8.1 Satunnaismuuttuja

Käytetään satunnaismuuttujaa samoin kuin tilastotieteen puolella:

Esim. Nopanheitossa (d6) satunnaismuuttuja X kertoo silmäluvun arvon.
a) listaa kaikki satunnaismuuttujan arvot
b) Määritä $P(X=3)$ sanallisesti ja numeerisesti
c) Määritä $P(X\leq 2)$ sanallisesti ja numeerisesti

a)X=1,2,3,4,5 tai 6
b)$P(X=3)$ = Mikä on tn, että nopalla saadaan 3?
$=1/6$
c)$P(X\leq 2)$ = Mikä on tn, että nopalla saadaan silmäluku 1 tai 2?
$=1/3$

8.2 Satunnaismuuttujan jakauma

Jakauma kertoo, millä todennäköisyydellä saadaan tiettyjä arvoja.

Esim. Muodostetaan jakauma d6 nopanheiton kolmelle toistolle.
X=kolmen nopanheiton silmälukujen summa

X saa arvot väliltä 3-18
Eri arvot ovat eri todennäköisyyksillä:
P(X=3) = (1/6)^3 = 1/216

$$P(X=4) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$$

montako variaatiota ↗ 2×⚀ 1×⚁

$$P(X=5) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

2×⚀ 1×⚂ 2×⚁ 1×⚀

$$P(X=6) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

2×⚀ 1×⚃ 1×⚀ 1×⚁ 1×⚂ 3×⚁

3/216 + 6/216 + 3/216 + 3/216

P(X=7) = 1/1/5 1/2/4 1/3/3 2/2/3 =15/216=5/72

P(X=8) = 1/1/6 1/2/5 1/3/4 2/2/4 2/3/3 = 21/216

P(X=9) = 1/2/6 1/3/5 1/4/4 2/2/5 2/3/4 3/3/3
=25/216

P(X=10) =1/3/6 1/4/5 2/2/6 2/3/5 2/4/4 3/3/4
=27/216

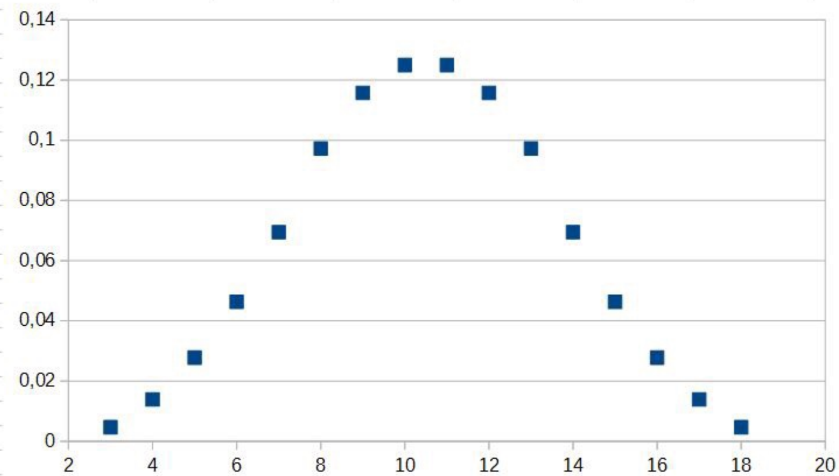
P(X=11) =1/4/6 1/5/5 2/3/6 2/4/5 3/3/5 3/4/4
=27/216

P(X=12) = 1/5/6 2/4/6 2/5/5 3/3/6 3/4/5 4/4/4
=25/216

Symmetrisesti jatkuu loputkin
P(X=13)=21/216
P(X=14)=15/216
P(X=15)=10/216
P(X=16)=6/216
P(X=17)=3/216
P(X=18)=1/216

Kokonaisuudessaan pistetodennäköisyysjakauma

3	1	0,00462963
4	3	0,013888889
5	6	0,027777778
6	10	0,046296296
7	15	0,069444444
8	21	0,097222222
9	25	0,115740741
10	27	0,125
11	27	0,125
12	25	0,115740741
13	21	0,097222222
14	15	0,069444444
15	10	0,046296296
16	6	0,027777778
17	3	0,013888889
18	1	0,00462963
	yhteensä	1,00



Yhteensä joka kohdan todennäköisyyksien summa on 100%.

Tällainen jakauma on *diskreetti*, sillä se saa vain tiettyjä arvoja välillä [3,18], ei esim. arvoa X=3,5

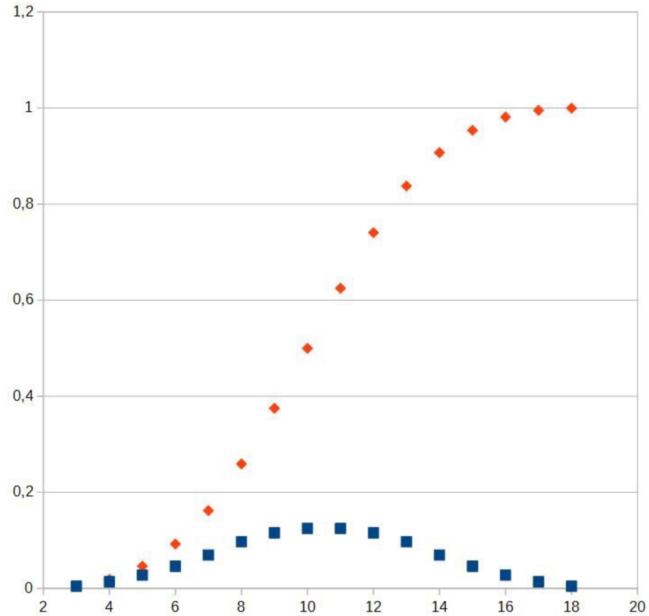
Pistetodennäköisyysfunktio p kertoo, mikä on tietyn arvon todennäköisyys.

Esim. p(6) = P(X=6) = 10/216

Kaikkien pistetodennäköisyysarvojen summa on aina 1=100%

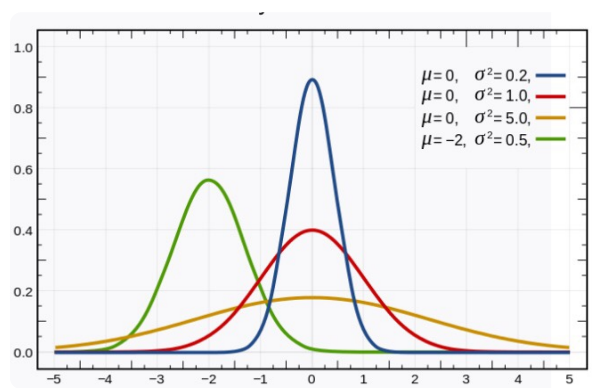
Kertymäfunktio F kertoo, kuinka suuri todennäköisyys on kertynyt tiettyyn arvoon mennessä.

Esim. $F(6) = P(X \leq 6)$
$= P(X=3) + P(X=4)$
$+ P(X=5) + P(X=6)$
$= (1+3+6+10)/216$



Kolmen nopanheiton pistetodennäköisyysfunktio ja kertymäfunktio

Jatkuvalla jakaumalla kuvaajan muoto on katkeamaton, esim.



Binomijakauma on jakauma, jonka satunnaismuuttujan X arvo noudattaa binomitodennäköisyyttä.
Esim. Noppaa heitetään 3 kertaa. Satunnaismuuttuja X on saatujen kutosten lkm.

Muodosta binomijakauma X~ Bin(3, 1/6).

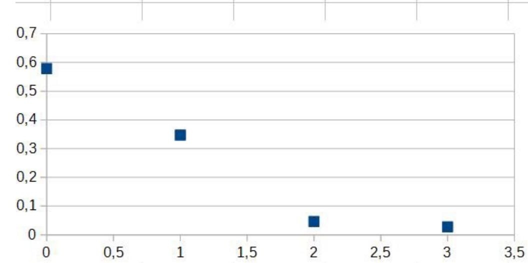
$$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 58\%$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

0	0,578703704	0,578703704
1	0,347222222	0,925925926
2	0,046296296	0,972222222
3	0,027777778	1



8.3 Diskreetin jakauman tunnusluvut

Satunnaismuuttujan X *odotusarvo*:

$$\boxed{\mu = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}$$

Esim. Olkoon satunnaismuuttuja X
d6 nopanheiton silmäluku.

Silloin X:n odotusarvo on

$\mu = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6$
$= 3{,}5$

Odotusarvo on "keskiarvo" pitkässä juoksussa ja useilla toistoilla tapahtuvassa ilmiössä.

Esim. Antti heittää kolikkoa kahdesti. Jos tulee 2 klaavaa, Antti maksaa opiskelijalle 5 euroa ja jos tulee jotain muuta, maksaa opiskelija Antille 2 euroa.

Mikä on opiskelijan saaman rahamäärän odotusarvo?

tn, että kaksi klaavaa: $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
tn, ettei kahta klaavaa: $1-1/4 = 3/4$

X=opiskelijan saama rahamäärä (5 tai -2)

$\mu = 5 \cdot 1/4 + -2 \cdot 3/4 = -1/4$

Eli pitkässä juoksussa opiskelija maksaa Antille noin 25 senttiä per peli.

Kaikki uhkapelit on tehty siten, että odotusarvo suosii pelintekijää. Siksi pitkässä juoksussa uhkapeleistä voi vain hävitä rahaa.

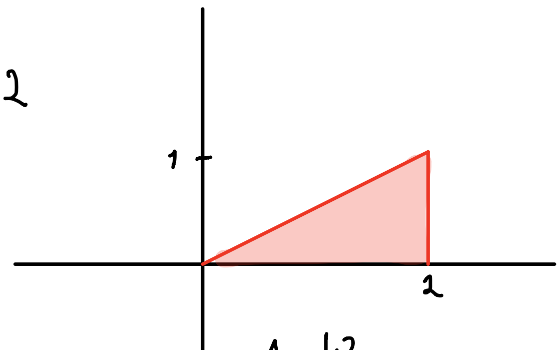
Varianssi ja *keskihajonta* ovat tuttuja termejä, kirjan sivulla 143 on niiden laskukaava. Niissä käytetään odotusarvoa keskiarvona.

8.4 Jatkuva jakauma

Jatkuvalla jakaumalla ei ole pistetodennäköisyysfunktiota, vaan *tiheysfunktio*.

Tiheysfunktion kaikki arvot ovat positiivisia ja sen rajaaman alueen pinta-ala on 1=100%.

Esim. $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x & \text{, kun } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$



$A = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

Jatkuvan jakauman kertymäfunktio kuvaa, kuinka paljon pinta-alaa on kertynyt.

Esim. edellisen tiheysfunktion kolmion pinta-ala kohdassa x on A= x ·0,5 x /2

Silloin kertymäfunktio F(x) = 0,25 x^2

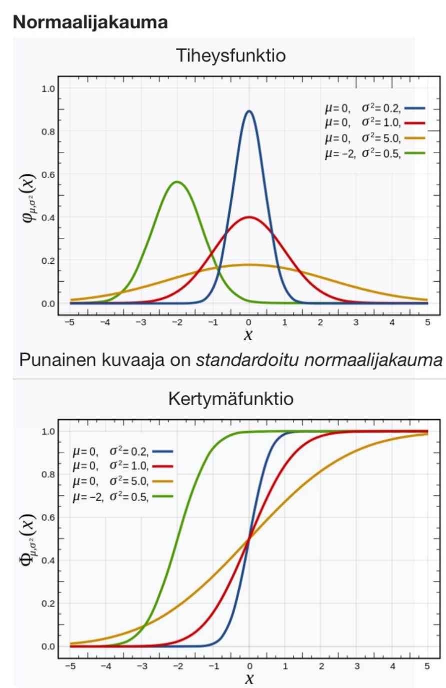
Esim. P(X≤1) = F(1) = 0,25 = 25%

8.5 Normaalijakauma

Tärkein jatkuva jakauma on *normaalijakauma*.
(Gaussin jakauma/kellokäyrä)

Sen tiheysfunktio on $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

σ =keskihajonta
μ =odotusarvo



Normaalijakauma, jonka odotusarvo on 0 ja keskihajonta on 1, kutsutaan *normitetuksi* normaalijakaumaksi.

Taulukkokirjan avulla voidaan laskea normitetun normaalijakauman kertymäfunktion eri arvoja.

Esim. X noudattaa (normitettua) normaalijakaumaa parametrein (0,1) eli X~N(0,1)

Laske $P(X \leq 1)$

$P(X \leq 0{,}75)$

$P(X \leq -1)$

Yleensä tutkittava satunnaismuuttuja ei noudata jakaumaa parametrein (0,1). Tällöin arvot voidaan laskea, kun satunnaismuuttuja normitetaan:

Esim. Tietyn ihmisjoukon pituus X noudattaa normaalijakaumaa parametrein (170, 15). Laske todennäköisyys, että satunnaisen ihmisen pituus on pituus on yli 200 cm.

Normitetaan X: $\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$

$$= \frac{X - 170}{15}$$

Nyt $Z \sim N(0,1)$

$$P(X \geq 200) = 1 - P(X \leq 200)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{200-170}{15}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2)$$
$$= 1 - 0{,}9972$$
$$= 0{,}0028 \approx 0{,}3\%$$

Esim. Ihmisten älykkkyysosamäärä noudattaa normaalijakaumaa parametrein (100,24).

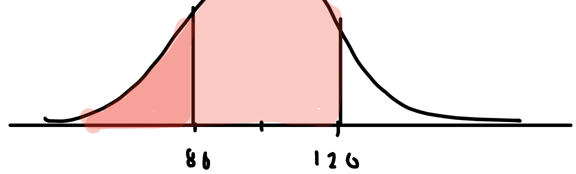
Laske millä todennäköisyydellä satunnaisen ihmisen äo on väliltä 80-120

Nyt X~N(100,24) ja normitettu Z ~(0,1)

$$Z = \frac{\mu - 100}{24}$$

Nyt $P(80 \leq X \leq 120)$

$= P(X \leq 120) - P(X \leq 80)$



$$= P(X \leq 120) - 1 + P(X \leq 120)$$

$$= 2 \cdot P(X \leq 120) - 1$$

$$= 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{120 - 100}{24}\right) - 1$$

$$= 2 \cdot P(Z \leq 0{,}83) - 1$$

$$= 2 \cdot 0{,}7967 - 1$$

$$= 0{,}5934$$
$$\approx 59\%$$