4.1 Peruskäsitteitä

Tasolla eli 2-ulotteisessa maailmassa meillä riittää 2 kantavektoria muodostamaan kanta.

Nyt käsitellään 3-ulotteista avaruutta, joten kantavektoreita on 3, jotka muodostavat avaruuden kannan.

Jos $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ovat kantavektoreita, niin yksikäsitteisyyden nojalla

$$s\bar{a} + r\bar{b} + t\bar{c} = u\bar{a} + v\bar{b} + w\bar{c}$$

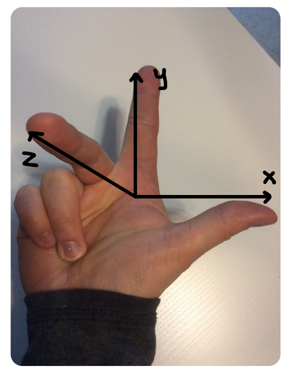
vain, kun $\begin{cases} s = u \\ r = v \\ t = w \end{cases}$

Jotta vektori on kantavektori, täytyy se olla sellainen, että sitä ei voi muodostaa muiden kantavektoreiden avulla. (eli $\bar{a} \neq x\bar{b} + y\bar{c}$)

4.2 xyz-koordinaatisto

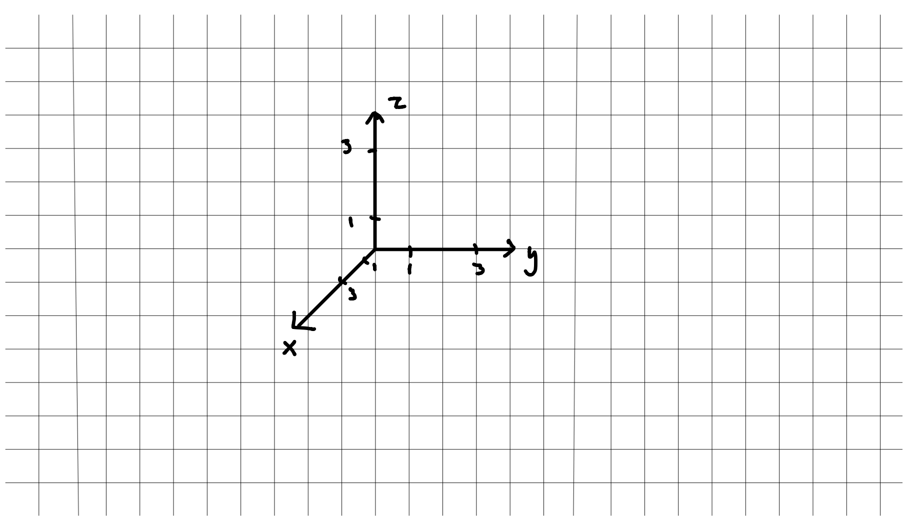
3-ulotteinen avaruus voidaan esittää xy-koordinaatistona, johon lisätään syvyys-akseli z.

Oikeakätiseksi xyz-koordinaatistoksi sanotaan oikean käden säännöllä pääteltävää koordinaatistoa: peukku on x-akseli, etusormi y-akseli ja keskisormi on z-akseli. (kts. s.126) (vastaavasti vasenkätinen)



Koordinaatisto on yleensä *suorakulmainen*, jolloin akselit ovat 90° kulmassa toisiinsa nähden.

Piirtäminen paperille:



4.3 Vektorit xyz-koordinaatistossa

Käytetään $\bar{i}$ ja $\bar{j}$ vektoreiden lisäksi $\bar{k}$ -vektoria, joka on z-akselin suuntainen yksikkövektori.

$\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$ ovat nyt avaruuden kantavektoreita, eli jokainen 3-ulotteinen vektori voidaan ilmoittaa niiden avulla.

Pisteen P (x,y,z) paikkavektori

$$\boxed{\overline{OP} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}$$

Paikkavektorin pituus (pythagoraalla):

$$\boxed{|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Esim. Määritä pisteen P (3,-2, 7) paikkavektori ja sen pituus.

$$\overline{OP} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 7\bar{k}$$

$$|\overline{OP}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 7^2} = \sqrt{62} \approx 7,9$$

4.4 Kahden pisteen välinen vektori

Avaruudessa kahden pisteen välinen vektori määritellään samaan tapaan kuin tasossakin:

Esim. Olkoon A (1,2,-3) ja B (-2,4,2).
Määritä vektori $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = (-2-(1))\bar{i} + (4-(2))\bar{j} + (2-(-3))\bar{k}$$

$$= -3\bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}$$

Yleisesti siis pisteiden A (x_1, y_1, z_1) ja B (x_2, y_2, z_2) välinen vektori on

$$\boxed{\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}}$$

Myös janan AB keskipiste menee tutulla tavalla:

$$\boxed{P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)}$$

$\overline{AB}$ vektori on hyvin samankaltainen *pallon* yhtälön kanssa!

(muistellaan ympyrän yhtälön keskipistemuoto:)

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$ r = säde (x_0, y_0) = keskipiste

Pallon yhtälö keskipistemuodossa:

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2}$$

Kuten ympyrässäkin, kun sulkeet aukaistaan, saadaan yhtälö normaalimuodossa (/yleisessä).

Esim. Pallon keskipiste on (1,2,3) ja säde 4. Kirjoita pallon yhtälö keskipiste- ja normaalimuodossa.

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4^2$$

$\vdots$ auk. sulk.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$$

Esim. Pallon yhtälö on $x^2+y^2+z^2-6x+4y+10z+31=0$

Määritä pallon keskipiste ja säde.

$$x^2-6x \;\_\_\; +y^2+4y \;\_\_\; +z^2+10z \;\_\_\; \;\_\_\_\; +31=0$$

$$\underbrace{x^2-2\cdot 3x+3^2}\underbrace{+y^2+2\cdot 2y+2^2}\underbrace{+z^2+2\cdot 5z+5^2}-3^2-2^2-5^2+31=0$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+5)^2-38+31=0$$

$$(x-3)^2+(y-(-2))^2+(z-(-5))^2=\sqrt{7}^2$$

$$(3,-2,-5) \qquad r=\sqrt{7}$$

4.5 Pistetulo xyz-koordinaatistossa

Lasketaan samaan tapaan kuin 2-ulotteisessa xy-koordinaatistossa:

Esim. Laske seuraavat pistetulot

$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha}$

a) i·j $= 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

b) j·k $= 0$

c) k·k $= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

d) (i+j)·k $= \bar{i} \cdot \bar{k} + \bar{j} \cdot \bar{k} = 0 + 0 = 0$

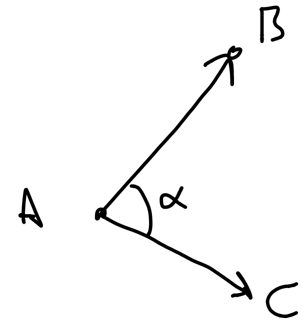
e) (i+j+k)·(i+j+k) $= \bar{i} \cdot \bar{i} + \bar{i} \cdot \bar{j} + \bar{i} \cdot \bar{k} + \bar{j} \cdot \bar{i} + \bar{j} \cdot \bar{j} + \bar{j} \cdot \bar{k} + \bar{k} \cdot \bar{i} + \bar{k} \cdot \bar{j} + \bar{k} \cdot \bar{k}$

$= 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 3$

f) (i-j+2k)·(7i+2j-3k) $= \bar{i} \cdot 7\bar{i} + (-\bar{j}) \cdot 2\bar{j} + 2\bar{k} \cdot (-3\bar{k})$

$= 1 \cdot 7 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = -1$

Esim. Olkoon A(0,1,0) B(1,2,3) ja C(4,3,q)
Määritä se q, jolla kulma BAC on suora.



$$\overline{AB} = \bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\overline{AC} = 4\bar{i} + 2\bar{j} + q\bar{k}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha$$

Jos $\alpha = 90^\circ$, niin

$$(\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}) \cdot (4\bar{i} + 2\bar{j} + q\bar{k}) = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot 0$$

$$1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot q = 0$$

$$3q + 6 = 0$$

$$q = -2$$