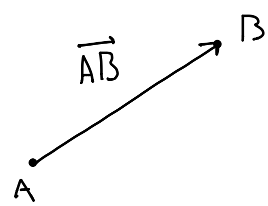
Skalaarisuure: vain suuruus
Esim. Lämpötila

Vektorisuure: suuruus JA suunta!
Esim. nopeus

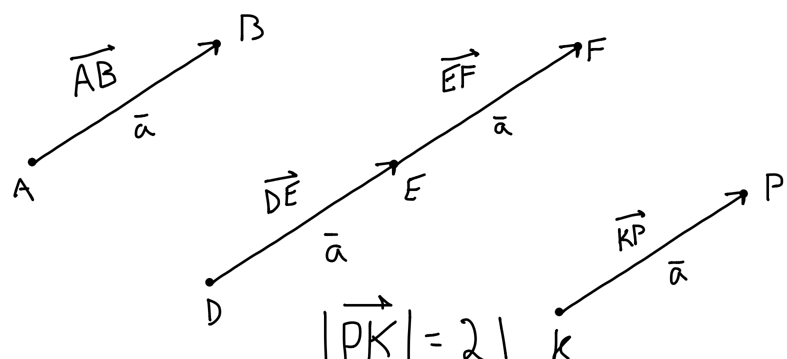
Muita esimerkkejä?

2.1 Peruskäsitteitä

Suuntajana $\overrightarrow{AB}$:



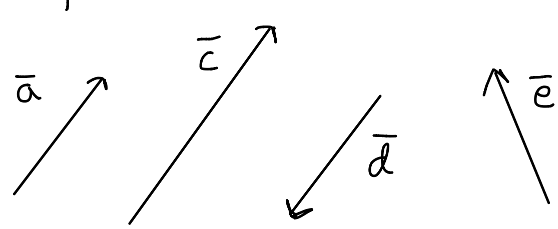
Vektori $\bar{a}$:



$|\overrightarrow{PK}| = 21$

pituus $|\overrightarrow{AB}| = |\bar{a}| = 21 = |\overrightarrow{KP}|$

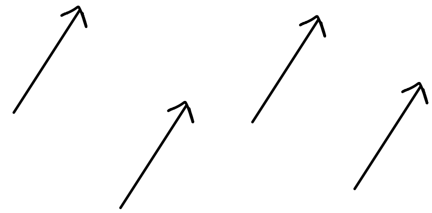
yhdensuuntainen:



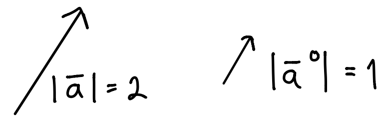
$\bar{a} \parallel \bar{c}, \bar{d}$ $\quad \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{c}$ $\quad \bar{a} \uparrow\downarrow \bar{d}$ $\quad \bar{a} \nparallel \bar{e}$

yhtäsuuret/samat:

(sama suunta ja suuruus)

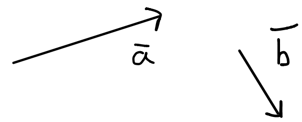


yksikkövektori: pituus on yksi

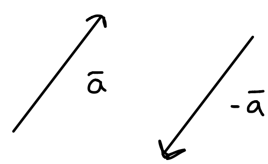


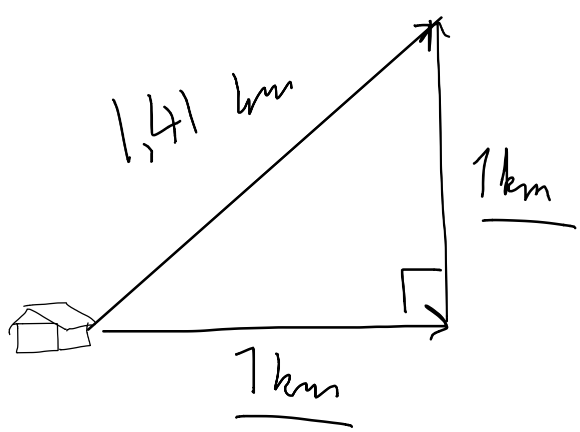
nollavektori: pituus on nolla $\bar{0}$

vektoreiden välinen kulma



vektorin ā vastavektori -ā



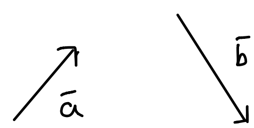


2.2 Vektoreiden summa ja erotus

Esim. Kuljetaan kotoa ensin 1 km itään ja sitten 1 km pohjoiseen. Kuinka kaukana ollaan kotoa?

Vektoreita voidaan laskea yhteen. Tätä vektoreiden summaa voidaan merkitä uutena vektorina.

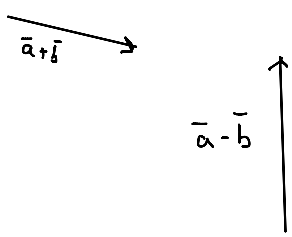
Esim. Olkoon vektorit:



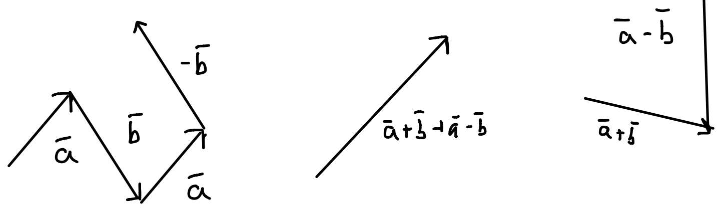
Laske vektori

$\bar{a}+\bar{b}$

$\bar{a}-\bar{b}$



$\underline{\bar{a}+\bar{b}}+\underline{\bar{a}-\bar{b}}$

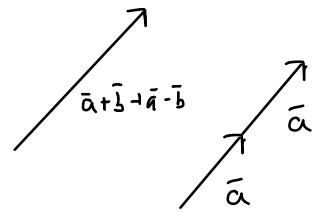


Vektoreita lasketaan yhteen kuin reaalilukuja.

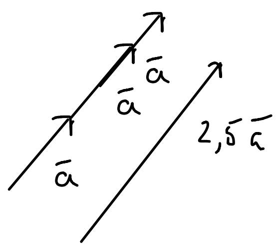
Viimeinen esimerkki voidaan kirjoittaa siis

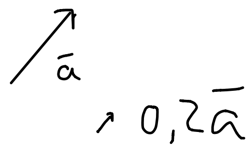
$\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}-\bar{b} = \bar{a}+\bar{a}+\bar{b}-\bar{b}$

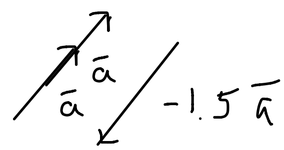
$=2\bar{a}$



Millainen vektori olisi $2{,}5\bar{a}$? tai $0{,}2\bar{a}$? tai $-1{,}5\bar{a}$?



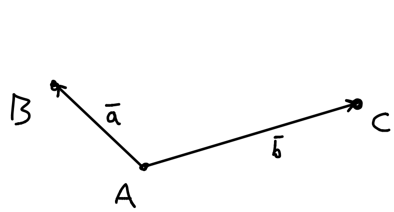




2.3 Vektorin kertominen luvulla

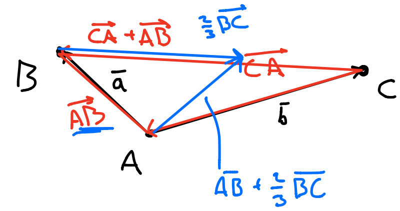
Vektoria voidaan kertoa millä tahansa reaaliluvulla. Se ei vaikuta vektorin suuntaan, vain sen pituuteen.
(-voi kääntää suunnan ja 0 voi hävittää suunnan

Esim. Olkoon $\overrightarrow{AB} = \bar{a}$ ja $\overrightarrow{AC} = \bar{b}$



Millainen on vektori

$\overline{CA} + \overline{AB} = -\overline{b} + \overline{a} = \overrightarrow{CB}$



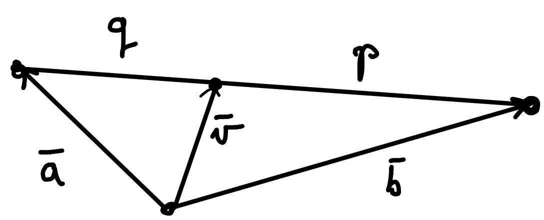
$\overline{BC} = -\overrightarrow{CB} = -(-\overline{b} + \overline{a}) = \overline{b} - \overline{a}$

$2/3\ \overline{BC} = 2/3(\overline{b} - \overline{a}) = 2/3\overline{b} - 2/3\overline{a}$

$\overline{AB} + 2/3\ \overline{BC} = \overline{a} + 2/3\overline{b} - 2/3\overline{a}$

$= 1/3\overline{a} + 2/3\overline{b}$

Yleisesti jakosuhdevektori on



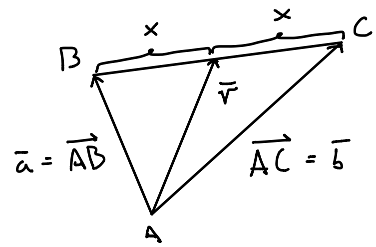
$$\boxed{\bar{v} = \frac{p\bar{a} + q\bar{b}}{p+q}}$$

MAOL s.40

Esim. Kolmion ABC kaksi sivua kuvataan vektoreilla $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$.

Määritä vektori $\overline{v}$, joka on pisteestä A alkava kolmion keskijana.

Koska keskijana, puolittaa se sivun BC, eli jakosuhde p:q on 1:1.

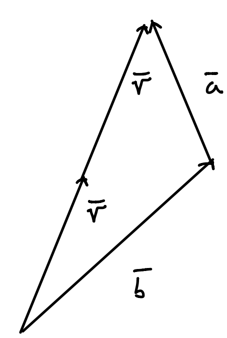


Nyt $\overline{v} = \dfrac{p\overline{a} + q\overline{b}}{p+q}$

$$\overline{v} = \frac{1\overline{a} + 1\overline{b}}{1+1}$$

$$= \frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$$

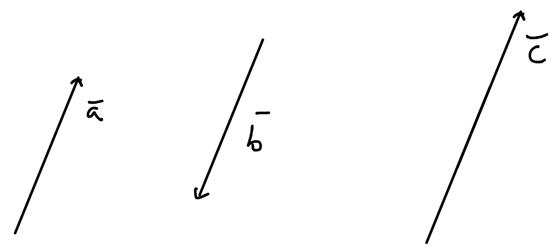


Eli $2\overline{v} = \overline{a} + \overline{b}$

2.4 Vektoreiden yhdensuuntaisuus

Kaksi vektoria $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaisia silloin, kun $\bar{a} = r\bar{b}$, r on jokin reaaliluku.

Esim vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ovat yhdensuuntaisia,

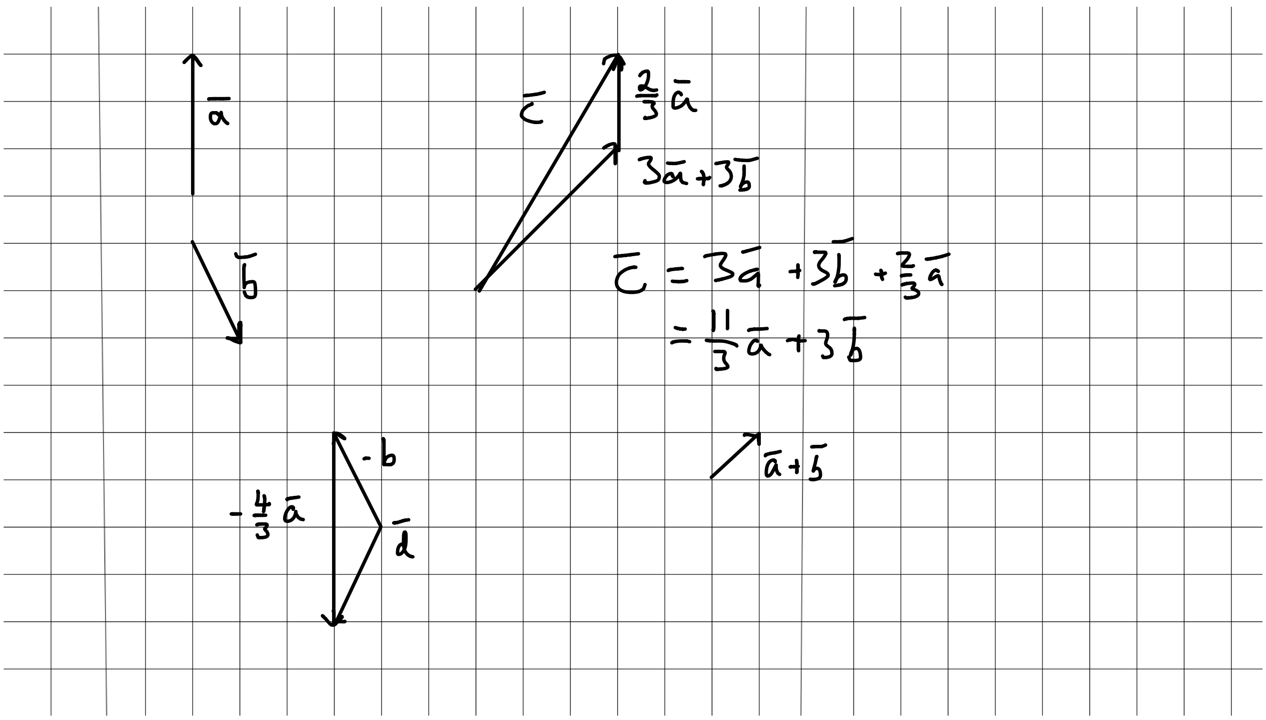


koska $\bar{a} = -\bar{b}$ ja $\bar{c} = 1{,}5\bar{a}$ $\quad\quad \bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b} \quad \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{c}$

Lisäksi vektorit a ja b ovat samansuuntaisia, jos r>0 ja vastakkaissuuntaisia, jos r<0.

2.5 Kantavektorit

Esim. Ilmoita vektori $\overline{c}$ vektoreiden $\bar{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.



Jos meillä on kaksi erisuuntaista vektoria $\bar{a}$ ja $\overline{b}$, niin mikä tahansa (samassa tasossa oleva) vektori $\bar{v}$ voidaan ilmoittaa niiden avulla. Tällöin $\bar{a}$ ja $\overline{b}$ ovat tason *kantavektorit*.

$$\boxed{\bar{v} = r\bar{a} + s\bar{b}} \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

Kantavektoriesitys on yksikäsitteinen, eli jos kaksi vektoria ovat yhtä suuria, on myös niiden kertoimet r ja s samat.

Esim. Ovatko vektorit $\bar{u} = \bar{a} - 2\bar{b}$ ja $\bar{v} = 6\bar{b} - 3\bar{a}$ yhdensuuntaiset?

Jos ovat yhdensuuntaiset,
niin $\bar{u} = r\bar{v}$
eli $\bar{a} - 2\bar{b} = 6r\bar{b} - 3r\bar{a}$

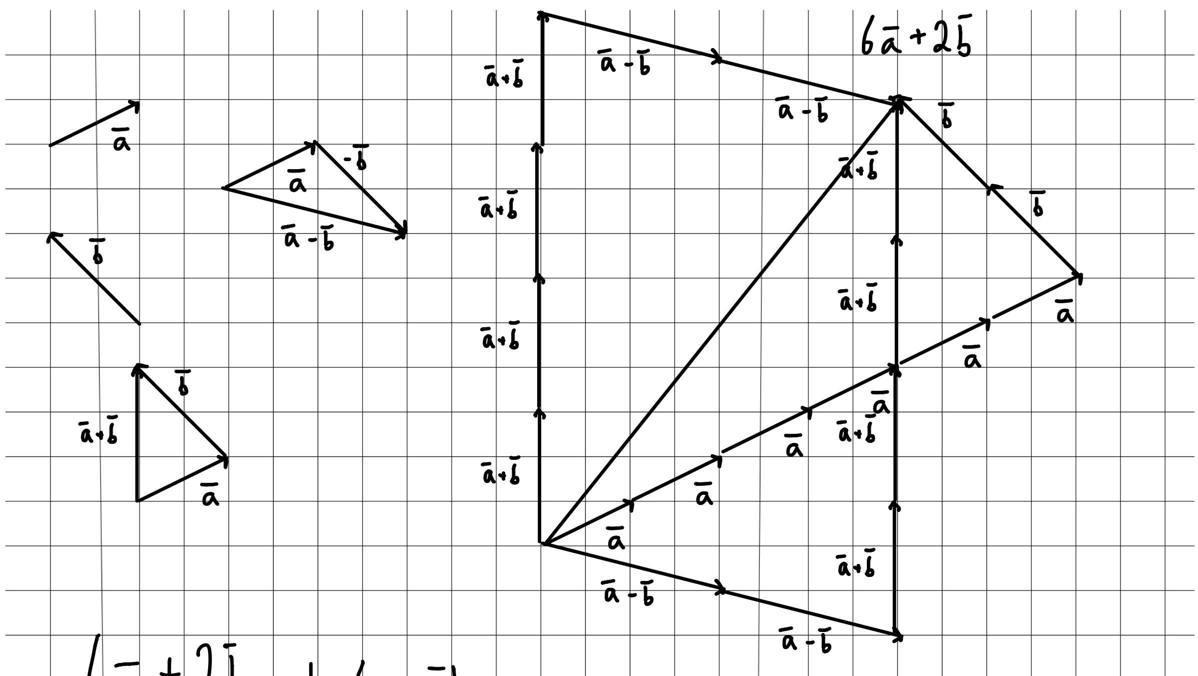
Koska kantavektoriesitys yksikäsitteinen, on

$$\begin{cases} 1 = -3r \\ -2 = 6r \end{cases}$$

Molemmista saadaan, että r=-1/3

Silloin vektorit $\bar{u}$ ja $r\bar{v}$ ovat yhtä suuret, eli vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ ovat yhdensuuntaiset.

Esim. Jaa vektori 6a +2b vektoreiden a+b ja a-b suuntaisiin komponentteihin, kun vektorit a ja b muodostavat tason kannan.



$6\bar{a}+2\bar{b} = 4(\bar{a}+\bar{b})+2(\bar{a}-\bar{b})$

Nyt 6a +2b = r(a+b) + s(a-b)

eli 6a + 2b = (r+s)a + (r-s)b

Tästä saadaan yhtälöpari $\begin{cases} 6 = r+s \\ 2 = r-s \end{cases}$

Ratkaisemalla se saadaan r = 4 ja s = 2.

Joten 6a + 2b = 4(a+b) + 2(a-b)

2.6 Pistetulo eli skalaaritulo

Tähän mennessä on laskettu vektoreita yhteen ja kerrottu niitä reaaliluvuilla. Vektoreita voidaan myös kertoa keskenään!

Pistetulo eli skalaaritulo: $\bar{a} \cdot \bar{b}$

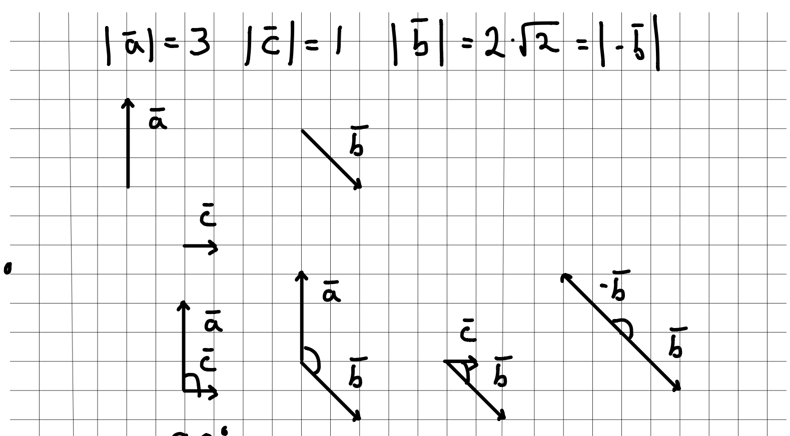
Ristitulo eli vektoritulo: $\bar{a} \times \bar{b}$

Skalaaritulosta tulee skalaari eli reaaliluku.
Vektoritulosta tulee vektori (ei lukio-matikkaa)

Pistetulo: $\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha}$

tässä alfa α on vektoreiden välinen kulma

Esim. Laske $\bar{a} \cdot \bar{b}$, $\bar{a} \cdot \bar{c}$, $\bar{b} \cdot \bar{c}$ ja $\bar{b} \cdot (-\bar{b})$



$90°$ $135°$ $45°$ $180°$

0 -6 2 -8

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \underbrace{\cos 135°}_{= -\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= -6$$

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = 3 \cdot 1 \cdot \underbrace{\cos 90°}_{=0}$$

$$= 0$$

$\bar{b} \cdot \bar{c} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 45° = 2$

$\bar{b} \cdot (-\bar{b}) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 180° = -8$

Esim. vektoreiden a ja b pistetulo on 8. Määritä vektoreiden välinen kulma, kun molempien vektoreiden pituus on 4.

$$\cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

$$= \frac{8}{4 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

Siis $\alpha = 60°$