

6.1 Satunnaisilmiöiden mallintaminen

Kaikki maailman ilmiöt ovat joko *deterministisiä* tai *stokastisia* eli *satunnaisilmiöitä*.

Deterministinen ilmiö on ennustettavissa, esimerkiksi fysiikan lakien avulla.

Satunnaisilmiötä ei voida tarkasti ennustaa. Esimerkiksi nopanheiton tulosta ei voida etukäteen päätellä.

Todennäköisyyslaskenta tutkii satunnaisilmiöiden matemaattista teoriaa.

Todennäköisyys tapahtumalle lasketaan näin:

$$\frac{\text{suotuisien alkeistapauksien lkm}}{\text{kaikkien alkeistapauksien lkm}}$$

Tapahtuman A todennäköisyys merkitään $P(A)$.

1. $1 \geq P(A) \geq 0$
2. Jos $P(A)=1$ on tapahtuma varma
3. Jos $P(A)=0$, on tapahtuma mahdoton
4. Jos A ja B ovat erillisiä tapahtumia, niin
 $P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$

Esim. Olkoon tapahtumat

A = (d6) nopanheitossa saadaan silmäluku 2 ja

B = nopanheitossa saadaan silmäluku >3

Laske $P(A)$, $P(B)$ ja $P(A \text{ tai } B)$.

$$P(A) = 1/6 \approx 17\%$$

$$P(B) = 3/6 = 50\% \quad (4,5 \text{ tai } 6 \text{ kelpaa})$$

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) = 1/6 + 3/6 = 4/6 \approx 67\%$$

6.2 Tilastollinen todennäköisyys

Koska tn on vain suotuisten tapahtumien suhde kaikkiin mahdollisiin, voidaan tn:ttä mallintaa tilastoilla.

Tapahtuman A tilastollinen todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{f}{n}$$

missä f on frekvenssi ja n on havaintojen lkm.

Esim. Kärämäen ikäjakauma vuonna 2014 oli

(yhteensä
2713 asukasta)

Ikäjakauma	2014 [3]
- 0-14-v.	19,4 %
- 15-64-v.	56,3 %
- yli 64-v.	24,3 %

Montako yli 14 vuotiasta Kärämäellä oli 2014?

$$2713(56,3\%+24,3\%)=2713 \cdot 0,806$$

$$=2186,6... \text{ eli } 2187 \text{ asukasta}$$

Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu Kärämäen asukas on yli 14 vuotias?

$$f/n=2187/2713 \approx 80,6\%$$

6.3 Klassinen todennäköisyys

Todennäköisyys voidaan määrittää myös teoreettisesti.

Esim. Hiilen C-14 isotoopin puoliintumisaika on 5730 vuotta. Kuinka suurella todennäköisyydellä yksittäinen C-14 atomi on olemassa vielä tuhannen vuoden päästäkin?

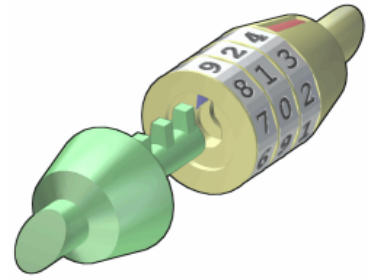
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1000}{5730}} = 0,886... \approx 89\%$$

(ei kokeessa tämmösiä)

Klassisessa todennäköisyydessä ajatellaan, että kaikki alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä, eli symmetrisiä.

Esim. Nopanheitossa (d6) jokainen nopan silmäluku (1,2,3,4,5 ja 6) on yhtä todennäköinen. Siis todennäköisyys heittää nopalle silmäluku 6 on $1/6$

Esim. Varas koittaa aukaista pyörän numerolukon arvaamalla. Millä todennäköisyydellä hän arvaa oikein, kun oikea numerosarja on satunnainen?



A=arvaa oikean $P(A)=1/1000=0,1\%$

Esim. Antti heittää kolikkoa. Millä todennäköisyydellä Antti saa kolmella heitolla kaksi kruunaa?

Kaikki mahdolliset vaihtoehdot:

(Kruuna R Klaava L)

RRR RRL RLR RLL LRR LRL LLR LLL

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (2 vaihtoehtoa 1., 2. ja 3. heitolle)

Näistä kelpaavat vaihtoehdot ovat:

RRL RLR LRR

3 vaihtoehtoa (L voi olla kolmessa eri paikassa)

$P(A)=3/8=37,5\%$

Esim. Antti heittää kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä noppien silmälukujen summa on 10 tai enemmän?

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

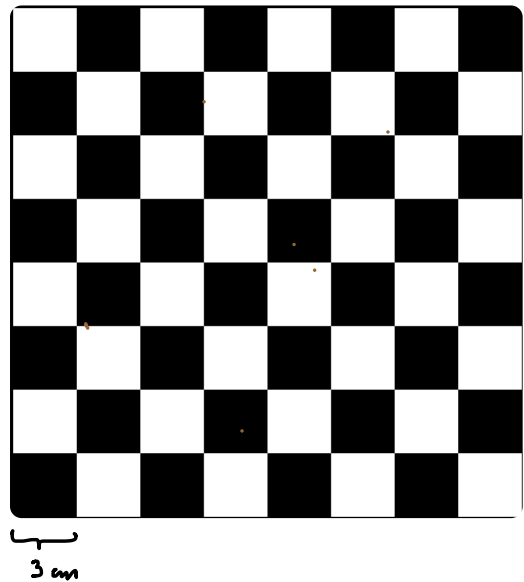
$$P(\text{silmlukujen summa on } \geq 10) = 6/36 = 1/6 \approx 17\%$$

6.4 Geometrinen todennäköisyys

Todennäköisyyttä voi mitata myös alueiden suuruudella.

Esim. Shakkilaudalle tiputetaan hiekanjyvä.
Millä todennäköisyydellä jyvä on mustalla ruudulla?

50%, koska mustan pinta-ala on puolet koko laudan pinta-alasta



Esim. shakkilaudalle heitetään kolikko, jonka halkaisija on 2 cm. Millä todennäköisyydellä kolikko

a) on vain valkoisella ruudulla?

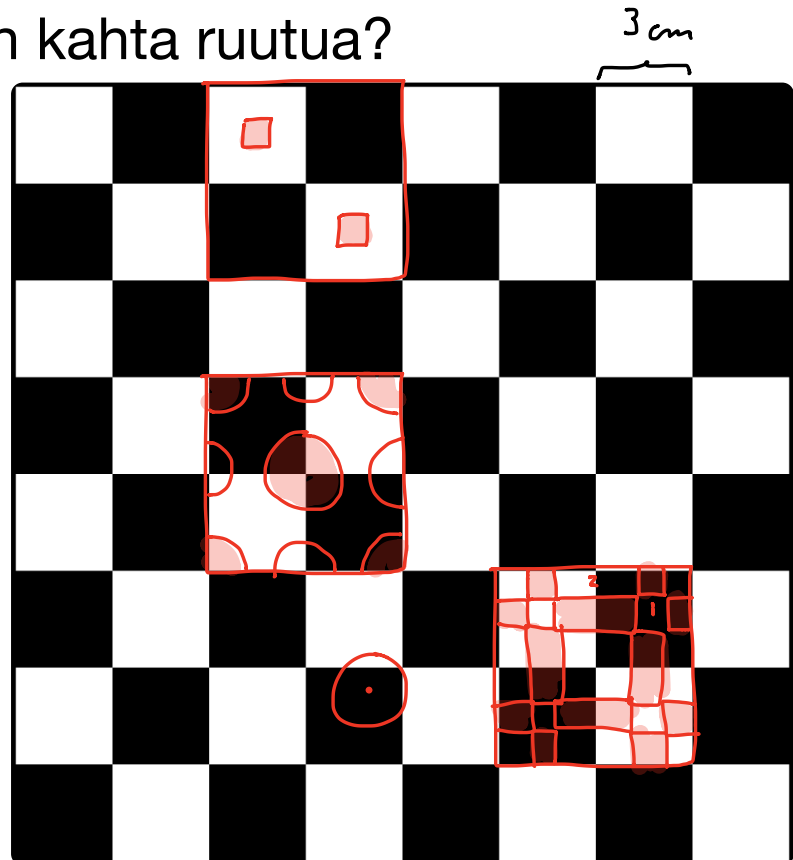
b) koskettaa neljää ruutua?

c) koskettaa tasan kahta ruutua?

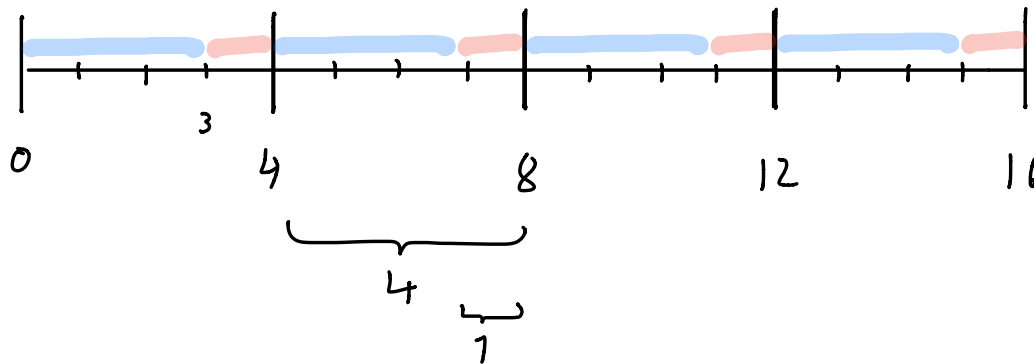
a) $P(a) = 2/36$
 $\approx 0,056$

b) $P(b) = 4\pi/36$
 $\approx 0,35$

c) $P(c) = 16/36$
 $\approx 0,44$



Esim. Monashin yliopiston bussipysäkiltä lähtee bussi juna-asemalle joka neljäs minuutti. Antti saapuu pysäkillä satunnaiseen aikaan. Kuinka suurella todennäköisyydellä Antti joutuu odottamaan enintään minuutin bussin lähtöä?



X =Aika (min),jonka Antti odottaa bussia

$$P(X \leq 1) = 1/4 = 25\%$$