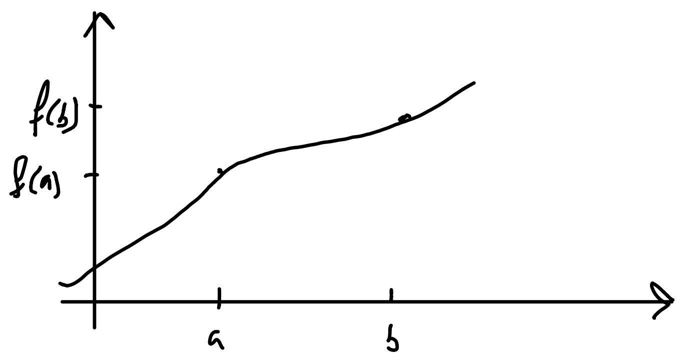
4.1 Polynomifunktion kulun tutkiminen

s. 100 digijohdanto



Funktio f on *kasvava* jollain välillä, jos ehdosta a < b seuraa ehto f(a) < f(b).

Funktio f on *vähenevä* jollain välillä, jos ehdosta a < b seuraa ehto f(a) > f(b).

Mikäli funktio on koko ajan kasvava/vähenevä jollain välillä, on se tällä välillä *monotoninen*.

Jos f'(x) >0 jollain välillä, on se tällöin kasvava.

Jos f'(x) <0 jollain välillä, on se tällöin vähenevä.

Jos f'(x) =0 kaikissa välin kohdissa, on funktio f vakiofunktio (tällä välillä).

Esim. Milloin funktio f(x) = $x^3 - 4x^2 + 3x - 9$
on kasvava?

Kasvava, jos f'(x) >0

f'(x) = $3x^2 - 4 \cdot 2x + 3 + 0$

$= 3x^2 - 8x + 3$

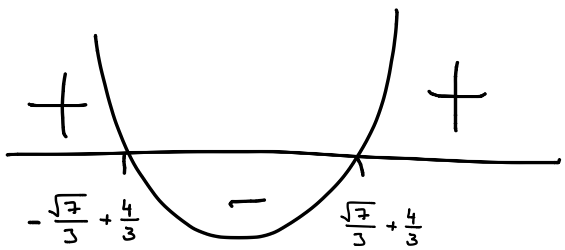
Milloin $3x^2 - 8x + 3 > 0$

Ratkaistaan vastaava yhtälö:

$$3x^2 - 8x + 3 = 0$$

Yhtälön nollakohdat ovat $x = -\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{4}{3}$ tai $x = \frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{4}{3}$

$\approx 0{,}45$ $\approx 2{,}22$



eli $3x^2 - 8x + 3 > 0$

kun $x < -\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{4}{3}$ tai $\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{4}{3} < x$

V: f on kasvava kun

Esim. Olkoon funktio f(x) = x^5 -5x

Tutki milloin funktio on kasvava ja milloin vähenevä kulkukaavion avulla.

f'(x) = $5x^4 - 5$

Milloin derivaatta on nolla?

$$5x^4 - 5 = 0 \quad | :5$$

$$x^4 - 1 = 0$$

$$x^4 = 1 \quad | \sqrt[4]{}$$

$$x = \pm\sqrt[4]{1}$$

$$x = \pm 1$$

Muodostetaan kulkukaavio:

		-1		1	
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	↗		↘		↗

$f'(-2) = 75 > 0 \quad +$

$f'(0) = -5 < 0 \quad -$

$f'(2) = 75 > 0 \quad +$

Funktio on kasvava kun x<-1 ja 1<x
ja funktio on vähenevä kun -1<x<1

Esim. Olkoon $f(x) = x^3+x-1$
Osoita, että funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta.

Määritetään ensin derivaattafunktio:
$f'(x) = 3x^2 +1$
Sen nollakohdat ovat:
$3x^2+1=0$
$\quad x^2 = -1/3 \quad \Rightarrow$ ei ratkaisuja
Tehdään kulkukaavio:

$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	↗	↗	↗

$f'(0) = 1 > 0 \quad +$

Funktio on kaikkialla kasvava!
Siksi sillä on *enintään* 1 nollakohta.

Bolzanon lause:

Funktio f on jatkuva, ja tiedetään, että
$f(0) = -1<0$ ja $f(1) = 1>0$
=> välillä]0,1[funktiolla on *ainakin* 1 nollakohta

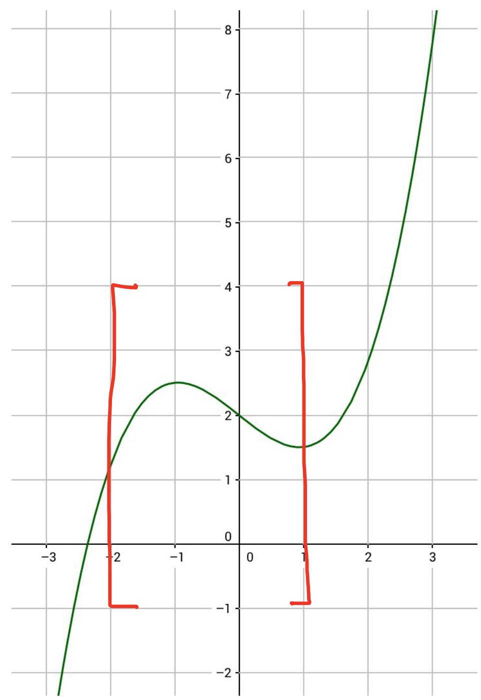
=>Funktiolla on *täsmälleen* 1 nollakohta

4.2 Polynomifunktion ääriarvot

s.109 digijohdanto

Suurin ja pienin arvo suljetulla välillä

Esim. Funktion f kuvaaja on annettu vieressä. Mikä on funktion suurin arvo välillä
a) [-2,1]?
b) [-2,3]?



a) suurin arvo ≈ 2,5
(saadaan kohdassa x≈-1)
b) suurin arvo ≈7,8
(saadaan kohdassa x=3)

Mikä on funktion derivaatan arvo suurimman arvon kohdalla? a-kohdassa 0

Suljetulla välillä [a,b] jatkuva funktio f saa pienimmän ja suurimman arvon joko

- derivaatan nollakohdissa tai
- välin päätepisteissä a tai b.

Esim. Olkoon funktio $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x - 2$

Mikä on funktion suurin ja pienin arvo välillä [-2,2]?

(f on jatkuva ja määritelty kaikkialla)
On selvitettävä derivaatan nollakohdat:
$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - 1 + 0 = x^3 - 1$

jolloin $x^3 - 1 = 0$

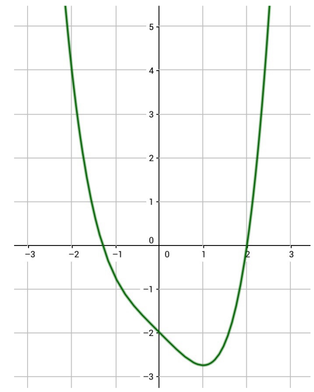
$x^3 = 1$

$x = \sqrt[3]{1}$

$x = 1$

Funktion kulkukaavio:

	-2		1		2
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘		↗	



Tästä nähdään, että funktion pienin arvo saadaan pisteessä x=1 ja suurin joko pisteessä x=-2 tai x=2.

Lasketaan funktion arvot kohdissa -2,1 ja 2:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x - 2$$

$$f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^4 - (-2) - 2 = 4$$

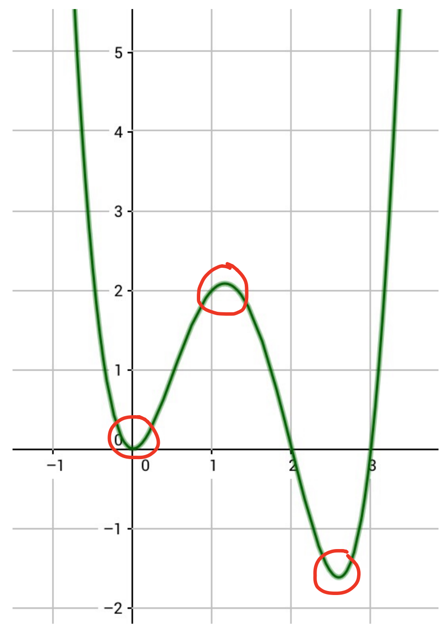
$$f(1) = \frac{1}{4}1^4 - 1 - 2 = -2{,}75$$

$$f(2) = \frac{1}{4}2^4 - 2 - 2 = 0$$

Eli funktion f suurin arvo on 4 ja pienin arvo on -2,75 välillä [-2,2]

Paikalliset ääriarvot

Esim. Määritä funktion f(x) = $x^4 - 5x^3 + 6x^2$
suurin ja pienin arvo.



Kuvaajasta nähdään, että derivaattafunktion nollakohdat ovat $x \approx 0$, $x \approx 1{,}2$ ja $x \approx 2{,}6$

Kohtia $x \approx 0$ ja $x \approx 2{,}6$ kutsutuaan *paikallisiksi minimeiksi*.
Näistä jälkimmäinen on funktion pienin kohta.

Kohta $x \approx 1{,}2$ taas on *paikallinen maksimi*.
Se ei kuitenkaan ole funktion suurin kohta, sillä tämä funktio ei saa suurinta arvoaan missään!

Paikallisia minimejä ja maksimeja kutsutaan funktion *paikallisiksi ääriarvoiksi*. Niissä $f'(x) = 0$.

Ratkaistaan funktion pienin arvo selvittämällä derivaatan nollakohdat:

f'(x) = $4x^3 - 15x^2 + 12x$

jolloin $4x^3 - 15x^2 + 12x = 0$

$$x(4x^2 - 15x + 12) = 0$$

joko $x = 0$ tai $4x^2 - 15x + 12 = 0$

$$\vdots$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$(x \approx 1{,}16 \quad x \approx 2{,}59)$$

Näistä pienin arvo saavutetaan kohdassa x≈2,59, eli

$$f\left(\frac{15+\sqrt{33}}{8}\right) = \frac{117 - 165\sqrt{33}}{512}$$

$$\approx -1{,}62$$

Paikalliset ääriarvot katsotaan täsmällisesti kulkukaaviosta:

		0		$\frac{15-\sqrt{33}}{8}$		$\frac{15+\sqrt{33}}{8}$	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘	min	↗

Tästä voi päätellä:

- funktion pienin arvo on olemassa

Tästä ei voi päätellä:

- onko funktiolla suurinta arvoa
- kumpi arvoista on pienin

Kokeilemalla funktiolle f eri arvoja saadaan selville, että

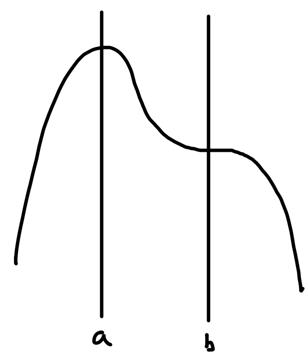
- minimeistä toinen on pienin arvo
- maksimi ei ole suurin arvo

$f(0) = 0$	(min1)
$f(1{,}16) \approx 2{,}1$	(max1)
$f(2{,}59) \approx -1{,}62$	(min2, pienempi)
$f(-1) = 11$	(suurempi kuin max1)

Täsmälliset ratkaisut saadaan aina selville kulkukaaviolla ja eri funktion arvojen kokeilemisella.

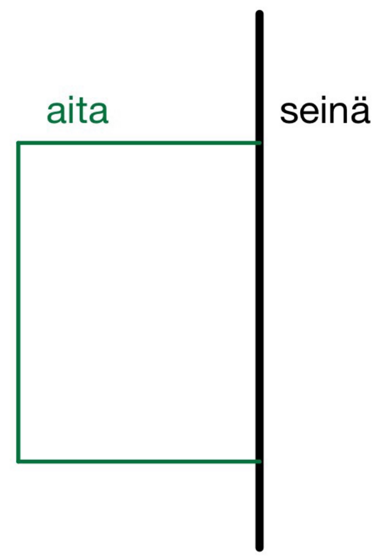
Kulkukaaviossa voi tulla myös tilanne

		a		b	
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$
		max		?	



Tällaista kohtaa, jossa f'(x)=0, mutta ei ole min eikä max, kutsutaan *terassikohdaksi* tai satulapisteeksi.

Esim. Antti rakentaa talon seinän viereen suorakulmion muotoisen koira-aitauksen. Antilla on 10m aitaa käytettävissä.



Mitkä ovat aitauksen mitat, kun halutaan, että aitauksen pinta-ala on mahdollisimman suuri?

Merkitään talon suuntaista sivua y:llä ja kahta muuta sivua x:llä.

Nyt $10 = x+y+x$ eli $y= 10-2x$

Toisaalta aitauksen pinta-ala on $A = x \cdot y$

Silloin $A(x) = x \cdot (10-2x) = -2x^2+10x$

Milloin $A(x)$ on mahd. suuri?

Määritetään derivaattafunktion $A'(x) =$

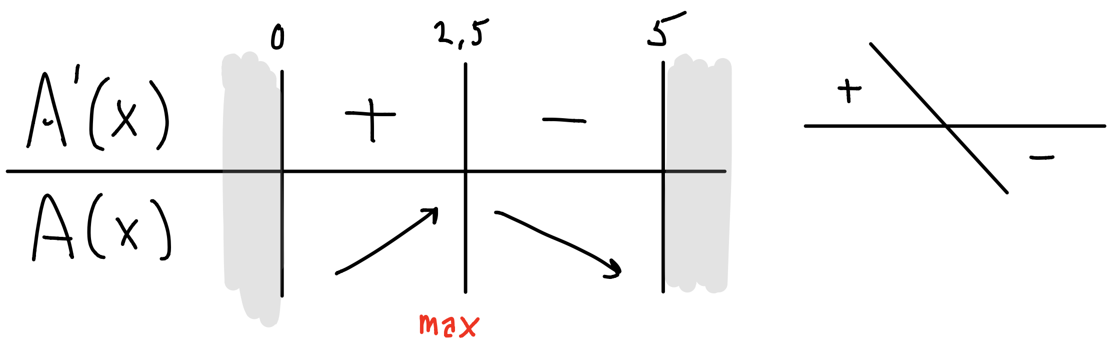
jolloin $\quad -4x + 10 = 0$

$$x = 2{,}5$$

Eli A'(x) = 0, kun x=2,5

Tutkitaan funktion A ääriarvokohdat välillä [0,5]
(x on oltava positiivinen, mutta max 5)

Tehdään kulkukaavio:



Nyt pinta-alafunktion suurin arvo saadaan kohdassa x=2,5

Suurin arvo on siis A(2,5) = 12,5