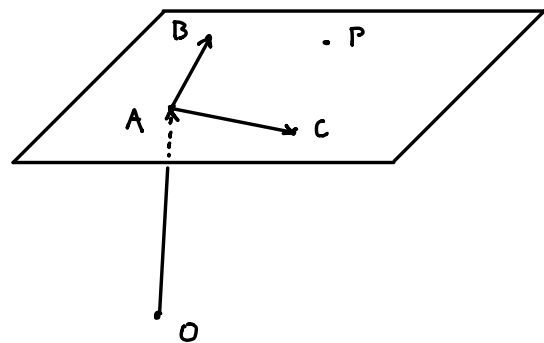


Tasolle voidaan määrittää myös yhtälöitä eri muodoissa.

Esim. Tason muodostavat pisteet A (1,2,3), B (-1,3,0) ja C (0,0,1). Määritä taso vektorimuodossa ja koordinaattimuodossa.

Vektorit AB ja AC ovat tason kantavektoreita, eli mikä tahansa vektori, esim. AP, voidaan esittää niiden avulla.



$$\overline{OA} = \underline{1}\bar{i} + \underline{2}\bar{j} + \underline{3}\bar{k}$$

$$\overline{AB} = \underline{(-1-1)}\bar{i} + \underline{(3-2)}\bar{j} + \underline{(0-3)}\bar{k} = -2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$$

$$\overline{AC} = \underline{(0-1)}\bar{i} + \underline{(0-2)}\bar{j} + \underline{(1-3)}\bar{k} = -\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$$

Miten muodostetaan  $\overline{OP}$ ?

$$\overline{OP} = \overline{OA} + r \overline{AB} + s \overline{AC}$$

$$= \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} + r(-2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}) + s(-\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k})$$

$$= (1 - 2r - s)\bar{i} + (2 + r - 2s)\bar{j} + (3 - 3r - 2s)\bar{k}$$

Tämä on tason *vektorimuoto*.

*Koordinaattimuoto* saadaan tutulla tavalla:

$$\begin{cases} x = 1 - 2r - s \\ y = 2 + r - 2s \\ z = 3 - 3r - 2s \end{cases}$$

A (1, 2, 3)  
 AB = -2 $\bar{i}$  +  $\bar{j}$  - 3 $\bar{k}$   
 AC = - $\bar{i}$  - 2 $\bar{j}$  - 2 $\bar{k}$

Miten saadaan tason yhtälö?

Kirjoitetaan yhtälö ilman r ja s muuttujia:

$$\begin{cases} x = 1 - 2r - s & \Rightarrow \underline{s} = \underline{1 - 2r - x} \\ \underline{y = 2 + r - 2s} \\ z = 3 - 3r - 2s \end{cases}$$

$$\underline{y = 2 + r - 2(1 - 2r - x)}$$

$$5r = -2x + y$$

$$\underline{r = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y}$$

$$s = \underline{1 - 2\left(-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y\right) - x}$$

$$\underline{s = 1 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y}$$

Sijoitetaan alimpaan, niin saadaan *tason yhtälö*:

$$z = 3 - 3r - 2s$$

$$z = 3 - 3\left(-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y\right) - 2\left(1 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y\right) \quad | \cdot 5$$

$$5z = 15 + 6x - 3y - 10 + 2x + 4y$$

$$\underline{8x + y - 5z + 5 = 0} \quad (\text{normaalimuodossa})$$

(Kannattaa tehdä laskimella, käsin laskiessa tulee helposti virhe, minulle tuli kaksikin...)

The screenshot shows a calculator interface with the following content:

$$\begin{cases} x=1-2r-s \\ y=2+r-2s \\ z=3-3r-2s \end{cases} \quad r, s$$
$$\left\{ r = \frac{-(2 \cdot x - y)}{5}, s = \frac{-(x + 2 \cdot y - 5)}{5} \right\}$$

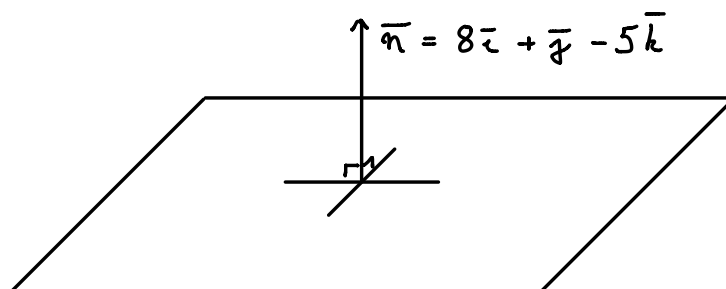
expand  $\left( z = 3 - 3 \cdot \frac{-(2 \cdot x - y)}{5} - 2 \cdot \frac{-(x + 2 \cdot y - 5)}{5} \right)$

$$z = \frac{8 \cdot x}{5} + \frac{y}{5} + 1$$

At the bottom, there are tabs for 'Alg', 'Tarkka', 'Real', and 'Ast'.

Kuten suoran tapauksessa, voi myös tästä tason yhtälöstä tehdä päätelmiä tason suunnasta!

$8x + y - 5z$  kertoo tasoa kohtisuoraan olevan *normaalivektorin*  $\vec{n}$  suunnan!



Normaalivektori on aina kohtisuorassa tasoon nähden!

Tason yhtälöstä voi myös päätellä, onko jokin piste tasolla, tai yksinkertaisesti laskea joitakin tason pisteitä.

Esim. Tason yhtälö on  $8x + y - 5z + 5 = 0$   
Olkoon piste A (1,2,3) ja B (3,2,a).

Onko A tason piste?

Määritä vakio a siten, että B on tason piste.

Testataan, toteutuuko tason yhtälö sijoittamalla pisteen A koordinaatit siihen:

$$8x + y - 5z + 5 = 0$$

$$8 \cdot 1 + 2 - 5 \cdot 3 + 5 = 0$$

$$0 = 0$$

Eli piste A toteuttaa tason yhtälön.

Sijoitetaan B:n koordinaatit:

$$8 \cdot 3 + 2 - 5a + 5 = 0$$

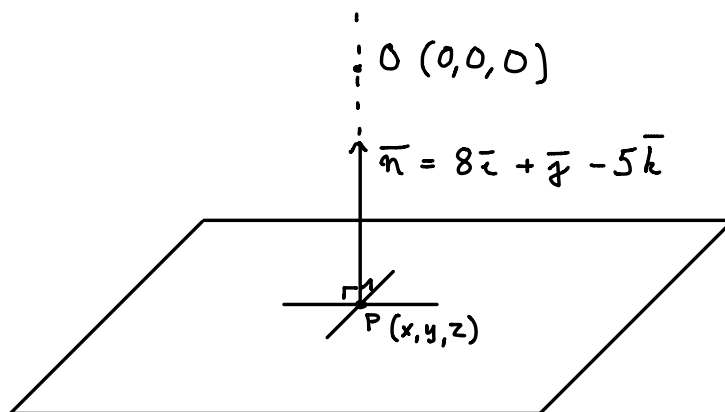
$$5a = 31$$

$$a = \frac{31}{5}$$

Eli vakion arvolla  $a = 31/5$  piste B on tasossa.

Esim. Tason yhtälö on  $8x + y - 5z = 5$   
Mikä tason piste on lähimpänä origoa?

Tason lähimpänä oleva piste on kohtisuorassa origoon  $(0,0,0)$ , koska etäisyys on silloin pienin.



$$\text{Nyt } \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\text{Toisaalta } \vec{OP} = s\vec{n} = 8s\vec{i} + s\vec{j} - 5s\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = 8s \\ y = s \\ z = -5s \end{cases}$$

Toisaalta tasolla on voimassa  $8x + y - 5z + 5 = 0$

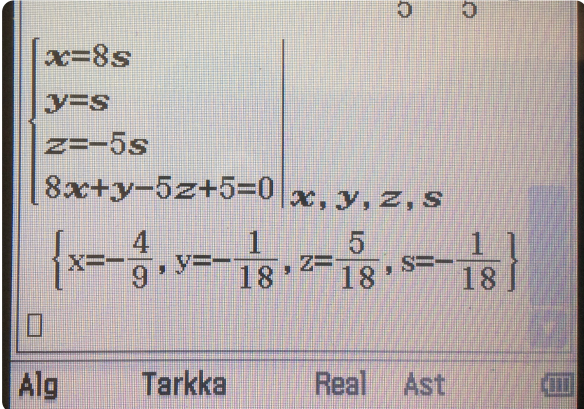
Näistä neljästä yhtälöstä voidaan ratkaista kaikki muuttujat  $s$ ,  $x$ ,  $y$  ja  $z$ :

$$8 \cdot 8s + s - 5(-5s) + 5 = 0$$

$$s = -1/18 = y$$

$$x = -8/18 = -4/9$$

$$z = 5/18$$



A screenshot of a calculator interface showing the solution to a system of equations. The equations are listed on the left:  $x=8s$ ,  $y=s$ ,  $z=-5s$ , and  $8x+y-5z+5=0$ . The variables  $x, y, z, s$  are listed on the right. The solution is given as  $\left\{ x = -\frac{4}{9}, y = -\frac{1}{18}, z = \frac{5}{18}, s = -\frac{1}{18} \right\}$ . The calculator interface includes a bottom menu with options: Alg, Tarkka, Real, Ast, and a calculator icon.

Eli pisteen P koordinaatit ovat  $(-4/9, -1/18, 5/18)$

Huomaa, että voit piirtää tasoja, pisteitä ja suoria myös geogebraalla!

(kantsii ladata omalle iPadille sen äppi)