7.2 Peruskäsitteitä

Lukujono = jono, jonka jäsenet ovat reaalilukuja.
Sequence = line of (real) numbers

-voi olla päättyvä tai päättymätön
esim. (4,2,0,-2) tai (0,1,2,3,...)
Can be finite or infinite

Ensimmäistä termiä merkitään yleensä a_1 (a_0)
First member
N:s jäsen eli yleinen termi on a_n
General member (n:th member)
Jos jonossa on jokin matemaattinen sääntö, voidaan yleinen termi merkitä laskukaavalla.
Sequence can be defined by mathematical rule
esim. lukujono (1,2,4,8,16,...)

$a_1 = 1$ $\quad a_n = 2^{n-1}$ $\quad$ (tai $a_0 = 1$ $\quad a_n = 2^n$)

$a_n = a_{n-1} \cdot 2$

Rekursiivinen lukujono määritellään edellis(t)en termi(e)n avulla. Recursive sequence is defined by its previous members.

Esim. Fibonaccin lukujono (1,1,2,3,5,8,13,21,...)

Voidaan esittää rekursiivisena:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Joskus rekursiivisen jonon yleinen termi voidaan määrittää. Esim. Fibonaccin lukujonon yleinen termi on tehtävässä 709.

Laskimen taulukko-toiminto osaa laskea uusia jäseniä! (jos vain edellinen termi määrää jonon, voidaan se määrittää "ans" toiminnolla)

Calculator can calculate new members in a recursive sequence

7.3 Lukujonon ominaisuuksia

Päättyvässä lukujonossa A finite sequence

-on n määrä termejä   has n members

-on aina suurin (M) ja pienin (m) arvo
Has a largest (M) and smallest (m) value
-on aina rajoitettu (välille [m, M])
is limited between m and M
-termit voidaan laskea yhteen, summa on jokin reaaliluku Sum of the members is finite

Pätevätkö samat päättymättömille lukujonoille?
Do all these rules apply for infinite sequences?

Esim. lukujonoja (0,0,0,0,0,...)
(1,-1,1,-1,...)
(1,1,1,1,1,1,...)
(0,1,2,3,4,...)
(1, 1/2, 1/3, 1/4,...)

-(aidosti) kasvava lukujono? $a_n \leq a_{n+1}$
-(aidosti) vähenevä lukujono? $a_n \geq a_{n+1}$

7.4 Aritmeettinen lukujono Arithmetic sequence

=lukujono, jonka seuraava termi on aina saman vakion verran suurempi
Sequence, where the next member is calculated by adding a constant

Esim. (1,2,3,4,5,...)
tai (2π,π,0,-π,-2π,-3π,...)

Aritmeettisen lukujonon yleinen termi muotoa

$$a_n = a_{n-1} + d \quad \text{tai} \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$= a_0 + nd$$

rekursiivinen muoto

Tässä d on *erotusluku* (d= difference).

Edellisen esimerkin lukujonot ilmoitettuna yleisen termin avulla:

$a_1 = 1 \quad d = 1 \quad a_n = a_1 + (n-1)d$

$(1, 2, 3, 4, \ldots)$

$$= 1 + (n-1)\cdot 1$$
$$= n$$

$a_1 = 2\pi \quad d = -\pi \quad a_n = 2\pi + (n-1)(-\pi)$

$$= 3\pi - n\pi$$

Esim. $a_8 = 3\pi - 8 \cdot \pi = -5\pi$

7.5 Geometrinen lukujono

Geometric sequence

=lukujono, jossa edellinen termi kerrotaan aina samalla vakiolla. Sequence, where the next member is calculated by adding a constant

Esim. (1,2,4,8,16,...)
(1, 1/2, 1/4, 1/8,...)
(1,-1,1,-1,1,-1,...)

Yleinen termi muotoa

$a_n = a_{n-1} \cdot q$ tai $a_n = a_1 q^{n-1}$

rekursiivinen muoto $= a_0 q^n$

Tässä q on *suhdeluku* (quotient).

Edelliset esimerkit yleisellä termillä:

$a_1 = 1 \quad q = 2$

$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^n$

$a_1 = 1 \quad q = \frac{1}{2}$

$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \cdot 2$

$a_1 = 1 \quad q = -1$

$a_n = 1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} = -1 \cdot (-1)^n$

$a_7 = 2^6 = 64$ | $a_6 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ | $a_{1000} = (-1)^{999} = -1$

Esim.
Ikkunalasi päästää auringonvalosta läpi 95%.
Kuinka monta ikkunalasia pitää laittaa peräkkäin, että valosta pääsee läpi vain 10%?
A window lets 95% of light to come through.
How many windows will only let 10% through?

1 window 2 windows n windows

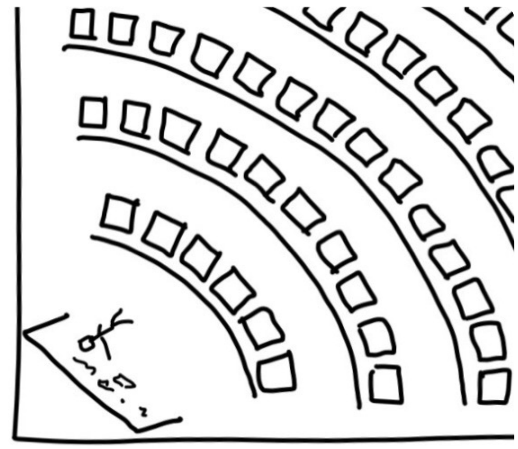
$x \cdot 0{,}95$ $\quad$ $x \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 = x \cdot 0{,}95^2$ $\quad$ $x \cdot 0{,}95^n$

$a_1 = x \quad a_2 = x \cdot 0{,}95 \quad a_n = x \cdot 0{,}95^{n-1}$ (n-1 windows)

$\cancel{x} \cdot 0{,}95^n = 0{,}10 \cdot \cancel{x}$ | solve

$n \approx 44{,}89 \Rightarrow 45$ windows

Esim. Luentosalin penkkirivin paikat menevät kuvan mukaisesti. Jos ensimmäinen penkkirivi on se, missä on kuvan mukaiset 6 paikkaa, niin kuinka monennella rivillä paikkoja on jo vähintään 100?



Which row has over 100 seats?

$$4(x-1)+6=100$$

$$x=24{,}5$$

$\Rightarrow$ 25. rivi

Esim. Työukko alkaa kaatamaan metsikköä. Hän laskee, että päivittäin hän saa kaadettua moottorisahalla 68 puuta päivässä. Urakoituaan 13 täyttä päivää, hän huomaa, että seuraavan päivän aikana hän saa kaadettua loputkin puut.

Arvioi metsikön puiden määrä, kun 5% puista jätetään pystyyn siemenpuiksi. A forester chops down a forest in 13 full days and 1 not full day. He chops down 68 trees/day. Estimate the amount of trees in the forest before chopping, when 5% of the trees are not chopped down.

if 14 full days

$0{,}95x = 14 \cdot 68$

$x \approx 1002$

if 13 full days

$0{,}95x = 13 \cdot 68$

$x \approx 931$

We can estimate the amount of trees is between 930 and 1000.