2-ulotteisessa xy-koordinaatistossa suora voitiin määrittää muodossa $y=kx+b$

3-ulotteisessa xyz-koordinaatistossa on myös suoria, mutta samanlaista esitysmuotoa ei ole.

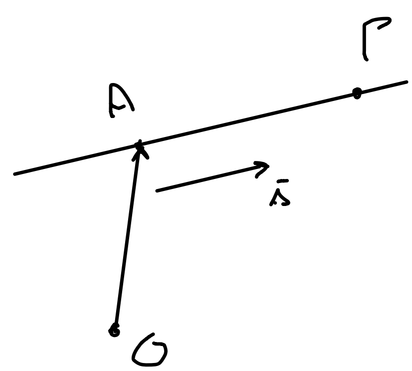
Suoran yhtälö voidaan esittää

| | |
|---|---|
| -vektorimuodossa, | OP= ? |
| -koordinaattimuodossa, | (x,y,z) = ? |
| -normaalimuodossa | yhtälö |

Esim. Määritä pisteiden A (1,2,3) ja B (-1,0,5) kautta kulkevan suoran yhtälö.

Suoran eräs suuntavektori ($\overline{AB}$)

$$\bar{s} = (-1-1)\bar{i} + (0-2)\bar{j} + (5-3)\bar{k}$$
$$= -2\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$$




Toisaalta $\overline{OA} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$

Olkoon suoran satunnainen piste P (x,y,z)

Nyt $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$

$= \overline{OA} + r\,\bar{s} \qquad r \in \mathbb{R}$

$= \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} + r(-2\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k})$

$= (1-2r)\bar{i} + (2-2r)\bar{j} + (3+2r)\bar{k}$

Tämä on suoran yhtälön *vektorimuoto*.

Toisaalta jos P (x,y,z), niin

$$\begin{cases} x = 1-2r \\ y = 2-2r \\ z = 3+2r \end{cases}$$

Tämä on suoran yhtälön *koordinaattimuoto*.

Tästä voidaan vielä muokata suoran yhtälön *normaalimuoto* ratkaisemalla vakio r:

$$r = \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

Esim. kahden suoran yhtälöt ovat

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = 2 - r \\ z = 3 + r \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Onko suorilla leikkauspistettä? Mikä?
Määritä suorien välinen kulma.

Jos on leikkauspiste P (x,y,z), niin silloin

$$\begin{cases} 1 - r = 3 + 2t \\ 2 - r = 1 - t \\ 3 + r = 4 + t \end{cases}$$

Jos yhtälöryhmällä on ratkaisu, niin silloin se on haettu leikkauspiste.

Esim. laskimella ratkaistuna r=0 ja t=-1

joten leikkauspiste on (1,2,3)

Suorien välinen kulma saadaan suuntavektoreiden avulla pistetulosta:

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = 2 - r \\ z = 3 + r \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

$$\bar{s}_1 = -\bar{i} - \bar{j} + \bar{k} \qquad \bar{s}_2 = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$$

$$\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 = -1 \cdot 2 + (-1)(-1) + 1 \cdot 1$$

$$= 0$$

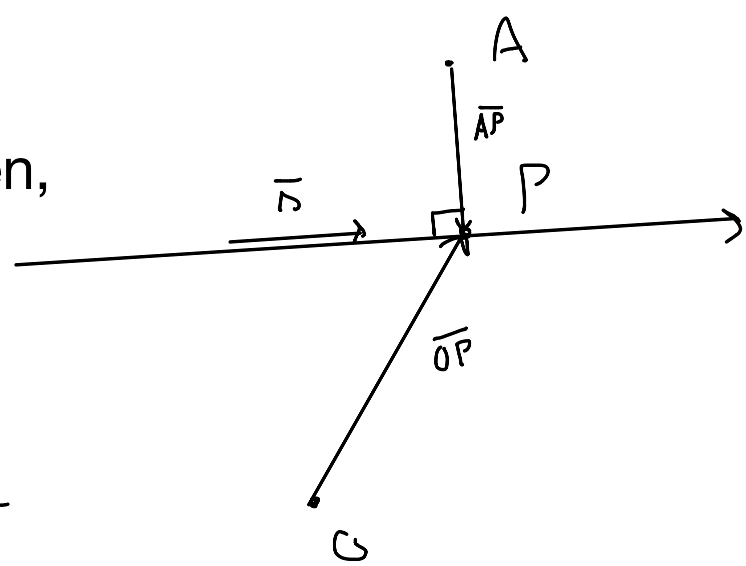
Siis vektoreiden ja suorien välinen kulma on 90°

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \end{cases}$$

( $z = t$

Esim. Kuinka kaukana piste A (1,2,3) on

suorasta $\overline{OP} = 2t\bar{i} + (1+t)\bar{j} + t\bar{k}$ ?




Määritellään P siten, että $\overline{AP}$ ja $\bar{s}$ ovat kohtisuorassa keskenään.

$\bar{s} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$

Nyt P (2t, t+1, t),

joten $\overline{AP} = (2t-1)\bar{i} + (t+1-2)\bar{j} + (t-3)\bar{k}$

Nyt $\bar{s} \cdot \overline{AP} = 0$ koska suora kulma

$2 \cdot (2t-1) + 1 \cdot (t+1-2) + 1 \cdot (t-3) = 0$

$6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$

Eli P (2,2,1) on lähin suoran piste pisteestä A

A (1,2,3) P(2,2,1) $|\overline{AP}| = \sqrt{1^2+(-2)^2}$

$\overline{AP} = (2-1)\bar{i} + (2-2)\bar{j} + (1-3)\bar{k} = \bar{i} - 2\bar{k}$

$\overline{AP}$ vektorin pituus on $\sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$

Eli piste A on $\sqrt{5}$ päässä suorasta.