{kg}} \approx 1{,}3\,\text{m}.$$

Painopiste on kohdassa (1,1 m; 1,3 m).

3-16. Sijoitetaan origo kappaleen vasempaan alakulmaan. Kappaleen painopisteen x-koordinaatti on

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_1V_1x_1 + \rho_2V_2x_2}{\rho_1V_1 + \rho_2V_2}$$

$$= \frac{7{,}87\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 13\text{ cm} \cdot 11\text{ cm} \cdot 2{,}8\text{ cm} \cdot 5{,}5\text{ cm} + 2{,}70\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 13\text{ cm} \cdot 11\text{ cm} \cdot 2{,}8\text{ cm} \cdot 16{,}5\text{ cm}}{7{,}87\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 13\text{ cm} \cdot 11\text{ cm} \cdot 2{,}8\text{ cm} + 2{,}70\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 13\text{ cm} \cdot 11\text{ cm} \cdot 2{,}8\text{ cm}}$$

$$\approx 8{,}3\,\text{cm}.$$

Symmetrian perusteella kappaleen painopisteen y-koordinaatti y_0 = 6,5 cm ja z-koordinaatti z_0 = 1,4 cm.

Painopisteen paikka on (8,3 cm; 6,5 cm; 1,4 cm).

3-17. a) Piirretään kolmioon keskijanat eli mediaanit (ts. yhdistetään kolmion sivun keskipiste aina vastakkaiseen kärkeen). Keskijanojen leikkauspiste on levyn painopiste. Painopisteen paikka on kuvan mittakaavassa vasemmasta alakulmasta mitattuna 0,13 m oikealle ja 0,10 m ylös.

b) Asetetaan koordinaatiston origo kuvassa vasemmalla alhaalla olevan kuulan kohdalle. Painopisteen paikan x-koordinaatti on

$$x_0 = \frac{m \cdot 0{,}00\text{ m} + m \cdot 0{,}00\text{ m} + m \cdot 0{,}40\text{ m}}{3m} \approx 0{,}13\text{ m}$$

ja y-koordinaatti

$$y_0 = \frac{m \cdot 0{,}00\text{ m} + m \cdot 0{,}00\text{ m} + m \cdot 0{,}30\text{ m}}{3m} = 0{,}10\text{ m}.$$

Painopiste on kohdassa (0,13 m, 0,10 m).

3-18. Merkitään pinta-alayksikköä vastaavaa massaa m_0:lla. Sijoitetaan origo kappaleen vasempaan alakulmaan. Alkuperäisen suorakulmion massa on $m_1 = 12m_0$ ja painopisteen koordinaatit $x_1 = 1{,}5\,\text{cm}$ ja $y_1 = 2{,}0\,\text{cm}$. Kuvan mukaisen kappaleen painopisteen x-koordinaatti on

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{12m_0 \cdot 1{,}5\text{ cm} + (-\pi \cdot 1{,}0^2 m_0 \cdot 1{,}0\text{ cm})}{12m_0 + (-\pi \cdot 1{,}0^2 m_0)} \\
&\approx 1{,}7\text{ cm}.
\end{aligned}
$$

Symmetrian perusteella $y_0 = 2{,}0$ cm.

Levyn painopiste on kohdassa (1,7 cm; 2,0 cm).

3-19. a) Käytetään atomimassoja, vaikka kyse on ioneista. Elektronin massa on niin pieni, että sitä ei tarvitse ottaa huomioon. Bromin suhteellinen atomimassa on $m_1 = 79{,}90\,\text{u}$ ja kaliumin $m_2 = 39{,}10\,\text{u}$.

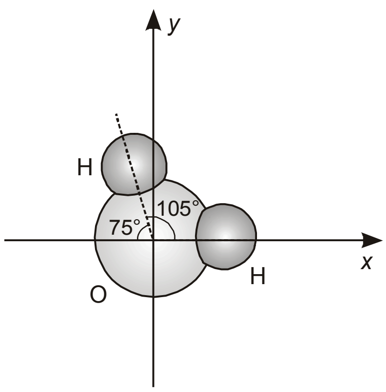
Sijoitetaan bromi-ioni origoon, jolloin $x_1 = 0{,}00$ Å ja $x_2 = 2{,}82$ Å.

Painopisteen paikka on

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{79{,}90\text{ u} \cdot 0{,}00\text{ Å} + 39{,}10\text{ u} \cdot 2{,}82\text{ Å}}{79{,}90\text{ u} + 39{,}10\text{ u}} \\
&= \frac{39{,}10\text{ u} \cdot 2{,}82\text{ Å}}{79{,}90\text{ u} + 39{,}10\text{ u}} \\
&\approx 0{,}93\text{ Å}.
\end{aligned}
$$

Painopisteen paikka on 0,93 Å bromi-ionista kohti kaliumionia.

b)



Sijoitetaan koordinaatisto siten, että happiatomin keskipiste sijaitsee origossa. Tällöin atomien koordinaatit ovat

	massa/u	x/Å	y/Å
Happi	16,00	0,000	0,000
Vety (1)	1,01	−0,958 · cos 75°	0,958 · sin 75°
Vety (2)	1,01	0,958 Å	0,000

Vesimolekyylin painopisteen paikan x-koordinaatti on

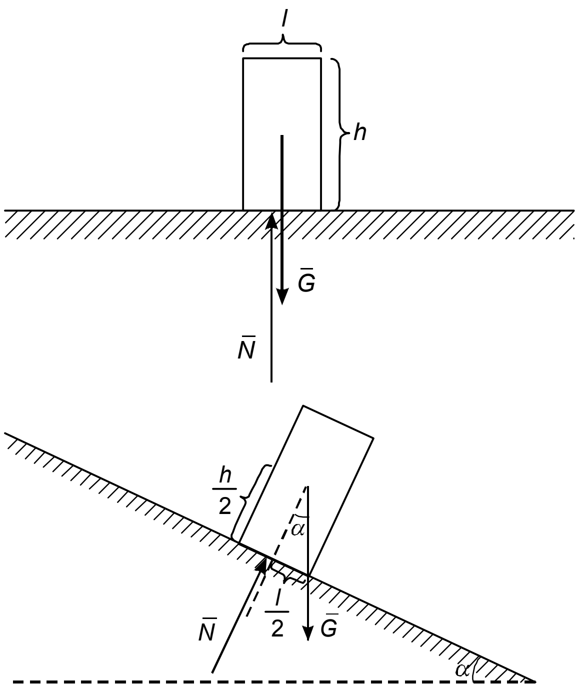
$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{16{,}00\ \text{u} \cdot 0{,}000\ \text{Å} - 1{,}01\ \text{u} \cdot 0{,}958\ \text{Å} \cdot \cos 75° + 1{,}01\ \text{u} \cdot 0{,}958\ \text{Å}}{18{,}02\ \text{u}} \\ &\approx 0{,}040\ \text{Å}.\end{aligned}$$

Painopisteen paikan y-koordinaatti on

$$\begin{aligned}y_0 &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{16{,}00\ \text{u} \cdot 0{,}000\ \text{Å} + 1{,}01\ \text{u} \cdot 0{,}958\ \text{Å} \cdot \sin 75° + 1{,}01\ \text{u} \cdot 0{,}000\ \text{Å}}{18{,}02\ \text{u}} \\ &\approx 0{,}052\ \text{Å}.\end{aligned}$$

Vesimolekyylin painopiste on kohdassa (0,040 Å; 0,052 Å).

3-20. Kappale kaatuu, jos kappaleeseen kohdistuvan painon vaikutussuora kulkee tukipinnan ohi.

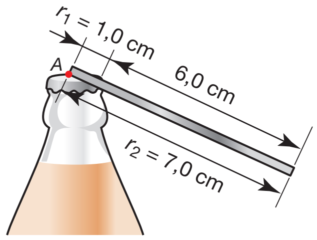


Rajatapausta vastaavassa tilanteessa on

$$\tan\alpha = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{l}{2} : \frac{h}{2} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{h} = \frac{l}{h} = \frac{31\ \text{mm}}{62\ \text{mm}} = 0,50, \text{ josta saadaan } \alpha \approx 27°.$$

Rajakulma, jolla kappale alkaa kaatua on 27°.

3-21.



Korkin avaajaa tarkastellaan yksivartisena vipuna. Tasapainoehto on $F_1r_1 = F_2r_2$, kun $\overline{F}_1$ korkin avaajaan kohdistama voima ja r_1 on $\overline{F}_1$:n vaikutussuoran etäisyys korkin päällä olevasta tukipisteestä. $\overline{F}_2$ on vääntävän voiman suuruus ja r_2 on $\overline{F}_2$:n vaikutussuoran etäisyys tukipisteestä. Tasapainoehto $F_1r_1 = F_2r_2$ verrantona antaa voimien suhteeksi

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}, \text{ joten } F_1 = \frac{r_2}{r_1}F_2 = \frac{7,0\ \text{cm}}{1,0\ \text{cm}}F_2 = 7,0F_2.$$

Korkin reunan avaajaan kohdistama voima $\overline{F}_1$ on yhtä suuri ja vastakkaissuuntainen kuin avaajan korkkiin kohdistama voima $-\overline{F}_1$. Korkin reunaan kohdistuva voima on 7,0-kertainen vääntävään voimaan verrattuna.

Huomaa, että yksivartisen vivun tasapainoehto $F_1r_1 = F_2r_2$ saadaan myös merkitsemällä momenttien summa akselin A suhteen nollaksi eli $\sum M = F_1r_1 - F_2r_2 = 0$, kun suunta vastapäivään on sovittu positiiviseksi.

3-22. a) Kiveä siirrettäessä seivästä käytetään kaksivartisena vipuna. Vivun tasapainoehto on $F_1r_1 = F_2r_2$. Kiveen kohdistuvan voiman suuruus on

$$F_2 = \frac{F_1r_1}{r_2} = \frac{280\ \text{N} \cdot 1,9\ \text{m}}{0,16\ \text{m}} \approx 3300\ \text{N}.$$

b) Kärryä tarkastellaan yksivartisena vipuna. Vivun tasapainoehto on $F_1r_1 = F_2r_2 = Gr_2$, jossa käsistä kärryn aisoihin kohdistuvan kosketusvoiman suuruus on F_1. Sen suuruus tasapainoehdon perusteella on $F_1 = \frac{Gr_2}{r_1} = \frac{430\ \text{N} \cdot 0,47\ \text{m}}{1,2\ \text{m}} \approx 168,417\ \text{N}$. Yhteen kärryn aisaan kohdistuvan voiman suuruus on puolet tästä eli $\frac{F_1}{2} = \frac{168,417\ \text{N}}{2} \approx 84\ \text{N}$, voiman suunta on ylös. Kumpaankin käteen kohdistuva voima on yhtä suuri eli 84 N, mutta vastakkaissuuntainen (alas).

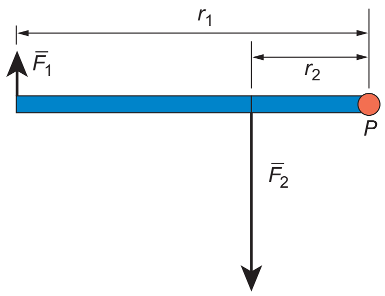
3-23. a) Koska kappaleen liike on tasaista, kappaleen liikeyhtälö on $\sum \bar{F} = \bar{0}$ eli $\bar{F} + \bar{F}_\mu = \bar{0}.$ Valitaan kappaleen A liikkeen suunta positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $F - F_\mu = 0$ voiman $\bar{F}$ suuruudeksi saadaan

$$F = F_\mu = \mu N = \mu mg = 0,20 \cdot 84 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 160 \text{ N.}$$

b) Kappaleen kiihtyvyys on $a = 0,80 \text{ m/s}^2$. Kappaleen liikeyhtälö on $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ eli $\bar{F} + \bar{F}_\mu = m\bar{a}$. Valitaan kappaleen A liikkeen suunta positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $F - F_\mu = ma$ voiman $\bar{F}$ suuruudeksi saadaan

$$F = ma + F_\mu = 84 \text{ kg} \cdot 0,80 \text{ m/s}^2 + 0,20 \cdot 84 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 230 \text{ N.}$$

3-24. a)

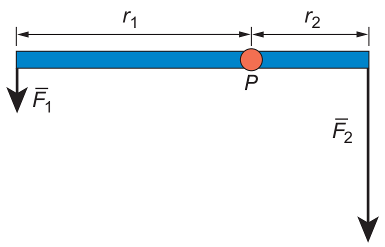


Vivun tasapainoehto on $F_1 r_1 = F_2 r_2$, jossa $F_2 = 4F_1$ ja $r_1 = 170$ cm, joten

$$r_2 = \frac{F_1 r_1}{F_2} = \frac{F_1 \cdot 170 \text{ cm}}{4 \cdot F_1} = \frac{170 \text{ cm}}{4} \approx 43 \text{ cm}.$$

Tukipisteen paikka on 43 cm:n päässä rautakangen kärjestä.

b)



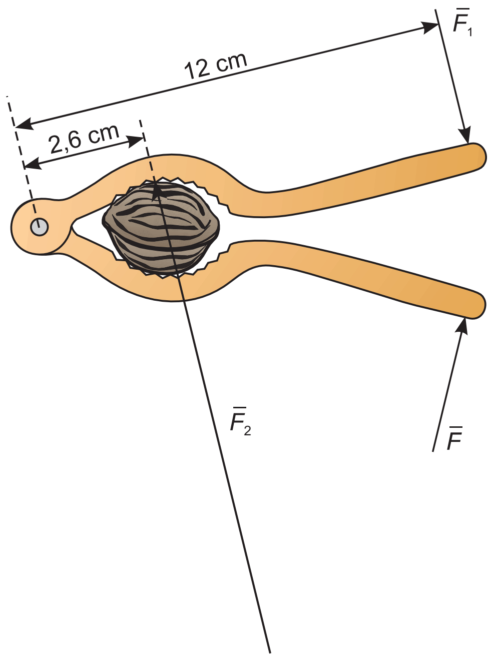
Vivun tasapainoehto on $F_1 r_1 = F_2 r_2$, jossa $F_2 = 4F_1$ ja $r_1 = 170 \text{ cm} - r_2$, joten tasapainoehto saadaan muotoon $F_1 \cdot (170 \text{ cm} - r_2) = 4F_1 r_2$, jolloin F_1 supistuu pois.

Ratkaistaan yhtälöstä r_2:

$$\begin{aligned} 170 \text{ cm} - r_2 &= 4r_2 \\ 5r_2 &= 170 \text{ cm} \\ r_2 &= \frac{170 \text{ cm}}{5} = 34 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Kuorma on asetettava 34 cm:n päähän rautakangen kärjestä.

3-25.



Newtonin III lain mukaan varsi kohdistaa pähkinään yhtä suuren, mutta vastakkaissuuntaisen voiman kuin pähkinä varteen. Särkymisen rajatapauksessa on voimassa tasapainoehto $F_1r_1 = F_2r_2$. Särkijän kumpaakin vartta on painettava voimalla, jonka suuruus on

$$F_1 = \frac{F_2r_2}{r_1} = \frac{43\ \mathrm{N} \cdot 0{,}026\ \mathrm{m}}{0{,}12\ \mathrm{m}} \approx 9{,}3\ \mathrm{N}.$$

3-26. a) Kiinteä väkipyörä (kuvassa ylempi) muuttaa ainoastaan voiman suuntaa. Liikkuva väkipyörä (kuvassa alempi) muuttaa myös tarvittavan voiman suuruutta. Koska kuormaa kannattelee kaksi köyttä, tarvittavan voiman suuruus on

$$F = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{25\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{2} = 122{,}625\ \mathrm{N} \approx 120\,\mathrm{N}.$$

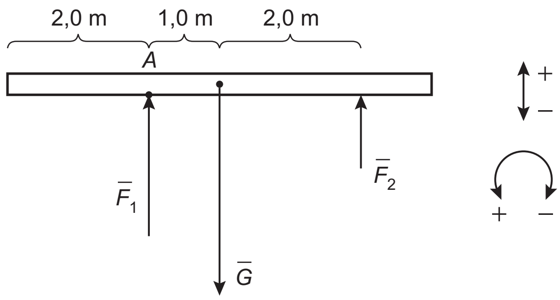
b) Kun köyttä vedetään alas 0,60 m, niin kuorma nousee ylös 0,30 m.

c) Nostamisessa tehty työ on $W = Fs = 122{,}625\ \mathrm{N} \cdot 0{,}60\ \mathrm{m} \approx 74\ \mathrm{J}$.

d) Jos kuorma nostettaisiin suoraan ylös, tehty työ olisi

$$W = mgh = 25\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}30\ \mathrm{m} \approx 74\ \mathrm{J}.$$

3-27. Tasapaksuun hirteen kohdistuva paino vaikuttaa hirren painopisteeseen eli keskipisteeseen. Hirren tasapainoehto pystysuunnassa on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $F_1 + F_2 - G = 0$.



Vasemmanpuoleisen tukivoiman $\overline{F}_1$ vaikutuskohta on A. Valitaan kohta A momenttiakseliksi. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, akselin A suhteen momenttiyhtälö on $\sum M_A = -G \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 = 0$

Tukivoiman $\overline{F}_2$ suuruus on

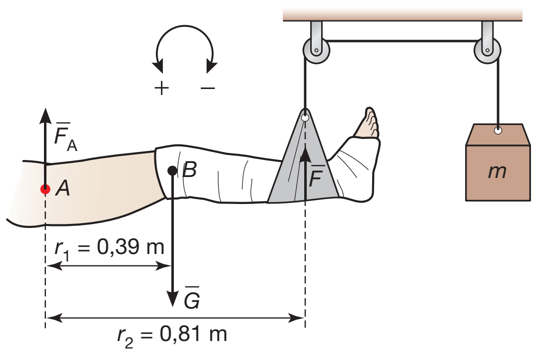
$$F_2 = \frac{mgr_1}{r_2} = \frac{140\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 1{,}0\text{ m}}{3{,}0\text{ m}} = 457{,}8\text{ N}.$$

Tukivoiman $\overline{F}_1$ suuruus saadaan yhtälöstä $F_1 + F_2 - G = 0$, joten

$$F_1 = G - F_2 = mg - F_2 = 140\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 457{,}8\,\text{N} \approx 915{,}4\,\text{N}.$$

Voimat ovat 460 N ja 920 N.

3-28.



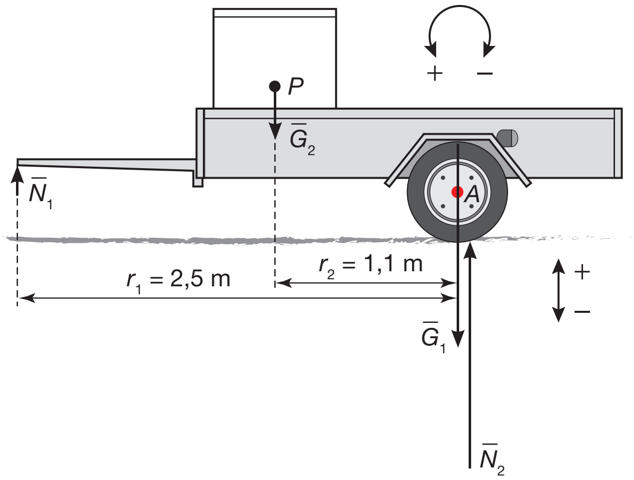
Jalka on tasapainossa, kun siihen kohdistuvien voimien momenttien summa on nolla. Momenttiehto akselin A suhteen on $\sum M_A = 0$. Akseliin A kohdistuvalla voimalla $\overline{F}_A$ ei ole momenttia. Kun suunta vastapäivään on positiivinen, momenttiehto on $\sum M_A = -G_1 r_1 + F r_2 = 0$. $\overline{F}$ on liinan jalkaan kohdistama tukivoima, ja sen suuruus on

$$F = \frac{G_1 r_1}{r_2} = \frac{m_1 g r_1}{r_2} = \frac{15\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 0{,}39\text{ m}}{0{,}81\text{ m}} = 70{,}85\text{ N}.$$

Liinan jalkaan kohdistama voima $\overline{F}$ on yhtä suuri kuin köyden jännitysvoima, joka edelleen on yhtä suuri kuin punnukseen kohdistuva painon suuruus $G = mg$. Punnuksen massa on

$$m = \frac{G}{g} = \frac{F}{g} = \frac{70{,}85\text{ N}}{9{,}81\text{ m/s}^2} \approx 7{,}2\text{ kg}.$$

3-29.



Valitaan pyörän akseli A momenttiakseliksi. Kärryyn kohdistuvan painon $\overline{G}_1$ ja pyöriin kohdistuvan tukivoiman $\overline{N}_2$ vaikutussuoran etäisyys akselista A on 0,0 m, joten näillä voimilla ei ole vääntövaikutusta akselin A suhteen. Tasapainotilanteessa voimien momenttien summa on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, akselin A suhteen momenttiehto on $\sum M_A = 0$ eli $G_2r_2 - N_1r_1 = 0$, josta tukivoiman $\overline{N}_1$ suuruus on

$$N_1 = \frac{G_2r_2}{r_1} = \frac{m_2gr_2}{r_1} = \frac{65\text{ kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 1{,}1\text{ m}}{2{,}5\text{ m}} = 280{,}566\text{ N} \approx 280\text{ N} \text{ ja suunta on ylös.}$$

b) Peräkärry on tasapainossa, joten tasapainoehto pystysuunnassa on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{G}_1 + \overline{G}_2 = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

$$N_1 + N_2 - G_1 - G_2 = 0,$$

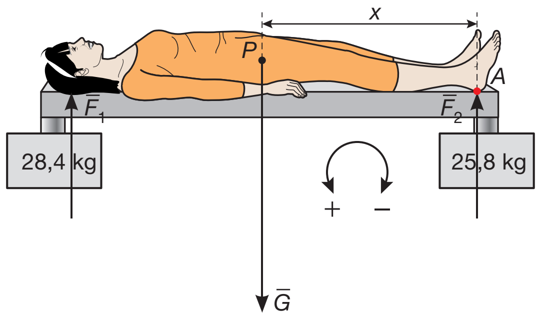
josta ratkaistaan pyöriin kohdistuvan tukivoiman suuruus:

$$N_2 = G_1 + G_2 - N_1 = m_1g + m_2g - N_1$$

$$= 570\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 + 65\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 - 280{,}566\text{ N} \approx 5900\text{ N} \text{ ja suunta on ylös.}$$

c) Kun peräkärry kuormataan, peräkärryn aisa ei saa nousta itsestään ylös, jos aisaa ei tueta. Jos pesukone sijoitetaan kuvatussa tilanteessa pyörien taakse, aisa nousee itsestään ylös. Jos tällainen aisa kiinnitetään auton vetokoukkuun, aisasta koukkuun kohdistuvan voiman suunta on ylös. Vetokoukkuun ylös suuntautuva voima voi jossakin tilanteessa aiheuttaa perän kevenemisen niin, että takapyörät menettävät sivusuuntaisen pitonsa. Huomaa, että koukkuun kiinnitetty väärin kuormatun kärryn aisa ei irtoa koukusta, vaan nostaa koukkua ja samalla auton perää.

3-30.



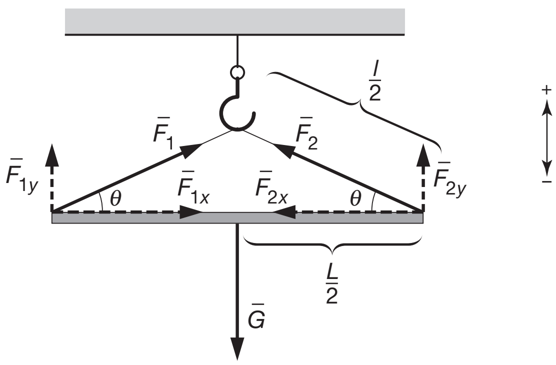
Henkilön ja levyn systeemi on tasapainossa, kun systeemiin kohdistuvien voimien momenttien summa on nolla. Lasketaan momentti levyn kantapäiden kohdalle asetetun akselin A suhteen. Tällöin voiman $\overline{F}_2$ levyyn kohdistama momentti on nolla. Momenttiehto akselin A suhteen on $\sum M_A = 0$. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttiehto on $\sum M_A = -F_1 l + Gx = 0$. Vaa´at mittaavat niillä oleviin kappaleisiin kohdistuvan painon suuruuden, ja vaa´an näytöllä on luettavissa kappaleen massa. Näin ollen voima $\overline{F}_1$ on suuruudeltaan $F_1 = m_1 g$.

Momenttiehdon mukaan painopisteen P etäisyys jalkapohjista on

$$x = \frac{F_1 l}{G} = \frac{m_1 g \cdot l}{mg} = \frac{m_1 \cdot l}{m}$$
$$= \frac{28{,}4\ \text{kg} \cdot 1{,}68\ \text{m}}{54{,}2\ \text{kg}} \approx 0{,}88\ \text{m}.$$

3-31. Kun palkki on ripustettu kuvan mukaisesti, palkin painopiste on ripustuspisteen alapuolella. Palkki on siis tasapainossa pyörimisen suhteen. Kun nosto suoritetaan mahdollisimman tasaisesti, kiihtyvyys on likimain nolla. Tällöin tasapainoehto pystysuunnassa on Newtonin II lain perusteella $\Sigma\overline{F} = m\overline{a} = \overline{0}$. Symmetrian nojalla on $\overline{F}_{1y} = \overline{F}_{2y}$, samoin skalaareina $F_1 = F_2$ $(= F)$, kun suunta ylös on positiivinen. Saadaan skalaariyhtälö $F_{1y} + F_{2y} - mg = 2F\sin\theta - mg = 0$. Ratkaistaan kulma θ:

$$\sin\theta = \frac{mg}{2F} = \frac{1340\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2 \cdot 16\ 000\ \text{N}},\ \text{ josta kulma } \theta \approx 24{,}2547^\circ.$$



Kuvion mukaan on

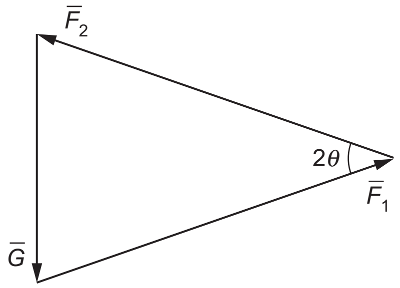
$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}L}{\frac{1}{2}l},$$

josta vaijerin pituudeksi saadaan

$$l = \frac{L}{\cos\theta} = \frac{5{,}4\ \text{m}}{\cos 24{,}2547°} = 5{,}92282\ \text{m} \approx 6{,}0\,\text{m}.$$

Vaijerin pituuden täytyy olla vähintään 6,0 m.

Tapa 2:



Tasapainotilanteessa palkin liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{G} = \overline{0}$. Koska $F_1 = F_2 = 16\ 000$ N, voimavektoreista muodostuu tasakylkinen kolmio. Ratkaistaan kulma θ kosinilauseesta $G^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos 2\theta$:

$$\cos 2\theta = \frac{G^2 - F_1^2 - F_2^2}{2F_1F_2} = \frac{F_1^2 + F_2^2 - (mg)^2}{2F_1F_2}$$
$$= \frac{(16\ 000\ \text{N})^2 + (16\ 000\ \text{N})^2 - (1340\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2)^2}{2\cdot 16\ 000\ \text{N}\cdot 16\ 000\ \text{N}} \approx 0{,}662497,$$

josta $2\theta = 48{,}5094°$ ja $\theta = 24{,}2547°$.

Vaijerin lyhyin mahdollinen pituus ratkaistaan yhtälöstä

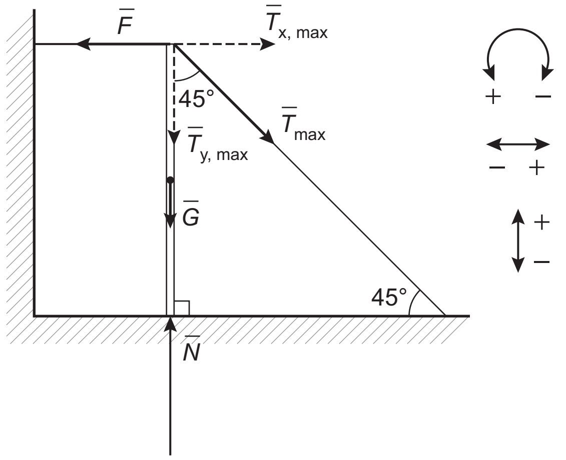
$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}L}{\frac{1}{2}l},$$

josta vaijerin pituudeksi saadaan

$$l = \frac{L}{\cos\theta} = \frac{5{,}4\ \text{m}}{\cos 24{,}2547°} \approx 5{,}92282\ \text{m}.$$

Vaijerin pituuden täytyy olla vähintään 6,0 m.

3-32.



Vaakasuoran vaijerin jännitysvoiman suurin arvo on 210 N, joten tasapainossa olevaan pylvääseen kohdistuvan voiman $\overline{T}$ oikealle osoittavan komponentin $\overline{T}_x$ suurin arvo on myös 210 N. Koska vinon vaijerin kaltevuuskulma on 45°, myös $\overline{T}$:n alas osoittavan pystysuoran komponentin $\overline{T}_y$ suurin arvo on 210 N eli on $T_{y,\max} = T_{x,\max} = 210$ N.

Oletetaan, että tanko vaikuttaa alustaan maksimivoimalla suuruudeltaan 550 N. Pystysuorassa suunnassa tankoon kohdistuvien voimien summa on $\sum \overline{F}_y = \overline{0}$. Suunta ylös on positiivinen, joten skalaariyhtälö on $N - G - T_y = 0$, jolloin

$$T_y = N - G = 550\text{ N} - 11\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \approx 442{,}1\text{ N}.$$

Koska vinon vaijerin kaltevuuskulma on 45°, $T_y = T_x = 442{,}1$ N.

Vaakasuorassa suunnassa tankoon kohdistuvien voimien summa on $\sum \overline{F}_x = \overline{0}$. Suunta oikealle on positiivinen, joten skalaariyhtälö on $T_x - F = 0$, eli $T_x = F \approx 442{,}1$ N. Eli vaijeri ei kestä, jos tanko kuormittaa alustaa maksimivoimalla.

Lasketaan vinon vaijerin jännitysvoiman $\overline{T}_{\max}$ suuruus, kun vaakasuoran vaijerin jännitysvoima $\overline{F}$ on suurin mahdollinen 210 N.

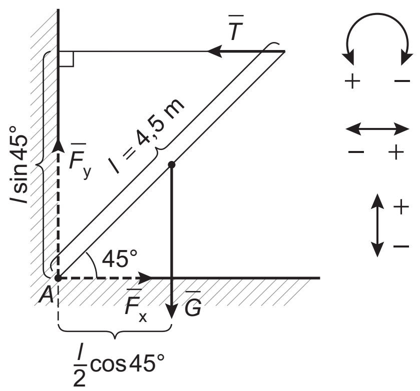
Vaakasuorassa suunnassa tankoon kohdistuvien voimien summa on $\sum \overline{F}_x = \overline{0}$. Suunta oikealle on positiivinen, joten skalaariyhtälö on $T_{x,\max} - F = 0$, eli $T_{x,\max} = F$. Vinon vaijerin jännitysvoima on $T_{\max} = T_{x,\max}/\cos 45° = 210\text{ N}/\cos 45° = 296{,}98\text{ N} \approx 300$ N.

Maan pinta kohdistaa tankoon tukivoiman $\overline{N}$. Pystysuorassa suunnassa tankoon kohdistuvien voimien summa on $\sum \overline{F}_y = \overline{0}$. Suunta ylös on positiivinen, joten skalaariyhtälö on $N - G - T_{y,\max} = 0$. Tukivoiman suuruus on

$$N = G + \mathrm{T}_{y,\max} = mg + T_y = 11\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 + 210\text{ N} \approx 320\text{ N}.$$

Newtonin III lain mukaan tanko kohdistaa alustaan yhtä suuren ja vastakkaissuuntaisen voiman kuin alusta tankoon. Koska 320 N < 550 N, vinon vaijerin suurin mahdollinen jännitysvoima on 300 N.

3-33. a)



Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, tangon alapään akselin A suhteen momenttiyhtälö on $\sum M_A = Tr_1 - G \cdot r_2 = 0$, joka geometrian perusteella on

$$\sum M_A = Tl \sin 45° - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos 45° = 0,$$ kun l on lipputangon pituus.

$\overline{T}$ on vaijerin jännitysvoima. Sen suuruus on

$$T = \frac{m_1 g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos 45°}{l \sin 45°} = \frac{m_1 g \cdot \cos 45°}{2 \cdot \sin 45°} = \frac{78\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 45°}{2 \cdot \sin 45°} = 382{,}59\,\text{N} \approx 380\,\text{N}.$$

b) Tangon tasapainoehto on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli vaakasuunnassa $\overline{F}_x + \overline{T} = \overline{0}$. Kun suunta oikealle on positiivinen, skalaariyhtälöstä $F_x - T = 0$ voiman $\overline{F}$ x-komponentin suuruudeksi saadaan

$$F_x = T = 382{,}59\ \text{kN}.$$

Tangon tasapainoehto on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli pystysuunnassa $\overline{F}_y + \overline{G}_1 = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $F_y - G_1 = 0$. Voiman $\overline{F}$ y-komponentin suuruudeksi saadaan

$$F_y = m_1 g = 78\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \approx 765{,}18\,\text{N}.$$

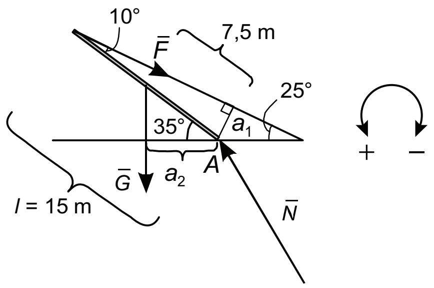
Voiman $\overline{F}$ suuruus on

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(382{,}59\,\text{N})^2 + (765{,}18\,\text{N})^2} = 855{,}50\,\text{N} \approx 860\ \text{N}.$$

Voiman suunta saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{765{,}18\ \text{N}}{382{,}59\ \text{N}},$$ josta kulma on $\alpha \approx 63°$.

3-34.



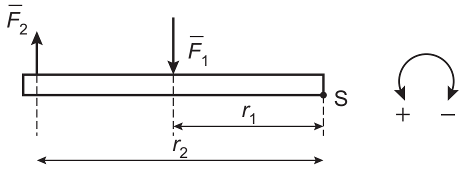
Lipputanko on tasapainossa pyörimisen suhteen, joten momenttien summa akselin A suhteen on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttiyhtälö on

$$\sum M_A = -Fa_1 + Ga_2 = 0\,.$$

Geometrian perusteella momenttiyhtälö saadaan muotoon $-Fl\sin 10° + G\cdot\frac{l}{2}\cdot\cos 35° = 0$, joten voiman $\bar{F}$ suuruudeksi saadaan

$$F = \frac{mg\cdot\frac{l}{2}\cdot\cos 35°}{l\sin 10°} = \frac{mg\cdot\cos 35°}{2\cdot\sin 10°} = \frac{35\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2\cdot\cos 35°}{2\cdot\sin 10°} \approx 810\text{ N}.$$

3-35.



a) Lämpötilan muutos aiheuttaa paine-eron Δp. Paine-ero aiheuttaa kaapin oveen voiman, jonka suuruus on $F_1 = \Delta p\cdot A$, jossa A on oven pinta-ala. Kaapin sisältämän ilman tilavuus V ei juuri ehdi muuttua. Ideaalikaasun tilanyhtälön $\frac{p_1V}{T_1} = \frac{p_2V}{T_2}$ perusteella paine kaapin sisällä on $p_2 = \frac{p_1T_2}{T_1}$, joten paine-ero on

$$\Delta p = p_1 - p_2 = p_1 - \frac{p_1T_2}{T_1} = p_1\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right) = 101{,}3\,\text{kN/m}^2\left(1-\frac{263\,\text{K}}{271\,\text{K}}\right) \approx 2{,}990\,\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}.$$

Kaapin oveen kohdistuvan voiman suuruus on

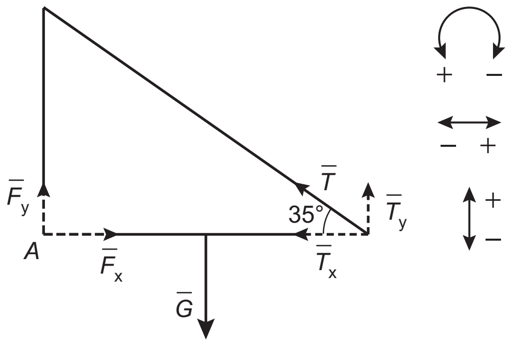
$$F_1 = \Delta p\cdot A = 2{,}990\text{ kN/m}^2\cdot 0{,}5\,\text{m}\cdot 1{,}0\text{ m} \approx 1495\,\text{N}.$$

Voiman F_1 vaikutuspisteeksi voidaan valita oven keskipiste. Oven aukaisemiseen tarvittavan voiman suuruus F_2 saadaan momenttiehdosta eli avautumisen rajatapauksessa momenttien summa on nolla. Kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, jolloin saranaan S asetetun kiertoakselin suhteen momenttiyhtälö on $\sum M_S = 0$ eli $F_1r_1 - F_2r_2 = 0$. Avaamiseen tarvittavan voiman suuruus on

$$F_2 = \frac{F_1\cdot r_1}{r_2} = \frac{1495\text{ N}\cdot 0{,}25\text{ m}}{0{,}45\text{ m}} \approx 800\text{ N}.$$

b) Paine-ero tasaantuu, koska pakastin ei ole täysin ilmatiivis. Ilmaa virtaa keittiöstä pakastimeen, ja paine-erosta aiheutuva voima häviää.

3-36.



a) Tanko on tasapainossa pyörimisen suhteen, joten momenttien summa on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, saadaan momenttiehto akselin A suhteen:

$\sum M_A = T_y \cdot l - G \cdot \frac{l}{2} = 0$, kun tangon pituus on l.

Yhtälöstä supistuu l pois, jolloin momenttiehdosta langan jännitysvoiman y-komponentin suuruudeksi saadaan

$$T_y = \frac{1}{2}G = \frac{1}{2} \cdot 2,2 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 10,791 \text{ N}.$$

Kuvion mukaan on $\sin 35° = \frac{T_y}{T}$, josta langan jännitysvoiman suuruudeksi saadaan

$$T = \frac{T_y}{\sin 35°} = \frac{10,791 \text{ N}}{\sin 35°} \approx 19 \text{ N}.$$

b) Tangon tasapainoehto pystysuunnassa on Newtonin II lain perusteella

$$\sum \overline{F}_y = \overline{0} \text{ eli } \overline{F}_y + \overline{T}_y + \overline{G} = \overline{0}.$$

Suunta ylös on positiivinen, joten saadaan skalaariyhtälö

$$F_y + T_y - G = 0.$$

Seinän tankoon kohdistaman voiman pystysuoran komponentin suuruus on

$$F_y = G - T_y = G - \frac{1}{2}G = \frac{1}{2}G = \frac{1}{2} \cdot 2,2 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 10,791 \text{ N}.$$

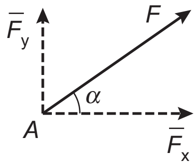
Tangon tasapainoehto vaakasuunnassa on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F}_x = \overline{0}$ eli $\overline{F}_x + \overline{T}_x = \overline{0}$. Suunta oikealle on positiivinen, joten saadaan skalaariyhtälö $F_x - T_x = 0$.

Jännitysvoiman vaakasuoran komponentin suuruus on

$$T_x = \frac{T_y}{\tan 35°} = \frac{10,791 \text{ N}}{\tan 35°} \approx 15,4111 \text{ N}.$$

Seinän tankoon kohdistaman voiman vaakasuoran komponentin suuruus on

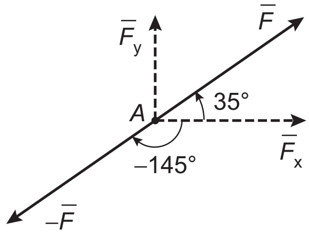
$$F_x = T_x = 15,4111\ \text{N}.$$



Seinän tankoon kohdistaman voiman suuruus on

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(15,4111\ \text{N})^2 + (10,791\ \text{N})^2} \approx 19\ \text{N}.$$

Voiman suunta saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{10,791\ \text{N}}{15,4111\ \text{N}}$, josta kulma $\alpha \approx 35°$.



Tangon seinään kohdistama voima on Newtonin kolmannen lain mukaan $-\overline{F}$, ja sen suuruus on 19 N. Suuntakulma on −145° positiivisen x-akselin suhteen.

c) Jotta tanko juuri ja juuri pysyy paikallaan seinää vasten, on oltava voimassa ehto $F_y = \mu F$, josta tangon ja seinän väliseksi lepokitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{F_y}{F_x} = \frac{10,791\ \text{N}}{15,4111\ \text{N}} \approx 0,70.$$

3-37. Tasapainoehto etenemisen suhteen vaakatasossa on

$$\sum \overline{F}_x = \overline{0} \text{ eli } \overline{N}_2 + \overline{F}_\mu = \overline{0}.$$

Kun suunta oikealle on positiivinen, saadaan yhtälö

$$N_2 - F_\mu = 0 \text{ eli } F_\mu = N_2.$$

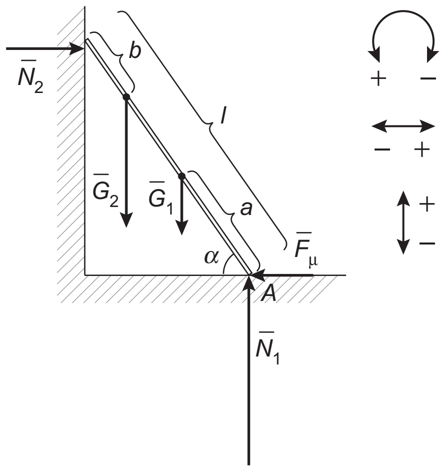
Tasapainoehto etenemisen suhteen pystysuunnassa on

$$\sum \overline{F}_y = \overline{0} \text{ eli } \overline{N}_1 + m_1\overline{g} + m_2\overline{g} = \overline{0}.$$

Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan yhtälö

$$N_1 - m_1 g - m_2 g = 0 \text{ eli}$$

$$N_1 = m_1 g + m_2 g = g(m_1 + m_2) = 9,81\ \text{m/s}^2 \cdot (28\ \text{kg} + 65\ \text{kg}) \approx 912,33\ \text{N}.$$



Tikapuut ovat tasapainossa pyörimisen suhteen, joten momenttien summa on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, akselin A suhteen saadaan momenttiehto

$$\sum M_A = m_1 ga\cos\alpha + m_2 g(l-b)\cos\alpha - N_2 l\sin\alpha = 0.$$

Momenttiehdosta saadaan voiman $\overline{N}_2$ suuruudeksi

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{m_1 ga\cos\alpha + m_2 g(l-b)\cos\alpha}{l\sin\alpha} \\ &= \frac{28\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 2{,}00\ \text{m}\cdot\cos 55° + 65\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(4{,}80\ \text{m} - 1{,}20\ \text{m})\cdot\cos 55°}{4{,}80\ \text{m}\cdot\sin 55°} \\ &\approx 415{,}00\ \text{N}. \end{aligned}$$

Rajatapauksessa, jolloin tikkaat juuri ja juuri pysyvät paikallaan, on voimassa ehto $F_\mu = \mu_0 N_1$. Kitkakertoimeksi saadaan $\mu_0 = \frac{F_\mu}{N_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{415{,}00\ \text{N}}{912{,}33\ \text{N}} \approx 0{,}45.$

Kitkakertoimen on oltava vähintään 0,45.

Testaa, osaatko sivu 79

1. a b c **2.** b c **3.** c **4.** b **5.** a c **6.** a b **7.** b c **8.** a

4 Pyörimisliikkeen dynamiikka

4-1. Sivulla olevat kädet lisäävät ihmisen hitausmomenttia ja hidastavat kaatumisen alkamista. Silloin jää enemmän aikaa käsien ja vartalon liikkeillä korjata tasapaino ja estää kaatuminen.

4-2. Pienisäteisen ympyrälevyn saa suurisäteistä helpommin ympyräliikkeeseen. Pyörimisliikkeeseen saa helpommin kappaleen, jonka massa on lähellä pyörimisakselia. Pienisäteisen ympyrälevyn hitausmomentti on pienempi kuin samanmassaisen suurisäteisen ympyrälevyn hitausmomentti.

4-3. Pyörivällä ilmalla on suuri liike-energia. Pyörremyrskyllä on etenevän liikkeen liike-energiaa ja pyörimisliikkeen energiaa eli rotaatioenergiaa. Liikkuvan ilman massalla ja tuulen nopeudella on suuri merkitys pyörremyrskyn vaikutuksissa. Pyörremyrskyn energia on peräisin lämpimästä merestä.

4-4. a) Hitausmomentti on suurin z-akselin suhteen. Jos tiiliskiveä pyöritetään käyttäen z-akselia pyörimisakselina, tiiliskiven massasta hyvin suuri osa sijaitsee kaukana pyörimisakselista, jolloin hitausmomentti on suuri.

b) Hitausmomentti on pienin x-akselin suhteen. Jos tiiliskiveä pyöritetään x-akselin suhteen, suuri osa tiiliskiven massasta on lähellä pyörimisakselia, jolloin hitausmomentti on pieni.

4-5. Kiinnitä rengas siten, että se pääsee pyörimään keskipisteensä ympäri. Kierrä renkaan ulkokehälle narua ja ripusta siitä punnus. Punnukseen kohdistuva paino aiheuttaa renkaaseen vääntömomentin $M = Fr = Gr$. Päästä punnus putoamaan, jolloin rengas joutuu kiihtyvään pyörimisliikkeeseen. Määritä (esim. tietokonepohjaisella mittausjärjestelmällä) renkaan kulmakiihtyvyys α. Toista mittaus käyttäen erimassaisia punnuksia. Siirrä mittaustulokset (α, M)-koordinaatistoon. Mittausarvot asettuvat suoralle, ja tämän suoran fysikaalinen kulmakerroin on renkaan hitausmomentti $J = \dfrac{\Delta M}{\Delta \alpha}$.

4-6. a) Punnuksen liikeyhtälö on $\sum \bar{F} = m\bar{a}$. Kun suunta alas sovitaan positiiviseksi, skalaariyhtälöstä $G - F = ma$ saadaan langan jännitysvoimaksi $F = G - ma$. Termi ma on pieni G:hen verrattuna, jos käytetään pieniä punnuksia. Silloin langan jännitysvoima $F \approx G = mg$.

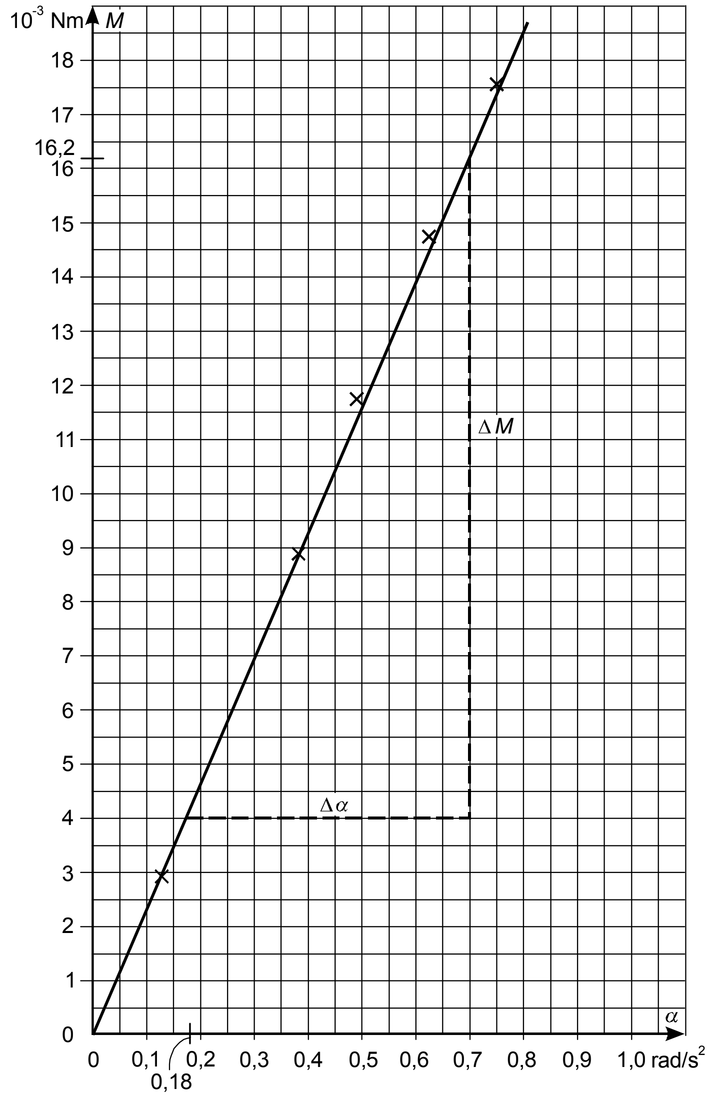
Punnukseen kohdistuva paino aiheuttaa kiekolle vakiona pysyvän vääntömomentin $M = Gr = mgr$.

Punnuksen massaa $m = 0{,}020$ kg vastaava vääntömomentti on

$$M = mgr = 0{,}020\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}015\,\text{m} \approx 0{,}002943\,\text{Nm}.$$

Kun lasketaan kaikkien muidenkin momenttien arvot, saadaan jokaista kulmakiihtyvyyttä vastaava momentin arvo.

α / (rad/s^2)	M/Nm
0,124	0,002943
0,381	0,008829
0,492	0,011772
0,624	0,014715
0,744	0,017658



Kun mittausarvot siirretään (α, M)-koordinaatistoon, kuvaaja on likimain suora. Suoran fysikaalinen kulmakerroin on kiekon hitausmomentti:

$$J = \frac{\Delta M}{\Delta \alpha} = \frac{16,2 \cdot 10^{-3}\,\text{Nm} - 4,0 \cdot 10^{-3}\,\text{Nm}}{0,70\,\text{rad/s}^2 - 0,18\,\text{rad/s}^2} \approx 0,023\,\text{kgm}^2.$$

b) Kun koe toistetaan lisäpainojen kanssa, kuvaaja (α, M)-koordinaatistossa on edelleen suora. Suora on jyrkempi, koska raskaamman kiekon hitausmomentti on suurempi.

4-7. a) Pyörimisen liikeyhtälöstä $\sum M = J\alpha$ saadaan kulmakiihtyvyydeksi

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{M}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{30\text{ Nm}}{\frac{1}{2}\cdot 18\text{ kg}\cdot(0{,}14\text{ m})^2} = 170{,}068\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \approx 170\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

b) Koska roottori lähtee levosta, kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - 0}{\Delta t} = \frac{\omega_2}{\Delta t}.$$

Silloin kierrostaajuus 24 000 r/min saavutetaan ajassa

$$\Delta t = \frac{\omega_2}{\alpha} = \frac{2\pi n}{\alpha} = \frac{2\pi\cdot\frac{24\ 000}{60\text{ s}}}{170{,}068\ \frac{1}{\text{s}^2}} \approx 15\text{ s}.$$

4-8. a) Täytekakkupohjan hitausmomentti on

$$J = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}53\text{ kg}\cdot(0{,}15\text{ m})^2 = 0{,}0172125\text{ kgm}^2 \approx 0{,}017\text{ kgm}^2.$$

b) Pyörivän kakun rotaatioenergia on

$$E = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J(2\pi n)^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}0172125\text{ kgm}^2\cdot(2\pi\cdot\frac{1}{12\text{ s}})^2 \approx 2{,}4\text{ mJ}.$$

4-9. Kuulasysteemin hitausmomentit eri tilanteissa ovat

a) $J_1 = mr^2 = 0{,}025\,\text{kg}\cdot(0{,}35\,\text{m})^2 \approx 0{,}0031\,\text{kgm}^2$

b) $J_2 = mr^2 + m(2r)^2 = mr^2 + 4mr^2 = 5mr^2 = 5\cdot 0{,}025\text{ kg}\cdot(0{,}35\text{ m})^2 \approx 0{,}015\text{ kgm}^2$

c) $J_3 = mr^2 + m(2r)^2 + m(3r)^2 = 5mr^2 + 9mr^2 = 14mr^2$

$= 14\cdot 0{,}025\text{ kg}\cdot(0{,}35\text{ m})^2 \approx 0{,}043\text{ kgm}^2.$

4-10. a) Kuvaaja on suora, joten sauvan kulmanopeus kasvaa tasaisesti. Sauvan vakiona pysyvä kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{10{,}0\text{ rad/s} - 2{,}0\text{ rad/s}}{6{,}0\text{ s} - 0{,}0\text{ s}} = \frac{8{,}0\text{ rad/s}}{6{,}0\text{ s}} \approx 1{,}3\text{ rad/s}^2.$$

b) Kuvaajasta nähdään, että hetkellä $t = 3{,}0$ s sauvan kulmanopeus on 6,0 rad/s.

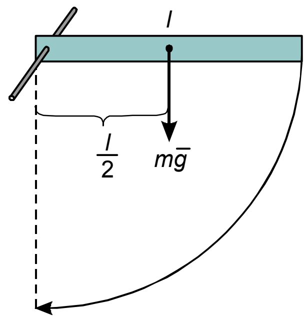
Pyörimisenergian yhtälöstä $E = \frac{1}{2}J\omega^2$ saadaan hitausmomentiksi

$$J = \frac{2E}{\omega^2} = \frac{2\cdot 2{,}1\text{ J}}{(6{,}0\text{ rad/s})^2} \approx 0{,}11667\text{ kgm}^2.$$

Hitausmomentti pysyy vakiona, kun sauvan pyörimisakseli ei muutu.

Hetkellä $t = 0$ s sauvan kulmanopeus on 2,0 rad/s, joten sauvan pyörimisen energia on silloin

$$E = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}11667\,\mathrm{kgm^2}\cdot(2{,}0\,\mathrm{rad/s})^2 \approx 0{,}23\,\mathrm{J}.$$



4-11. Sauvan pyörimisen liikeyhtälö on $\sum M = J\alpha.$ Kun ilmanvastusta ei oteta huomioon, sauvaan vaikuttaa yksi momentti, jonka voiman varsi on sauvan painopisteen ja pyörimisakselin välinen etäisyys. Sauvan kulmakiihtyvyys alkuhetkellä on

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{mg\cdot l/2}{\frac{ml^2}{3}} = mg\cdot\frac{l}{2} : \frac{ml^2}{3} = mg\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{3}{ml^2} = \frac{3g}{2l}$$

$$= \frac{3\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{2\cdot 1{,}2\,\mathrm{m}} \approx 12\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s^2}}.$$

4-12. Jatkeen lisäämisen jälkeen hitausmomentti on 2-kertainen: $J_2 = 2J_1$.
Silloin hitausmomenttien suhde on

$$\frac{J_2}{J_1} = 2 \text{ eli } \frac{m_2\frac{l_2^2}{12}}{m_1\frac{l_1^2}{12}} = 2.$$

Koska $m_2 = \rho V_2 = \rho A l_2$ ja $m_1 = \rho V_1 = \rho A l_1,$ saadaan yhtälö

$$\frac{\rho A l_2 \frac{l_2^2}{12}}{\rho A l_1 \frac{l_1^2}{12}} = 2, \text{ josta saadaan pituuksien suhteeksi } \frac{l_2^3}{l_1^3} = 2.$$

Sauvan uusi pituus on $l_2 = \sqrt[3]{2l_1^3} = \sqrt[3]{2\cdot(75{,}0\text{ cm})^3} \approx 94{,}494$ cm.

Pituuksien erotus on $l_2 - l_1 = 94{,}494\text{ cm} - 75\text{ cm} \approx 19{,}5$ cm.

4-13. Suoraviivaisesti putoavan sangon etenemisen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{G} + \overline{F} = m\overline{a}.$

Valitaan sangon liikkeen suunta alas positiiviseksi. Kun F on narun jännitysvoima ja sangon massa $m_2 = 4{,}0$ kg, saadaan skalaariyhtälöstä $m_2 g - F = m_2 a$ narun jännitysvoimaksi $F = m_2(g - a).$

Pyörimisen liikeyhtälö on $\sum M = J\alpha$. Valitaan ympyrälevyn pyörimissuunta positiiviseksi. Narun jännitysvoiman momentti aiheuttaa kiihtyvän pyörimisliikkeen, joten pyörimisen liikeyhtälö on $Fr = J\alpha$.

Koska akselin kehän tangenttikiihtyvyys on $\alpha = \dfrac{a}{r}$ ja sylinterin hitausmomentti

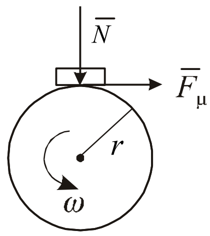
$J = \dfrac{1}{2}m_1 r^2$, pyörimisen liikeyhtälö saadaan muotoon $Fr = \dfrac{1}{2}m_1 r^2 \dfrac{a}{r}$. Kun tästä saatu

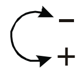
yhtälö $F = \dfrac{1}{2}m_1 a$ sijoitetaan yhtälöön $F = m_2(g-a)$, saadaan $m_1 a = 2m_2 g - 2m_2 a$.

Sangon kiihtyvyys on

$$a = \frac{2m_2 g}{m_1 + 2m_2} = \frac{2\cdot 4{,}0\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{12\,\mathrm{kg} + 2\cdot 4{,}0\,\mathrm{kg}} \approx 3{,}9\,\mathrm{m/s^2}.$$

4-14. Pyörimisen liikeyhtälön mukaan on $\sum M = J\alpha$ eli $M_\mu - M_\mathrm{j} = J\alpha$. M_μ on laakerikitkasta aiheutuva momentti, $M_\mathrm{j} = F_\mu \cdot r$ jarrukappaleesta aiheutuva momentti.





Koska kulmanopeus on $\omega = 2\pi n$, ja kierrostaajuus pienenee arvosta 2200 1/min kymmenenteen osaan eli arvoon 220 1/min, vauhtipyörän kulmakiihtyvyydeksi saadaan

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{2\pi n_2 - 2\pi n_1}{\Delta t} = \frac{2\pi\left(\frac{220}{60}\frac{1}{\mathrm{s}} - \frac{2200}{60}\frac{1}{\mathrm{s}}\right)}{50\,\mathrm{s}} \approx -4{,}14669\,1/\mathrm{s}^2.$$

Pyörimisen liikeyhtälön $M_\mu - M_\mathrm{j} = J\alpha$ mukaan laakerikitkasta aiheutuva jarruttava momentti on

$$M_\mu = J\alpha + M_\mathrm{j} = J\alpha + F_\mu \cdot r = \frac{1}{2}mr^2\cdot\alpha + \mu N\cdot r$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 88\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}25\,\mathrm{m})^2\cdot(-4{,}147\,1/\mathrm{s}^2) + 0{,}28\cdot 90\,\mathrm{N}\cdot 0{,}25\,\mathrm{m} \approx -5{,}1\,\mathrm{Nm}.$$

Momentti on 5,1 Nm ja suunta kuvassa myötäpäivään.

4-15. Rasian potentiaalienergia muuttuu rasian liike-energiaksi sekä väkipyörän ja pallon pyörimisenergiaksi. Liikevastukset oletetaan pieniksi. Mekaanisen energian säilymislain mukaan $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}J_\text{pyörä}\omega^2 + \dfrac{1}{2}J_\text{pallo}\omega^2$.

Yhtälö saadaan muotoon

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}MR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2.$$

Ratkaistaan tästä rasian nopeuden neliö:

$$v^2 = \frac{mgh}{\frac{1}{2}m + \frac{J}{2r^2} + \frac{M}{3}} = \frac{0{,}60\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 1{,}0\,\mathrm{m}}{\frac{1}{2}\cdot 0{,}60\,\mathrm{kg} + \frac{0{,}0030\,\mathrm{kgm^2}}{2\cdot(0{,}050\,\mathrm{m})^2} + \frac{4{,}5\,\mathrm{kg}}{3}}$$

ja edelleen rasian nopeus: $v \approx 1{,}6$ m/s.

4-16. a) Pyörään varastoitunut mekaaninen energia on pyörimisenergiaa, jonka suuruus saadaan yhtälöstä

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}1\,\text{kgm}^2\cdot(105\frac{1}{\text{s}})^2 \approx 12\,\text{kJ}.$$

b) Työperiaatteen mukaan kitkan tekemä työ kuluu pyörivän kappaleen pysäyttämiseen. Silloin kitkan tekemä työ on pyörimisenergian muutoksen suuruinen eli

$$W_\mu = \Delta E_{\text{rot}}\text{, jossa } W_\mu = F_\mu s = \mu N s \text{ ja } E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega_0^{\,2}.$$

Lopussa pyörimisenergia on nolla, joten yhtälö $W_\mu = E_{\text{rot}}$ saadaan muotoon

$$\mu N s = \frac{1}{2}J\omega_0^{\,2}.$$

Kitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}J\omega_0^{\,2}}{Ns} = \frac{\frac{1}{2}J\omega_0^{\,2}}{Nr\varphi} = \frac{\frac{1}{2}J\omega_0^{\,2}}{Nr\frac{\omega_0+\omega_{\text{lopussa}}}{2}t}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}J\omega_0^{\,2}}{Nr\frac{\omega_0+0}{2}t} = \frac{\frac{1}{2}J\omega_0^{\,2}}{Nr\frac{\omega_0}{2}t} = \frac{J\omega_0}{Nrt} = \frac{2{,}1\,\text{kgm}^2\cdot 105\,\frac{1}{\text{s}}}{110\,\text{N}\cdot 0{,}25\,\text{m}\cdot 29\,\text{s}} \approx 0{,}28.$$

4-17. Sauvan liike voida ajatella koostuvan kahdesta osasta: Sauvan massakeskipiste kiertää akselia etäisyydellä $l/2$, jossa l on sauvan pituus ja sauva pyörii oman painopisteensä kautta kulkevan samansuuntaisen akselin ympäri. Sauvan painopisteen liikkeessä sauvan koko massan voidaan ajatella sijaitsevan painopisteessä. Siihen liittyvä hitausmomentti on $J_1 = m\left(\frac{l}{2}\right)^2$. Koska sauvan hitausmomentti sauvan keskeltä kulkevan akselin suhteen on $J_0 = \frac{ml^2}{12}$, hitausmomentti päänsä kautta kulkevan akselin suhteen on

$$J = J_0 + J_1 = m\frac{l^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^2\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}ml^2.$$

4-18. Omenan kanta on kevyt, joten sen hitausmomenttia ei oteta huomioon. Omena on lähes umpinainen pallo ja sen painopiste on likimain keskipisteessä. Lasketaan omenan hitausmomentti kiinnityspisteen kautta asetetun vaakasuoran akselin suhteen. Steinerin säännön mukaan hitausmomentti on $J_{\text{kok}} = J_0 + m(r+l)^2$, jossa $J_0 = \frac{2}{5}mr^2$.

Omenan hitausmomentti on

$$J_{\text{kok}} = J_0 + m(r+l)^2 = \frac{2}{5}mr^2 + m(r+l)^2$$
$$= \frac{2}{5} \cdot 0{,}18\ \text{kg} \cdot (0{,}036\ \text{m})^2 + 0{,}18\ \text{kg} \cdot (0{,}036\ \text{m} + 0{,}025\ \text{m})^2 \approx 0{,}76 \cdot 10^{-3}\ \text{kgm}^2.$$

4-19. a) Uimahyppääjä vetää hypyn alkuvaiheessa kädet ja jalat lähelle kehoaan. Silloin massaa siirtyy lähemmäksi pyörimisakselia. Hyppääjän hitausmomentti pienenee ja kulmanopeus kasvaa. Tämä johtuu pyörimismäärän säilymisestä. Hitausmomentin ja kulmanopeuden tulo pysyy koko ajan vakiona. Koska hyppääjän kulmanopeus on suuri, hän ehtii tehdä useita voltteja ilmassa hypyn aikana.

b) Ilmalennon lopussa hyppääjä suurentaa hitausmomenttiaan ojentamalla kädet ja jalat suoriksi. Silloin massaa siirtyy kauemmaksi pyörimisakselista, joka kulkee painopisteen kautta ja on kohtisuorassa hyppääjän pituusakselia vastaan. Pyörimismäärän säilymislain mukaan hitausmomentin kasvaessa kulmanopeus pienenee. Hyppääjän pyöriminen hidastuu.

c) Taitoluistelija saa itsensä vinhaan pyörimisliikkeeseen pienentämällä hitausmomenttia vetäessään kädet vartalonsa lähelle eli lähelle pyörimisakselia.

4-20. a) Tähden luhistuessa sen pyörimismäärä säilyy. Kun tähden säde pienenee alle tuhannesosaan, sen hitausmomentti $J = \frac{2}{5}mr^2$ pienenee alle miljoonasosaan. Pyörimisnopeus voi siis kasvaa yli miljoonakertaiseksi.

b) Hyppääjän pyörimismäärä pysyy ilmalennon aikana vakiona. Häneen ei kohdistu ulkoapäin minkään voimien aiheuttamaa momenttia. Jotta suksia voisi kiertää tiettyyn suuntaan, on jotain muuta vartalon osaa, kuten käsiä ja ylävartaloa, kierrettävä vastakkaiseen suuntaan.

c) Kun luoti pyörii pituusakselinsa ympäri, luodin etenemisnopeuden suunta säilyy sitä paremmin, mitä suurempi pyörimisnopeus on. Pyörimätön luoti ei säilytä hyvin suuntaansa. Pyörivä luoti säilyttää pyörimismääränsä. Pyörimismäärän suunta on sama kuin luodin akselin suunta. Pyörimismäärä on vektorisuure, jonka suunta pyrkii säilymään.

4-21. Alus (ja sen sisällä oleva vauhtipyörä) on eristetty systeemi, jonka pyörimismäärä on nolla. Vauhtipyörää käännettäessä alus kääntyy vastakkaiseen suuntaan, koska pyörimismäärän arvo säilyy nollana. Kun vauhtipyörä pysäytetään, aluksen kääntyminen loppuu mutta sen asento on uusi.

4-22. Kun napajäätiköt sulavat, kiinteässä muodossa ollut vesi levittäytyy maailman meriin. Maan hitausmomentti J kasvaa, koska vesi siirtyy napa-alueilta kauemmaksi Maan pyörimisakselista. Koska pyörimismäärä $L = J\omega$ säilyy, Maan kulmanopeus pienenee ja päivät hieman pitenevät.

4-23. Systeemin pyörimismäärä säilyy eli yhtälö $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ saadaan muotoon

$J_1 2\pi n_1 = J_2 2\pi n_2$.

Hitausmomentti $J_1 = J_a + (m_1 + m_2)r_1^2$, missä r_1 on etäisyys karusellin ulkoreunasta keskipisteeseen.

Hitausmomentti $J_2 = J_a + (m_1 + m_2)r_2^2$, missä r_2 on etäisyys karusellin keskipisteestä.

Kierrostaajuus siirtymisen jälkeen on

$$n_2 = \frac{J_1}{J_2}n_1 = \frac{J_a + (m_1 + m_2)r_1^2}{J_a + (m_1 + m_2)r_2^2}\cdot n_1$$
$$= \frac{280\ \text{kgm}^2 + (53\ \text{kg} + 58\ \text{kg})\cdot(1{,}8\ \text{m})^2}{280\ \text{kgm}^2 + (53\ \text{kg} + 58\ \text{kg})\cdot(0{,}40\ \text{m})^2}\cdot 20\frac{1}{\text{min}} = 42{,}96\frac{\text{r}}{\text{min}} \approx 43\frac{\text{r}}{\text{min}}.$$

Pyörimisenergian muutos on

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}(J_a + (m_1 + m_2)r_2^2)\omega_2^2 - \frac{1}{2}(J_a + (m_1 + m_2)r_1^2)\omega_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(280\ \text{kgm}^2 + (53\ \text{kg} + 58\ \text{kg})\cdot(0{,}40\ \text{m})^2)\cdot(2\pi\frac{42{,}96}{60\ \text{s}})^2$$
$$-\frac{1}{2}\cdot(280\ \text{kgm}^2 + (53\ \text{kg} + 58\ \text{kg})\cdot(1{,}8\ \text{m})^2)\cdot(2\pi\frac{20}{60\ \text{s}})^2$$
$$\approx 1{,}6\ \text{kJ}.$$

Liike-energia suurenee sisäisten voimien eli poikien vetovoimien tekemän työn takia. Pojat tarvitsevat voimaa siirtymiseen.

4-24. a) Luistelijat alkavat pyöriä riman keskipisteen ympäri, joten radan säde on 1,5 m.

b) Luistelijoiden ratanopeus on 1,4 m/s, joten kulmanopeus on

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1{,}4\,\text{m/s}}{1{,}5\,\text{m}} = 0{,}93333\,\text{rad/s} \approx 0{,}93\,\text{rad/s}.$$

c) Systeemin pyörimisenergia on

$$E = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}(mr^2 + mr^2)\omega^2 = mr^2\omega^2 = 50\,\text{kg}\cdot(1{,}5\,\text{m})^2\cdot(0{,}9333\,\text{rad/s})^2$$
$$\approx 98\,\text{J}.$$

d) Kun kiinnipitokohtaa muutetaan, systeemin hitausmomentti muuttuu. Koska pyörimismäärä säilyy, kulmanopeuden täytyy myös muuttua. Koska pyörimismäärä on $L = J\omega = 2mr_1^2\omega_1 = 2mr_2^2\omega_2$, uusi kulmanopeus on

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{0{,}93333\,\text{rad/s}\cdot(1{,}5\,\text{m})^2}{(0{,}50\,\text{m})^2} = 8{,}399997\text{rad/s} \approx 8{,}4\,\text{rad/s}.$$

Uusi pyörimisenergian arvo on

$$E = mr^2\omega^2 = 50\,\text{kg}\cdot(0{,}50\,\text{m})^2\cdot(8{,}399997\,\text{rad/s})^2 \approx 880\,\text{J}.$$

e) Luistelijat vetävät itseään kohti akselia. Siirtymisen aikana luistelijat eivät ole ympyräradalla vaan radan säde pienenee. Tällöin käsistä tankoon kohdistuvat voimat eivät ole tangon suuntaisia vaan voimilla on liikkeen suuntainen komponentti. Siksi voimat tekevät systeemiin työtä lisäten systeemin liike-energiaa.

4-25. Tynnyriä on helpointa liikuttaa vierittämällä, koska vierimisvastus on pienempi kuin liukukitka.

4-26. Lentokoneen pyörät liukuvat aluksi kiitoradan pinnalla. Savu johtuu renkaiden kuumenemisesta ja niiden kumin palamisesta kitkan muuttaessa lentokoneen liike-energiaa renkaiden sisäenergiaksi. Kitka aiheuttaa renkaisiin vääntömomentin, joka antaa pyörille kulmakiihtyvyyden. Kun renkaiden kulmanopeus on tullut niin suureksi, että vierimisehto täyttyy, liukuminen lakkaa ja pyörät etenevät vierimällä. Liukuminen ja savun muodostuminen voitaisiin estää saattamalla renkaat pyörimään valmiiksi vierimisehdon mukaisella nopeudella. Tähän vaadittavat lisämoottorit tekisivät lentokoneesta kuitenkin raskaamman ja kalliimman lentää. Renkaiden uusiminen tulee halvemmaksi.

4-27. Onton pallon massa sijaitsee kauempana pyörimisakselista. Siksi ontolla pallolla on suurempi hitausmomentti ja pienempi kulmakiihtyvyys kuin umpinaisella pallolla. Kun pallot päästetään vierimään samanaikaisesti alas kaltevalta tasolta, ontto pallo jää kilvassa toiseksi.

4-28. a) Umpinainen sylinteri on aikaisemmin alhaalla, koska sen hitausmomentti on pienempi ja kulmakiihtyvyys suurempi kuin ontolla sylinterillä.

b) Sylinterit vierivät yhtä kauaksi edellyttäen, että kummallakin on alussa yhtä suuri potentiaalienergia ja tämä energia kuluu liikevastusten voittamiseen samalla tavalla kummaltakin sylinteriltä.

4-29. Pyörähtämisen vaikutuksesta kaikki vapautuva potentiaalienergia ei muutu etenemisliikkeen energiaksi. Silloin osa potentiaalienergiasta muuntuu pyörimisenergiaksi. Maahan törmättäessä syntyvä vaurio voi jäädä paljon pienemmäksi, jos törmäysnopeus on pieni ja pyörimisnopeus on suuri. Lisäksi maahan törmättäessä liiketila jatkuu pyörimisen takia.

4-30. Pallon vierimisehto on $v = \omega r$. Pallon etenemisnopeus on $v = 3{,}0$ m/s: verrataan tätä pallon kulmanopeuden ja säteen tuloon ωr.

Koska pallon kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 2{,}0$ rad/s $= 12{,}57$ rad/s, kulmanopeuden ja säteen tulo on $\omega r = 12{,}57$ rad/s $\cdot\ 0{,}12$ m $= 1{,}508$ m/s. Tämä on pienempi kuin pallon etenemisnopeus $v = 3{,}0$ m/s, joten vierimisehto $v = \omega r$ ei ole voimassa. Pallo siis luistaa lattian suhteen.

4-31. Pyöräilijän ja polkupyörän kokonaisliike-energia on

$$E_{\mathrm{k,kok}} = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 .$$

Pyörimisehdon $v = \omega r$ mukaan kulmanopeus on $\omega = v/r,$ jossa r on renkaiden säde. Ohuen ympyrärenkaan hitausmomentti on $J = mr^{2.}$

Kokonaisliike-energia on silloin

$$E_{\mathrm{k,kok}} = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 2\cdot\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 2\cdot\frac{1}{2}m_{\mathrm{r}}r^2\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + m_{\mathrm{r}}v^2 = \frac{1}{2}\cdot 78\ \mathrm{kg}\cdot\left(\frac{9{,}0}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}\right)^2 + 1{,}5\ \mathrm{kg}\cdot\left(\frac{9{,}0}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}\right)^2 \approx 250\ \mathrm{J}.$$

Huomaa, että pyörien säde ei vaikuta tulokseen. Isolla pyörällä on suurempi hitausmomentti kuin pienellä, mutta iso pyörä toisaalta pyörii hitaammin kuin pieni pyörä, kun etenemisnopeus on sama.

4-32. Umpinaisen lieriön potentiaalienergia muuntuu etenemisen liike-energiaksi ja pyörimisenergiaksi, kun ilmanvastus on vähäinen. Mekaanisen energian säilymislain mukaan on

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 .$$

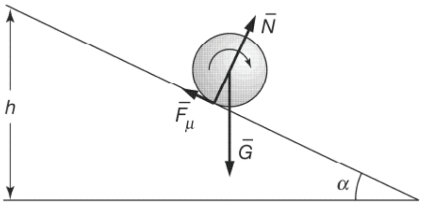
Kun kulmanopeuden ja hitausmomentin yhtälöt $\omega = \frac{v}{t}$ ja $J = \frac{1}{2}mr^2$ sijoitetaan mekaanisen energaian säilymislakiin, saadaan

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 \text{ eli } mgh = \frac{3}{4}mv^2 .$$

Nopeudeksi saadaan

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = \sqrt{\frac{4\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}\cdot 5{,}0\ \mathrm{m}\cdot\sin 26^\circ}{3}} \approx 5{,}4\ \mathrm{m/s} .$$

4-33. a) Palloon kohdistuvat voimat ovat paino $\overline{G}$, pinnan tukivoima $\overline{N}$ ja kitka $\overline{F}_\mu$. Kitka estää pallon liukumisen. Pallo lähtee vierimään, koska (lepo)kitkan momentti antaa pallolle kulmakiihtyvyyttä (pyörimisen liikeyhtälö on $M = J\alpha$). Kitkalla on palloa vääntävä momentti pallon keskipisteen (painopisteen) suhteen. Pinnan tukivoiman ja painovoiman momentti keskipisteen suhteen on nolla.



Huomautus:
Voimien momentteja voidaan tarkastella myös pallon ja tason kosketuspisteen suhteen. Tällöin vääntävä momentti on painovoimalla, ja se aiheuttaa pallon vierimisen ja kulmakiihtyvyyden.

b) Pallolla on aluksi potentiaalienergiaa. Vierimisen aikana potentiaalienergia muuntuu pyörimisen ja etenemisen liike-energiaksi. Oletetaan potentiaalienergian nollataso sille korkeudelle, jossa pallo on vierittyään 1,5 m. Kun ilmanvastus oletetaan pieneksi, mekaanisen energian säilymislain perusteella voidaan kirjoittaa $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$.

Sijoitetaan tähän umpinaisen pallon hitausmomentti $J = \frac{2}{5}mr^2$, vierimisehto $v = \omega r$ sekä vierimismatkan ja korkeuden välinen yhteys $h = s \cdot \sin\alpha$. Yhtälöstä

$mgs \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2$ saadaan sieventämällä

$$gs \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 = \frac{7}{10}v^2.$$

Pallon nopeus vierimisen loputtua on

$$v = \sqrt{\frac{10gs \cdot \sin\alpha}{7}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}5\ \text{m} \cdot \sin 25°}{7}} \approx 3{,}0\ \text{m/s}.$$

Huomautus:

Jos oletetaan pallo ontoksi, sen hitausmomentti on $J = \frac{2}{3}mr^2$. Vastaukseksi saadaan tällöin 2,7 m/s.

4-34. Koripallo on ontto, joten sen hitausmomentti on $J = \frac{2}{3}mr^2.$ Koska pallo vierii liukumatta, vierimisehto $v = \omega r$ on voimassa. Pallon kineettinen energia on silloin

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)mv^2 = \frac{5}{6}mv^2.$$

Kineettisen energian muutos törmäyksessä on

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{kin}} &= \frac{5}{6}m\Delta v^2 = \frac{5}{6}m(v_{\text{l}}^2 - v_{\text{a}}^2) \\ &= \frac{5}{6} \cdot 0{,}62\ \text{kg} \cdot \left((0{,}080\ \text{m/s})^2 - (0{,}12\ \text{m/s})^2\right) = -4{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{J}.\end{aligned}$$

Koska potentiaalienergia ei muutu törmäyksessä, mekaanisen energian muutos on sama kuin kineettisen energian muutos. Kokonaisenergia säilyy kaikissa luonnonilmiöissä. Kun pallon mekaaninen energia vähenee törmäyksessä, samalla syntyy vastaava määrä sisäenergiaa palloon ja seinään ($\Delta Q = 4{,}1 \cdot 10^{-3}$ J).

Pallon mekaaninen energia pienenee määrällä 4,1 mJ. Kokonaisenergia säilyy.

4-35. Pallolla on alussa energiaa

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2.$$

Alussa ollut energia muuntuu potentiaalienergiaksi, joten saadaan yhtälö $\frac{7}{10}mv^2 = mgh$, jossa m on golfpallon massa. Lasketaan korkeus h, jonka ylittämiseen alussa ollut energia riittää: yhtälöstä $\frac{7}{10}mv^2 = mgh$ saadaan nousukorkeudeksi

$$h = \frac{7v^2}{10g} = \frac{7\cdot(2,5\,\text{m/s})^2}{10\cdot 9,81\,\text{m/s}^2} \approx 0,45\,\text{m}.$$

Näin ollen golfpallo ei pääse 0,75 m korkuisen tason yli.

4-36. a) Putken potentiaalienergia muuttuu etenemisen ja pyörimisen liike-energiaksi, kun ilmanvastus on vähäinen:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2,$$

josta saadaan

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v^2 = v^2.$$

Loppunopeus on

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{9,81\,\text{m/s}^2\cdot 1,7\,\text{m}} \approx 4,1\,\text{m/s}.$$

b) Myös umpinaisen sylinterin energia säilyy, jos ilmanvastus on vähäinen.
Yhtälöstä

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

saadaan

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

ja edelleen

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^2 = \frac{3}{4}v^2.$$

Loppunopeus on

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \sqrt{\frac{4}{3}\cdot 9,81\,\text{m/s}^2\cdot 1,7\,\text{m}} \approx 4,7\,\text{m/s}.$$

Ero johtuu kappaleiden erilaisesta hitaudesta pyörimisen suhteen. Putken massa on keskittynyt kauemmas keskipisteestä, joten sen hitausmomentti on suurempi. Putken loppunopeus on pienempi, koska sen potentiaalienergiasta suurempi osa muuttuu pyörimisen energiaksi.

4-37. Oletetaan ilmanvastus vähäiseksi, joten sitä ei oteta huomioon.

a) Rullan 1 massa sijaitsee kauempana pyörimisakselista. Siksi rullan 1 hitausmomentti on suurempi.

b) Nopeammin vierii rulla 2, koska sen hitausmomentti on pienempi kuin rullan 1.

c) Rullat pysähtyvät vierimisvastuksen takia tietyn matkan kuluttua. Vierimisvastus on yhtä suuri kummallekin rullalle. Verrataan rullien liike-energioita:

Rulla 1:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_1\omega^2; \quad \omega = \frac{v}{r}$$

$$= \frac{1}{2}v^2(m + \frac{J_1}{r^2}).$$

Rulla 2:

$$E_2 = \frac{1}{2}v^2(m + \frac{J_2}{r^2}).$$

Koska rullan 1 hitausmomentti on suurempi, sen liike-energia on suurempi: rulla 1 vierii pidemmän matkan.

4-38. Valitaan alempi taso potentiaalienergian nollatasoksi. Renkaan halkaisija on $2r = 0{,}70$ m, josta saadaan säteeksi $r = 0{,}35$ m.

Korkeus on $h = 8{,}0\ \text{m} \cdot \sin 6{,}0° \approx 0{,}836228$ m.

Koska liikevastuksia voidaan pitää vähäisinä, mekaanisen energian säilymislain mukaan on

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \ .$$

Yhtälö saadaan muotoon $2mgh = m(\omega r)^2 + J\omega^2$ eli $2mgh = m\omega^2 r^2 + J\omega^2$.

Yhtälöstä $\omega^2(mr^2 + J) = 2mgh$ saadaan kulmanopeudeksi

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{mr^2 + J}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60{,}0\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}836228\,\text{m}}{60{,}0\,\text{kg} \cdot (0{,}35\,\text{m})^2 + 7{,}4\,\text{kgm}^2}} \approx 8{,}16831\,\text{rad/s}.$$

Pyörimisnopeus saadaan yhtälöstä

$\omega = 2\pi n$, josta pyörimisnopeus on $n = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{8{,}16831\ \text{rad/s}}{2\pi} \approx 1{,}3$ r/s.

4-39. a) Kappaleen ratanopeus muuttuu tasaisesti ja sen tangenttikiihtyvyys on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3{,}5\ \text{m/s}}{1{,}0\ \text{s}} = 3{,}5\ \text{m/s}^2.$$

Kappaleen kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{3{,}5\ \text{m/s}^2}{0{,}0300\ \text{m}} = 116{,}6667\ \text{rad/s}^2 \approx 120\ \text{rad/s}^2.$$

b) Sovelletaan tason suunnassa Newtonin II lakia $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Sovitaan suunta tasoa alas positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö

$G_x - F_\mu = ma$ ja edelleen $mg\sin\theta - F_\mu = ma$.

Tästä voidaan ratkaista myös kitkavoimalle yhtälö

$$F_\mu = mg\sin\theta - ma.$$

c) Kitka F_μ aiheuttaa vääntömomentin. Vääntövarsi on r = 0,0300 m. Muut voimat (paino ja pinnan tukivoima) eivät aiheuta momenttia, koska niille vääntövarsi r = 0 m.

d) Pyörimisen liikeyhtälö on $\sum M = F_\mu r = J\alpha$. Kappaleen hitausmomentti on

$$\begin{aligned} J &= \frac{F_\mu r}{\alpha} = \frac{(mg\sin\theta - ma)r}{\alpha} \\ &= \frac{(0{,}500\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 30° - 0{,}500\ \text{kg} \cdot 3{,}5\ \text{m/s}^2) \cdot 0{,}0300\ \text{m}}{116{,}6667\ \text{rad/s}^2} \\ &= 0{,}0001806428\ \text{kgm}^2 \approx 0{,}00018\ \text{kgm}^2. \end{aligned}$$

e) Hitausmomenttien yhtälöt ovat muotoa $J = k \cdot mr^2$, jossa 0 < k < 1 (yleensä).
Nyt

$$k = \frac{J}{mr^2} = \frac{0{,}0001806428\ \text{kgm}^2}{0{,}500\ \text{kg} \cdot (0{,}0300\ \text{m})^2} \approx 0{,}4 = \frac{2}{5},$$

eli kyseessä on umpinainen pallo.

Testaa, osaatko sivu 115

1. c **2.** b **3.** c **4.** b **5.** a c **6.** b **7.** b c **8.** c **9.**a b c **10.** a

5 Gravitaatio

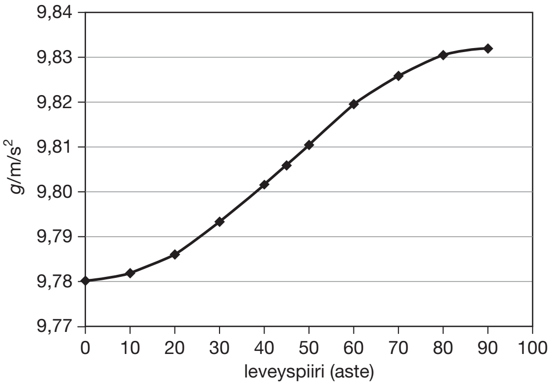
5-1. Maan radan eksentrisyys on 0,0167 ja Marsin 0,0934. Näin ollen Maan kiertorata Auringon ympäri on lähempänä ympyrärataa kuin Marsin.

5-2. a) Maan pyörimissuunta on itään päin.

b) Aurinko on puolenpäivän aikaan etelässä.

5-3. a) Oheiset arvot löytyvät taulukkokirjasta.

leveyspiiri/°	0	10	20	30	40	45	50	60	70	80	90
g/m/s^2	9,7804	9,7820	9,7864	9,7933	9,8017	9,80665	9,8107	9,8197	9,8261	9,8306	9,8322



b) Bangkok sijaitsee 13. leveyspiirillä, kuvaajan mukaan putoamiskiihtyvyyden arvo Bangkokissa on noin 9,783 m/s^2.

5-4. a) Tähdet ja planeetat ovat syntyneet pöly- ja kaasupilvistä, kun gravitaatio on vetänyt yhteen suuren määrän ainetta.

b) Suuri putoamiskiihtyvyys Auringon pinnalla johtuu Auringon suuresta massasta. Auringon eri kerroksilla ei ole selkeitä rajoja, kuten Maassa on maan ja ilman raja. Auringon tiheys pienenee siirryttäessä kauemmaksi keskipisteestä. Ydinreaktiot Auringon keskustassa aiheuttavat suuren kuumuuden. Sisäosien lämpötila on jopa $15 \cdot 10^6$ K ja pinnan lämpötila 5800 K. Lämpöliike pitää Auringon uloimman osan kaasuna. Kuuma kaasu vaatii suuren tilan. Auringon keskitiheys on vain 1409 kg/m^3.

c) Maassa havaittavat vuodenajat johtuvat siitä, että Maan pyörimisakseli ei ole kohtisuorassa sitä ratatasoa vasten, jolla Maa kiertää Aurinkoa. Pyörimisakseli muodostaa noin 23 asteen kulman ratatason kanssa. Pyörimisakselin suunta säilyy. Kesällä Maan pyörimisakselin pohjoisosa on kallistunut Aurinkoon päin ja talvella Auringosta poispäin. Kun pohjoisella pallonpuoliskolla on kesä, eteläisellä pallonpuoliskolla on talvi ja päinvastoin.

d) Kuun vaiheet aiheutuvat siitä, miten Auringon valo osuu Kuun pintaan. Kuun kiertäessä Maata Maahan näkyy Kuun pinnasta erikokoinen osa sen mukaan, missä asennossa Aurinkoon nähden Kuu on kiertoliikkeensä aikana Maan ympäri.

5-5. a) Veden nousun aikana vettä voidaan ottaa talteen varastoaltaisiin, joista vettä voidaan laskuveden aikana juoksuttaa pois voimalaitoksen turbiini-generaattorijärjestelmän kautta. Maapallon Kuun puolella kenttä on voimakkaampi kuin vastakkaisella puolella.

Toinen nousuvesi johtuu siitä, että maapallon Kuun puolella vallitseva suurempi vetovoima aiheuttaa merien veden virtausta Kuun puolelle. Toinen Maan vastakkaisella puolella samaan aikaan esiintyvä nousuvesi liittyy siellä vallitsevaan heikompaan gravitaatioon sekä veden massan hitauteen Kuun ja Maan kiertäessä yhteistä massakeskipistettä.

Vuoroveden 12 tunnin jakso johtuu Maan pyörimisestä akselinsa ympäri. Maan pyörimisen ja liikevastusten takia nämä kaksi nousuvettä eivät osu Maan ja Kuun keskipisteitä yhdistävälle suoralle. Vuorovesi-ilmiöön vaikuttavat monet seikat, esimerkiksi maapallon muoto ja pallon pyörimiseen liittyvät ilmiöt, kuten coriolis-ilmiö, Auringon vetovoima, merenpohjan syvyys ja muoto, mantereiden rantojen muodot, vuorovesiaallon heijastukset ja resonanssit, vesien virtausten ja aaltojen värähtelyjen liikevastukset, Maan ja Kuun ratojen elliptisyys sekä Kuun ratatason kaltevuus.

b) Kuun painopiste Maan gravitaatiokentässä on Kuun sisällä hiukan Kuun keskipisteestä Maahan päin. Maan gravitaatiokenttä Kuun maanpuoleisessa osassa on voimakkaampi kuin vastakkaisella puolella. Maan gravitaatiokenttä heikkenee etäisyyden kasvaessa. Painopisteen poikkeaminen geometrisesta keskipisteestä johtuu myös siitä, että Kuu ei ole homogeeninen, vaan Maan puolella on hieman tiheämpiä materiaalikerrostumia kuin Kuun takapuolella. Näin ollen Kuun gravitaatiokentässäkään Kuun painopiste ei ole samassa kohdassa kuin sen keskipiste.

c) Meteoriitti kokee gravitaatiovoiman kasvavan meteoriitin lähestyessä Maata. Maan vetovoiman aiheuttama kiihtyvyys on sitä suurempi, mitä lähempänä meteoriitti on Maata.

5-6. Ranskalainen fyysikko *Jean Foucault* rakensi 1851 Pariisin Pantheon-kirkon kupolista riippuvan heilurin. Heilurin lanka oli 67 m pitkä ja siinä riippuvan punnuksen massa oli 28 kg. Riittävän pitkään heiluria tarkasteltaessa havaittiin, että sen heilahdusten suunta muuttui. Tämä osoitti Maan pyörimisen. (Koetta seurasi mm. Napoleon III.) Heilurin heilahtelun suunta säilyy samana avaruuden tähtiin nähden, koska heiluriin ei vaikuta heilahdustasoa kääntävää momenttia. Jos Maa ei pyörisi, heilurin suunta säilyisi Maahan nähden, mutta koska Maa pyörii, Maan asento muuttuu heilahdussuuntaan nähden.

5-7. Satelliitin kiertoradan korkeus riippuu satelliitin käyttötarkoituksesta. Lähinnä Maata kiertäviä LEO-ratoja (Low Earth Orbit) käyttävät mm. vakoilusatelliitit ja avaruussukkulat. Ne kiertävät Maata 200–400 km:n korkeudella. Niiden kiertoaika maapallon ympäri on noin 1,5 tuntia.

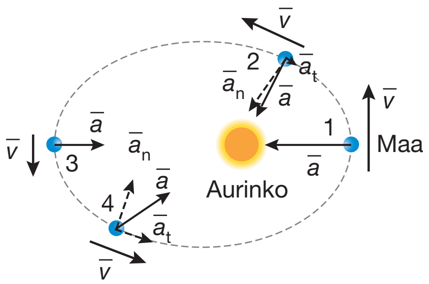
Geostationääriset satelliitit kiertävät Maata noin 36 000 km:n korkeudella olevalla GEO-radalla (Geostationary Earth Orbit). Geostationäärinen satelliitti näyttää Maan pinnalta katsottaessa pysyvän paikallaan ja kulkee pitkin ympyrärataa Maan ympäri. Geostationäärisen satelliitin kierrosaika on sama kuin Maan pyörähdysaika. Geostationäärisiä satelliitteja ovat mm. sääennusteissa käytettävä Meteosat sekä digitaalisia satelliittilähetyksiä välittävä Eutelsat.

LEO- ja GEO-ratojen väliin jää ns. GTO-rata (Geostationary Transfer Orbit), joka on ellipsin muotoinen. Sen alin piste on LEO-radalla ja ylin GEO-radalla. GTO-rataa käyttävät satelliitit, jotka pystyvät oman moottorinsa avulla nousemaan matalalta kiertoradalta ympyrän muotoiselle GEO-radalle.

5-8. a) Kohdassa 1 (talvipäivän seisaus) Maan ratanopeus on suurin. Kohdassa 3 (kesäpäivän seisaus) Maan ratanopeus on pienin.

b) Maan tangenttikiihtyvyys on nolla kohdissa 1 ja 3. Oletetaan Maan kiertosuunta vastapäivään. Lähestyttäessä kohtaa 1 tangenttikiihtyvyys lisää Maan ratanopeutta ja kohdan 1 jälkeen tangenttikiihtyvyys pienentää ratanopeutta, joten kohdassa 1 tangenttikiihtyvyys on hetkellisesti nolla. Lähestyttäessä kohtaa 3 tangenttikiihtyvyys pienentää Maan ratanopeutta ja kohdan 3 jälkeen tangenttikiihtyvyys lisää ratanopeutta, joten kohdassa 3 tangenttikiihtyvyys on hetkellisesti nolla.

c) Huomaa kohdassa 2 tangenttikiihtyvyyden suunta. Normaalikiihtyvyyden suunta on aina kohtisuorassa tangenttikiihtyvyyttä vastaan, kokonaiskiihtyvyyden suunta kohti Aurinkoa. Kohdissa 1 ja 3 kiihtyvyys on vain normaalikiihtyvyyttä.



5-9. a) Esimerkiksi Sibelius-asteroidin radan säde on

$$2{,}25 \cdot \mathrm{AU} = 2{,}25 \cdot 149{,}5979 \cdot 10^9\,\mathrm{m} \approx 336{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{km}.$$

Tämän asteroidin (kuten muidenkin asteroidien rata) sijaitsee Jupiterin ja Marsin ratojen välissä. Joidenkin asteroidien radat poikkeavat tavanomaisista asteroidien radoista.

b) Juhani-asteroidin ratanopeus on

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 2{,}40 \cdot 149{,}5979 \cdot 10^6\ \mathrm{km}}{3{,}72 \cdot 365 \cdot 24\ \mathrm{h}} \approx 69\,200\ \mathrm{km/h}.$$

c) Verrataan Sibelius- ja Helsinki-asteroideja. Keplerin III lain mukaan on

$$\left(\frac{T_\mathrm{S}}{T_\mathrm{H}}\right)^2 = \left(\frac{r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{H}}\right)^3.$$

Kiertoaikojen suhteen neliö on $\left(\dfrac{3{,}37\,\mathrm{a}}{4{,}29\,\mathrm{a}}\right)^2 \approx 0{,}62$ ja kiertoratojen säteiden suhteen kuutio

$$\left(\frac{2{,}25\,\mathrm{AU}}{2{,}64\,\mathrm{AU}}\right)^3 \approx 0{,}62.$$

Keplerin III laki toteutuu.

5-10. Keplerin III lain mukaan on $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$ eli $\frac{T_{\text{Io}}^2}{T_{\text{Gany}}^2} = \frac{r_{\text{Io}}^3}{r_{\text{Gany}}^3}$. Ganymedes-kuun kiertoaika

on $T_{\text{Gany}} = T_{\text{Io}} \cdot \sqrt{\frac{r_{\text{Gany}}^3}{r_{\text{Io}}^3}} = 1,8\,\text{d} \cdot \sqrt{\left(\frac{11 \cdot 10^8\ \text{m}}{4 \cdot 10^8\ \text{m}}\right)^3} \approx 8\,\text{d}.$

5-11. Merkitään T_1 = 11,863 a, r_1 = 778,4 · 10^6 km ja T_2 = 84,04 a.

Keplerin III laista $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$ saadaan Uranuksen keskietäisyys

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{r_1^3 T_2^2}{T_1^2}} = \sqrt[3]{\frac{(778{,}4 \cdot 10^6 \cdot 10^3\ \text{m})^3 \cdot (84{,}04\ \text{a})^2}{(11{,}863\ \text{a})^2}}$$
$$\approx 2{,}871 \cdot 10^{12}\ \text{m} = 2{,}871 \cdot 10^9\ \text{km} = 2871 \cdot 10^6\ \text{km}.$$

5-12. Oletetaan, että massasi on 55 kg.

a) Kuu kohdistaa sinuun gravitaatiovoiman, jonka suuruus on

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{7{,}348 \cdot 10^{22}\text{kg} \cdot 55\,\text{kg}}{(384\,400 \cdot 10^3\ \text{m})^2} = 1{,}825 \cdot 10^{-3}\ \text{N} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{N}.$$

Voiman suunta on kohti Kuun keskipistettä.

b) Aurinko kohdistaa sinuun gravitaatiovoiman, jonka suuruus on

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \cdot 55\,\text{kg}}{(149{,}59787 \cdot 10^9\ \text{m})^2} = 0{,}3262\ \text{N} \approx 0{,}33\ \text{N}.$$

Voiman suunta on kohti Auringon keskipistettä.

Voimien suhde on $\frac{F_{\text{Aurinko}}}{F_{\text{Kuu}}} = \frac{0,3262\ \text{N}}{0,001825\ \text{N}} \approx 180,$ eli $F_{\text{Aurinko}} \approx 180 \cdot F_{\text{Kuu}}$.

5-13. a) Tarkastellaan kappaletta, jonka massa on m. Gravitaatiokentän voimakkuus kappaleen kohdalla 6380 km:n etäisyydellä Maan keskipisteestä on

$$\frac{F}{m} = \frac{\gamma \frac{mM}{r^2}}{m} = \gamma \frac{M}{r^2} = 6,67259 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}} \cdot \frac{5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6380 \cdot 10^3\ \text{m})^2} \approx 9{,}79\ \text{m/s}^2.$$

Huomaa, että gravitaatiokentän voimakkuus etäisyydellä r on sama kuin putoamiskiihtyvyys etäisyydellä r.

b) Mount Kenyan huipulla 5199 m korkeudella gravitaatiokentän voimakkuus on

$$\frac{F}{m} = \frac{\gamma \frac{mM}{r^2}}{m} = \gamma \frac{M}{r^2}$$

$$= 6,67259 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(6\ 378\ 000\,\mathrm{m} + 5199\,\mathrm{m})^2} \approx 9,78\,\mathrm{m/s^2}.$$

c) Gravitaatiokentän voimakkuus 15 000 km:n korkeudella Maan pinnasta on

$$\frac{F}{m} = \frac{\gamma \frac{mM}{r^2}}{m} = \gamma \frac{M}{r^2}$$

$$= 6,67259 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(6378 \cdot 10^3\ \mathrm{m} + 15\ 000 \cdot 10^3\ \mathrm{m})^2} \approx 0,87\,\mathrm{m/s^2}.$$

d) Gravitaatiokentän voimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön eli etäisyyden kasvaessa gravitaatiokentän voimakkuus heikkenee.

5-14. a) Maan ratanopeus on $v = \dfrac{2\pi r}{T}$. Maan normaalikiihtyvyys Auringon keskipistettä kohti on

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 149,59787 \cdot 10^9\ \mathrm{m}}{(365,2564 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s})^2} \approx 5,93 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}.$$

b) Kuun ratanopeus on $v = \dfrac{2\pi r}{T}$. Kuun normaalikiihtyvyys Maata kohti on

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 384\ 400 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s})^2} \approx 2,73 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}.$$

5-15. Gravitaatiovoiman takia Maa kiertää radallaan Auringon ympäri. Maan liikeyhtälö Aurinkoa kiertävällä radalla on $\sum \bar{F} = M\bar{a}_\mathrm{n}$. Kun suunta kohti Auringon keskipistettä on positiivinen, skalaariyhtälöstä $\gamma \dfrac{m \cdot M}{r^2} = M \dfrac{v^2}{r}$ saadaan Auringon massaksi

$$m = \frac{v^2 r}{\gamma} = \frac{(29,78 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s})^2 \cdot 149,59787 \cdot 10^9\ \mathrm{m}}{6,67259 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}} \approx 1,988 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}.$$

5-16. a) Kuun liikeyhtälö Maata kiertävällä radalla on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\text{n}}$. Kun suunta kohti Maan keskipistettä on positiivinen, skalaariyhtälöstä $\gamma \dfrac{Mm}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$ saadaan Kuun ratanopeudeksi

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67259 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{384\ 400 \cdot 10^3\ \text{m}}} = 1018,32907\ \text{m/s} \approx 1,018\ \text{km/s}.$$

b) Kuun kiertoaika Maan ympäri on $t = \dfrac{s}{v} = \dfrac{2\pi \cdot 384\ 400 \cdot 10^3\ \text{m}}{1018,32907\ \text{m/s}} \approx 27{,}45$ d.

5-17. Hubblen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\text{n}}$. Kun suunta kohti Maan keskipistettä on positiivinen, skalaariyhtälöstä $\gamma \dfrac{mM}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$ saadaan Hubblen ratanopeudeksi $v = \sqrt{\dfrac{\gamma M}{r}}$. Hubblen kiertoaika Maan ympäri on

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\dfrac{\gamma M}{r}}} = \frac{2\pi \cdot (6378,140 \cdot 10^3\ \text{m} + 590 \cdot 10^3\ \text{m})}{\sqrt{\dfrac{6,67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6378,140 \cdot 10^3\ \text{m} + 590 \cdot 10^3\ \text{m}}}}$$
$$\approx 1\ \text{h}\ 36\ \text{min}.$$

Koska satelliitti liikkuu vakionopeudella, sillä ei ole tangenttikiihtyvyyttä. Kiihtyvyys on normaalikiihtyvyyttä. Kiihtyvyys on

$$a = a_{\text{n}} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\sqrt{\dfrac{\gamma M}{r}}\right)^2}{r} = \frac{\gamma M}{r^2}$$
$$= \frac{6,67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6378,140 \cdot 10^3\ \text{m} + 590 \cdot 10^3\ \text{m})^2} \approx 8,21\ \text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on kohti radan keskipistettä.

Teleskooppi kannattaa sijoittaa avaruuteen, koska Maan pinnalla oltaessa ilmakehästä johtuva absorptio häiritsee teleskoopin käyttöä. Lisäksi ilmakehä aiheuttaa Maan pinnalle saapuvan valon suunnanmuutoksen, joka johtuu ilmakehän muuttuvasta taitekertoimesta. Avaruudessa kaukoputken käyttöä häiritseviä tekijöitä on vähemmän.

5-18. a) Geostationäärinen satelliitti sijaitsee päiväntasaajan eli nollannen leveyspiirin yläpuolella.

b) Koska geostationäärinen satelliitti pysyy Maasta katsottuna paikallaan, sen kierrosaika on sama kuin maapallon pyörähdysaika: taulukkokirjan mukaan Maan pyörähdysaika on T = 23 h 56 min 4,10 s = 86164,1 s.

Radallaan olevan satelliitin liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$. Kun suunta kohti Maan keskipistettä on positiivinen, skalaariyhtälössä $\gamma \dfrac{mM}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$ m on satelliitin massa ja v ratanopeus. Satelliitin ratanopeus voidaan olettaa vakioksi: $v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{2\pi r}{T}$. Kun satelliitin ratanopeus $v = \dfrac{2\pi r}{T}$ sijoitetaan yhtälöön $\gamma \dfrac{mM}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$, saadaan $\gamma \dfrac{mM}{r^2} = m\dfrac{\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}$.
Satelliitin ja Maan keskipisteen välinen etäisyys on

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2\gamma M}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(86164{,}1\,\mathrm{s})^2 \cdot 6{,}67259\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2} \cdot 5{,}974\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{4\pi^2}}$$
$$= 42164{,}881\,\mathrm{km}.$$

Satelliitin etäisyys Maan pinnasta on

$$h = r - R = 42\ 164{,}881\ \mathrm{km} - 6378{,}140\ \mathrm{km} \approx 35\ 790\ \mathrm{km}.$$

Geostationääriset satelliitit ovat 35 790 km:n korkeudella Maan pinnasta.

5-19. Satelliitin kiertoaika planeetan ympäri on 7 h 39 min = 27 540 s. Satelliitin kiertoradan pituus on $2\pi r = 2\pi \cdot 9\ 370\ 000\,\mathrm{m} = 58{,}873446\cdot 10^6\ \mathrm{m}$ ja ratanopeus

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{58{,}873446\cdot 10^6\ \mathrm{m}}{27\ 540\,\mathrm{s}} \approx 2137{,}72694\,\mathrm{m/s}.$$

Gravitaatiovoiman takia satelliitti kiertää planeettaa pitkin ympyrärataa. Satelliitin liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m_2\overline{a}_\mathrm{n}$. Kun suunta kohti planeetan keskipistettä on positiivinen, skalaariyhtälöstä $\gamma \dfrac{m_1 m_2}{r^2} = \dfrac{m_2 v^2}{r}$ saadaan planeetan massaksi

$$m_1 = \frac{v^2 r}{\gamma} = \frac{(2137{,}72694\,\mathrm{m/s})^2 \cdot 9\ 370\ 000\,\mathrm{m}}{6{,}67259\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}} \approx 6{,}4\cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}.$$

5-20. a) Neutronitähden pinnan välittömässä läheisyydessä olevaan kappaleeseen, jonka massa on m_1, kohdistuu gravitaatiovoima $\overline{F}$, joka antaa kappaleelle putoamiskiihtyvyyden. Kappaleen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m_1\overline{a}$. Kun suunta kohti neutronitähden keskipistettä on positiivinen, skalaariyhtälöstä $\gamma \dfrac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 a$ putoamiskiihtyvyydeksi tähden pinnalla saadaan

$$a = \frac{\gamma m_2}{r^2} = \frac{6{,}67259\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2} \cdot 2{,}8\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}{(12\ 000\,\mathrm{m})^2} \approx 1{,}3\cdot 10^{12}\ \mathrm{m/s^2}.$$

b) Neutronitähden pinnalla kappaleeseen vaikuttavat tähden gravitaatiovoima $\overline{F}$ sekä pinnasta aiheutuva tukivoima $\overline{N}$. Kappaleen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m_1\overline{a}_{\text{n}}$ eli $\overline{F} + \overline{N} = m_1\overline{a}_{\text{n}}$. Kun suunta neutronitähden keskipisteeseen on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $F - N = m_1 \dfrac{v^2}{r}$. Oletuksen mukaan tukivoima on nolla.

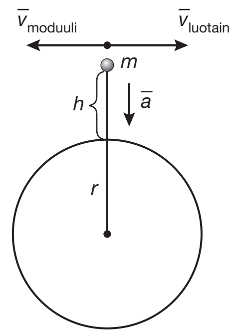
Sijoitetaan ratanopeus $v = \omega r$ yhtälöön $\gamma \dfrac{m_1 m_2}{r^2} = m \dfrac{v^2}{r}$. Yhtälöstä $\gamma \dfrac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 r\omega^2$ saadaan kulmanopeudeksi

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma m_2}{r^3}} = \sqrt{\frac{6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 2{,}8 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(12\ 000\,\text{m})^3}} = 10\ 398{,}109025\ \text{rad/s}.$$

Koska kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot \dfrac{1}{T}$, pyörimisen jaksonajaksi saadaan

$$T = \frac{2\pi\,\text{rad}}{\omega} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{10\ 398{,}109025\,\text{rad/s}} \approx 0{,}60\ \text{ms}.$$

5-21. a) Ennen laukaisua moduulin nopeus on sama kuin luotaimen. Koska moduuli lähetetään taaksepäin luotaimen nopeuden suuruisella nopeudella, moduulin ratanopeus on nolla. Moduuliin vaikuttaa Marsin aiheuttama gravitaatiovoima. Moduuli alkaa pudota kohti Marsia, ja sen kiihtyvyys kasvaa, koska etäisyys Marsin keskipisteestä pienenee.



b) Taulukkokirjan mukaan Marsin massa on

$m_{\text{Mars}} = 0{,}1075 \cdot m_{\text{Maa}} = 0{,}1075 \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg = $6{,}42205 \cdot 10^{23}$ kg ja ekvaattorisäde 3397 km.

Moduulin liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\text{moduuli}}$. Kun suunta kohti Marsin keskipistettä on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $\gamma \dfrac{m m_{\text{Mars}}}{(r+h)^2} = m a_{\text{moduuli}}$.

Alkukiihtyvyys on

$$a_{\text{moduuli}} = \frac{\gamma \dfrac{m m_{\text{Mars}}}{(r+h)^2}}{m} = \gamma \frac{m_{\text{Mars}}}{(r+h)^2}$$

$$= 6{,}67259 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6{,}42205 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{(3397\ \text{km} + 1500\ \text{km})^2} \approx 1{,}8\ \text{m/s}^2.$$

Moduulin alkukiihtyvyys on 1,8 m/s^2.

5-22. Olkoon kysytty etäisyys x Maan keskipisteestä lukien. Sijoitetaan kappale, jonka massa on m_1, kohtaan, jossa Maan ja Kuun vetovoimat ovat yhtä suuret. Tällöin kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on nolla eli $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Sovitaan suunta kohti Maan keskipistettä positiiviseksi. Yhtälö $\overline{F}_{\text{Maa}} + \overline{F}_{\text{Kuu}} = \overline{0}$ on skalaarimuodossa

$$\gamma \frac{Mm_1}{x^2} - \gamma \frac{mm_1}{(r-x)^2} = 0 \text{ eli } \gamma \frac{Mm_1}{x^2} = \gamma \frac{mm_1}{(r-x)^2}.$$

Kun yhtälö kerrotaan ristiin ja jaetaan puolittain termillä γm_1, saadaan

$$M(r^2 - 2rx + x^2) = mx^2.$$

Yhtälö sievenee toisen asteen yhtälöksi

$$(M - m)x^2 - M2r \cdot x + Mr^2 = 0.$$

Käyttämällä ratkaisukaavaa saadaan

$$x = \frac{-(-M2r) \pm \sqrt{(-M2r)^2 - 4 \cdot (M - m) \cdot Mr^2}}{2(M - m)}.$$

Kun ratkaisukaavaan sijoitetaan Maan ja Kuun massat $M = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg ja $m = 7{,}348 \cdot 10^{22}$ kg sekä etäisyys $r = 384\ 000$ km, saadaan

$$x = \frac{-(-5{,}974 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot 2 \cdot 384000\,\text{km}) \pm \sqrt{(-5{,}974 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot 2 \cdot 384000\,\text{km})^2 - 4 \cdot (5{,}974 \cdot 10^{24}\,\text{kg} - 7{,}348 \cdot 10^{22}\,\text{kg}) \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot (384000\,\text{km})^2}}{2 \cdot (5{,}974 \cdot 10^{24}\,\text{kg} - 7{,}348 \cdot 10^{22}\,\text{kg})}.$$

Etäisyydet ovat $x = 346\ 000$ km tai $x = 432\ 000$ km (Kuun takana).

Maan ja Kuun välissä etäisyydellä 346 000 km Maan keskipisteestä mitattuna kummankin vetovoimat ovat yhtä suuret.

5-23.

$$[v] = \sqrt{\frac{[\gamma] \cdot [m]}{[R]}} = \sqrt{\frac{1 \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1\,\text{kg}}{1\,\text{m}}} = \sqrt{\frac{\frac{1\,\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\,\text{m}^2}{1\,\text{kg}}}{1\,\text{m}}} = \sqrt{\frac{1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}}{1\,\text{m}}} = \sqrt{\frac{1\,\text{m}^3}{1\,\text{ms}^2}} = \sqrt{1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

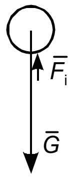
Testaa, osaatko sivu 137

1. a c **2.** a b c **3.** b c **4.** a b c **5.** a b c **6.** a **7.** a **8.** a **9.** b **10.** a

6 Heittoliike

6-1. Koska viivain lähtee levosta, viivain putoaa reaktioaikana matkan $y = \frac{1}{2}gt^2$, josta reaktioajaksi saadaan $t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}31\text{ m}}{9{,}81\text{ m/s}^2}} \approx 0{,}25\text{ s}$.

6-2. a)



b) Koska kiven alkunopeus on nolla ja liike tasaisesti kiihtyvää, kiven putoama matka on

$$y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Pudotusajaksi saadaan $t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45\text{ m}}{9{,}81\text{ m/s}^2}} = 3{,}02891\text{ s} \approx 3{,}0\text{ s}$.

c) Äänen nopeus ilmassa riippuu ilman lämpötilasta: oletetaan, että ilman lämpötila on +20 °C. Tällöin äänen nopeus on 343 m/s. Aika, joka kuluu siihen, että molskahduksesta kuuluva ääni on saapunut 45 m korkeammalla olevan henkilön korvaan, on

$$t = \frac{y}{v} = \frac{45\text{ m}}{343\text{ m/s}} \approx 0{,}13120\text{ s}.$$

Pudotushetkestä lukien äänen kuulemiseen kuluva aika on 3,02891 s + 0,13120 s ≈ 3,2 s.

6-3. Koska auton alkunopeus on nolla ja ilmanvastus pieni, auton loppunopeus on $v = gt$. Kun ajan lauseke $t = \frac{v}{g}$ sijoitetaan pudotuskorkeuden $y = \frac{1}{2}gt^2$ yhtälöön, saadaan

pudotuskorkeudeksi $y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{92}{3{,}6}\text{ m/s}\right)^2}{9{,}81\text{ m/s}^2} \approx 33\text{ m}$.

Tehtävä voidaan ratkaista myös mekaanisen energian säilymislain avulla. Sovitaan potentiaalienergian nollataso maanpinnan tasolle. Mekaanisen energian säilymislaki

saadaan muotoon $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, josta pudotuskorkeus on $h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(\frac{92}{3{,}6}\text{ m/s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2} \approx 33\text{ m}$.

6-4. a) Kuula on hetkellä 0,40 s korkeudella 2,0 m.

b) Kuula on hetkellä 1,5 s 0,4 m lähtötasonsa alapuolella.

c) Lakipisteessä kuulan nopeus on hetkellisesti nolla: (t, v)-koordinaatistosta nähdään hetkeksi $t = 0{,}75$ s.

d) Kuulan nopeus hetkellä 1,0 s on –2,9 m/s. Kuula on putoamassa alaspäin.

e) Kuulan putoamiskiihtyvyys saadaan (t, v)-koordinaatistosta fysikaalisena kulmakertoimena:

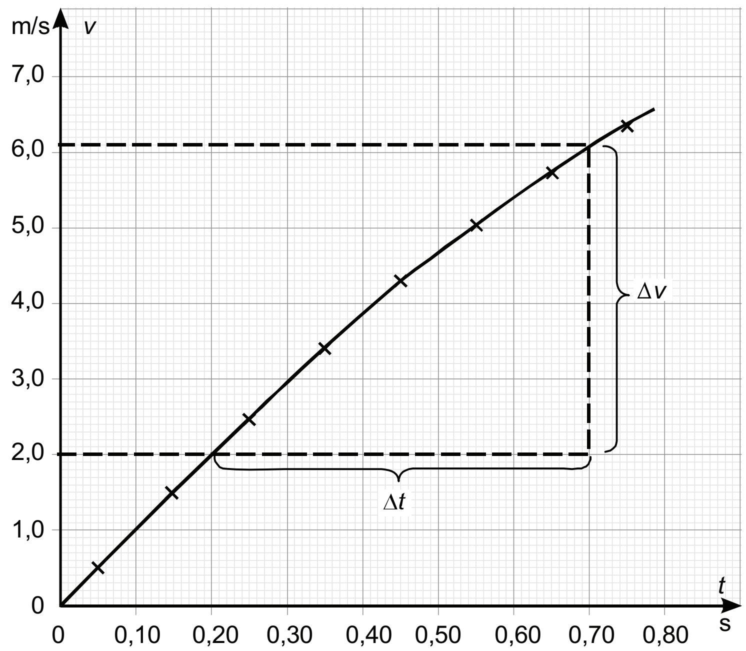
$$g = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0{,}0\,\text{m/s} - 7{,}0\,\text{m/s}}{0{,}70\,\text{s} - 0{,}00\,\text{s}} = -10\ \text{m/s}^2 \text{ : nyt suunta ylös on positiivinen.}$$

6-5. Koska ilmanvastus on vähäinen ja kuula palaa lähtöpaikkaansa, kuulan nousuaika on yhtä suuri kuin putoamisaika. Yhtälöstä $y = \frac{1}{2}gt^2$ kuulan nousuaika on $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$.

Lentoajaksi saadaan $T = 2t = 2 \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}0\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} \approx 2{,}21201\,\text{s}$.

Tässä ajassa kivi etenee matkan $s = vT = 7{,}0$ m/s · 2,21201 s ≈ 15 m.

6-6. a) Mittaustuloksista piirretty kappaleen nopeuden kuvaaja $v = v(t)$:



b) Liikkeellelähdöstä lukien aikavälillä 0,0 s … 0,25 s kuvaaja on nouseva suora, joten kappaleen nopeus muuttuu likimain tasaisesti (kiihtyvyys on vakio). Sen jälkeen kuvaaja hieman loivenee eikä kappaleen nopeus enää kasva samalla tavalla kuin alussa (kiihtyvyys pienenee). Muutos johtuu ilmanvastuksen kasvamisesta kappaleen nopeuden kasvaessa.

c) Keskikiihtyvyys välillä 0,20 s … 0,70 s on

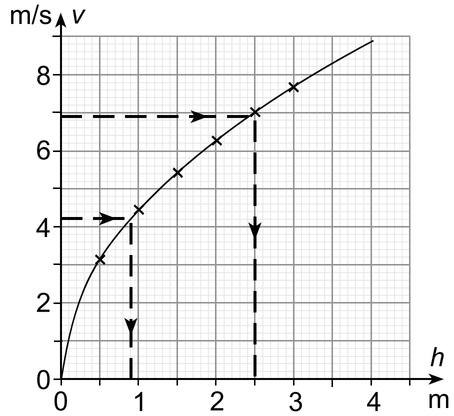
$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6{,}1\,\text{m/s} - 2{,}0\,\text{m/s}}{0{,}70\,\text{s} - 0{,}20\,\text{s}} = 8{,}2\ \text{m/s}^2.$$

6-7. a) Ilmanvastusta voidaan pitää vähäisenä, jos pudotuskorkeus on pieni. Oletetaan, että pudotuksessa mekaaninen energia säilyy eli $mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 = mgh_l + \frac{1}{2}mv_l^2$.

Kypärän pudotessa sen potentiaalienergia muuntuu liike-energiaksi. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi maanpinnan taso. Silloin korkeus lopussa on $h_l = 0$ m. Koska kypärällä ei ole alkunopeutta eli $v_a = 0$ m/s, mekaanisen energian säilymislaki tulee muotoon $mgh_a = \frac{1}{2}mv_l^2$, josta saadaan kypärän loppunopeudeksi $v_l = \sqrt{2gh_a}$.

Taulukoidaan pudotuskorkeuksia esim. 0,5 metrin välein ja lasketaan edellisestä yhtälöstä vastaavat loppunopeudet. Esitetään mittaustulokset (h, v)-koordinaatistossa.

h/m	$v\,/\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
0,0	0,0
0,5	3,13
1,0	4,43
1,5	5,42
2,0	6,26
2,5	7,00
3,0	7,67



b) Kuvaajasta nähdään, että kun törmäysnopeus on 15 km/h ≈ 4,2 m/s, pudotuskorkeus on 0,9 m. Kun törmäysnopeus on 25 km/h ≈ 6,9 m/s, pudotuskorkeus on 2,5 m.

6-8. a) Kun palloon kohdistuvaa ilmanvastusta ei oteta huomioon, pallon liikettä voidaan pitää tasaisesti kiihtyvänä liikkeenä. Sovitaan suunta alas positiiviseksi.

Pallon putoama matka on $y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$.

Ratkaistaan yhtälö $\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t - y = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla:

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4\cdot\frac{1}{2}g\cdot(-y)}}{2\cdot\frac{1}{2}g} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2\cdot g\cdot y}}{g}$$

$$= \frac{-15\ \text{m/s} \pm \sqrt{(15\ \text{m/s})^2 + 2\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 73\ \text{m}}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}.$$

Ratkaisuna saadaan $t_1 \approx -5{,}7$ s tai $t_2 \approx 2{,}62074$ s. Hylätään ajan negatiivinen arvo. Pallon lentoaika on $t \approx 2{,}6$ s.

b) Kun suunta alas on positiivinen, pallon nopeus sen törmätessä maahan on

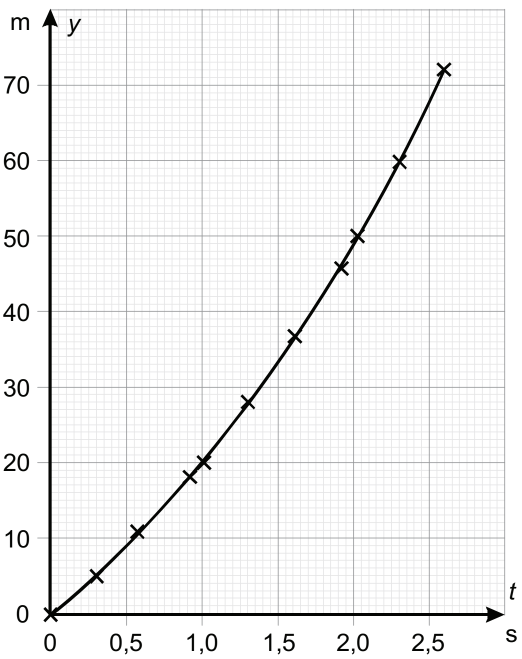
$$v = v_0 + gt = 15\,\text{m/s} + 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 2{,}62074\,\text{s} \approx 41\,\text{m/s}.$$

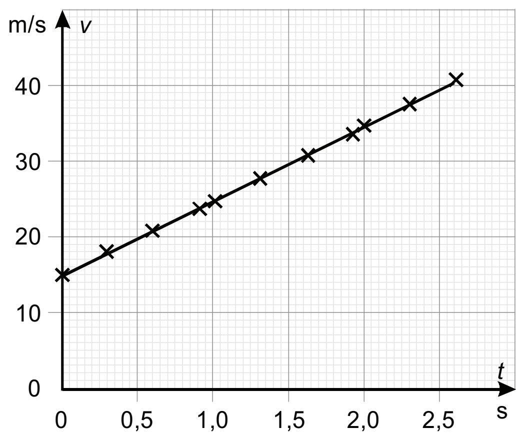
Nopeuden suunta on suoraan alas.

c) Yhtälö $y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ kuvaa putoamismatkaa, jos nopeuden suunta ei muutu ja suunta alas on positiivinen. Loppunopeus saadaan yhtälöstä $v = v_0 + gt$.

Lasketaan taulukkoon putoamismatkan ja loppunopeuden arvoja eri ajan arvoilla.

t/s	y/m	v/m/s
0,0	0,0	15
0,3	4,9	18
0,6	11	21
0,9	18	24
1,0	20	25
1,3	28	28
1,6	37	31
1,9	46	34
2,0	50	35
2,3	60	37
2,6	72	41





Ilmanvastus on muuttuva voima. Sen huomioon ottaminen aiheuttaisi taulukkoarvoja pienemmät nopeuden lukuarvot. Ilmanvastus on sitä suurempi, mitä suurempi on nopeus. Siksi lukuarvojen muutos näkyisi hyvin suurilla nopeuksilla. Myös kuljetut matkat olisivat taulukkoarvoja pienemmät, jos ilmanvastus otettaisiin huomioon.

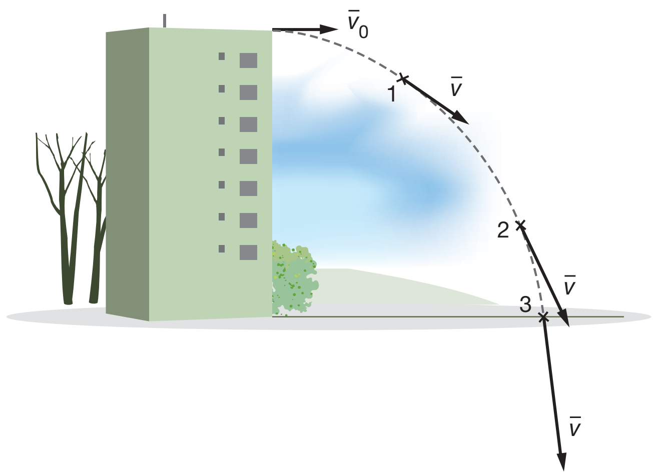
6-9. Kiven irrottua kädestä siihen kohdistuu ainoastaan Maan aiheuttama paino. Painon vaikutuksesta jokaisessa tilanteessa kiven kiihtyvyys on yhtä suuri, jos ilmanvastuksen vaikutusta ei oteta huomioon. Kiihtyvyys on 9,81 m/s^2 alaspäin.

6-10. a) Kun ilmanvastus on tullut kappaleen painon suuruiseksi, kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on nolla ja kappale alkaa pudota vakionopeudella.
b) Oletetaan, että lyönti on kierteetön. Kun ilmanvastus otetaan huomioon, pallon kantama lyhenee, kuvaaja ei ole symmetrinen eikä siis paraabeli. Golfpallo putoaa lakipisteen ohitettuaan jyrkemmin kuin nousee ennen lakipistettä.

6-11. a) b) c) Palloon kohdistuvat paino ja ilmanvastus, jonka suunta on nopeuden suuntaa vastaan.

d) Voimat ovat Maan vetovoima alaspäin ja Maan pinnasta palloon kohdistuva tukivoima ylöspäin.

6-12.



6-13. a) Kivellä ei ole alkunopeutta (pystysuunnassa) ja kivi on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä alas. Yhtälöstä $y = \frac{1}{2}gt^2$ saadaan kiven putoamisajaksi

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} \approx 1{,}74875\,\text{s}.$$

Vaakasuunnassa nopeus on vakio eli v = 19 m/s. Etäisyydeksi tornin juuresta maahanosumiskohtaan saadaan $x = vt = 19\,\text{m/s} \cdot 1{,}74875\,\text{s} \approx 33\,\text{m}$.

b) Pystysuunnassa kiven liike on tasaisesti kiihtyvää, joten kiven osuessa maahan nopeuden pystykomponentti on $v_y = v_{0y} - gt$. Koska kivi heitetään vaakasuoraan, kiven alkunopeus y-suunnassa eli v_{0y} on nolla. Nopeus y-suunnassa on

$$v_y = -gt = -9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 1{,}74875\,\text{s} \approx -17{,}15524\,\text{m/s}.$$

Kiven osuessa maahan nopeuden vaakakomponentti on $v_x = 19\,\text{m/s}$.

Nopeuden suuruus kiven osuessa maahan on

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(19\,\text{m/s})^2 + (-17{,}15524\,\text{m/s})^2} \approx 26\,\text{m/s}.$$

Nopeuden suuntakulma α vaakatasoon nähden saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \frac{-17{,}15524\,\text{m/s}}{19\,\text{m/s}},\ \text{josta kulma}\ \alpha \approx -42°.$$

c) Pudotetun kiven nopeus voidaan laskea mekaanisen energian säilymislain perusteella: yhtälöstä $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ nopeudeksi saadaan $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 15\,\text{m}} \approx 17\,\text{m/s}.$

Huomaa, että saatu nopeus on sama kuin kohdan b nopeuden v_y -komponentin suuruus.

6-14. Sijoitetaan luodin lähtöpiste origoon, jolloin suunta alas on negatiivinen. Luodin nopeus pysyy vakiona vaakasuunnassa.

Luodin lentoaika on $t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{220\,\text{m}}{750\,\text{m/s}} \approx 0{,}29333\,\text{s}.$

Pystysuunnassa luodin alkunopeus on nolla ja putoamiskiihtyvyys vakio. Maaliin osuneen luodin paikan y-koordinaatti vaakatasoon nähden on

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot (0{,}29333\,\text{s})^2 \approx -0{,}42\,\text{m}.$$

Luoti putoaa 0,42 m.

6-15. Paketti saa pudotuksessa vaakasuuntaisen alkunopeuden koneelta, joten tilanne vastaa vaakasuoraa heittoliikettä. Paketti putoaa alaspäin 550 m matkan. Yhtälöstä $y = \frac{1}{2}gt^2$ paketin putoamiseen kuluva aika on $t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 550\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} = 10{,}58917\,\text{s} \approx 11\,\text{s}.$

Tänä aikana paketti liikkuu vaakasuunnassa matkan

$$s = vt = \frac{198}{3{,}6}\,\text{m/s} \cdot 10{,}58917\,\text{s} \approx 582{,}40435\,\text{m}.$$

Kun ilmanvastusta ei oteta huomioon, paketti tulee pudottaa, kun kone on 580 m:n etäisyydellä kohteesta vaakasuunnassa mitattuna. Tällöin lentäjä näkee kohteen alaviistossa. Suuntakulma saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \frac{s}{y} = \frac{582{,}40435\,\text{m}}{550\,\text{m}}$, josta kulma

$\alpha \approx 47°.$

Pudotustilanteessa paketti jää ilmanvastuksen vaikutuksesta melko kauaksi kylästä, jos lentäjä ei osaa ottaa huomioon ilmanvastuksen vaikutusta. Paketin vaakasuora alkunopeus on suuri, jolloin ilmanvastus on suuri.

6-16. a) Luodin ja kappaleen törmäyksessä liikemäärä säilyy eli $m_1\bar{v}_1 = (m_1 + m_2)\bar{u}$. Kun luodin suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$, jossa luodin massa on m_1 = 2,69 g ja puukappaleen m_2 = 305 g. Luodin nopeus v_1 on

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot u.$$

Luodin ja puukappaleen yhteinen nopeus u törmäyksen jälkeen on $u = \frac{x}{t}$.

Yhtälöstä $y = \frac{1}{2}gt^2$ putoamisajaksi saadaan $t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}2\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} \approx 0{,}494619\,\text{s}$.

Luodin ja puukappaleen yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen on siis

$$u = \frac{x}{t} = \frac{1{,}5\,\text{m}}{0{,}494619\,\text{s}} \approx 3{,}03264\,\text{m/s}.$$

Luodin nopeudeksi saadaan

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u = \frac{0{,}00269\,\text{kg} + 0{,}305\,\text{kg}}{0{,}00269\,\text{kg}} \cdot 3{,}03264\,\text{m/s} = 346{,}881\,\text{m/s} \approx 350\,\text{m/s}.$$

b) Luodin liike-energia ennen törmäystä on

$$E_\text{a} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}00269\ \text{kg} \cdot (346{,}881\ \text{m/s})^2 \approx 161{,}8390\ \text{J}.$$

Luodin ja puukappaleen liike-energia törmäyksen jälkeen on

$$E_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2} \cdot (0{,}00269\,\text{kg} + 0{,}305\,\text{kg}) \cdot (3{,}03264\,\text{m/s})^2 \approx 1{,}41490\,\text{J}.$$

Alkuperäisestä energiasta muuntuu törmäyksessä muihin muotoihin

$$\frac{161{,}8390\ \text{J} - 1{,}41490\ \text{J}}{161{,}8390\ \text{J}} \cdot 100\ \% \approx 99\ \%.$$

6-17. Koripallon nopeus y-suunnassa on $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha_0 - gt$.

Lakikorkeudella y-suuntainen nopeus on nolla eli v_y = 0 m/s. Yhtälöstä $v_0 \sin\alpha_0 - gt = 0$ saadaan nousuajaksi $t = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} = \frac{4{,}2\,\text{m/s} \cdot \sin 62^\circ}{9{,}81\,\text{m/s}^2} \approx 0{,}38\,\text{s}$.

6-18. a) Kuulan nopeus vaakasuunnassa on

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = 13\,\text{m/s} \cdot \cos 45^\circ \approx 9{,}19239\,\text{m/s}.$$

Kuulan nopeus pystysuunnassa on

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha_0 - gt = 13\,\text{m/s} \cdot \sin 45^\circ - 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}50\,\text{s} \approx 4{,}28739\,\text{m/s}.$$

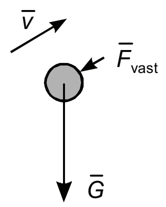
Kuulan nopeuden suuruus 0,50 s:n kuluttua on

$$v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \sqrt{(9{,}19239\,\mathrm{m/s})^2 + (4{,}28739\,\mathrm{m/s})^2} \approx 10\,\mathrm{m/s}.$$

Nopeuden suunta vaakatasoon nähden saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4{,}28739\,\mathrm{m/s}}{9{,}19239\,\mathrm{m/s}},\ \text{josta}\ \alpha \approx 25°.\ \text{Kuula on nousemassa ylöspäin.}$$

b) Kuulaan kohdistuvat lennon aikana paino ja pieni ilmanvastus.



6-19. a) Sijoitetaan koordinaatiston origo pallon lähtöpisteeseen, eli 1,0 m korkeudelle maan pinnasta. Lasketaan ensin pallon nousuaika. Lakikorkeudella pallon nopeus pystysuunnassa on nolla eli $v_y = v_0\sin\alpha_0 - gt = 0$. Pallon nousuaika on

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} = \frac{15\,\mathrm{m/s}\cdot\sin 35°}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \approx 0{,}87703\,\mathrm{s}.$$

Kun nousuaika sijoitetaan paikan y-koordinaatin yhtälöön, saadaan lakikorkeudeksi

$$y = v_0\sin\alpha_0\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = 15\ \mathrm{m/s}\cdot\sin 35°\cdot 0{,}87703\ \mathrm{s} - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}\cdot(0{,}87703\ \mathrm{s})^2$$
$$\approx 3{,}77282\ \mathrm{m}.$$

Pallo käy 3,77282 m:n korkeudella koordinaatiston nollatasoon nähden. Koska pallo lähti liikkeelle 1,0 m korkeudelta, nousukorkeus maan pinnalta mitattuna on

$$3{,}77282\ \mathrm{m} + 1{,}0\ \mathrm{m} \approx 4{,}8\ \mathrm{m}.$$

b) Pallon alkunopeuden komponentit ovat

$$v_{0x} = v_x = v_0\cos\alpha_0 = 15\ \mathrm{m/s}\cdot\cos 35° \approx 12{,}28728\ \mathrm{m/s}\ \text{ja}$$

$$v_{0y} = v_0\sin\alpha_0 = 15\ \mathrm{m/s}\cdot\sin 35° \approx 8{,}60365\ \mathrm{m/s}.$$

Kun jalkapallo putoaa maahan, sen y-koordinaatti on $y = -1{,}0$ m eli $v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = -1{,}0\,\mathrm{m}$. Ratkaistaan yhtälöstä $\frac{1}{2}gt^2 - v_{0y}t - 1{,}0\,\mathrm{m} = 0$ pallon lentoaika t käyttäen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

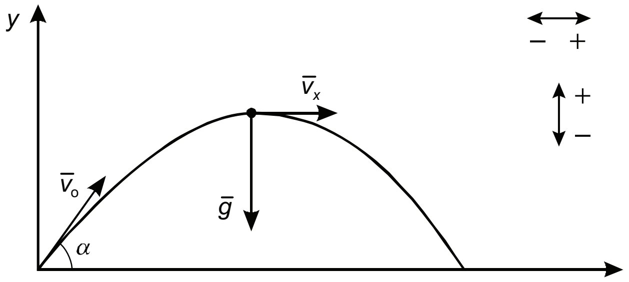
$$t = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^{\,2} - 4\cdot\frac{1}{2}g\cdot(-1{,}0\ \mathrm{m})}}{2\cdot\frac{1}{2}g} = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^{\,2} - 2\cdot g\cdot(-1{,}0\ \mathrm{m})}}{g}$$

$$= \frac{8{,}60365\ \mathrm{m/s} \pm \sqrt{(8{,}60365\ \mathrm{m/s})^2 - 2\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}\cdot(-1{,}0\ \mathrm{m})}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}.$$

Ajaksi t saadaan $t \approx 1{,}86346$ s ja $t \approx -0{,}109$ s. Hylätään ajan negatiivinen arvo.

Pallo putoaa maahan etäisyydellä $x = v_{0x}t = 12,28728$ m/s · 1,86346 s ≈ 23 m. Pallon lentomatka on lyhyempi, jos ilmanvastus otettaisiin huomioon.

6-20. a) Valitaan (x, y)-koordinaatiston suunnat ylös ja oikealle positiivisiksi.



Oletetaan kiveen kohdistuva ilmanvastus pieneksi. Kiven nopeusvektori on $\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j}$.
Vaakasuunnassa kiven liike on tasaista ja sen nopeus on koko heiton ajan

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha = 24\,\mathrm{m/s} \cdot \cos 55° \approx 14\,\mathrm{m/s}.$$

Pystysuunnassa kiven liike on tasaisesti kiihtyvää. Lakipisteessä pystysuuntainen nopeus on nolla eli $v_\mathrm{y} = 0$ m/s.

Lakipisteessä kiven nopeus on vaakasuora, $\bar{v} = 14\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\bar{i}$ ja kiihtyvyys on $\bar{a} = -9{,}81\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\bar{j}$.

b) Jaetaan kiihtyvyys nopeuden suuntaiseen ja sitä vastaan kohtisuoraan komponenttiin, jolloin nopeuden suuntaiseksi tangenttikiihtyvyydeksi saadaan $a_\mathrm{t} = g\sin\alpha$.
Tangenttikiihtyvyys saa siten suurimman arvonsa heti alussa ja juuri ennen osumista maahan, kun $\alpha = \pm 55°$. Suurin arvo on $|a_\mathrm{t}| = |g\sin\alpha| = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \sin 55° \approx 8{,}0\,\mathrm{m/s^2}$.

6-21. a) Mekaanisen energian säilymislain mukaan pallon liike-energia muuntuu potentiaalienergiaksi. Yhtälöstä $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ pallon nousukorkeudeksi saadaan

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(28\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \approx 40\,\mathrm{m}.$$

b) Lakipisteessä pallolla on vain vaakasuuntaista nopeutta. Pallon alkunopeuden vaakakomponentti on $v_x = v_{0x} = v_0\cos\alpha = 28\,\mathrm{m/s} \cdot \cos 25° \approx 25{,}37662\,\mathrm{m/s}$.

Pallon liike-energia muuntuu osittain potentiaalienergiaksi, koska vaakasuuntaisen nopeuden vuoksi pallolla on lakipisteessä liike-energiaa. Mekaaninen energia säilyy:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_{0x}^2.$$

Pallon nousukorkeus on $h = \dfrac{v_0^2 - v_{0x}^2}{2g} = \dfrac{(28\,\mathrm{m/s})^2 - (25{,}37662\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \approx 7{,}1\,\mathrm{m}.$

6-22. Koska pallo liikkuu 30,0 m 3,0 sekunnissa, pallon vaakasuora nopeus on

$$v_x = \frac{s}{t} = \frac{30,0\,\text{m}}{3,0\,\text{s}} = 10,0\,\text{m/s}\,.$$

Koska pallon alkunopeuden vaakakomponentti on $v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha_0$, alkunopeudeksi saadaan $v_0 = \dfrac{v_{0x}}{\cos\alpha} = \dfrac{10,0\,\text{m/s}}{\cos 25°} \approx 11,03378\,\text{m/s}$.

Pallon alkunopeuden pystysuora komponentti on $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$.

Pallon loppunopeuden pystysuora komponentti saadaan yhtälöstä

$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt = 11,03378\text{ m/s} \cdot \sin 25° - 9,81\text{ m/s}^2 \cdot 3,0\text{ s} \approx -24,76692\text{ m/s}$.

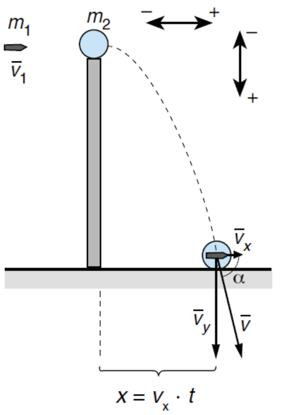
Pallon nopeus sen osuessa maahan on

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(10,0\,\text{m/s})^2 + (-24,76692\,\text{m/s})^2} \approx 26,70955\,\text{m/s}\,.$$

Valitaan potentiaalienergian nollataso maanpinnan tasolle. Mekaanisen energian säilymislaki $E_{\text{p,a}} + E_{\text{k,a}} = E_{\text{p,l}} + E_{\text{k,l}}$ saadaan muotoon $mgh + \frac{1}{2}mv_{\text{a}}^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{l}}^2$. Tornin korkeudeksi saadaan

$$h = \frac{\frac{1}{2}mv_{\text{l}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{a}}^2}{mg} = \frac{v_{\text{l}}^2 - v_{\text{a}}^2}{2g} = \frac{(26,70955\,\text{m/s})^2 - (11,03378\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 9,81\,\text{m/s}^2} \approx 30\,\text{m}\,.$$

6-23.



a) Kun luoti törmää lyijypalloon, törmäyksessä liikemäärä säilyy:
$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{u}$. Valitaan suunta oikealle positiiviseksi. Koska lyijypallo on ennen törmäystä paikallaan eli sen nopeus on nolla, saadaan yhtälö $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$.
Luodin ja lyijypallon yhteinen nopeus heti törmäyksen jälkeen on

$$u = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} v_1 = \frac{0,0080\,\text{kg}}{0,0080\,\text{kg} + 5,0\,\text{kg}} \cdot 820\,\text{m/s} \approx 1,30990\,\text{m/s}\,.$$

Törmäyksen jälkeen pallo joutuu vaakasuoraan heittoliikkeeseen. Pallon vaakasuora nopeus on $v_x = 1,30990$ m/s.

Valitaan suunta alas positiiviseksi. Pallon putoamisaika saadaan yhtälöstä $y = \frac{1}{2}gt^2$, josta putoamisaika on $t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} \approx 0{,}55300\,\text{s}$. Näin ollen pallon pystysuora nopeus sen osuessa maahan on $v_\text{y} = gt$ = 9,81 m/s^2 · 0,55300 s = 5,42493 m/s.

Pallon nopeus sen osuessa maahan on

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(1{,}30990\,\text{m/s})^2 + (5{,}42493\,\text{m/s})^2} \approx 5{,}6\,\text{m/s}.$$

Nopeuden suuntakulma saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{5{,}42493\,\text{m/s}}{1{,}30990\,\text{m/s}}$, josta kulma on $\alpha \approx 76°$.

Pallon nopeus sen osuessa maahan on 5,6 m/s ja suunta on 76° vaakatasosta alaspäin.

b) Pallo osuu maahan etäisyydellä $x = v_x \cdot t$ = 1,30990 m/s · 0,55300 s ≈ 0,72 m.

Pallo putoaa 0,72 m:n päähän pylvään juuresta.

Testaa, osaatko sivu 156

1. a b c **2.** a b c **3.** c **4.** b **5.** c **6.** b **7.** c **8.** b **9.** b **10.** a

Kertaustehtävät

1. c) Levyn kiertokulma on $\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}15\ \text{rad/s}^2 \cdot (16\ \text{s})^2 \approx 19\ \text{rad}.$

2. a) Ratanopeus on $v = \omega r = 15\frac{1}{\text{s}} \cdot 0{,}035\,\text{m} \approx 53\,\text{cm/s}.$

3. b) Tasapainoasemassa palloon kohdistuvat paino $\overline{G}$ ja langan jännitysvoima $\overline{T}$. Pallon liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\text{n}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $T - G = m\frac{v^2}{r}$. Langan jännitysvoiman suuruus on

$$T = m\frac{v^2}{r} + mg = 0{,}065\,\text{kg} \cdot \frac{(4{,}7\,\text{m/s})^2}{0{,}34\,\text{m}} + 0{,}065\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \approx 4{,}9\,\text{N}.$$

4. c) Saranoihin vaikuttava momentti on molemmissa tapauksissa yhtä suuri.
Yhtälöstä $M_2 = M_1$ eli $F_2 r_2 = F_1 r_1$ saadaan työntövoiman suuruudeksi

$$F_2 = \frac{F_1 r_1}{r_2} = \frac{87\,\text{N} \cdot 1{,}30\,\text{m}}{0{,}30\ \text{m}} \approx 380\ \text{N}.$$

5. c) Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla minkä tahansa akselin suhteen. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summa pisteen A suhteen on $\sum M_A = F_1 r_1 - F_2 r_2 = 0$. Etuhampaiden puristusvoiman suuruus on

$$F_2 = \frac{F_1 r_1}{r_2} = \frac{720\,\text{N} \cdot 30\,\text{mm}}{120\,\text{mm}} = 180\,\text{N}.$$

6. b) Tyhjän tölkin painopiste on korkeudella $\frac{11\,\text{cm}}{2} = 5{,}5\,\text{cm}.$ Pohjalla olevan juoman korkeus saadaan yhtälöstä $\pi r^2 h = V$.
Nestepinta on korkeudella

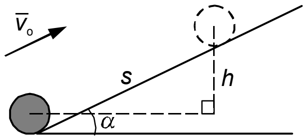
$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{100\,\text{cm}^3}{\pi(3{,}5\,\text{cm})^2} \approx 2{,}598448\,\text{cm}.$$

Oletetaan, että juoman tiheys on yhtä suuri kuin veden tiheys 1,0 kg/dm^3. Silloin juoman massa on 100 g ja sen painopiste on korkeudella $\frac{2{,}598448\,\text{cm}}{2} = 1{,}299224\,\text{cm}.$

Koko systeemin painopiste pöydänpinnan suhteen on korkeudella

$$y_0 = \frac{15\,\mathrm{g}\cdot 5{,}5\,\mathrm{cm} + 100\,\mathrm{g}\cdot 1{,}299224\,\mathrm{cm}}{115\,\mathrm{g}} \approx 1{,}8\,\mathrm{cm}.$$

7. c)



Kitkamomentin tekemä työ muuntaa pyörimisen rotaatioenergian potentiaalienergiaksi ja sylinteriin kohdistuva painon tekemä työ etenemisen translaatioenergian potentiaalienergiaksi, kun vieriminen tapahtuu liukumatta. Kitka on lepokitkaa. Oletetaan, että liikevastuksia ei ole. Mekaanisen energian säilymislain mukaan on

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}J\omega_0^2 = mgh.$$

Nousukorkeus on $h = s \cdot \sin\alpha$, jossa s on vierimismatka. Sijoitetaan mekaanisen energian säilymislain yhtälöön kulmanopeuden ja hitausmomentin yhtälöt $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$ ja $J = \frac{1}{2}mr^2$ ja ratkaistaan alkunopeus:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{4}v_0^2 = gh$$

$$\frac{3}{4}v_0^2 = gh$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \sqrt{\frac{4}{3}gs\sin\alpha} = \sqrt{\frac{4}{3}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1{,}2\,\mathrm{m}\cdot\sin 25°} \approx 2{,}6\,\mathrm{m/s}.$$

8. b) Radallaan olevan satelliitin liikeyhtälö on $\sum\overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$. Kun suunta kohti Maan keskipistettä on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $\gamma\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, jossa M on Maan massa, m satelliitin massa ja v ratanopeus. Satelliitin ratanopeus on

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67259\cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}\cdot 5{,}974\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{750\,\mathrm{km} + 6378\,\mathrm{km}}} \approx 7{,}5\,\mathrm{km/s}.$$

9. c) Kiven nopeus ajan funktiona on $v = v_0 - gt.$ Lakipisteessä nopeus on $v = 0$ m/s, jolloin nousuaika on $t = \frac{v_0}{g} = \frac{20\ \mathrm{m/s}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} \approx 2{,}0$ s.

10. c) Alkunopeuden pystykomponentti on

$$v_{oy} = v_0 \sin 36° = 27\,\text{m/s} \cdot \sin 36° \approx 15{,}87020\,\text{m/s}.$$

Lakipisteessä kappaleen nopeuden pystykomponentti $v_y = 0.$ Yhtälöstä $v_y = v_{0y} - gt = 0$ nousuaika on $t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{15{,}87020\,\text{m/s}}{9{,}81\,\text{m/s}^2} \approx 1{,}61776\,\text{s}$. Lentoaika on 2· 1,61776 s ≈ 3,2 s.

11.a) Kiertokulma on $175° = 175 \cdot \frac{\pi}{180}\text{rad} \approx 3{,}1\,\text{rad}.$

b) Kiertokulma on $15\,\text{rad} = 15 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 860°.$

12. a) Pulsarin kierrosaika on $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{642\,1/\text{s}} \approx 1{,}56$ ms.

Kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 642\ \frac{1}{\text{s}} \approx 4030\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$

13. a) Napakelkan ratanopeus on $v = \frac{2\pi r}{T}$, josta kelkan kierrosaika on

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 4{,}5\text{ m}}{2{,}5\text{ m/s}} = 11{,}30973\text{ s} \approx 11\text{ s}.$$

b) Pyörimisnopeus on $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{11{,}30973\,\text{s}} \approx 0{,}088\frac{\text{r}}{\text{s}}.$

c) Newtonin I lain mukaan kelkka jatkaa suoraviivaisesti liikettään radan tangentin suuntaan.

14. a) Pyörän säde on r = 4,25 cm, joten sen pyörähtäessä yhden kierroksen hiihtäjä etenee matkan $s = 2\pi r.$ Lenkin aikana kierroksia tulee $\frac{10\,000\,\text{m}}{2\pi \cdot 0{,}0425\,\text{m}} \approx 37\,000.$

b) Renkaan kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 2{,}5\,\text{rad/s} = 5\pi\,\text{rad/s} \approx 15{,}7\,\text{rad/s}.$

Kiertokulma on $\varphi = \omega t = 5\pi\,\text{rad/s} \cdot 6 \cdot 60\,\text{s} \approx 5654{,}86678\,\text{rad}.$

Pyöräilijän kuudessa minuutissa pyöräilemä matka on

$$s = \varphi r = 5654{,}86678\,\text{rad} \cdot 0{,}34\,\text{m} \approx 1{,}9\,\text{km}.$$

Rengas pyörähtää kokonaisia kierroksia $\frac{5654{,}86678\text{ rad}}{2\pi} \approx 900$ kpl.

15. a) Koska kiekot on yhdistetty luistamattomalla hihnalla toisiinsa, niiden ratanopeudet ovat yhtä suuret: $v_1 = v_2$ eli $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, josta saadaan $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$. Koska säteiden suhde on $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{8,0\,\text{cm}}{20\,\text{cm}} = \dfrac{2}{5}$, kulmanopeuksien suhde on 5:2 (= 2,5:1).

b) Kun pienemmän kiekon pyörimisnopeus on 5,0 r/s, sen kulmanopeus on

$$\omega_1 = 2\pi n = 2\pi \cdot 5,0\,\text{rad/s} \approx 31,41593\,\text{rad/s}.$$

Isomman kiekon kulmanopeus on

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 = \frac{2}{5} \cdot 31,41593\,\text{rad/s} \approx 12,56637\,\text{rad/s}.$$

Tämän kulmanopeuden saavuttamiseen kuluu aikaa kiihdyttämisen alusta lukien

$$\Delta t = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{12,56637\ \text{rad/s}}{1,25\ \text{rad/s}^2} \approx 10\ \text{s}.$$

16. a) Akselin kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{4,3\,\text{rad/s} - 0,52\,\text{rad/s}}{2,4\,\text{s}} = 1,575\,\text{rad/s}^2 \approx 1,6\,\text{rad/s}^2.$$

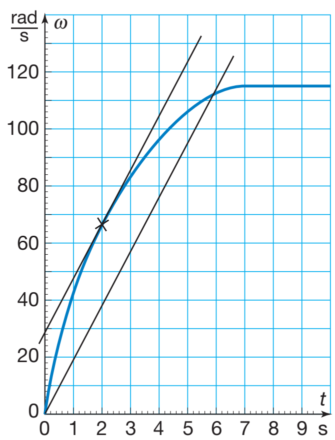
b) Kiihdytyksen aikana kiertokulma on

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0,52\,\text{rad/s} \cdot 2,4\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 1,575\,\text{rad/s}^2 \cdot (2,4\,\text{s})^2 = 5,784\,\text{rad}.$$

Kiertokulman suuruus asteina on $5,784\,\text{rad} = 5,784 \cdot \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 330^\circ$.

17. a) Rummun keskikulmakiihtyvyys aikavälillä 0,0 s…6,0 s on

$$\alpha_\text{k} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{114\ \text{rad/s} - 0,0\ \text{rad/s}}{6,0\ \text{s} - 0,0\ \text{s}} = \frac{114\ \text{rad/s}}{6,0\ \text{s}} = 19\ \text{rad/s}^2.$$



b) Jotta keskikulmakiihtyvyys ja hetkellinen kiihtyvyys olisivat yhtä suuret, vastaavien suorien on oltava yhdensuuntaiset. Kuvaajalle kohtaan 2,0 s piirretty tangentti on yhdensuuntainen keskikulmakiihtyvyyttä kuvaavan suoran kanssa. Näin ollen hetkellä 2,0 s hetkellinen kulmakiihtyvyys on sama kuin keskikulmakiihtyvyys välillä 0,0 s … 6,0 s.

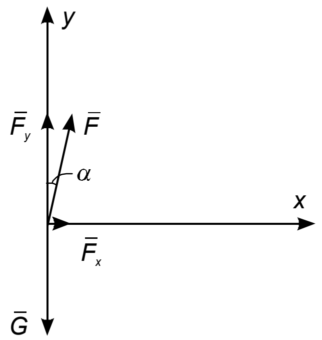
18. a) Auton kulmanopeus on $\omega = \dfrac{v}{r} = \dfrac{\frac{110}{3{,}6}\,\text{m/s}}{53\,\text{m}} \approx 0{,}58\,\text{rad/s}.$

b) Auton radalla pitävän voiman suuruus on $F = m\dfrac{v^2}{r} = 1050\,\text{kg}\cdot\dfrac{\left(\frac{110}{3{,}6}\,\text{m/s}\right)^2}{53\,\text{m}} \approx 18\,\text{kN}.$

c) Auton pitää radalla (tiellä) auton renkaiden ja tienpinnan välinen lepokitka. Jos kitka on liian pieni, auto suistuu tieltä. Jos auto lähtee liukumaan, kyseessä ei ole enää lepokitka, vaan lepokitka on muuttunut liukukitkaksi.

d) Vaikka auton ratavauhti on vakio, nopeuden suunta kuitenkin muuttuu koko ajan. Autolla on normaalikiihtyvyyttä, joka suunta on kohti radan keskipistettä.

19. Linnun liikeyhtälö vaakasuunnassa on $\sum \bar{F}_x = m\bar{a}_\text{n}$. Valitaan suunta kohti radan keskipistettä positiiviseksi.



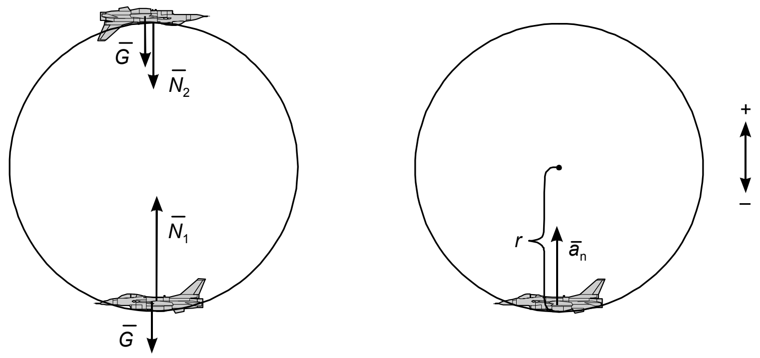
Linnun ratavauhti ympyräradalla on $v = \dfrac{2\pi r}{T} = \dfrac{2\pi\cdot 15\text{ m}}{16\text{ s}} \approx 5{,}8905\text{ m/s}.$ Voiman suuruus vaakasuunnassa on $F_x = ma_\text{n} = m\dfrac{v^2}{r} = 0{,}32\text{ kg}\cdot\dfrac{(5{,}8905\text{ m/s})^2}{15\text{ m}} \approx 0{,}74022\text{ N}.$

Koska linnulla ei ole kiihtyvyyttä pystysuunnassa, linnun liikeyhtälö pystysuunnassa on $\sum \bar{F}_y = \bar{0}$ eli $\bar{F}_y + \bar{G} = \bar{0}$. Kun valitaan suunta ylös positiiviseksi, skalaariyhtälöstä $F_y - G = 0$ saadaan $F_y = G = mg = 0{,}32\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 3{,}1392\,\text{N}.$

Nostovoiman suuruus on $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(0{,}74022\text{ N})^2 + (3{,}1392\text{ N})^2} \approx 3{,}2\text{ N}.$

Nostovoiman suuntakulma pystytasoon nähden: $\tan\alpha = \dfrac{F_x}{F_y} = \dfrac{0{,}74022\text{ N}}{3{,}1392\text{ N}}$, josta $\alpha \approx 13°$.

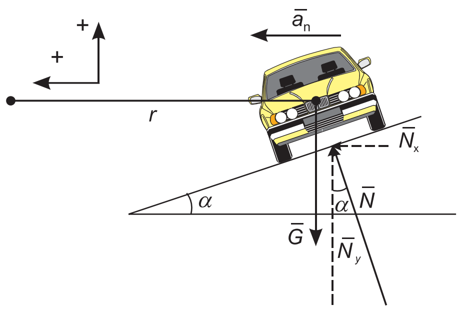
20. a) Oletetaan, että kysytyillä hetkillä tangenttikiihtyvyys on nolla. Lentäjään kohdistuvat paino $\overline{G}$ ja penkistä tukivoima $\overline{N}$.



b) Lentäjän liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_n$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}_n$. Sovitaan suunta kohti radan keskipistettä positiiviseksi. Ratkaistaan skalaariyhtälöstä $N - G = ma_n$ tukivoiman suuruus: $N = ma_n + G = m\dfrac{v^2}{r} + G$. Tukivoiman suuruus voi maksimissaan olla $N \leq 9G$ eli $m\dfrac{v^2}{r} + mg \leq 9mg$. Yhtälöstä $\dfrac{v^2}{r} + g \leq 9g$ eli $\dfrac{v^2}{r} \leq 8g$ säteen suuruudelle saadaan ehto:

$$r \geq \frac{v^2}{8g} = \frac{\left(\dfrac{1500}{3,6}\,\text{m/s}\right)^2}{8 \cdot 9,81\,\text{m/s}^2} \approx 2,2\,\text{km}.$$

21. Kun vastusvoimat ovat pienet, autoon kohdistuvat voimat ovat paino ja tienpinnan tukivoima. Auton radan säteeksi oletetaan kohtisuora etäisyys radan keskipisteeseen. Auton tiellä pitävä kokonaisvoima suuntautuu kaarteen keskipistettä kohti ja on vaakasuora. Liikeyhtälö vaakasuunnassa on $\sum \overline{F}_x = m\overline{a}_n$. Pystysuunnassa liikeyhtälö on $\sum \overline{F}_y = \overline{0}$, koska autolla ei ole kiihtyvyyttä pystysuunnassa.



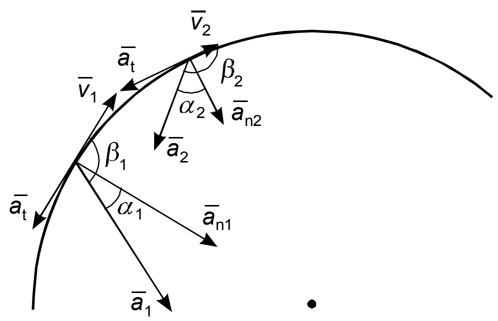
Kun valitaan suunnat keskipistettä kohti ja ylös positiivisiksi, saadaan skalaariyhtälöt

$N \sin\alpha = m\dfrac{v^2}{r}$ ja $N\cos\alpha - mg = 0$. Tukivoiman suuruudelle saadaan yhtälö $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$.

Kun yhtälö $N=\dfrac{mg}{\cos\alpha}$ sijoitetaan yhtälöön $N\sin\alpha=m\dfrac{v^2}{r}$, saadaan $\dfrac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha=m\dfrac{v^2}{r}$, josta vauhdiksi saadaan

$$v=\sqrt{\frac{rg}{\cos\alpha}\sin\alpha}=\sqrt{rg\tan\alpha}=\sqrt{240\ \text{m}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot\tan 12{,}0^\circ}\approx 22\ \text{m/s}.$$

22. Ympyräradalla liikkuvalla veturilla on normaalikiihtyvyyttä ja tangenttikiihtyvyyttä, koska sen ratanopeus muuttuu. Kuviossa veturi liikkuu myötäpäivään.



Alkutilanne:

Alussa veturin normaalikiihtyvyyden suuruus on

$$a_{n1}=\frac{v^2}{r}=\frac{(\frac{95}{3{,}6}\ \text{m/s})^2}{540\ \text{m}}\approx 1{,}2896\ \text{m/s}^2$$

ja tangenttikiihtyvyyden suuruus

$$a_t=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\frac{60}{3{,}6}\ \text{m/s}-\frac{95}{3{,}6}\ \text{m/s}}{11\ \text{s}}\approx -0{,}88384\ \text{m/s}^2.$$

Veturin kiihtyvyyden suuruus alussa on

$$a_1=\sqrt{a_t^2+a_{n1}^2}=\sqrt{(-0{,}88384\ \text{m/s}^2)^2+(1{,}28958\ \text{m/s}^2)^2}\approx 1{,}6\ \text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden ja ympyräradan säteen välinen kulma:

$$\tan\alpha_1=\left|\frac{a_t}{a_{n1}}\right|=\left|\frac{-0{,}88384\ \text{m/s}^2}{1{,}2896\ \text{m/s}^2}\right|,$$

josta kulma $\alpha_1\approx 34{,}42559^\circ$.

Nopeuden ja kiihtyvyyden välinen kulma on

$$\beta_1=90^\circ+\alpha_1=90^\circ+34{,}42559^\circ\approx 120^\circ.$$

Lopputilanne:

Lopussa veturin normaalikiihtyvyyden suuruus on

$$a_{n2} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{60}{3,6}\ \text{m/s}\right)^2}{540\ \text{m}} \approx 0,51440\ \text{m/s}^2$$

ja tangenttikiihtyvyyden suuruus on yhtä suuri kuin alkutilanteessakin:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{60}{3,6}\ \text{m/s} - \frac{95}{3,6}\ \text{m/s}}{11\ \text{s}} \approx -0,88384\ \text{m/s}^2.$$

Veturin kiihtyvyys lopussa on

$$a_2 = \sqrt{a_t^2 + a_{n2}^2} = \sqrt{(-0,88384\ \text{m/s}^2)^2 + (0,51440\ \text{m/s}^2)^2} \approx 1,0\ \text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden ja ympyräradan säteen välinen kulma:

$$\tan\alpha_2 = \left|\frac{a_t}{a_{n2}}\right| = \left|\frac{-0,88384\ \text{m/s}^2}{0,51440\ \text{m/s}^2}\right|, \text{ josta saadaan } \alpha_2 \approx 59,80034°.$$

Nopeuden ja kiihtyvyyden välinen kulma on

$$\beta_2 = 90° + \alpha_2 = 90° + 59,80034° \approx 150°.$$

23. Puupalan liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$, jossa puupalan kiihtyvyys on normaalikiihtyvyyden ja tangenttikiihtyvyyden vektorisumma: $\overline{a} = \overline{a}_n + \overline{a}_t$.

Puupala pysyy ympyräradalla kitkan $F_\mu = \mu N$ takia. Sovitaan suunta keskipistettä kohti positiiviseksi. Skalaariyhtälö $F_\mu = ma$ saadaan muotoon $\mu N = m\sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ eli $\mu mg = m\sqrt{a_n^2 + a_t^2}$, josta kitkakerroin on $\mu = \frac{\sqrt{a_n^2 + a_t^2}}{g}$.

Puupalan normaalikiihtyvyyden suuruus on

$$a_n = \omega^2 r = (\alpha t)^2 r = (0,25\ \text{rad/s}^2 \cdot 6,5\ \text{s})^2 \cdot 1,5\ \text{m} \approx 3,96094\ \text{m/s}^2.$$

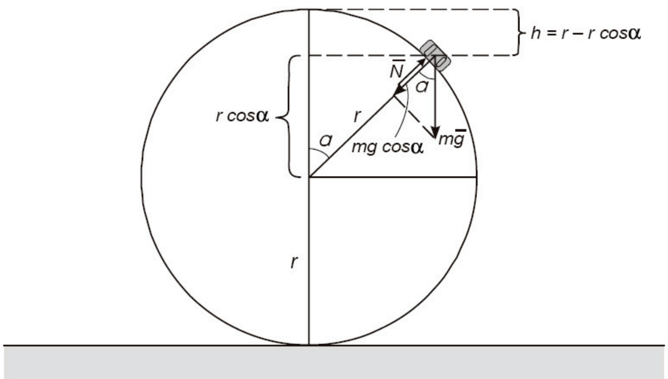
Puupalan tangenttikiihtyvyyden suuruus on

$$a_t = \alpha r = 0,25\ \text{rad/s}^2 \cdot 1,5\ \text{m} = 0,375\ \text{m/s}^2.$$

Kitkakerroin on

$$\mu = \frac{\sqrt{a_n^2 + a_t^2}}{g} = \frac{\sqrt{(3,96094\ \text{m/s}^2)^2 + (0,375\ \text{m/s}^2)^2}}{9,81\ \text{m/s}^2} \approx 0,41.$$

24. Koska kappale liukuu kitkatta *r*-säteisen pallo pintaa alaspäin, voidaan soveltaa mekaanisen energian säilymislakia. Esineeseen kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi, jolloin saadaan yhtälö $mgh = \frac{1}{2}mv^2.$ Irtoamishetkellä kappale on pudonnut pystysuunnassa matkan $h = r - r\cos\alpha.$



Sijoittamalla $h = r - r\cos\alpha$ yhtälöön $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ saadaan $\frac{1}{2}mv^2 = mg(r - r\cos\alpha),$ josta vauhdin neliö on $v^2 = 2gr(1 - \cos\alpha).$

Kun kappale liukuu pallopinnalla, säteen suunnassa vaikuttavat painon $\overline{G} = m\overline{g}$ säteen suuntainen komponentti pallon keskipistettä kohti ja pinnan tukivoima pallon pinnasta kappaleeseen. Kappaleen liikeyhtälö on $\sum\overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$ eli $\overline{G}_\mathrm{r} + \overline{N} = m\overline{a}_\mathrm{n}.$ Sovitaan suunta pallon keskipistettä kohti positiiviseksi. Sijoitetaan skalaariyhtälöön $mg\cos\alpha - N = m\frac{v^2}{r}$ vauhdin neliön yhtälö $v^2 = 2gr(1 - \cos\alpha)$ ja otetaan huomioon, että kappaleen irtoamishetkellä tukivoima $\overline{N} = \overline{0}$. Saadaan yhtälö $mg\cos\alpha = m\frac{2gr(1 - \cos\alpha)}{r}$ eli $\cos\alpha = 2(1 - \cos\alpha)$, josta $\cos\alpha = 2 - 2\cos\alpha$ ja edelleen $3\cos\alpha = 2.$

Yhtälöstä $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ saadaan kulmaksi $\alpha \approx 48{,}2°.$

Esineen irtoamiskorkeus pallon alareunasta mitattuna on

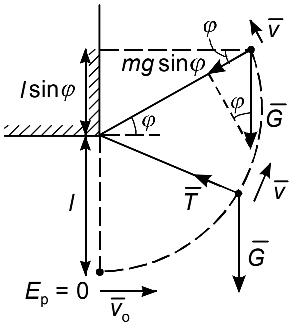
$$r + r\cos\alpha = r(1 + \cos 48{,}2°) \approx 1{,}67r.$$

25. Palloon kohdistuvat heilahduksen aikana langan jännitysvoima $\overline{T}$ ja paino $\overline{G}$. Ilmanvastus on pieni, koska pallo on pieni. Pallon liikeyhtälö on $\sum\overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}_\mathrm{n}$. Valitaan suunnat alas ja kohti radan keskipistettä positiivisiksi. Pallo alkaa poiketa ympyräradalta, kun jännitysvoima $\overline{T} = \overline{0}$. Tällöin kulma on φ = 125° – 90° = 35°.

Näin ollen skalaariyhtälö saadaan muotoon $0 + G_x = ma_\mathrm{n}$ eli $mg\sin\varphi = m\frac{v^2}{l}.$

Pallon nopeuden neliölle saadaan yhtälö $v^2 = gl\sin\varphi$.

Kun pallo alkaa poiketa ympyräradalta, se on noussut korkeudelle $h = l + l\sin\varphi$. Alussa pallolla oli liike-energiaa ja lopussa liike-energiaa ja potentiaalienergiaa. Ympyräradalta poikkeamisen hetkellä pallolla on vielä nopeutta ja siksi potentiaalienergian lisäksi liike-energiaa. Palloon kohdistuva paino tekee työtä palloon ja muuntaa liike-energiaa osittain potentiaalienergiaksi.



Mekaanisen energian säilymislain mukaan on $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$. Sijoittamalla tähän yhtälöön nopeuden neliön ja nousukorkeuden yhtälöt saadaan

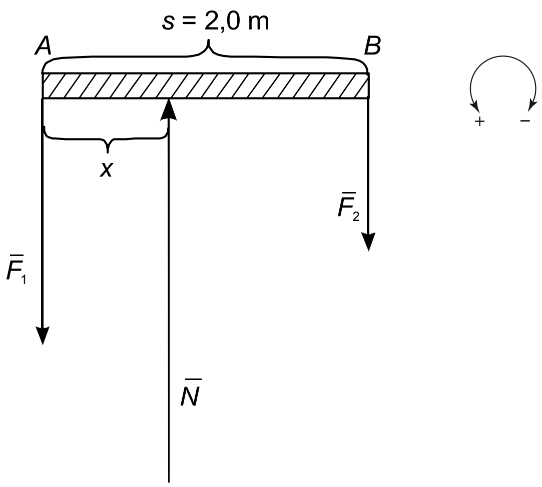
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(gl\sin\varphi) + mg(l + l\sin\varphi) \quad \Big|\cdot\frac{2}{m}$$

$$v_0^2 = gl\sin\varphi + 2gl + 2gl\sin\varphi = 3gl\sin\varphi + 2gl = gl(3\sin\varphi + 2).$$

Pallon lähtönopeudeksi saadaan

$$v_0 = \sqrt{gl(3\sin\varphi + 2)} = \sqrt{9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}85\ \mathrm{m} \cdot (3\sin 35° + 2)} \approx 5{,}6\ \mathrm{m/s}.$$

26.



Momentti akselin A suhteen on $M_A = -F_2 \cdot s = -35\,\mathrm{N} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m} = -70\,\mathrm{Nm}$.

Momentti akselin B suhteen on $M_B = F_1 \cdot s = 55\,\mathrm{N} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m} = 110\,\mathrm{Nm}$.

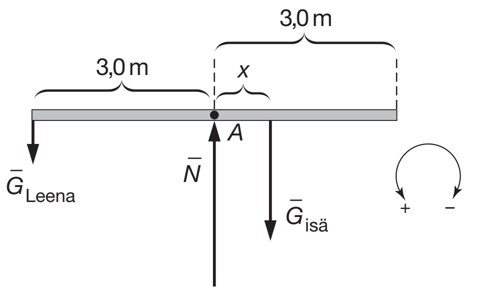
Voimien resultantin suuruus on R = 55 N + 35 N = 90 N ja suunta alas. Kaikkien momenttien vääntövaikutus on nolla minkä tahansa akselin suhteen, Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summa akselin A suhteen on

$$\sum M_A = Nx - F_2 s = 0.$$

Resultanttivoiman suhteen vastakkaissuuntaisen voiman $\bar{N}$ vaikutussuoran paikka akselista A lukien on

$$x = \frac{F_2 s}{N} = \frac{35\,\mathrm{N} \cdot 2,0\,\mathrm{m}}{90\,\mathrm{N}} \approx 0,78\,\mathrm{m}.$$

27.



Leenan ja isän tulee asettua eri puolille tukipistettä eli laudan keskikohtaa A. Olkoon isän etäisyys tukipisteestä x. Jotta lauta pysyy tasapainossa, on momenttien summan oltava nolla minkä tahansa laudan akselin suhteen eli $\sum M = 0$. Kun suunta vastapäivään on positiivinen, keskipisteen suhteen on $\sum M_A = M_{\text{isä}} - M_{\text{Leena}} = 0$ eli

$$G_{\text{isä}} \cdot x - G_{\text{Leena}} \cdot 3,0\,\mathrm{m} = 0.$$

Isän etäisyys tukipisteestä on

$$x = \frac{G_{\text{Leena}} \cdot 3,0\,\mathrm{m}}{G_{\text{isä}}} = \frac{m_{\text{Leena}} g \cdot 3,0\,\mathrm{m}}{m_{\text{isä}} g} = \frac{m_{\text{Leena}} \cdot 3,0\,\mathrm{m}}{m_{\text{isä}}}$$
$$= \frac{30\,\mathrm{kg} \cdot 3,0\,\mathrm{m}}{80\,\mathrm{kg}} = 1,125\,\mathrm{m}.$$

Isän etäisyys Leenasta on silloin 1,125 m + 3,0 m ≈ 4,1 m.

28. a) Jos kiertosuunta myötäpäivään on negatiivinen, momentti on

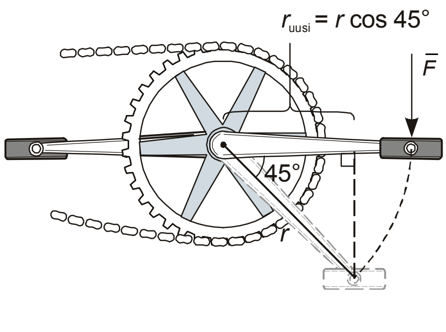
$$M = -Fr = -35\,\mathrm{N} \cdot 0,17\,\mathrm{m} \approx -6,0\,\mathrm{Nm}.$$

b) Voiman vaikutussuoran etäisyys keskiöstä on nyt pienempi kuin a-kohdassa. Vääntövarren pituus on nyt

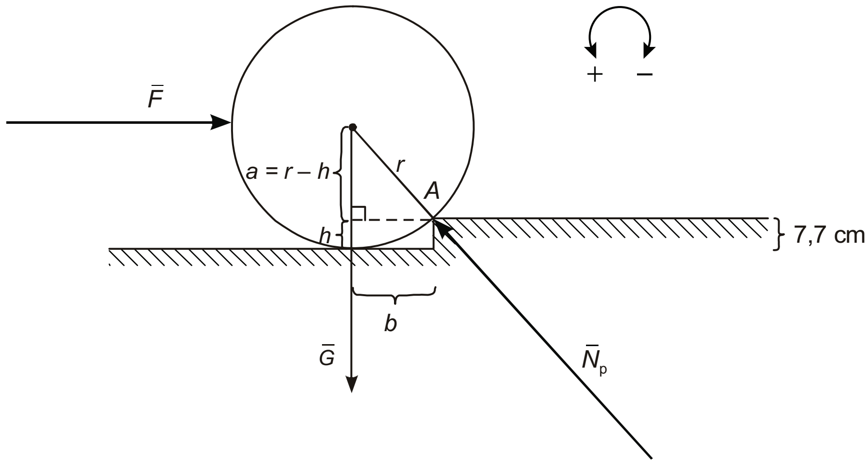
$$r_{\text{uusi}} = 0,17\,\mathrm{m} \cdot \cos 45° = 0,120208\,\mathrm{m}.$$

Momentti on

$$M = -Fr_{\text{uusi}} = -35\,\mathrm{N} \cdot 0,120208\,\mathrm{m} \approx -4,2\,\mathrm{Nm}.$$



29. Puupölkkyyn vaikuttavat voimat ovat pölkkyyn kohdistuva paino $\overline{G}$, vaakasuoran maanpinnan tukivoima $\overline{N}_\mathrm{m}$, portaan reunan tukivoima $\overline{N}_\mathrm{p}$ ja työntövoima $\overline{F}$. Tarkastellaan tilannetta, jossa pölkky on juuri irtoamassa maan pinnalta. Tällöin maanpinnan tukivoima $\overline{N}_\mathrm{m}$ on nolla. Lasketaan momenttien summa akselin A suhteen, tällöin voiman $\overline{N}_\mathrm{p}$ momentti on nolla. Selvitetään ensin pölkkyyn kohdistuvan painon ja työntövoiman varret.



Työntövoiman $\overline{F}$ varsi on $a = r - h = \dfrac{0{,}66\ \mathrm{m}}{2} - h = 0{,}33\ \mathrm{m} - 0{,}077\ \mathrm{m} = 0{,}253\ \mathrm{m}$.

Painon $\overline{G}$ varsi b saadaan Pythagoraan lauseen avulla: $b^2 + (r-h)^2 = r^2$, josta saadaan

$$b = \pm\sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{(0{,}33\ \mathrm{m})^2 - (0{,}253\ \mathrm{m})^2} \approx 0{,}211875\ \mathrm{m}.$$

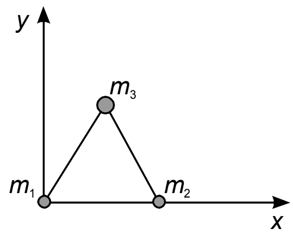
Hyväksytään vain varren positiivinen arvo. Tarkastellaan tilannetta, kun pölkky on juuri irtoamassa maan pinnalta. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summa akselin A suhteen on $\sum M_A = -Fa + Gb = 0$.

Yhtälöstä saadaan pienimmäksi työntövoimaksi

$$F = \frac{Gb}{a} = \frac{144\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0{,}211875\,\mathrm{m}}{0{,}253\,\mathrm{m}} \approx 1200\ \mathrm{N}.$$

30. a) Paksumman pään massa on suurempi. Painopiste ei ole keskellä karttakeppiä, vaan lähempänä paksua päätä. Painopisteestä tuettuna karttakeppi pysyy tasapainossa. Silloin kepin päiden momenttien summa on nolla tukipisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Lyhyempi eli paksumpi pää on raskaampi, koska tähän osaan kohdistuva paino on suurempi ja vääntövarsi näin ollen pienempi. Pidemmän osan vääntövarsi on suurempi, joten siihen kohdistuva paino on pienempi kuin lyhyemmän osan. Lyhyemmän osan massa on siis suurempi kuin pidemmän osan massa.

b)



Sijoitetaan koordinaatisto kuvan mukaisesti siten, että kuula m_1 sijaitsee origossa. Lasketaan ylimmän kappaleen paikka. Kolmion kaikki kulmat ovat $60°$. Ylimmän kappaleen paikan x-koordinaatti on $\frac{140\,\text{cm}}{2} = 70\,\text{cm}$.

Yhtälöstä $\tan 60° = \frac{y}{70\,\text{cm}}$ saadaan ylimmän kappaleen paikan y-koordinaatiksi

$$y = 70\,\text{cm} \cdot \tan 60° = 121{,}244\,\text{cm}.$$

Tällöin kuulien koordinaatit ovat

Kuula	Massa/kg	x/cm	y/cm
m_1	1,2	0	0
m_2	2,5	140	0
m_3	3,45	70	121,244

Painopisteen paikan x-koordinaatti on

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{1{,}2\,\text{kg} \cdot 0 + 2{,}5\,\text{kg} \cdot 140\,\text{cm} + 3{,}45\,\text{kg} \cdot 70\,\text{cm}}{1{,}2\,\text{kg} + 2{,}5\,\text{kg} + 3{,}45\,\text{kg}} \\ &\approx 83\,\text{cm} \end{aligned}$$

ja y-koordinaatti

$$\begin{aligned} y &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{1{,}2\,\text{kg} \cdot 0 + 2{,}5\,\text{kg} \cdot 0 + 3{,}45\,\text{kg} \cdot 121{,}244\,\text{cm}}{1{,}2\,\text{kg} + 2{,}5\,\text{kg} + 3{,}45\,\text{kg}} \\ &\approx 59\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Painopiste on tässä koordinaatistossa kohdassa (83 cm, 59 cm).

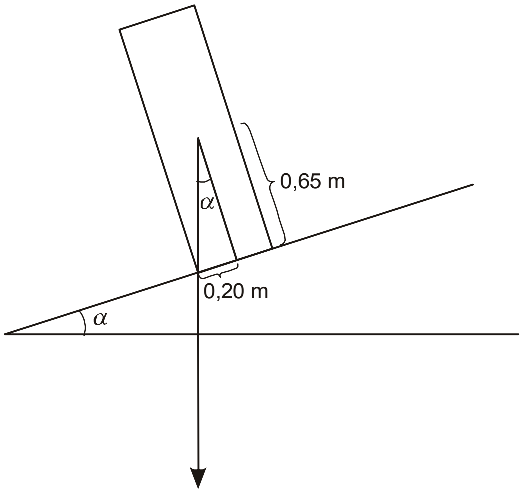
31. a) Ripusta kappale jostakin kohdasta. Kiinnitä luotilanka (lanka, jonka toisessa päässä on paino) ripustuspisteeseen ja piirrä luotilankaa käyttäen tästä pisteestä lähtien kappaleen pintaan suora viiva alas. Ripusta sitten kappale muistakin kohdista esimerkiksi kolme kertaa ja piirrä luotisuorat. Suorat leikkaavat kappaleen painopisteen kohdalla.

b) Painopisteen paikka pystysuunnassa on

$$y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_3 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{8{,}7\,\mathrm{kg}\cdot 2{,}0\,\mathrm{m} + 7{,}3\,\mathrm{kg}\cdot 6{,}0\,\mathrm{m} + 5{,}9\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m}}{8{,}7\,\mathrm{kg} + 7{,}3\,\mathrm{kg} + 5{,}9\,\mathrm{kg}} \approx 5{,}5\,\mathrm{m}.$$

Painopiste sijaitsee 5,5 m lipputangon tyvestä ylöspäin.

32.



Säiliö pysyy pystyssä, jos sen painopisteen kautta kulkeva luotisuora kulkee tukipinnan kautta. Rajatapauksessa saadaan yhtälö $\tan\alpha = \dfrac{0{,}20\,\mathrm{m}}{0{,}65\,\mathrm{m}}$, josta kaltevuuskulma on $\alpha \approx 17°$.

33. Kuvassa a pyörä muuttaa vain voiman suuntaa, se ei ole nostettavana kuormana. Langan jännitysvoima on yhtä suuri kuin punnukseen kohdistuvan painon suuruus. Vaaka näyttä langan jännitysvoiman suuruuden eli vaa´an näyttö on yhtä suuri kuin punnukseen kohdituva paino eli G_{punnus} = 1,5 N.

Kuvassa b pyörään ja punnukseen kohdistuvan painon suuruinen voima kuormittaa kahta alemman pyörän ripustuslankaa. Vaaka näyttää langan jännitysvoiman suuruuden eli

$$\frac{1}{2}(G_{\mathrm{punnus}} + G_{\mathrm{pyörä}}) = \frac{1}{2}(1{,}5\ \mathrm{N} + 0{,}2\ \mathrm{N}) = 0{,}85\ \mathrm{N}.$$

34. a) Yhden pyörähdyksen aikana voiman $\overline{F}_2$ vaikutuspiste siirtyy matkan $2\pi r_2$. Voiman $\overline{F}_2$ vaikutuspiste siirtyy matkan $(2\pi r_2 - 2\pi r_1)/2$ ylöspäin.

Ketjun vetämisessä tehty työ on yhtä suuri kuin kappaleen nostamisessa tehty työ, jolloin

$$W_2 = W_1 \text{ eli } F_2 \cdot 2\pi r_2 = F_1 \cdot \frac{2\pi r_2 - 2\pi r_1}{2},$$

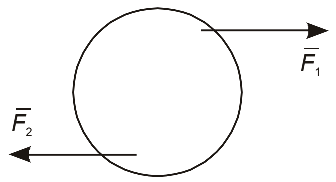
josta saadaan $F_2 = \dfrac{r_2 - r_1}{2r_2} F_1$.

Säteiden lähentyessä toisiaan, niiden erotus lähenee nollaa. Tällöin tarvittava vetovoima pienenee, jos kuorma pysyy samana. Differentiaalitaljalla voidaan nostaa sitä suurempi kuorma, mitä pienempi pyörien säteiden erotus on.

b) Tasapainoehdosta $F_2 = \dfrac{r_2 - r_1}{2r_2} F_1$ saadaan kuormaksi

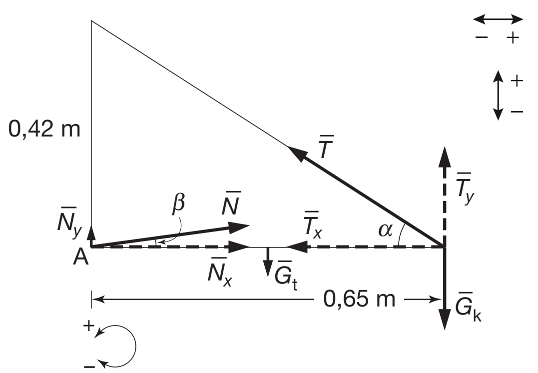
$$F_1 = \frac{F_2}{\dfrac{r_2 - r_1}{2r_2}} = \frac{850\,\text{N}}{\dfrac{22\,\text{cm} - 15\,\text{cm}}{2 \cdot 22\,\text{cm}}} \approx 5{,}3\,\text{kN}.$$

35. a) Väite on väärin. Kappale on tasapainossa etenemisen suhteen, jos kokonaisvoima on nolla, ja pyörimisen suhteen, jos kokonaismomentti on nolla. Esimerkiksi kuvan tilanteessa kokonaisvoima on nolla, mutta silti voimat aiheuttavat kappaleeseen sitä kääntämään pyrkivän momentin.



b) Väite on väärin. Jos kokonaismomentti on nolla, niin kappale on levossa pyörimisen suhteen tai sitten se pyörii tasaisesti. Tällöin pyörimissuunnassa voiman momentti on yhtä suuri kuin vastusvoimien aiheuttama momentti. Jos esimerkiksi auton, polkupyörän tai junan pyörät pyörivät vakiona pysyvällä kulmanopeudella, pyörään kohdistuvien momenttien summa on nolla. Tällöin pyörimistä vastustavien voimien (laakereiden kitka ja vierimisvastus) momentti on yhtä suuri mutta vaikuttaa vastakkaiseen kiertosuuntaan kuin pyörimistä ylläpitävien voimien momentit. Kun kappale vierii alas kaltevaa pintaa tasaisella nopeudella, pyörimistä ylläpitävä voima on pinnasta pyörään kohdistuva kitka.

36.



$$\tan\alpha = \frac{0{,}42\text{ m}}{0{,}65\text{ m}} \qquad \alpha = 32{,}8687°$$

Tukitanko on tasapainossa, joten siihen kohdistuvien voimien summa on nolla eli $\sum \overline{F} = \overline{0}$ ja momenttien summa on nolla eli $\sum M = 0$. Valitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi, jolloin momenttiyhtälö kiertoakselin A suhteen on

$\sum M_A = l \cdot T_y - \frac{l}{2} \cdot G_t - l \cdot G_k = 0,$ joka jakamalla pituudella l yksinkertaistuu muotoon

$T_y - \frac{G_t}{2} - G_k = 0.$ Koska $T_y = T\sin\alpha,$ vaijerin jännitysvoiman suuruus on

$$T = \frac{\frac{G_t}{2} + G_k}{\sin\alpha} = \frac{\left(\frac{m_t}{2} + m_k\right)g}{\sin\alpha} = \frac{\left(\frac{1{,}2\text{ kg}}{2} + 5{,}2\text{ kg}\right)\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sin 32{,}8687°} = 104{,}839\text{ N} \approx 100\text{ N}.$$

Valitaan suunta oikealle positiiviseksi. Koska vaakasuunnassa on voimassa ehto $\sum \overline{F}_x = \overline{0},$ saadaan yhtälö $N_x - T_x = 0,$ josta

$$N_x = T_x = T\cos\alpha = 104{,}839\text{ N}\cdot\cos 32{,}8687° \approx 88{,}0560\text{ N}.$$

Valitaan suunta ylös positiiviseksi. Koska pystysuunnassa on voimassa ehto $\sum \overline{F}_y = \overline{0},$ saadaan yhtälö $N_y - G_t - G_k + T_y = 0,$ josta

$$\begin{aligned} N_y &= G_t + G_k - T_y = (m_t + m_k)g - T\sin\alpha \\ &= (1{,}2\text{ kg} + 5{,}2\text{ kg})\cdot 9{,}81\text{ m/s} - 104{,}839\text{ N}\cdot\sin 32{,}8687° = 5{,}88623\text{ N}. \end{aligned}$$

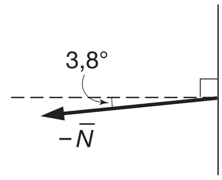
Seinän tankoon kohdistaman kokonaisvoiman suuruus on

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{(88{,}0560\text{ N})^2 + (5{,}88623\text{ N})^2} \approx 88\text{ N}.$$

Voiman suunnan määrittävä kulma saadaan yhtälöstä $\tan\beta = \frac{N_y}{N_x} = \frac{5{,}88623\text{ N}}{88{,}0560\text{ N}},$ josta

kulma on $\beta \approx 3{,}8°$. Kysytty tukitangon seinään kohdistama voima on voiman $\overline{N}$ vastavoima ja siten Newtonin III lain mukaan yhtä suuri, mutta suunnaltaan vastakkainen.

Vaijeriin BC kohdistuva jännitysvoiman suuruus on 100 N vaijerin suuntaan. Tukitangon AB seinään kohdistaman voiman suuruus on 88 N ja suuntakulma seinän normaalin suhteen 3,8° (kuvio).



37. a) Sauvan hitausmomentti on $J = \frac{ml^2}{12},$ josta sauvan pituudeksi saadaan

$$l = \sqrt{\frac{12J}{m}} = \sqrt{\frac{12\cdot 1{,}2\,\text{kgm}^2}{0{,}250\,\text{kg}}} \approx 7{,}6\,\text{m}.$$

b) Sauvan hitausmomentti muuttuu pyörimisakselin paikan muuttuessa. Esimerkiksi toisen pään ympäri pyöriessään sauvan hitausmomentti on suurempi kuin a-kohdassa $\left(J = \frac{1}{3}ml^2\right).$

c) Hitausmomentti kuvaa kappaleen kykyä vastustaa pyörimisen muutoksia, ts. hitausmomentti kuvaa kappaleen pyörimisen hitautta. Kappaleen pyörimisen hitaus vaikuttaa levossa olevan kappaleen pyörimään saattamiseen sekä yhtä lailla jo pyörivän kappaleen kulmanopeuden muuttamiseen eli kiihdyttämiseen tai jarruttamiseen.

38. Sauvan pää liikkuu pitkin ympyrärataa, jonka säde on l = 0,52 m. Pään ratanopeus on $v = \omega l$. Sauvaan kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa sauvan potentiaalienergiaa pyörimisenergiaksi, koska sauva pääsee pyörimään toisen päänsä kautta kulkevan akselin ympäri. Sauvan painopisteen korkeuden muutos on $l/2$. Ratkaistaan sauvan kulmanopeus lopputilanteessa yhtälöstä $\frac{1}{2}J\omega^2 = mg\frac{l}{2}$ eli $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = mg\frac{l}{2}$, josta saadaan $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$.

Sauvan vapaan pään nopeus on

$$v = \omega l = \sqrt{\frac{3g}{l}}\cdot l = \sqrt{3gl} = \sqrt{3\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 0{,}52\,\text{m}} \approx 3{,}9\,\text{m/s}.$$

39. Momentti, joka vaikuttaa keskeltä akseloituun umpinaiseen tankoon on $M = Fr$. Pyörimisen liikeyhtälö on $\sum M = J\alpha$ eli $Fr = J\alpha$. Yhtälö saadaan muotoon $Fr = \frac{1}{2}mr^2\alpha$, josta kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{Fr}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{42\,\text{N}\cdot 0{,}012\,\text{m}}{\frac{1}{2}\cdot 2{,}5\,\text{kg}\cdot(0{,}012\,\text{m})^2} = 2800\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

40. Koska liikevastusvoimia voidaan pitää vähäisinä, sovelletaan mekaanisen energian säilymislakia. Sylinteriin kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergiaa liike- ja rotaatioenergiaksi: $m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$ eli $m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2$, josta saadaan $m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{4}mv^2$. Kappaleen nopeus on

$$v = \sqrt{\frac{2m_1gh}{m_1 + \frac{1}{2}m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 120\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2\cdot 1{,}7\text{ m}}{120\text{ kg} + \frac{1}{2}\cdot 75\text{ kg}}} \approx 5{,}0\text{ m/s}.$$

41. Sovitaan ämpärin potentiaalienergian nollataso ämpärin ala-asemaan. Pudonneella ämpärillä ei ole potentiaalienergiaa lopussa, mutta on liike-energiaa. Osa alussa olleesta potentiaalienergiasta kuluu liikevastusten voittamiseen.

Ämpärin potentiaalienergian muutos on yhtä suuri kuin kitkamomenttia vastaan tehdyn työn ja systeemin liike-energian summa lopussa:

$$E_{\text{pot}} = W_\mu + E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} \text{ eli } mgh = W_\mu + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Kitkatyö saadaan muotoon $W_\mu = F_\mu\cdot\Delta s = \frac{M_\mu}{r}\cdot r\Delta\varphi = M_\mu\Delta\varphi$. Koska kulmanopeus on $\omega = \frac{v}{r}$, kiertymälle saadaan yhtälö $\Delta\varphi = 2\pi\cdot n = 2\pi\cdot\frac{h}{p} = 2\pi\cdot\frac{h}{2\pi r} = \frac{h}{r}$, jossa h on pudotuskorkeus.

Oletetaan, että köysi ei veny eikä liu'u, jolloin yhtälö

$$mgh = W_{\mu} + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

saadaan muotoon

$$mgh = M_{\mu}\Delta\varphi + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$mgh - M_{\mu}\frac{h}{r} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r^2}$$

$$h(mg - \frac{M_{\mu}}{r}) = \frac{1}{2}v^2(m + \frac{J}{r^2}).$$

Ratkaistaan yhtälöstä nopeus:

$$v^2 = \frac{2h(mg - \frac{M_{\mu}}{r})}{m + \frac{J}{r^2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2h\left(mg - \frac{M_{\mu}}{r}\right)}{m + \frac{J}{r^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}2\ \mathrm{m} \cdot \left(12\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} - \frac{1{,}4\ \mathrm{Nm}}{0{,}090\ \mathrm{m}}\right)}{12\ \mathrm{kg} + \frac{0{,}028\ \mathrm{kgm^2}}{(0{,}090\ \mathrm{m})^2}}} \approx 6{,}5\ \mathrm{m/s}.$$

42. Pallon vierimistä alaspäin voidaan tarkastella käyttäen mekaanisen energian säilymislakia, kun ilmanvastus ja vierimisvastus ovat vähäisiä. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi pallon alustasta irtoamisen taso. Pallon vieriessä liukumatta alas palloon kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa pallon potentiaalienergiaa translaatioenergiaksi ja kitkamomentti potentiaalienergiaa rotaatioenergiaksi. Vierimisen loppuvaiheessa pallon siirtyessä alimmasta pisteestä nollatasolle vastaavasti rotaatio- ja translaatioenergiaa muuntuu potentiaalienergiaksi:

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Koska $J = \frac{2}{5}mr^2$ ja $v = \omega r$, mekaanisen energian säilymislaki saadaan muotoon

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 \quad \text{eli}$$

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{2}{10}\cdot mv^2 \quad \text{eli}$$

$$gh_1 = \frac{7}{10}v^2, \quad \text{josta}$$

nopeus potentiaalienergian nollatasolla on $v = \sqrt{\frac{10}{7}gh_1}$.

Pallon irrottua alustasta palloon kohdistuva paino muuntaa translaatioenergiaa potentiaalienergiaksi. Yhtälöstä $\frac{1}{2}mv^2 = mgh_2$ saadaan nousukorkeudeksi

$$h_2 = \frac{\frac{1}{2}v^2}{g} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{7}gh_1}{g} = \frac{5}{7}h_1 = \frac{5}{7}\cdot 0,95\,\mathrm{m} \approx 0,68\,\mathrm{m}.$$

43. a) Autot vetävät toisiaan puoleensa voimalla, jonka suuruus on

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67259\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\cdot\frac{1200\,\mathrm{kg}\cdot 1600\,\mathrm{kg}}{(2,5\,\mathrm{m})^2} \approx 2,0\cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}.$$

Molemmat autot vetävät toisiaan puoleensa yhtä suurella mutta vastakkaissuuntaisella voimalla (Newtonin III laki).

b) Satelliitin liikeyhtälö on $\sum\overline{F} = m_{\mathrm{sat}}\overline{a}_{\mathrm{n}}$. Gravitaatiovoima pakottaa satelliitin ympyräradalle. Valitaan suunta kohti Maan keskipistettä positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö

$$\gamma\frac{m_{\mathrm{sat}}m_{\mathrm{Maa}}}{(2R)^2} = m_{\mathrm{sat}}\frac{v^2}{2R}$$ jossa R on Maan säde. Nopeus on

$$v = \sqrt{\frac{\gamma m_{\mathrm{Maa}}}{2R}} = \sqrt{\frac{6,67259\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2\cdot 5,974\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{2\cdot 6,378\cdot 10^6\ \mathrm{m}}} \approx 5,6\ \mathrm{km/s}.$$

44. Keplerin III laista $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$ saadaan Pluton keskietäisyydeksi Auringosta

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{r_1^3 T_2^2}{T_1^2}} = \sqrt[3]{\frac{(149,6\cdot 10^6\cdot 10^3\,\mathrm{m})^3\cdot(246,8\,\mathrm{a})^2}{(1,0000\,\mathrm{a})^2}} \approx 5,886\cdot 10^{12}\ \mathrm{m} = 5886\cdot 10^6\ \mathrm{km}.$$

45. a) Olkoon lentokoneen massa *m*. Gravitaatiokentän voimakkuus 12,0 km korkeudella maanpinnasta on

$$g_r = \frac{F}{m} = \frac{\gamma\frac{mM}{r^2}}{m} = \gamma\frac{M}{r^2} = 6,67259\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}}\cdot\frac{5,974\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(6378\ \mathrm{km}+12,0\ \mathrm{km})^2} \approx 9,762\ \mathrm{m/s}^2.$$

46. Gravitaatiovoiman takia Mars kiertää radallaan Auringon ympäri. Marsin liikeyhtälö Aurinkoa kiertävällä radalla on $\sum \bar{F} = m\bar{a}_{\text{n}}$. Kun suunta kohti Auringon keskipistettä on positiivinen, skalaariyhtälöstä $\gamma \dfrac{M_A \cdot m}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$ saadaan Auringon massaksi

$$M_A = \frac{v^2 r}{\gamma} = \frac{(24{,}13 \cdot 10^3\ \text{m/s})^2 \cdot 227{,}9 \cdot 10^6 \cdot 10^3\ \text{m}}{6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2} \approx 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}.$$

47. Putoamiskiihtyvyys toisen planeetan pinnalla on

$$g_{\text{Planeetta}} = \gamma \frac{m_{\text{Planeetta}}}{r_{\text{Pl}}^{\ 2}} = \gamma \frac{100 m_{\text{Maa}}}{(10 r_{\text{Maa}})^2} = \gamma \frac{m_{\text{Maa}}}{r_{\text{Maa}}}$$

$$= 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6378 \cdot 10^3\ \text{m})^2} \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2.$$

48. Valitaan suunta alas positiiviseksi. Yhtälöstä $s = \dfrac{1}{2}gt^2$ saadaan putoamisajaksi

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} = 2{,}67125\,\text{s} \approx 2{,}7\,\text{s}.$$

Loppunopeus on $v = v_0 + gt = 0 + gt = 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 2{,}67125\,\text{s} \approx 26\,\text{m/s}$.

49. Oletetaan, että hyppääjä putoaa suoraan alas. Lasketaan hyppääjän nopeus 120 metrin pudotuksen jälkeen. Oletetaan, että hyppääjään kohdistuva ilmanvastus on vähäinen. Hyppääjään kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi. Mekaanisen energian säilymislaista $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2$ saadaan nopeudeksi

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 120\,\text{m}} \approx 48{,}52216\,\text{m/s}.$$

Alkuvaiheen jälkeen liike on hidastuvaa. Avautuneeseen varjoon kohdistuva ilmanvastus hidastaa liikettä. Lasketaan aika, jonka kuluessa nopeus pienenee arvoon 5,0 m/s. Loppunopeus on $v = v_0 + at$, josta ajaksi saadaan

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{5{,}0\,\text{m/s} - 48{,}52216\,\text{m/s}}{-2{,}0\,\text{m/s}^2} = 21{,}76108\,\text{s}.$$

Tässä ajassa kuljettu matka on

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 48{,}52216\ \text{m/s} \cdot 21{,}76108\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}0\ \text{m/s}^2) \cdot (21{,}76108\ \text{s})^2$$

$$\approx 582{,}35000\ \text{m}.$$

Laskuvarjohyppääjän on hypättävä vähintään korkeudelta 120 m + 582,35000 m ≈ 700 m.

50. Valitaan koordinaatisto siten, että origo on heittopisteessä. Sovitaan suunta alas positiiviseksi. Kun ilmanvastusta ei oteta huomioon, pallon liikettä voidaan pitää tasaisesti kiihtyvänä.

a) Pallon putoamana matka saadaan yhtälöstä $h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ eli $\frac{g}{2}t^2 + v_0 t - h = 0$.

Lentoaika saadaan käyttäen toisen asteen ratkaisukaavaa:

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^{\ 2} - 4\cdot\frac{g}{2}\cdot(-h)}}{2\cdot\frac{g}{2}} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^{\ 2} + 2gh}}{g}$$

$$= \frac{-15\ \text{m/s} \pm \sqrt{(15\ \text{m/s})^2 + 2\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 114\ \text{m}}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}.$$

Ratkaisuna saadaan $t_1 \approx 3{,}52857$ s ja $t_2 \approx -6{,}6$ s, joka hylätään. Pallo törmää maahan 3,5 s:n kuluttua.

b) Pallon nopeus on $v = v_0 + gt = 15\,\text{m/s} + 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 3{,}52857\,\text{s} \approx 50\,\text{m/s}$.

Pallon nopeus voidaan ratkaista myös mekaanisen energian säilymislain avulla:

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_{\text{a}}^{\ 2} = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^{\ 2}.$$

Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi maanpinta ($h_1 = 0$). Loppunopeudeksi saadaan

$$v_1 = \sqrt{2gh_{\text{a}} + v_{\text{a}}^{\ 2}} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 114\,\text{m} + (15\,\text{m/s})^2} \approx 50\,\text{m/s}.$$

51. Ilmanvastusta ei oteta huomioon. Kiven ylöspäin nousemisen aikana kiveen kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa liike-energian potentiaalienergiaksi. Putoamisen aikana paino tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergian liike-energiaksi. Sovitaan rotkon pohja potentiaalienergian nollatasoksi.

Yhtälöstä $mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$ putoamisnopeuden suuruudeksi rotkon pohjalla saadaan

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{(18\,\text{m/s})^2 + 2\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 49\,\text{m}} \approx 35{,}85220\,\text{m/s}.$$

Sovitaan suunta ylös positiiviseksi, jolloin rotkon pohjaan osumisen nopeus on $v = -35{,}85220$ m/s.

Koska liike on tasaisesti kiihtyvää, loppunopeus saadaan yhtälöstä $v = v_0 - gt$.

Tapahtumaan kulunut aika on $t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{18\,\text{m/s} - (-35{,}85220\,\text{m/s})}{9{,}81\,\text{m/s}^2} \approx 5{,}5\,\text{s}$.

Kivi putoaa 5,5 sekunnin kuluttua rotkoon nopeudella 36 m/s.

52. Ilmanvastusta ei oteta huomioon, jolloin kiven liike on pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvää ja vaakasuunnassa tasaista. Yhtälöstä $h = \frac{1}{2}gt^2$ saadaan putoamisajaksi

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 32\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}} \approx 2{,}55420\,\mathrm{s}.$$

Kantama on $x = v_0 \cdot t = 22\,\mathrm{m/s} \cdot 2{,}55420\,\mathrm{s} \approx 56\,\mathrm{m}.$

Lasketaan nopeuden suunta ja suuruus maahan osumisen hetkellä. Sovitaan suunta ylöspäin positiiviseksi. Nopeuden suuruus saadaan yhtälöstä

$$v = \sqrt{v_y^{\,2} + v_x^{\,2}} = \sqrt{(-gt)^2 + v_x^{\,2}} = \sqrt{(-9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}55420\ \mathrm{s})^2 + (22\ \mathrm{m/s})^2} \approx 33\ \mathrm{m/s}.$$

Kiven nopeus y-suunnassa on $v_y = v_{0y} - gt.$ Koska kivi heitetään rantatörmältä vaakasuoraan, on $v_{0y} = 0$ m/s, joten $v_y = -gt.$

Nopeuden suuntakulma vaakatasoon nähden saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-gt}{v_x} = \frac{-9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}55420\ \mathrm{s}}{22\ \mathrm{m/s}},\ \text{josta}\ \alpha \approx -49°.$$

Kiven kantama on 56 m vaakasuuntaan, nopeuden suuruus 33 m/s ja suuntakulma $-49°$. Nopeuden suunta on vaakatasosta vinosti alaspäin.

53. a) 1) Ei, koska nopeus ei ole vakio pystysuorassa heittoliikkeessä.

2) Ei, koska pystysuorassa heittoliikkeessä nopeus muuttuu positiivisesta negatiiviseksi.

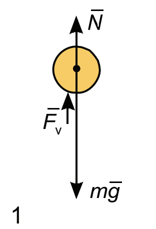
3) Kyllä, koska kiihtyvyys on vakio ja negatiivinen (hidastuva liike) ja nopeus muuttuu kuvassa positiivisesta negatiiviseksi.

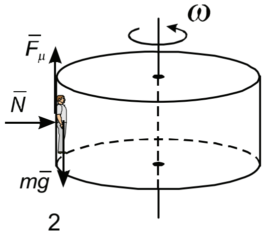
4) Ei, koska kiihtyvyyden tulee olla piirroksessa vakio.

5) Kyllä, koska kiihtyvyys on vakio ja negatiivinen.

b) Kivi, joka putoaa vedessä: kiveen kohdistuvat voimat ovat paino, noste ja veden vastus.

Karusellissa oleva henkilö: henkilöön kohdistuvat voimat ovat paino, lepokitka ja seinästä henkilöön kohdistuva tukivoima.





54. a) Sylinteriin kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi. Kitkamomentti tekee työtä ja muuntaa osan potentiaalienergiasta rotaatioenergiaksi. Lähtökorkeus katon reunasta mitattuna on $h = 6{,}0\,\text{m} \cdot \sin 35° \approx 3{,}44146\,\text{m}$. Systeemin ulkoiset vastustavat voimat, kuten ilmanvastus, voidaan olettaa vähäisiksi. Silloin sylinterin potentiaalienergia muuntuu vierimisen aikana etenemisen ja pyörimisen liike-energiaksi ja mekaanisen energian säilymislakia voidaan soveltaa: $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$ ja edelleen $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2$ eli

$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^2 = \frac{3}{4}v^2.$

Sylinterin nopeus katon reunalla on

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 3{,}44146\,\text{m}}{3}} \approx 6{,}70927\,\text{m/s}.$$

Sylinterin kulmanopeus on $\omega = \frac{v}{r} = \frac{6{,}70927\,\text{m/s}}{0{,}18\,\text{m}} \approx 37\,\text{rad/s}.$

b) Katon reunan jälkeen sylinterin liikettä voidaan tarkastella vinona heittoliikkeenä, jonka alkunopeus $v_0 = 6{,}70927\,\text{m/s}$.

Alkunopeuden vaakakomponentin suuruus on

$$v_{0x} = v_0 \cos 35° = 6{,}70927\ \text{m/s} \cdot \cos 35° \approx 5{,}49591\,\text{m/s}.$$

Alkunopeuden pystykomponentin suuruus on

$$v_{0y} = v_0 \sin 35° = 6{,}70927\ \text{m/s} \cdot \sin 35° \approx 3{,}84828\,\text{m/s}.$$

Pystysuunnassa sylinteri putoaa heiton aikana 5,0 metrin matkan, joten yhtälöstä

$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$ eli $\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t - y = 0$ saadaan putoamisaika käyttäen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$t = \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{(v_{0y})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}g \cdot (-y)}}{2 \cdot \frac{1}{2}g}$$

$$= \frac{-3{,}84828\,\text{m/s} \pm \sqrt{(3{,}84828\,\text{m/s})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot (-5{,}0\,\text{m})}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}.$$

Yhtälön ratkaisut ovat $t_1 = 0{,}69089$ s (tai $t_2 = -1{,}47545$ s).

Hyväksytään vain ajan positiivinen arvo. Tässä ajassa sylinteri liikkuu vaakasuunnassa matkan $x = v_{0x}t = 5{,}49594\,\text{m/s} \cdot 0{,}69089\,\text{s} \approx 3{,}8\,\text{m}.$