

hyvä tuoda esille muuttujalausekkeen ja tavallisen laskulausekkeen välinen ero. Muuttujalauseke on yleinen merkintätapa, jossa muuttuja voi saada eri arvoja. Esimerkissä 4 harjoitellaan lisää polynomin arvon laskemista ja opitaan, miten merki-

voivat toimia esimerkkit tehtävinä. Ekstraosio on tarkoitettu erityisesti nopeimmin suoriutuville ja edistyneimmille oppilaille.

Oppikirjan ja Digiopetusaineiston eritasoiset harjoitustehtävät tarjoavat mah-

2 Polynomi ja sen arvo

Polynomi on termien muodostama summalauseke, jossa termit on kirjoitettu etumerkkeineen peräkkäin. Jos termejä on vain yksi, polynomia sanotaan **monomiksi**. Vastaavasti kaksiterminen polynomi on **binomi** ja kolmiterminen **trinomi**. Polynomi voidaan nimetä isolla kirjaimella.

ESIMERKKI 1 Polynomin $P(x) = x - 1$ nimi on P , ja sen muuttuja x on merkitty sulkeisiin. Lauseke $x - 1$ ilmoittaa, miten polynomi P riippuu muuttujasta x .

Polynomi P voidaan esittää summana muodossa $P(x) = x + (-1)$. Koska polynomissa on kaksi termiä, x ja -1 , se on binomi.

Termin aste on yhtä suuri kuin sen kirjainosan muuttujan eksponentti. Vakiotermin aste on 0. Koko polynomin aste on sama kuin sen suurinta astetta olevan termin aste.

Koska polynomi on summalauseke, sen termien paikkaa voidaan vaihtaa. Polynomin termit kirjoitetaan yleensä termien asteen mukaisessa järjestyksessä suurimmasta pienimpään. Vakiotermi kirjoitetaan viimeiseksi.

ESIMERKKI 2 Määritä polynomin $S(x) = 6 + 3x^2 - 5x$ aste ja järjestä termit.

Ratkaisu

Polynomin $S(x)$ korkeinta astetta oleva termi on $3x^2$, jonka aste on 2. Polynomin aste on siis 2.

Järjestetään polynomi termien asteiden mukaisesti:

$$S(x) = 6 + 3x^2 - 5x = 3x^2 - 5x + 6.$$

- aste = 1
- aste = 2
- aste = 0

Vakiotermin 6 aste on nolla, koska $6 = 6x^0 = 6 \cdot 1$.

kannattaa jakaa kahdelle oppitunnille. Tällöin ensimmäisellä tunnilla käydään läpi kirjainlausekkeeseen ja polynomiin liittyvät perusasiat ja toisella tunnilla polynomin arvon laskeminen.

Polynomin arvo saadaan, kun muuttujan paikalle sijoitetaan annettu luku ja lasketaan lausekkeen arvo. Muuttujan arvo vaikuttaa termien arvoon. Mitä korkeampi on termin aste, sitä suurempi on yleensä termin vaikutus koko polynomin arvoon.

ESIMERKKI 3 Laske polynomin $3x + 2$ arvo, kun $x = 4$.

Ratkaisu

Sijoitetaan polynomiin $3x + 2$ muuttujan x paikalle luku 4:

$$3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14. \quad \text{Muunnos: } 3x + 2 = 3 \cdot x + 2$$

Vastaus: Polynomin $3x + 2$ arvo on 14, kun $x = 4$.

ESIMERKKI 4 Olkoon $P(x) = -3x^2 + 5x + 12$. Laske

a) $P(3)$ b) $P(-2)$.

Ratkaisu

$$\begin{aligned} \text{a) } P(3) &= -3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 12 \\ &= -3 \cdot 9 + 5 \cdot 3 + 12 \\ &= -27 + 15 + 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Merkintä $P(3)$ tarkoittaa polynomin P arvoa, kun muuttujan paikalle on sijoitettu luku 3.

$$\begin{aligned} \text{b) } P(-2) &= -3 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 12 \\ &= -3 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) + 12 \\ &= -12 - 10 + 12 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Kun negatiivinen luku sijoitetaan muuttujan paikalle, käytetään sulkeita.

Vastaus: a) $P(3) = 0$ b) $P(-2) = -10$

Funktio, joka esittää kuulan korkeuden eri ajan hetkinä, voidaan esittää toista astetta olevan polynomin muodossa.

HARJOITUSTEHTÄVÄT

1. Ympyröi polynomin termit.

- a) $5x + 3$ b) $3x^2 + 2x + 5$
c) $-x^2 - 2x + 3$ d) $2x^3 + 5x^2 - 5x$

2. Mikä on termin aste?

- a) $3x^5$ b) $2x$ c) 5 d) $-x^3$

3. Laske polynomin $x + 6$ arvo, kun

- a) $x = 3$ b) $x = 7$ c) $x = 0$.

4. Laske polynomin $5 \cdot x$ arvo, kun

- a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = 0$.

5. Laske polynomin arvo, kun $x = 10$.

- a) $2x - 1$ b) $4x + 5$ c) $3x - 6$

6. Laske polynomin $5x - 3$ arvo muuttujan x arvolla

- a) 1 b) 0 c) -1 d) -2.

7. Järjestä polynomin termit.

- a) $11 + 3x$ b) $-6 - 4x$
c) $-6 + 2x^2 + 9x$ d) $10x + 3 - 2x^2$

8. Laske polynomin $-2x + 7$ arvo, kun

- ☆ a) $x = 3$ b) $x = 4$ c) $x = -2$.

9. Mitkä polynomeista ovat

- ☆ a) monomeja
b) binomeja
c) trinomeja?

$$\begin{aligned} R(x) &= 3x^2 - 2x + 4 & P(x) &= 4x + 5 \\ K(x) &= 6x^3 + 5x^2 - 3x & Q(x) &= -3x \\ L(x) &= -3x^3 + 6x^2 - 8x + 1 & M(x) &= 5 \end{aligned}$$

10. Mikä on polynomin aste?

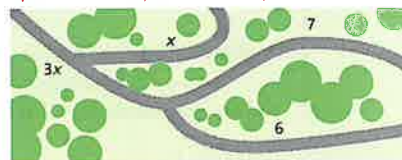
- ☆ a) $7x^2 + 3x + 6$ b) $2x - 5$
c) $-3x^3 + 6x^2 + x$ d) $2x^6 - 19$

11. Määritä polynomin aste ja järjestä termit.

- ☆ a) $9n - 12n^2 + 3$ b) $-6 + 3r^4 + 4r^3$
c) $16 - 2k^5$ d) $11t^2 + t^4 - 2t^6$

12. Mikä on polkujen yhteispituus, kun

- ☆ a) $x = 3$ b) $x = 4$ c) $x = 10$?

13. Laske binomin $x^2 + 12$ arvo, kun

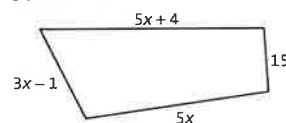
- ☆ a) $x = 3$ b) $x = 0$ c) $x = -4$.

14. Olkoon $Q(x) = x^2 + 3x - 2$. Laske

- ☆ a) $Q(0)$ b) $Q(2)$ c) $Q(-1)$.

15. Laske monikulmion

- ☆ a) sivujen pituudet b) piiri
kun $x = 8$.

16. Millä muuttujan x arvolla polynomin

- ☆☆ $3x + 2$ arvo on yhtä suuri kuin
a) 5 b) 14 c) -1?

17. Tutki, milloin polynomin $2a - 1$ arvo on polynomin $5a + 11$

- a) arvon kanssa yhtä suuri
b) arvoa suurempi
c) arvoa pienempi.

18. Olkoot $R(x) = x^2 - 3$ ja $S(x) = 2x + 1$. Laske

- ☆☆ a) $R(2)$ b) $S(-3)$ c) $R(2) + S(-3)$.

KOTITEHTÄVÄT

19. Ympyröi polynomin termit.

- a) $8x + 6$
b) $3x^2 - 3x$
c) $-x^2 + 7x - 1$
d) $2x^3 + 5x^2 - 5x$

20. Olkoon $P(x) = -2x + 6$. Laske

- a) $P(4)$ b) $P(-1)$ c) $P(0)$ d) $P(-4)$.

21. Mikä on polynomin aste?

- a) $-5x^2 - x + 11$
b) $-8x^2 + 5$
c) $3x^3 + 6x^2 + x - 3$
d) $-x^5 + 12x^2 - 1$

22. Järjestä polynomin termit.

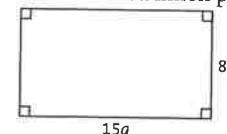
- a) $7x + 2x^3 - 5 + x^2$
b) $6x^2 - 3x^3 + 2 + x$
c) $-x^2 - 5x^5 - 4 + x^3$
d) $-6x - 5x^3 + 3x^5 - 7$

23. Laske polynomin $2x^2 - 5x - 3$ arvo, kun

- a) $x = 0$ b) $x = 3$ c) $x = -4$.

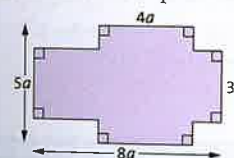
24. Olkoon $R(x) = x^2 - 2x - 3$. Laske

- a) $R(0)$ b) $R(3)$ c) $R(-2)$ d) $R(-1)$.

25. Laske suorakulmion piiri, kun $a = 2,5$.

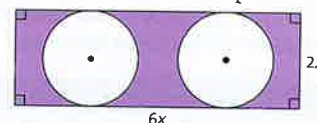
EKSTRA

26. Määritä kuvion pinta-ala.

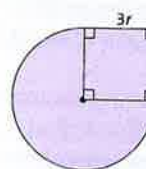


27. Määritä

- a) ympyröiden yhteispinta-ala
b) tummenetun alueen pinta-ala.



28. Määritä kuvion pinta-ala.



PULMA
Anna kirjaimille A, B, C ja D
numeroarvot siten, että lasku on oikein.

$$\begin{array}{r} 2 \ A \ 5 \\ + \ B \ 7 \ C \\ \hline D \ 1 \ 8 \end{array}$$

siihen, että oppikirjassa olevien harjoitus-
tehtävien tekemiseen jää enemmän aikaa.
Luvussa olevat asiat voidaan tarpeen mu-
kaan yhdistää myös seuraavaan lukuun,
jossa opitaan polynomien yhteenlasku.

P U L M A

$x = 11$

3 Samanmuotoisten termien yhdistäminen

Lausekkeita voidaan sieventää yhdistämällä **samanmuotoiset** termit eli termit, joilla on täsmälleen sama kirjainosa. Jos kirjainosan muuttujakirjain ja sen eksponentti eivät ole täsmälleen samoja, termejä ei voi yhdistää. Vakiotermit ovat keskenään samanmuotoisia.

ESIMERKKI 1 a) $2x + 8x = 10x$ ☹️ Termit $2x$ ja $8x$ ovat samanmuotoisia.

b) $3x - 8 - x = 2x - 8$

c) $-5x - x^2 = -x^2 - 5x$

☹️ Termit voidaan kirjoittaa niiden asteen mukaiseen järjestykseen.

ESIMERKKI 2 Sievennä.

a) $P(x) = 6x - 8 - 9 + 2x$

b) $Q(x) = 3x - 12 + 3x^2 + 2x + 12$

Ratkaisua

a) $P(x) = \underline{6x} - \underline{8} - \underline{9} + \underline{2x} = 8x - 17$

☹️ Samanmuotoiset termit voidaan merkitä esimerkiksi alleviivaamalla.

b) $Q(x) = \underline{3x} - \underline{12} + \underline{3x^2} + \underline{2x} + \underline{12} = 3x^2 + 5x$ ☹️ Termit -12 ja 12 kumoavat toisensa.

Lausekkeen arvo ei muutu sievennettäessä. Polynomi kannattaakin usein sieventää ennen sen arvon laskemista.

ESIMERKKI 3 Polynomin $P(x) = 2x - 1 + x^2 - x^2 + x$ arvo muuttujan arvolla 5 on $P(5) = 2 \cdot 5 - 1 + 5^2 - 5^2 + 5 = 14$.

Sievennetään polynomi P :

$P(x) = 2x - 1 + x^2 - x^2 + x = 3x - 1$.

Sievennetyn polynomin arvo muuttujan arvolla 5 on $P(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14$ eli sama kuin sieventämättömän polynomin arvo.

P U L M A

Päättele tuntemattoman x arvo yhtälöstä $3\left(\frac{x+9}{5}\right) = 12$.

HARJOITUSTEHTÄVÄT

1. Etsi laatikosta annetun termin kanssa samanmuotoiset termit.

a) x b) $3x^2$ c) -6

x^2	2	$3x$	$-2x$	$-x$	$-x^2$
$12x^4$	$6x$	$-7x^3$	$8x$	$-3x^2$	$5x^2$

Sievennä.

2. a) $5x + 2x$ b) $3x - 2x$ c) $5x - x$

3. a) $9x - 11x$ b) $-6x + 8x$ c) $-12x - 10x$

4. a) $2x^2 + x^2$ b) $3x^3 + 5x^3$
c) $-6x^2 + 10x^2$ d) $12x^4 - 13x^4$

5. Yhdistä samanmuotoiset termit.

a) $3x + 8 + 5x + 2$ b) $2x - 9 + 7 - x$
c) $3x + 4 - 4x + 11$ d) $8 + 2x - 2x - 7$

6. Yhdistä samanmuotoiset termit.

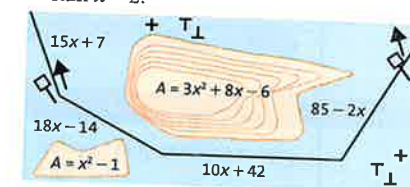
* a) $9x^2 - 2x + 5 - 3x^2 + 7x + 1$
b) $-6 + 2x^2 - 3x^2 + 5x + 6 - 4x$
c) $2x - 8x^2 + 7 + 8x^2 - 2x - 6$
d) $2 - 8 + 17 + 8x^2 - 22x^2 - 20x$

7. Olkoon $P(x) = 4x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 8 + 2x$.

* a) Laske $P(3)$ sieventämättä polynomia.
b) Sievennä polynomi P ja laske $P(3)$.

8. Määritä

* a) kartalla näkyvän väylän pituus
b) saarten yhteenlaskettu pinta-ala.
c) Laske väylän pituus ja saarten pinta-ala, kun $x = 2$.



9. Millainen polynomin

* $3a^3 - 2a^2 - a + 7 - 5a^2 + 3a - 4a^3$ arvo on eri muuttujan a arvoilla polynomin $8a + 4a^3 + 2 - a^2 - 5a^3 - 6a^2 + 5 - 6a$ arvoon verrattuna?

10. Minkä termin arvo vaikuttaa eniten polynomin $x^3 + x^2 + x$ arvoon, kun muuttujan x arvo kasvaa ja

* a) $x > 1$ b) $0 < x < 1$?

KOTITEHTÄVÄT

11. Muodosta annetun termin kanssa samanmuotoinen termi.

a) $-3x$ b) x^2 c) $12x^5$ d) -4

Sievennä.

12. a) $11x + 2x$ b) $13x - 10x$
c) $2x - 13x$ d) $-6x^2 - 8x^2$

13. a) $8x + 5 + x + 2$ b) $15x - 10 + 2 - 5x$
c) $x - 3 - 11x - 13$ d) $2x^2 - x + 3x^2 - 5x$

14. Laske polynomin

$Q(x) = 6x + 1 - 3x + 7$ arvo, kun
a) $x = 5$ b) $x = 0$ c) $x = -5$.

15. Olkoon $Q(a) = 3a^2 - 6a + 1 - 3a^2 + 7a$.

Laske $Q(-5)$

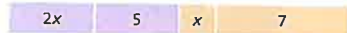
a) sieventämättä polynomia
b) sievennettystä polynomista.

4 Polynomien yhteenlasku

Lausekkeissa voi olla sulkeissa olevia polynomeja. Tällaisten lausekkeiden sieventäminen aloitetaan sulkeiden avaamisella.

Jos sulkeiden eteen ei ole merkitty mitään, sulkeilla ei ole vaikutusta ja ne voidaan poistaa. Sulkeet voidaan poistaa suoraan myös silloin, kun niiden edessä on plusmerkki.

ESIMERKKI 1 Muodosta sauvan pituuden lauseke.



Ratkaisu

Violetin osan pituus on $2x + 5$ ja oranssin osan $x + 7$. Koko sauvan pituus saadaan polynomien $2x + 5$ ja $x + 7$ summana.

$$\begin{aligned}(2x + 5) + (x + 7) \\&= \underline{2x + 5} + \underline{x + 7} \\&= 3x + 12\end{aligned}$$

Yhteenlaskettavat polynomit voidaan merkitä sulkeisiin.

Vastaus: Sauvan pituuden lauseke on $3x + 12$.

ESIMERKKI 2 Sievennä.

- $(9x + 2) + (12x + 7)$
- $(x^2 - 2x + 3) + (2x^2 - 3x - 1)$
- $(6x^2 + 13) + (-6x^2 - 2x + 1)$

Ratkaisu

$$\begin{aligned}\text{a) } (9x + 2) + (12x + 7) \\&= \underline{9x + 2} + \underline{12x + 7} \\&= 21x + 9\end{aligned}$$

Poistetaan sulkeet ja yhdistetään samanmuotoiset termit.

$$\begin{aligned}\text{b) } (x^2 - 2x + 3) + (2x^2 - 3x - 1) \\&= \underline{x^2 - 2x + 3} + \underline{2x^2 - 3x - 1} \\&= 3x^2 - 5x + 2\end{aligned}$$

Polynomien summa on aina polynomi.

$$\begin{aligned}\text{c) } (6x^2 + 13) + (-6x^2 - 2x + 1) \\&= \underline{6x^2 + 13} + \underline{-6x^2 - 2x + 1} \\&= -2x + 14\end{aligned}$$

myös muuta aiheeseen liittyvää materiaalia ja aktiviteetteja.

ESIMERKKI 3 Laske lausekkeen $(3x^2 - 2x + 1) + (-3x^2 - 7)$ arvo, kun $x = -4$.

Ratkaisu

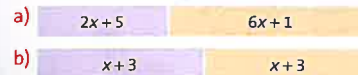
Sievennetään lauseke ennen arvon sijoittamista.

$$\begin{aligned}(3x^2 - 2x + 1) + (-3x^2 - 7) \\&= \underline{3x^2 - 2x + 1} + \underline{-3x^2 - 7} \\&= -2x - 6\end{aligned}$$

Sijoitetaan sievennettyyn polynomiin $x = -4$ ja lasketaan sen arvo:
 $-2 \cdot (-4) - 6 = 8 - 6 = 2$.

HARJOITUSTEHTÄVÄT

1. Muodosta sauvan pituuden lauseke.



Sievennä.

- $(8x + 1) + (2x + 3)$
- $(4x + 6) + (13x + 3)$
- $(x + 1) + (2x + 3)$

3. a) $(9x + 10) + (12x - 7)$

- $(7x - 2) + (2x + 7)$
- $(9x + 1) + (-5x - 11)$

4. Sievennä lauseke ja laske sen arvo, kun $x = 7$.

- $(x + 3) + (2x + 1)$
- $(3x - 4) + (x + 2)$

5. a) Muodosta polynomien $6x + 8$ ja $5x - 11$ summa.

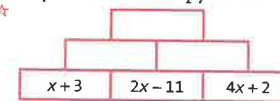
b) Sievennä summan lauseke.

c) Laske summan arvo, kun $x = 2$.

Sievennä.

- $(3x^2 + 2x + 5) + (6x^2 + x + 1)$
 - $(5x^2 + 4x + 13) + (9x^2 + 2x + 3)$
 - $(x^2 + 2x + 3) + (4x^2 + 5x + 6)$
- $(-x^2 + 2x - 5) + (-x^2 - x + 1)$
 - $(x^2 - 4x - 3) + (x^2 + 4x + 3)$
 - $(-25x^2 + 30x - 15) + (25x^2 - 30x + 15)$

8. Täydennä summapyramidi.



9. a) Rata on jaettu kolmeen osuuteen.

b) Kuinka pitkä rata on, jos $x = 150$?

