7.1 Logaritmi

Esim. Ratkaise x:

$$3^x = 8$$

x on väliltä]1,2[, koska 3<8<9

Logaritmin määritelmä: x>0, a>0, a≠1

$$\boxed{\log_a x = y} \iff \boxed{a^y = x}$$

Edellinen esimerkki:

$$x = \log_3 8 \overset{\text{laskin}}{\approx} 1{,}89$$

Kaikki laskimet eivät osaa laskea kaikkia logaritmeja, vain tiettyjen kantalukujen logaritmeja. Yleensä laskin osaa kantaluvut

- 10 (Briggsin logaritmi, merkitään log tai lg) ja
- e (Luonnollinen logaritmi, merkitään ln)
  e=neperin luku = 2,71828...

Mikä tahansa logaritmi voidaan muuttaa toisen kantaluvun logaritmiksi:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Edellisen esimerkin vastaus on tarkkana arvona

$$x = \log_3 8 = \frac{\ln 8}{\ln 3}$$

Logaritmeille on olemassa iso nippu laskusääntöjä:

1. $\log_a 1 = 0$ $\quad a^0 = 1$

2. $\log_a a = 1$ $\quad a^1 = a$

3. $\boxed{\log_a x^r = r \cdot \log_a x}$ $\quad \dfrac{\ln 8}{\ln 3} = \dfrac{\ln 2^3}{\ln 3} = \dfrac{3 \cdot \ln 2}{\ln 3}$

4. $\log_a a^x = x \cdot \log_a a = x$

5. (kantaluvun vaihto, oli äsken)

6. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

7. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Esim. Laske

$\log_5 \frac{1}{25} = -2$ koska $5^{-2} = \frac{1}{25}$

Esim. Sievennä:

$$\log_2 a^3 - 9\log_8 16a \qquad a>0$$

$$= \log_2 a^3 - 3^2 \log_8 2^4 \cdot a$$

$$= \log_2 a^3 - \log_8 (2^4 \cdot a)^{3^2}$$

$$= \log_2 a^3 - \frac{\log_2 (2^4 \cdot a)^{3^2}}{\log_2 8}$$

$$= \log_2 a^3 - \frac{\log_2 (2^4 \cdot a)^{3^2}}{3}$$

$$= \log_2 a^3 - \log_2 (2^4 \cdot a)^3$$

$$= \log_2 \frac{a^3}{(2^4 \cdot a)^3}$$

$$= \log_2 \frac{1}{(2^4)^3}$$

$$= \log_2 2^{-12}$$

$$= -12$$

Esim. Kuinka monta numeroa on luvussa

$$15^{2017}$$

Käytetään avuksi kymmenkantaista logaritmia!

$$\lg 15^{2017} = 2017 \cdot \lg 15$$

$$= 2372{,}17607\ldots$$

$$15^{2017} = 10^{2372{,}17607\ldots}$$

$$= 10^{2372} \cdot 10^{0{,}17607\ldots}$$

$$= 1{,}499924902\ldots \cdot 10^{2372}$$

Eli luvussa on 2372 numeroa, joista kuusi ensimmäistä on 1, 4, 9, 9, 9 ja 2

Mikä on viimeinen numero?

7.2 Logaritmifunktion määritelmä

Logaritmifunktio on eksponenttifunktion käänteisfunktio:

$a>0 \quad a \neq 1$

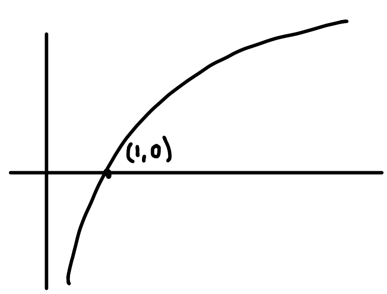
$$\boxed{f(x) = \log_a x} = y \qquad f^{-1}(y) = a^y = x$$

Mitä x voi olla? $\mathbb{R}_+$ pos. reaaliluvut

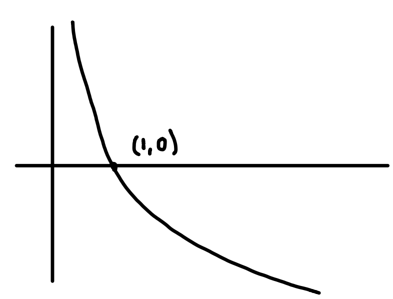
Mitä y voi olla? $\mathbb{R}$ kaikki reaaliluvut

Milloin logaritmifunktio on kasvava/vähenevä?

kasvava, kun a>1 ja vähenevä kun a väliltä]0,1[



$a>1$



$1>a>0$

Esim. Olkoon f(x) = $\log_2(1-x^2)$

Mikä on funktion määrittelyjoukko?

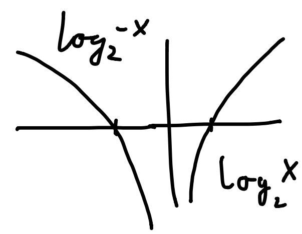
$1-x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 1$

$2 < 4$

$\log_2 2 < \log_2 4$

$\log_{0,5} 2 > \log_{0,5} 4$

Mikä on funktion arvojoukko?



(1-x^2) saa arvoja väliltä]0,1], siksi
log2(1-x^2) saa arvoja väliltä]-∞,0]

Milloin funktio on vähenevä ja milloin kasvava?

$f(x) = \log_2(1-x^2)$

Koska kantaluku on 2, on log2 kasvava, jos sen sisällä oleva funktio on kasvava ja toisinpäin.
(1-x^2) on kasvava, kun -1<x≤0 ja
(1-x^2) on vähenevä, kun 0≤x<1
=> f on kasvava, kun -1<x≤0
ja vähenevä, kun 0≤x<1

7.3 Logaritmiyhtälö ja -epäyhtälö

Esim. Ratkaise yhtälöt:

$$7^{x^2} = 10$$

$$x^2 = \log_7 10$$

$$x^2 = \frac{\lg 10}{\lg 7} = \frac{1}{\lg 7}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{\lg 7}}$$

määr. ehto $2x - 6 > 0$

$x > 3$

$$\log_2(2x-6) = 5$$

$$2^5 = 2x - 6$$

$\vdots$

$$x = 19$$

ok

Esim. Ratkaise epäyhtälö

määrittelyehto : $x > \frac{1}{2}$

$\ln(2x-1) \leq 1 \quad | e^{()}$

$e^{\ln(2x-1)} \leq e^{1}$ | suuruusjärjestys säilyy (e>1)

$2x-1 \leq e$

| e=neperin luku ≈2,7

$2x \leq e+1$ | ln = $\log_e$

$x \leq \frac{e+1}{2}$

$\overset{\text{määr. ehto}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2} < x \leq \frac{e+1}{2}$

Esim. Ratkaise epäyhtälö

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \ln x$$

Ratkaistaan vastaava yhtälö:

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \ln x$$

$$\frac{\ln x}{\ln \frac{1}{2}} = \ln x \quad \Big| : \ln x \qquad \text{jos } \ln x = 0 \text{, niin yht. ok}$$

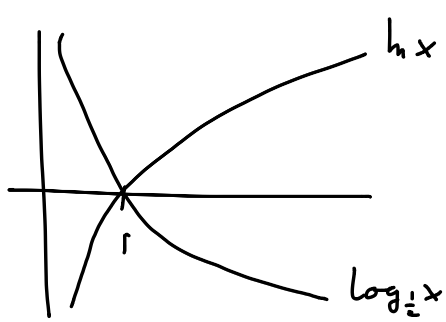
$$\ln x \neq 0 \qquad \Rightarrow \ln x = 0$$

$$\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} = 1 \qquad x = 1$$

ei ratk.

Milloin $\log_{\frac{1}{2}} x < \ln x$?

$\log_{\frac{1}{2}} x$ on vähenevä, koska 0<1/2<1
$\ln x$ on kasvava, koska e>1



$$\log_{\frac{1}{2}} x < \ln x$$

kun $x > 1$