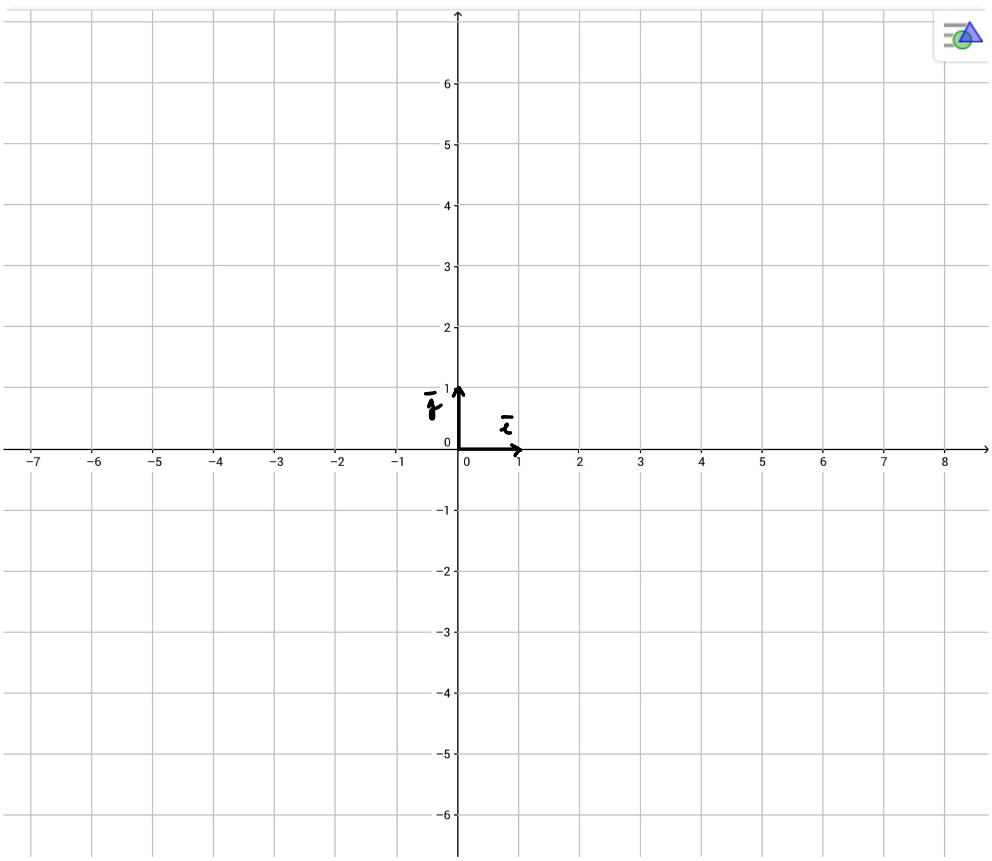
## 3.1 Peruskäsitteitä

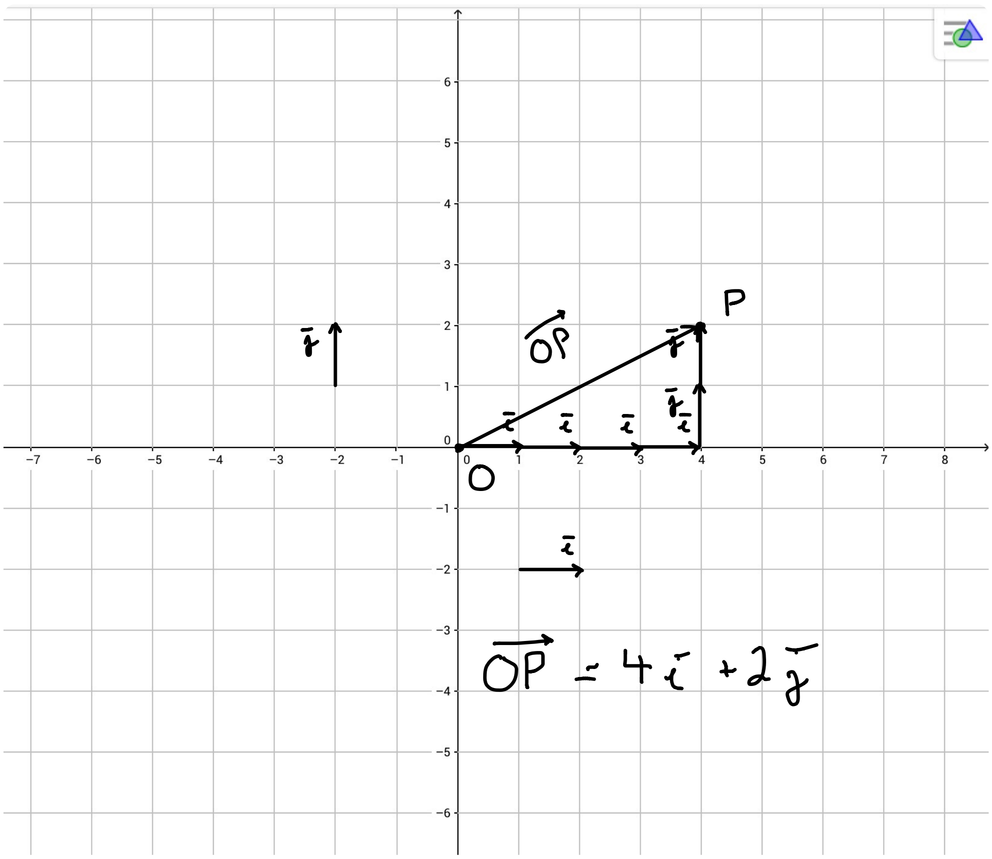
Otetaan vektorit käyttöön xy-koordinaatistossa.
Määritetään kaksi uutta vektoria: $\bar{i}$ ja $\bar{j}$.




$\bar{i}$ on x-akselin suuntainen yksikkövektori.
$\bar{j}$ on y-akselin suuntainen yksikkövektori.

Nämä ovat koordinaatiston kantavektorit, joten jokainen vektori xy-koordinaatistossa voidaan esittää näiden avulla.

Esim. Piste P (4,2)
Esitä pisteen *paikkavektori* $\overrightarrow{OP}$ (O=origo=(0,0))

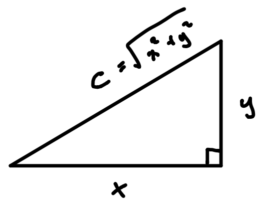



Yleisesti pisteen P (x,y) paikkavektori on

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = x\bar{i} + y\bar{j}}$$

## 3.2 Vektorin pituus

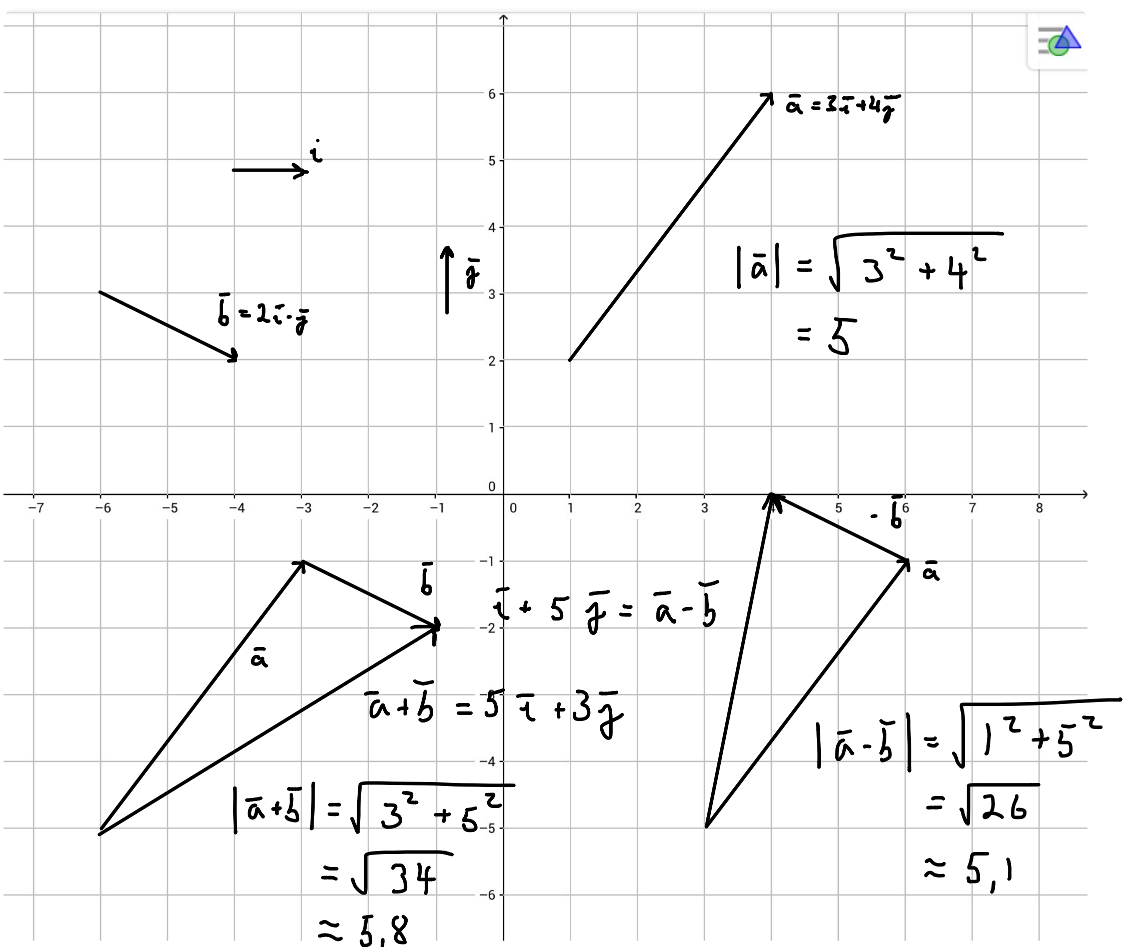
Vektorin pituus xy-koordinaatistossa saadaan pythagoraan lauseella:




$$\boxed{\text{Vektorin} \quad x\bar{i} + y\bar{j} \quad \text{pituus on} \quad \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Esim. Olkoon vektorit $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ ja $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j}$

Määritä vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{a}+\bar{b}$ ja $\bar{a}-\bar{b}$ pituudet.



$a = 3i + 4j \qquad b = 2i - j$

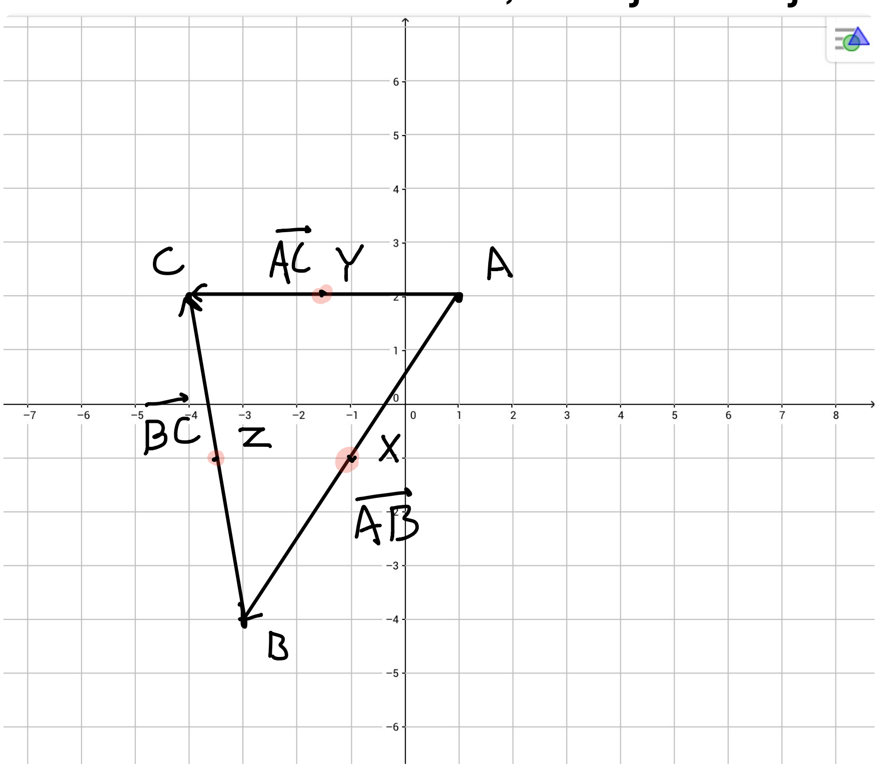
$a+b = 3i + 4j + 2i - j \quad = 5i + 3j$

$a-b = 3i + 4j - (2i - j) \quad = i + 5j$

## 3.3 Kahden pisteen välinen vektori

Esim. Olkoon pisteet A(1,2), B(-3,-4), ja C(-4,2).

Määritä vektorit $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BC}$ ja niiden pituudet



$\overrightarrow{AB} = (-3-1)\bar{i} + (-4-2)\bar{j} = -4\bar{i} - 6\bar{j}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}$

$= 2\sqrt{13}$

$\overrightarrow{AC} = (-4-1)\bar{i} + (2-2)\bar{j} = -5\bar{i}$ $\quad |\overrightarrow{AC}| = 5$

$\overrightarrow{BC} = (-4-(-3))\bar{i} + (2-(-4))\bar{j} = -\bar{i} + 6\bar{j}$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (6)^2}$

$= \sqrt{37}$

Mitkä on janojen AB, AC ja BC keskipisteet?

$X\,(-1, -1) = \left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right)$

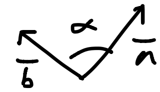
$Y\,(-1{,}5\,;\,2)$ $\qquad Z\,(-3{,}5\,;\,-1)$

Yleisesti: A $(x_1, y_1)$ ja B $(x_2, y_2)$

Vektori $\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j}}$

Janan AB keskipiste $\boxed{M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$

# 3.4 Pistetulo xy-koordinaatistossa




Määritä pistetulo vektoreille $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha$

a) $\bar{i}$ ja $\bar{j}$ $\quad \bar{i}\cdot\bar{j} = 1\cdot 1\cdot\cos 90^\circ = 0$

b) $\bar{i}$ ja $\bar{i}$ $\quad \bar{i}\cdot\bar{i} = 1\cdot 1\cdot\cos 0^\circ = 1$

c) $2\bar{i}$ ja $-4\bar{i}$ $\quad 2\bar{i}\cdot(-4\bar{i}) = 2\cdot 4\cdot\cos 180^\circ = -8$

d) $-4\bar{i}$ ja $\pi\bar{j}$ $\quad -4\bar{i}\cdot\pi\bar{j} = 4\cdot\pi\cdot\cos 90^\circ = 0$

e) $(\bar{i}+\bar{j})$ ja $\bar{j}$ $\quad (\bar{i}+\bar{j})\cdot\bar{j} = \bar{i}\cdot\bar{j} + \bar{j}\cdot\bar{j} = 0 + 1 = 1$

f) $(\bar{i}+\bar{j})$ ja $(\bar{i}+\bar{j})$ $\quad (\bar{i}+\bar{j})\cdot(\bar{i}+\bar{j}) = \overbrace{\bar{i}\cdot\bar{i}}^{1} + \overbrace{\bar{i}\cdot\bar{j}}^{0} + \overbrace{\bar{j}\cdot\bar{i}}^{0} + \overbrace{\bar{j}\cdot\bar{j}}^{1} = 2$

g) $(\bar{i}+\bar{j})$ ja $(3\bar{i}-2\bar{j})$ $\quad (\bar{i}+\bar{j})\cdot(3\bar{i}-2\bar{j}) = \overbrace{\bar{i}\cdot 3\bar{i}}^{1\cdot 3} + \overbrace{\bar{i}\cdot(-2\bar{j})}^{0}$

$+ \underbrace{\bar{j}\cdot 3\bar{i}}_{0} + \underbrace{\bar{j}\cdot(-2\bar{j})}_{\substack{1\cdot 2\cdot(-1) = -2 \\ 1\cdot(-2) = -2}}$

$= 1$

h) $x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ ja $x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$

$= x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$

Eli vektoreille $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ ja $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ pätee

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2}$$

Esim. Määritä vektoreiden $\bar{a} = 3\bar{i} - 7\bar{j}$
ja $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j}$ välinen kulma.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot 2 + (-7) \cdot (-1) = 13$$

$$= |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha = 13$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{58} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\alpha = 13$$

$$\cos\alpha = \frac{13}{\sqrt{290}}$$

$$= 0{,}76338\ldots$$

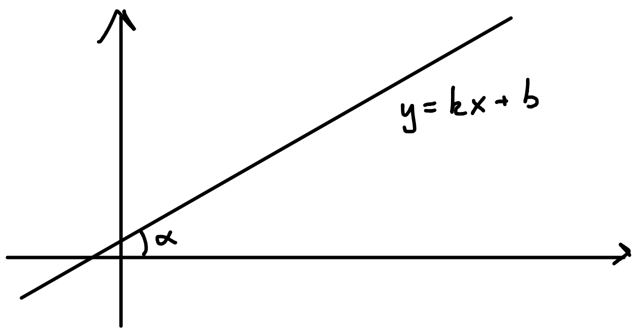
$$\alpha = 40{,}236\ldots^\circ$$

eli kulma on noin 40 astetta

# 3.5 Suoran suuntavektori

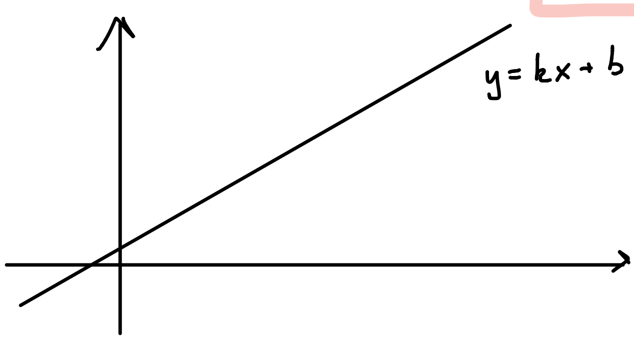
xy-koordinaatiston suoria ilmoitettiin suoran yhtälön avulla: $y = kx + b$, k on kulmakerroin

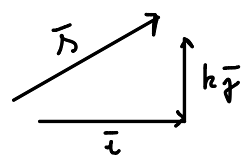
$\alpha$ on suuntakulma




$$\boxed{k = \tan \alpha}$$

xy-koordinaatiston vektoreita kuvataan $\bar{i}$ ja $\bar{j}$ vektoreiden avulla:
Jos kyseessä on sama suunta kuin suoralla, voidaan *suuntavektorin* $\bar{s}$ avulla määrittää suoran kulmakerroin: $\boxed{\bar{s} = \bar{i} + k\bar{j}}$




Esim. Suoran suuntavektori on $-3\bar{i} + 6\bar{j}$

Määritä suoran kulmakerroin ja suuntakulma.

$-3\bar{i} + 6\bar{j} \quad | : (-3)$

$\bar{i} + (-2)\bar{j} \qquad -3\bar{i} + 6\bar{j} \parallel \bar{i} - 2\bar{j}$

kulmakerroin k = -2

$k = \tan\alpha = -2$

$\alpha \approx -63°$