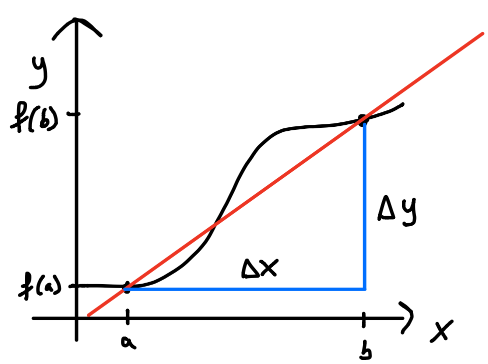
3.1 Funktion muutosnopeus

s.64 digijohdanto

Johdanto a ja b

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$



= suoran kulmakerroin

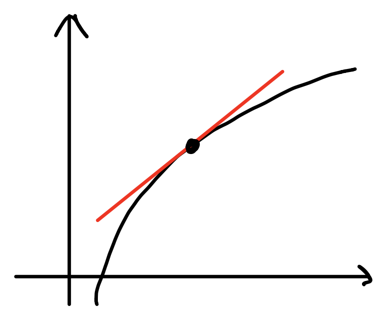
Esim. Antti ajaa Kärsämäeltä Ouluun (125 km) 1,5 tunnissa. Mikä on keskimääräinen nopeus?

$\Delta y = 125$ $\Delta x = 1{,}5$

$\Delta y / \Delta x = 125/1{,}5 = 83{,}3333...$ km/h

3.2 Derivaatan määritelmä

Muutosnopeus on kuvaajaa sivuavan suoran kulmakerroin:



kulmakerroin k>0 => kuvaaja kasvaa/nousee
kulmakerroin k=0 => nopeus =0 kuvaaja tasane
kulmakerroin k<0 => kuvaaja laskee/vähenee

s.75 digijohdanto

Keskimääräinen muutosnopeus antaa paremman arvion tietyn hetken muutosnopeudesta, kun se väli miltä se lasketaan on pieni.

(sähköinen johdanto)

keskimääräinen muutosnopeus eli

erotusosamäärä:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Kun väli on nolla eli b=a, ei sitä ole määritelty.

Mutta kun väli lähestyy nollaa, eli a->b, on sillä olemassa raja-arvo!

Raja-arvoa kutsutaan funktion (hetkelliseksi) muutosnopeudeksi (kohdassa b) eli *derivaataksi* ja se on siis *erotusosamäärän raja-arvo*.

Funktion f muutosnopeus eli derivaatta

kohdassa x=a on $\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$

mikäli raja-arvo on olemassa.
Tällöin funktio f on *derivoituva* kohdassa a.

(digihuomautus)

Esim. Laske funktion f(x) = x^2 -x derivaatan arvo kohdassa x=3 derivaatan määritelmän perusteella.

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - (3^2 - 3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} \quad = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x+2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$

ratk. 2.ast. yhtalö:
$x=-2$ tai $x=3$
$\Rightarrow (x-(-2))(x-3)$
tai laskimesta "tekijä" ja factor

$$= \lim_{x \to 3} x+2$$

$$= 5$$

s.81 huomiot 1 ja 2!

3.3 Derivaattafunktio

s.86 digijohdanto (kirjaa tulokset paperille)

Funktion derivaatta voidaan määrittää paitsi yksittäisissä pisteissä, niin myös yleisesti. Funktiota *f'(x)* kutsutaan funktion f(x) *derivaattafunktioksi*.

Jos funktio f(x) on derivoituva kaikkialla määrittelyjoukossaan, sanotaan, että se on (yleisesti) *derivoituva*.

Esim. Määritä funktion f(x)= x^2 derivaattafunktio erotusosamäärän raja-arvon avulla.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \quad = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}}$$

$$= \lim_{x \to a} x + a$$

$= 2a$

Eli f'(a) = 2a, joten silloin f'(x) = 2x

Nyt siis $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

Lyhyesti voidaan nyt kirjoittaa $Dx^2 = 2x$

Eli laskettiin x^2:n derivaatta.

Vastaavasti saadaan

$$Dx^3 = 3x^2$$
$$Dx^4 = 4x^3$$
$$Dx^5 = 5x^4$$
$$\vdots$$

Yleisesti: kun n=2, 3,... $\boxed{Dx^n = nx^{n-1}}$

Tätä kutsutaan *derivoimissäännöksi*.

Esim. funktion f(x) = x^{100} derivaattafunktio on

siis f'(x) = $100x^{99}$

Muita derivoimissääntöjä:
(k on vakio ja f ja g ovat derivoituvia funktioita)

$$D\,k = 0$$

$$D\,kx = k$$

$$D\left(f(x) + g(x)\right) = D f(x) + D g(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$D\left(k f(x)\right) = k\, D f(x) = k \cdot f'(x)$$

Esim. Derivoi:

a) $D\pi = 0$

b) $D -4x = -4$

c) $D\,3x^2 = 3 \cdot D x^2$
$= 3 \cdot 2x$
$= 6x$

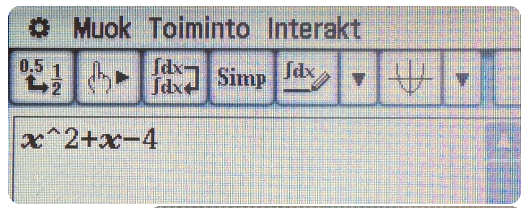
d) $D\left(x^2 + x + 1\right)$
$= D x^2 + D x + D 1$
$= 2x + 1$

e) $D\left(x^7 - x^2 + 2x\right)$
$= D x^7 + D(-x^2) + D 2x$
$= 7x^6 - D x^2 + 2$
$= 7x^6 - 2x + 2$

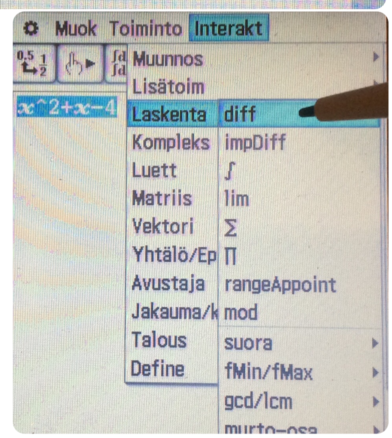
Huomaa, että derivoimissääntöjä löytyy taulukkokirjasta (ei tarvitse muistaa ulkoa).

Huomaa myös, että laskinkin osaa derivoida:

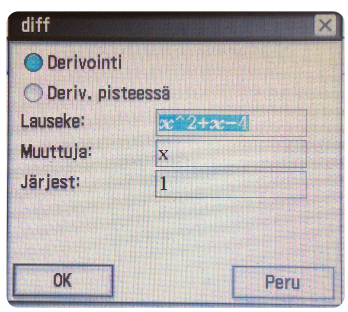
Kirjoita ensin funktion lauseke

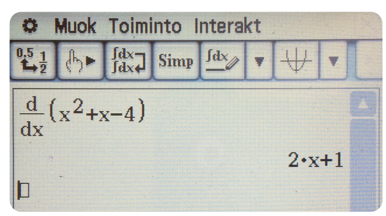


Maalaa se, ja valitse interaktiivisuus valikosta laskenta ja sieltä diff (differentiate = derivaatta)



Sitten ok, ja laskin laskee derivaattafunktion





Muista, että perusderivointilaskut on osattava, sillä kurssikokeessa ja yo:ssa on A-osio!