2 Yhdistetty funktio integroinnissa

ENNAKKOTEHTÄVÄT

1. **a)** Jos funktio g on funktion f integraalifunktio, pitää olla $Dg(x) = f(x)$.
Derivoidaan funktio $g(x) = (2x - 3)^5$.
$g'(x) = 5 \cdot (2x - 3)^4 \cdot D(2x - 3) = 5 \cdot (2x - 3)^4 \cdot 2 = 10(2x - 3)^4 = f(x)$,
joten funktio g on funktion f integraalifunktio.

Vastaus: Kyllä on.

b) 1) Kokeillaan olisiko integraalifunktio $F(x) = (5x+7)^{10}$. Derivoidaan lauseke ja tarkistetaan, saadaanko alkuperäinen lauseke.
$D(5x+7)^{10} = 10 \cdot (5x+7)^{10-1} \cdot D(5x+7) = 10 \cdot (5x+7)^9 \cdot 5 = 50(5x+7)^9$.
Tämä ei ole alkuperäinen lauseke.

Päätellään integraalifunktioksi $F(x) = \frac{1}{50}(5x+7)^{10}$.

Derivoidaan lauseke ja tarkistetaan, saadaanko alkuperäinen lauseke.

$D(\frac{1}{50}(5x+7)^{10}) = \overset{1}{\cancel{10}} \cdot \frac{1}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{50}}} \cdot (5x+7)^{10-1} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} = (5x+7)^9$. Lauseke on sama kuin funktion f lauseke.

2) Päätellään integraalifunktioksi $F(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 7)^8$.

Derivoidaan lauseke ja tarkistetaan, saadaanko alkuperäinen lauseke.

$D(\frac{1}{8}(3x^2 - 7)^8) = \cancel{8} \cdot \frac{1}{\cancel{8}} \cdot (3x^2 - 7)^7 \cdot 6x = 6x(3x^2 - 7)^7$. Lauseke on sama kuin funktion f lauseke.

3) Päätellään integraalifunktioksi $F(x)=\frac{1}{27}(3x^2-7)^9$.

Derivoidaan lauseke ja tarkistetaan, saadaanko alkuperäinen lauseke.

$D(\frac{1}{27}(3x^2-7)^9)=\frac{1}{\cancel{27}_{\cancel{3}_1}}\cdot\cancel{9}^{1}(3x^2-7)^8\cdot\cancel{6}^{2}x=2x(3x^2-7)^8$. Lauseke on sama kuin funktion *f* lauseke.

Vastaus: 1) $F(x)=\frac{1}{50}(5x+7)^{10}$, 2) $F(x)=\frac{1}{8}(3x^2-7)^8$ ja 3) $F(x)=\frac{1}{27}(3x^2-7)^9$.

2. **a)** Vesimäärän muutosnopeus eli derivaatta hetkellä t on $f(t)=9\sin(\frac{1}{4}t)$.

Vesimäärän ilmoittava funktio on siis funktion *f* jokin integraalifunktio *F*.

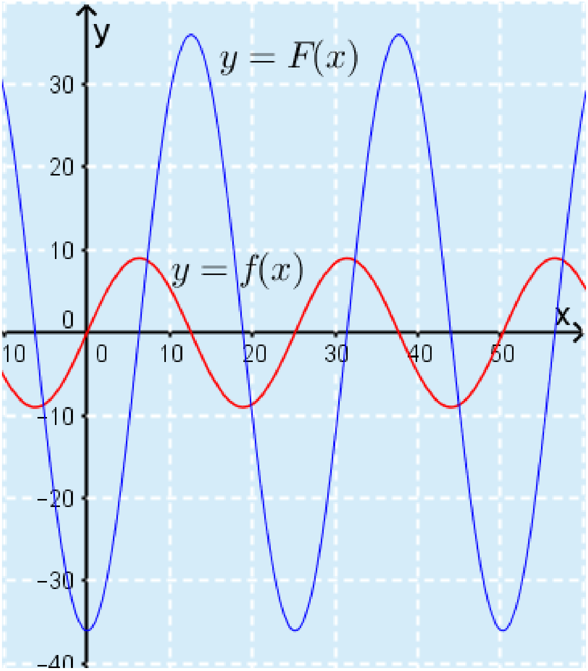
$$F(t)=\int 9\sin(\frac{1}{4}t)\mathrm{d}t=9\cdot 4\int\frac{1}{4}\sin(\frac{1}{4}t)\mathrm{d}t=-36\cos(\frac{1}{4}t)+C$$

Integroimisvakiota C ei nyt tiedetä. Vesimäärän vaihteluväli voidaan kuitenkin selvittää. Koska $\cos(\frac{1}{4}t)$ on suurimmillaan 1 ja pienimmillään –1, on funktion F pienin arvo $-36+C$ ja suurin arvo $36+C$. Siis altaan vesimäärässä on vaihtelua $36+C-(-36+C)=72$ (m^3).

Vastaus: Altaan vesimäärässä on vaihtelua 72 m^3.

b) Piirretään funktioiden *f* ja *F* kuvaajat sopivalla ohjelmalla. Useimmissa ohjelmissa muuttujaksi on vaihdettava x. Integroimisvakiota C ei tiedetä, mutta koska C vaikuttaa vain kuvaajan pystysuoraan sijaintiin, piirretään funktion F kuvaaja, kun $C=0$. Piirretään siis funktiot

$f(x)=9\sin(\frac{1}{4}x)$ ja $F(x)=-36\cos(\frac{1}{4}x)$.



Vedenpinta on matalimmillaan, kun funktio *F* saa pienimmän arvonsa eli kun funktion *F* kuvaaja on alimmillaan. Funktion *F* muutosnopeus on tällöin nolla ja muuttuu negatiivisesta positiiviseksi. Vedenpinta on siis matalimmillaan, kun funktion *f* kuvaaja nousee *x*-akselin alapuolelta yläpuolelle.

Vesi nousee nopeimmin, kun sen muutosnopeus on suurimmillaan eli kun funktion *f* kuvaaja on korkeimmillaan. Funktion *F* kuvaaja puolestaan nousee tällöin jyrkimmin.

2.1 Funktion potenssi integroinnissa

YDINTEHTÄVÄT

201.

Funktio $u'(s(x))$	$s(x)$	$u'(x)$	$s'(x)$
$(3x-1)^5$	$3x-1$	x^5	3
$(3x^2-5)^4$	$3x^2-5$	x^4	$6x$
$(x^3+3)^6$	x^3+3	x^6	$3x^2$
$(\frac{x}{3}+1)^5$	$\frac{x}{3}+1$	x^5	$\frac{1}{3}$

202. **a)** $\int 3(3x-6)^4 \mathrm{d}x$

$s(x) = 3x - 6$, $s'(x) = 3$, $u'(x) = x^4$, $u(x) = \frac{1}{5}x^5$, $u(s(x)) = \frac{1}{5}(3x-6)^5$

b) $\int 2x(x^2-3)^{-3} \mathrm{d}x$

$s(x) = x^2 - 3$, $s'(x) = 2x$, $u'(x) = x^{-3}$,

$u(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$, $u(s(x)) = -\frac{1}{2}(x^2-3)^{-2}$

203. **a)**

$$\int \overset{=1}{\frac{1}{7}\cdot \underset{s'(x)}{7}}\ \underset{s(x)}{(7x-3)^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int \underset{s'(x)}{7}\ \underbrace{(7x-3)^4}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4+1}(7x-3)^{4+1}+C=\frac{1}{35}(7x-3)^5+C$$

b)

$$\int \overbrace{\frac{1}{2}\cdot \underset{s'(x)}{2x}}^{=x}\ \underset{s(x)}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \underset{s'(x)}{2x}\ \underbrace{(x^2+1)^3}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+1}(x^2+1)^{3+1}+C=\frac{1}{8}(x^2+1)^4+C$$

c)

$$\int \overbrace{\frac{1}{5}\cdot \underset{s'(x)}{5}}^{=1}\ (\underbrace{5x-2}_{s(x)})^{-4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int \underset{s'(x)}{5}\ \underbrace{(5x-2)^{-4}}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{-4+1}(5x-2)^{-4+1}+C=-\frac{1}{15}(5x-2)^{-3}+C$$

204. **a)** $\int \underset{s'(x)}{3}\cdot\underbrace{(3x-1)^5}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x=\underbrace{\frac{1}{5+1}(3x-1)^{5+1}}_{u(s(x))}+C=\frac{1}{6}(3x-1)^6+C$

Tarkistus: $\mathrm{D}(\frac{1}{6}(3x-1)^6+C)=\frac{1}{6}\cdot 6(3x-1)^5\cdot 3=3(3x-1)^5$

b) $\int \underset{s'(x)}{6x}\cdot\underbrace{(3x^2-5)^4}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x=\underbrace{\frac{1}{4+1}(3x^2-5)^{4+1}}_{u(s(x))}+C=\frac{1}{5}(3x^2-5)^5+C$

Tarkistus: $\mathrm{D}(\frac{1}{5}(3x^2-5)^5+C)=\frac{1}{5}\cdot 5(3x^2-5)^4\cdot 6x=6x(3x^2-5)^4$

205. **a)**

$$\int 15(\underbrace{3x+2}_{\substack{s(x)=3x+2\\ s'(x)=3}})^3\,\mathrm{d}x = \int \overbrace{5\cdot 3}^{=15}(3x+2)^3\mathrm{d}x$$

$$= 5\int \underbrace{3}_{s'(x)}\cdot \underbrace{(3x+2)^3}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x = 5\cdot \underbrace{\frac{1}{4}(3x+2)^4}_{u(s(x))} + C$$

$$= \frac{5}{4}(3x+2)^4 + C$$

Tarkistus: $\mathrm{D}(\frac{5}{4}(3x+2)^4 + C) = \frac{5}{4}\cdot 4(3x+2)^3\cdot 3 = 15(3x+2)^3$

b) $\int (\underbrace{4x-6}_{\substack{s(x)=4x-6\\ s'(x)=4}})^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \underbrace{4}_{s'(x)}\cdot \underbrace{(4x-6)^4}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot \underbrace{\frac{1}{5}(4x-6)^5}_{u(s(x))} + C = \frac{1}{20}(4x-6)^5 + C$

Tarkistus: $\mathrm{D}(\frac{1}{20}(4x-6)^5 + C) = \frac{1}{20}\cdot 5(4x-6)^4\cdot 4 = (4x-6)^4$

206. **a)** $\int 6x^2(\underbrace{x^3+3}_{\substack{s(x)=x^3+3\\ s'(x)=3x^2}})^6\,\mathrm{d}x = 2\int \underbrace{3x^2}_{s'(x)}\underbrace{(x^3+3)^6}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x = 2\cdot \underbrace{\frac{1}{7}(x^3+3)^7}_{u(s(x))} + C = \frac{2}{7}(x^3+3)^7 + C$

Tarkistus: $\mathrm{D}(\frac{2}{7}(x^3+3)^7 + C) = \frac{2}{7}\cdot 7(x^3+3)^6\cdot 3x^2 = 6x^2(x^3+3)^6$

b)

$$\int (\frac{x}{3}+1)^5\,\mathrm{d}x = \int (\underbrace{\frac{1}{3}x+1}_{\substack{s(x)=\frac{1}{3}x+1\\ s'(x)=\frac{1}{3}}})^5\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\int \underbrace{\frac{1}{3}}_{s'(x)}\cdot \underbrace{(\frac{1}{3}x+1)^5}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\cdot \underbrace{\frac{1}{6}(\frac{1}{3}x+1)^6}_{u(s(x))} + C$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{x}{3}+1)^6 + C$$

Tarkistus: $\mathrm{D}(\frac{1}{2}(\frac{x}{3}+1)^6 + C) = \frac{1}{2}\cdot 6(\frac{x}{3}+1)^5\cdot \frac{1}{3} = (\frac{x}{3}+1)^5$

207. **a)** $\int (6x+1)^2\,\mathrm{d}x = \int (36x^2+12x+1)\,\mathrm{d}x$

$$= 36\cdot\frac{1}{3}x^3 + 12\cdot\frac{1}{2}x^2 + x + C$$
$$= 12x^3 + 6x^2 + x + C$$

b)

$$\int (\underbrace{6x+1}_{\substack{s(x)=6x+1\\ s'(x)=6}})^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \underbrace{6}_{s'(x)}\underbrace{(6x+1)^2}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}(6x+1)^3 + C$$
$$= \frac{1}{18}(6x+1)^3 + C$$

c)

1 $(6x+1)^2$

Integraali: $\frac{1}{18}(6x+1)^3 + c_1$

2 $1

PoistaSulkeet: $c_1 + 12x^3 + 6x^2 + x + \frac{1}{18}$

a- ja b-kohdissa saadut tulokset vastaavat ohjelmalla saatua. Integroimisvakion muodolla ei ole merkitystä.

208. **a)** $\int \frac{1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{s'(x)}\cdot\underbrace{(x+1)^{-3}}_{u'(s(x))}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{-3+1}(x+1)^{-3+1} + C$$
$$= -\frac{1}{2(x+1)^2} + C,\ x<-1$$

b)

$$\int \frac{2x}{(x^2+5)^2}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{2x}_{s'(x)}\underbrace{(x^2+5)^{-2}}_{u'(s(x))}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{-1}(x^2+5)^{-1} + C$$
$$= -\frac{1}{x^2+5} + C$$

209. **a)**
$$\int x(\underset{\substack{s(x)=3x^2+1\\ s'(x)=6x}}{3x^2+1})^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \underset{s'(x)}{6x}\,\underbrace{(3x^2+1)^3}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(3x^2+1)^4 + C$$
$$= \frac{1}{24}(3x^2+1)^4 + C$$

b)
$$\int \frac{3x}{(3x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int 3x\underbrace{(3x^2+1)^{-3}}_{\substack{s(x)=3x^2+1\\ s'(x)=6x}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \underset{s'(x)}{6x}\,\underbrace{(3x^2+1)^{-3}}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2}(3x^2+1)^{-2} + C$$
$$= -\frac{1}{4(3x^2+1)^2} + C$$

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

210. **a)**
$$\begin{aligned}\int \frac{6}{(3x-4)^5}\,\mathrm{d}x &= \int 6(3x-4)^{-5}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int \underbrace{3}_{s'(x)}\,\underbrace{(3x-4)^{-5}}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\cdot\frac{1}{-5+1}(3x-4)^{-5+1}+C \\ &= 2\cdot\frac{1}{-4}(3x-4)^{-4}+C \\ &= -\frac{1}{2(3x-4)^4}+C\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\int \frac{(3x-4)^5}{6}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{6}(3x-4)^5\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\int \underbrace{3}_{s'(x)}\cdot\underbrace{(3x-4)^5}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{6}(3x-4)^6+C \\ &= \frac{1}{108}(3x-4)^6+C\end{aligned}$$

211. Kaikki funktion $h(x)=\frac{6}{(8x+2)^4}$, $x>-\frac{1}{4}$, integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int \frac{6}{(8x+2)^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int 6(8x+2)^{-4}\,\mathrm{d}x \\
&= 6\cdot\frac{1}{8}\int \underset{s'(x)}{8}\,\underbrace{(8x+2)^{-4}}_{u(s(x))}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{6}{8}\cdot\frac{1}{-3}(8x+2)^{-3}+C \\
&= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(8x+2)^3}+C \\
&= -\frac{1}{4(8x+2)^3}+C,\ \text{kun } x>-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ratkaistaan vakio C ehdosta $H(-\frac{1}{8})=\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned}
H(-\tfrac{1}{8}) &= \frac{1}{4} \\
-\frac{1}{4(8\cdot(-\frac{1}{8})+2)^3}+C &= \frac{1}{4} \\
-\frac{1}{4}+C &= \frac{1}{4} \\
C &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Kysytty funktio on $H(x)=-\frac{1}{4(8x+2)^3}+\frac{1}{2},\ x>-\frac{1}{4}.$

212. **a)** $$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} &= \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int (x+1)^{-1}\mathrm{d}x \\ &= \int \underset{s'(x)}{1} \cdot \underbrace{(x+1)^{-1}}_{u'(s(x))}\mathrm{d}x \\ &= \ln \underset{\substack{>0,\\ \text{kun } x>-1}}{|x+1|} + C \\ &= \ln(x+1)+C,\ x>-1\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{4-2x} &= \int \frac{1}{4-2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int (4-2x)^{-1}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int \underset{s'(x)}{-2} \cdot \underbrace{(4-2x)^{-1}}_{u'(s(x))}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\ln \underbrace{|4-2x|}_{>0,\ \text{kun } x<2} + C \\ &= -\frac{1}{2}\ln(4-2x)+C,\ x<2\end{aligned}$$

213. **a)** $\int \frac{6\mathrm{d}x}{3x-2} = \int \frac{6}{3x-2}\mathrm{d}x$

$$= \int 6(3x-2)^{-1}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int \underbrace{3}_{s'(x)} \cdot \underbrace{(3x-2)^{-1}}_{u'(s(x))}\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln \underbrace{|3x-2|}_{>0,\text{ kun } x>\frac{2}{3}} + C$$

$$= 2\ln(3x-2)+C,\ x>\frac{2}{3}$$

b) $\int \frac{6x^3}{3+3x^4}\mathrm{d}x = \int \frac{6x^3}{3(1+x^4)}\mathrm{d}x = \int \frac{2x^3}{1+x^4}\mathrm{d}x$

$$= \int 2x^3(1+x^4)^{-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{4x^3}_{s'(x)} \underbrace{(1+x^4)^{-1}}_{u'(s(x))}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln \underbrace{|1+x^4|}_{>0} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^4)+C$$

214. **a)** $\int \frac{4x}{x^2+4}\mathrm{d}x = \int 4x(x^2+4)^{-1}\mathrm{d}x$

$$= 2\int 2x(x^2+4)^{-1}\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln|\underbrace{x^2+4}_{>0}|+C$$

$$= 2\ln(x^2+4)+C$$

b) $\int \frac{15}{5x+15}\mathrm{d}x = \int 15(5x+15)^{-1}\mathrm{d}x$

$$= 3\int 5(5x+15)^{-1}\mathrm{d}x$$

$$= 3\ln \underbrace{|5x+15|}_{>0,\text{ kun } x>-3}+C$$

$$= 3\ln(5x+15)+C,\ x>-3$$

215. **a)**
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{x^2}{x}+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int \left(x+2\cdot\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2+2\ln|x|+\mathrm{C}\\ &= \frac{1}{2}x^2+2\ln x+\mathrm{C},\ x>0\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x &= \int x(x^2+2)^{-1}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int 2x(x^2+2)^{-1}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln|\underbrace{x^2+2}_{>0}|+C\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C\end{aligned}$$

216. **a)**
$$\begin{aligned}\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \underbrace{1}_{s'(x)}\cdot\underbrace{(x+1)^{\frac{1}{2}}}_{u'(s(x))}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x+1)^{\frac{1}{2}+1}+C\\ &= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C,\ x>-1\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\int 4\sqrt{2x+6}\,\mathrm{d}x &= 2\int \underbrace{2}_{s'(x)}\cdot\underbrace{(2x+6)^{\frac{1}{2}}}_{u'(s(x))}\mathrm{d}x\\ &= 2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+6)^{\frac{1}{2}+1}+C\\ &= 2\cdot\frac{2}{3}(2x+6)^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{4}{3}(2x+6)\sqrt{2x+6}+C,\ x>-3\end{aligned}$$

217. **a)** $$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{2x}_{s'(x)} \cdot \underbrace{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$$

b) $$\int \sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x = \int (3-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int \underbrace{-1}_{s'(x)} \cdot \underbrace{(3-x)^{\frac{1}{2}}}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(3-x)^{\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= -\frac{2}{3}(3-x)\sqrt{3-x} + C, \quad x < 3$$

218. **a)** $$\int \frac{2}{\sqrt{3x+6}}\,\mathrm{d}x = \int 2(3x+6)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{3}\int \underbrace{3}_{s'(x)} \cdot \underbrace{(3x+6)^{-\frac{1}{2}}}_{u(s(x))}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(3x+6)^{-\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt{3x+6} + C, \, x > -2$$

b) $$\int \frac{8x}{\sqrt{x^2+3}}\,\mathrm{d}x = \int 8x(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 4\int \underbrace{2x}_{s'(x)} \underbrace{(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}}_{u(s(x))}\,\mathrm{d}x$$
$$= 4 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}(x^2+3)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 8\sqrt{x^2+3} + C$$

219. Funktion $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$ kaikki integraalifunktiot ovat

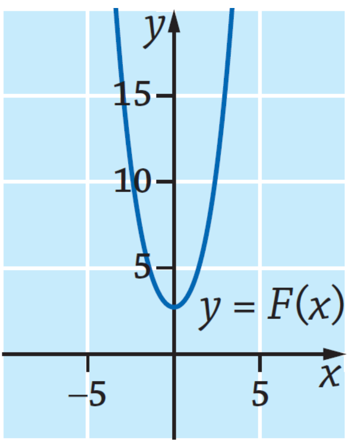
$$\begin{aligned}F(x)&=\int x\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x\\&=\int x(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int 2x(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}+C\\&=\frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

Kysytty integraalifunktio saa arvon 9, kun $x=\sqrt{5}$.
Ratkaistaan vakio C ehdosta $F(\sqrt{5})=9$.

$$F(\sqrt{5})=\frac{1}{3}(\sqrt{5}^2+4)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}}+C=9+C$$

$$\begin{aligned}9+C&=9\\C&=0\end{aligned}$$

Kysytty funktio on $F(x)=\frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{x^2+4}$.



220. Funktion $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ kaikki integraalifunktiot ovat

$$F(x)=\int\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Kuvaaja kulkee pisteen (0, 2) kautta, eli $F(0) = 2$.

$$F(0)=\frac{1}{2}\ln(0^2+1)+C=\frac{1}{2}\ln 1+C=C$$
$$C=2$$

Kysytty integraalifunktio on $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+2$.

221. **a)** Ratkaisuja on äärettömän monta erilaista, vain mielikuvitus on rajana. Funktioksi kelpaa esimerkiksi $f(x) = (2x + 1)^4$, jonka integraali on

$$\int(2x+1)^4\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int 2(2x+1)^4\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(2x+1)^5+C=\frac{1}{10}(2x+1)^5+C$$

ja $g(x)=\dfrac{3}{3x+1}$, $x>-\dfrac{1}{3}$, jonka integraali on

$$\int\frac{3}{3x+1}\,\mathrm{d}x=\int 3(3x+1)^{-1}\mathrm{d}x=\ln|3x+1|+C=\ln(3x+1),\ x>-\frac{1}{3}.$$

b) Funktio, jota ei voi integroida tämän luvun säännöillä, on esimerkiksi funktio $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$. Sisäfunktion $x^2 + 1$ derivaattaa $2x$ ei pystytä muodostamaan eikä se ole funktion lausekkeessa valmiina. Lauseketta ei myöskään pystytä kirjoittamaan polynomina, kuten vaikkapa $(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$.
Kun integroidaan $f(x)$ symbolisen laskennan ohjelmalla, saadaan integraaliksi $\dfrac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\dfrac{1}{2}\arctan(x)+C$.

222. Funktion $f(x) = 15x^2(x^3 - 1)^4$ kaikki integraalifunktiot ovat
$F(x) = \int 15x^2(x^3 - 1)^4 \, \mathrm{d}x = (x^3 - 1)^5 + C$.

Funktio on aidosti kasvava, jos sen derivaatta on ei-negatiivinen eli $F'(x) \geq 0$ ja derivaatta saa arvon nolla vain yksittäisissä kohdissa (terassikohdat).

$F'(x) = f(x) = 15x^2(x^3 - 1)^4 \geq 0$, koska $x^2 \geq 0$ ja $(x^3 - 1)^4 \geq 0$ koko $\mathbb{R}$:ssä ja $F'(x) = 0$ vain yksittäisissä kohdissa $x = 0$ ja $x = 1$.

Tällöin $F(x) = (x^3 - 1)^5 + C$ on aidosti kasvava kaikilla vakion C arvoilla.

223. Funktion $f(x) = 16x(x^2 - 1)^3$ kaikki integraalifunktiot ovat
$F(x) = \int 16x(x^2 - 1)^3 \, dx = 2(x^2 - 1)^4 + C.$

Ratkaistaan vakio C ehdosta $F(0) = 4$.
$F(0) = 2(0^2 - 1)^4 + C = 2 + C$

$2 + C = 4$
$C = 2$

Näin ollen $F(x) = 2(x^2 - 1)^4 + 2$.

Osoitetaan, että $F(0) = 4$ on maksimiarvo ja että kohdassa $x = –1$ funktio F saa minimiarvon 2.

Funktio $F(x)$ on polynomifunktiona määritelty ja jatkuva koko reaalilukujoukossa. Ääriarvojen määrittämistä varten tarvitaan derivaatan nollakohdat.

$F'(x) = f(x) = 16x(x^2 - 1)^3 = 0$, kun
$x= –1$, $x = 0$ tai $x = 1$

Testiarvot:
$F(–2) = –864 < 0$, $F(-\tfrac{1}{2}) = \dfrac{27}{8} > 0$, $F(\tfrac{1}{2}) = -\dfrac{27}{8} < 0$ ja $F(2) = 864 > 0$.

Funktion F kulkukaavio:

	-1	0	1	
$F'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$F(x)$	↘	↗	↘	↗

Kulkukaavion mukaan $x = 4$ on maksimikohta eli $F(0) = 4$ on maksimiarvo.
Kulkukaavion mukaan funktiolla F on minimiarvo kohdassa $x = -1$ ja kyseinen minimiarvo on $F(-1) = 2((-1)^2 - 1)^4 + 2 = 2$.

224. Funktion $g(x) = -\dfrac{2x}{x^2+1}$ kaikki integraalifunktiot ovat

$G(x) = \int -\dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\ln(x^2+1) + C$.

Kuvaajalla on oltava tangentti $x + y + \ln 2 = 0$, josta $y = -x - \ln 2$.
Tangentin kulmakerroin on −1.
Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo sivuamispisteessä.
Ratkaistaan tangentin sivuamispiste ehdosta $G'(x) = g(x) = -1$.

$$\begin{aligned} -\frac{2x}{x^2+1} &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Sivuamispisteen y-koordinaatti, kun $x = 1$ on $y = -1 - \ln 2$, joten sivuamispiste on $(1, -1 - \ln 2)$.

Sivuamispiste on käyrällä $G(x)$, joten $G(1) = -1 - \ln 2$. Ratkaistaan C.

$$G(1) = -\ln(1^2+1) + C = -\ln 2 + C$$

$$\begin{aligned} -\ln 2 + C &= -1 - \ln 2 \\ C &= -1 \end{aligned}$$

Kysytty integraalifunktio on $G(x) = -\ln(x^2+1) - 1$.

225. **a)** $\int (2x+1)(x^2+x)^7\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}(x^2+x)^8 + C,\ x > 0$

b)
$$\begin{aligned} \int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,\mathrm{d}x &= \int (x+1)(\underbrace{x^2+2x}_{\substack{s(x)=x^2+2x \\ s'(x)=2x+2}})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(2x+2)}_{s'(x)}\underbrace{(x^2+2x)^{\frac{1}{2}}}_{u'(s(x))}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+2x)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3}(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x} + C,\ x > 0 \end{aligned}$$

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

226. **a)** $\int (2x(x^2+x)^{10} + (x^2+x)^{10})\,dx$

$= \int (\underline{2x} \cdot (x^2+x)^{10} + \underline{1} \cdot (x^2+x)^{10})\,dx$

$= \int (x^2+x)^{10}(2x+1)\,dx$

$= \int \underbrace{(2x+1)}_{s'(x)}(x^2+x)^{10}\,dx$

$= \frac{1}{11}(x^2+x)^{11} + C$

b) $\int (2x-6)\sqrt{2x-6}\,dx = \int (2x-6)^1 \cdot (2x-6)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \int (2x-6)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot (2x-6)^{\frac{5}{2}} + C$

$= \frac{1}{5} \cdot (2x-6)^{2+\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{5}(2x-6)^2 \cdot (2x-6)^{\frac{1}{2}} + C$

$= \frac{1}{5}(2x-6)^2\sqrt{2x-6} + C,\ x > 3$

227. **a)** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{s'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{\substack{u(x)=x^1 \\ s(x)=\ln x}}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C,\ x > 0$

b) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{s'(x)} \underbrace{(\ln x)^{-1}}_{\substack{u(x)=x^{-1} \\ s(x)=\ln x}}\,dx = \ln(\ln x) + C,\ x > 1$

228. **a)** $\int \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,dx = \int 2 \cdot \underbrace{(2x+1)}_{s'(x)} \underbrace{(x^2+x+1)^{-1}}_{u(s(x))}\,dx = 2\ln\left|x^2+x+1\right| + C$

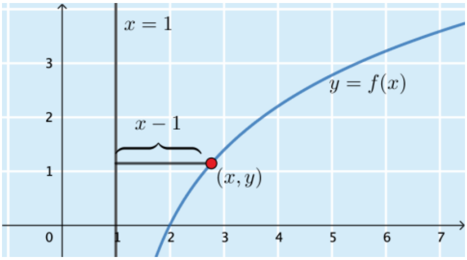
Yhtälöllä $x^2 + x + 1 = 0$ ei ole ratkaisua (diskriminantti $D = -3 < 0$), joten itseisarvomerkkien sisällä olevalla lausekkeella $x^2 + x + 1$ ei ole nollakohtia. Koska lausekkeen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, se saa vain positiivisia arvoja. Tulos voidaan kirjoittaa ilman itseisarvomerkkejä:

$2\ln|x^2 + x + 1| = 2\ln(x^2 + x + 1)$.

b) $\int \frac{x^2+2x}{2x+4}\,dx = \int \frac{x\cancel{(x+2)}}{2\cancel{(x+2)}}\,dx = \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + C = \frac{1}{4}x^2 + C,\ x > -2$$

229. **a)** Käyrän pisteen (x, y), $x > 1$, etäisyys suorasta $x = 1$ on $x - 1$.



Funktion $f(x)$ muutosnopeus eli derivaatta on kääntäen verrannollinen etäisyyteen $x - 1$, joten $f'(x) = \dfrac{k}{x-1}$, missä k on verrannollisuuskerroin.

Funktion muutosnopeus eli derivaatta ilmoittaa tangentin kulmakertoimen, mikä kertoo funktion kuvaajan jyrkkyyden.
Kun etäisyys suorasta $x = 1$ pienenee, kääntäen verrannollisuuden perusteella derivaatan arvo $f'(x)$ suurenee. Näin ollen käyrä $y = f(x)$ on sitä jyrkempi, mitä lähempänä kohtaa $x = 1$ ollaan.

Saman asian voi todeta myös derivaatan lausekkeesta: Mitä lähempänä kohtaa $x = 1$ ollaan, sitä lähempänä nimittäjä $x - 1$ on nollaa. Kun vakio k jaetaan hyvin lähellä nollaa olevalla luvulla, tulee tulokseksi itseisarvoltaan hyvin suuri luku. Tällöin käyrä on sitä jyrkempi, mitä lähempänä kohtaa $x = 1$ ollaan.

b) Muutosnopeus kohdassa $x = 2$ on 2, mistä ratkeaa k:

$$f'(2) = 2$$

$$\frac{k}{2-1} = 2$$

$$k = 2$$

Siten derivaattafunktio on $f'(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

Funktio $f(x)$ saadaan integroimalla $f'(x)$.

$$f(x) = \int \frac{2}{x-1}\mathrm{d}x = 2\int (x-1)^{-1}\mathrm{d}x = 2\ln|\underbrace{x-1}_{>0}| + C = 2\ln(x-1) + C$$

Käyrä kulkee pisteen $(\sqrt{e}+1,\ 2)$ kautta, eli $F(\sqrt{e}+1) = 2$

$$\begin{aligned} F(\sqrt{e}+1) &= 2\ln(\sqrt{e}+1-1) + C = 2\ln(\sqrt{e}) + C = \ln(\sqrt{e})^2 + C \\ &= \ln(e) + C = 1 + C \end{aligned}$$

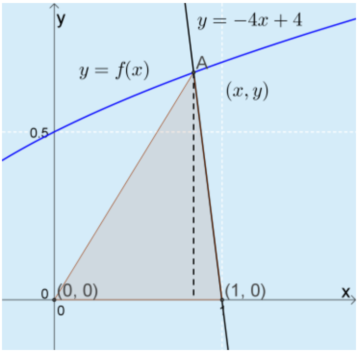
$$\begin{aligned} 1 + C &= 2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Kysytty funktio on $f(x) = 2\ln(x-1) + 1$.

230. $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}},\ x>-1$

Suora $4x + y - 4 = 0$ on ratkaistussa muodossa $y = -4x + 4$.

Syntyneen kolmion kanta on pisteiden (0, 0) ja (1, 0) etäisyys, eli 1. Kolmion korkeus on funktion $F(x)$ kuvaajan ja suoran $y = -4x + 4$ leikkauspisteen y-koordinaatin ja x-akselin välinen etäisyys. Määritetään kolmion korkeus h kun tiedetään, että pinta-ala on $\frac{23}{8}$.



$$A=\frac{23}{8}$$
$$\frac{1\cdot h}{2}=\frac{23}{8} \quad \| \cdot 2$$
$$h=\frac{23}{4}$$

Koska leikkauspiste on suoralla $y = -4x + 4$, saadaan ehto:

$|-4x+4|=\frac{23}{4}$ (pisteen y-koordinaatin etäisyys x-akselista)

$x=-\frac{7}{16}$ $\qquad$ $x=\frac{39}{16}$

Vastaavat y-koordinaatit suoran yhtälön avulla laskettuna ovat
$-4(-\frac{7}{16})+4=\frac{23}{4}$ ja $-4(\frac{39}{16})+4=-\frac{23}{4}$.

Leikkauspiste on $(-\frac{7}{16},\frac{23}{4})$ tai $(\frac{39}{16},-\frac{23}{4})$.

Leikkauspisteen perusteella $F(-\frac{7}{16})=\frac{23}{4}$ tai $F(\frac{39}{16})=-\frac{23}{4}$.

Jokin $F(x)$:

$$F(x)=\int \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{x+1}+C,\ x>-1$$

$$F\left(-\frac{7}{16}\right)=\frac{23}{4} \qquad \text{tai} \qquad F\left(\frac{39}{16}\right)=-\frac{23}{4}$$

$$\sqrt{-\frac{7}{16}+1}+C=\frac{23}{4} \qquad \sqrt{\frac{39}{16}+1}+C=-\frac{23}{4}$$

$$C=5 \qquad C=\frac{-23-\sqrt{55}}{4}$$

Kysytty integraalifunktio on

$$F(x)=\sqrt{x+1}+5 \text{ tai } F(x)=\sqrt{x+1}+\frac{-23-\sqrt{55}}{4}.$$

2.2 Eksponentti- ja trigonometristen funktioiden integrointi

YDINTEHTÄVÄT

231.

Funktio $u'(s(x))$	$s(x)$	$u'(x)$	$s'(x)$
e^{4x}	$4x$	e^x	4
e^{3x^2-5}	$3x^2-5$	e^x	$6x$
$\sin 3x$	$3x$	$\sin x$	3
$\cos(x^2-3x)$	x^2-3x	$\cos x$	$2x-3$

232. **a)** $\int(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C$

Tarkistus: $\mathrm{D}(\sin x-\cos x+\mathrm{C})=\cos x-(-\sin x)=\cos x+\sin x$

b) $\int(2e^x+3\cos x)\mathrm{d}x=2\int e^x\mathrm{d}x+3\int\cos x\mathrm{d}x=2e^x+3\sin x+C$

Tarkistus: $\mathrm{D}(2e^x+3\sin x+\mathrm{C})=2e^x+3\cos x$

233. **a)** $\int\underbrace{2}_{s'(x)}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{u'(s(x))}\mathrm{d}x=e^{2x}+C$

Tarkistus: $\mathrm{D}(e^{2x}+\mathrm{C})=e^{2x}\cdot 2=2e^{2x}$

b) $\int 6e^{3x}\mathrm{d}x=2\int\underbrace{3}_{s'(x)}\cdot\underbrace{e^{3x}}_{u'(s(x))}\mathrm{d}x=2e^{3x}+C$

Tarkistus: $\mathrm{D}(2e^{3x}+\mathrm{C})=2e^{3x}\cdot 3=6e^{3x}$

234. **a)** $\int \underset{s'(x)}{4} \cdot \underbrace{\cos 4x}_{u'(s(x))} \mathrm{d}x = \sin 4x + C$

Tarkistus: D(sin 4x+ C) = cos 4x · 4 = 4 cos 4x

b) $\int \sin 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \underset{s'(x)}{2} \underbrace{\sin 2x}_{u'(s(x))} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

Tarkistus: $\mathrm{D}(-\frac{1}{2}\cos 2x + C) = -\frac{1}{2}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 = \sin 2x$

235. **a)** $\int 8e^{-4x}\mathrm{d}x = -2\int \underset{s'(x)}{-4} \cdot \underset{u'(s(x))}{e^{-4x}} \mathrm{d}x = -2e^{-4x} + C$

Tarkistus: D($-2e^{-4x}$ + C) = $-2e^{-4x}$ · (–4) = $8e^{-4x}$

b) $\int e^{\frac{x}{3}}\mathrm{d}x = 3\int \underset{s'(x)}{\frac{1}{3}} \cdot \underset{u'(s(x))}{e^{\frac{x}{3}}} \mathrm{d}x = 3e^{\frac{x}{3}} + C$

Tarkistus: $\mathrm{D}(3e^{\frac{x}{3}} + C) = 3e^{\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3} = e^{\frac{x}{3}}$

236. **a)** $\int e^{5x}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \underset{s'(x)}{5} \cdot \underset{u'(s(x))}{e^{5x}} \mathrm{d}x = \frac{1}{5}e^{5x} + C$

b) $\int 6xe^{x^2}\mathrm{d}x = 3\int \underset{s'(x)}{2x} \cdot \underset{u'(s(x))}{e^{x^2}} \mathrm{d}x = 3e^{x^2} + C$

237. **a)** $\int t\sin 3t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int \underset{s'(x)}{6t} \underbrace{\sin 3t^2}_{u'(s(x))} \mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\cos 3t^2 + C$

b) $\int 3t^2\cos 2t^3\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \underset{s'(t)}{6t^2} \underbrace{\cos 2t^3}_{u'(s(t))} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin 2t^3 + C$

238. **a)** $\int 16t \sin 4t^2 \mathrm{d}t = 2\int \underset{s'(t)}{8t} \underbrace{\sin 4t^2}_{u'(s(t))} \mathrm{d}t = -2\cos 4t^2 + C$

b) $\int 3\sin 6t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \underset{s'(t)}{6} \underset{u'(s(t))}{\sin 6t} \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos 6t + C$

239. Funktion $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ kaikki integraalifunktiot ovat

$$F(x) = \int (2\sin x + \cos 2x)\mathrm{d}x = -2\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

Ratkaistaan vakio C ehdosta $F(\pi) = 3$.

$$F(\pi) = -2\cos\pi + \frac{1}{2}\sin 2\pi + C = -2\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 0 + C = 2 + C$$

$$\begin{aligned} 2 + C &= 3 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Kysytty funktio on $F(x) = -2\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x + 1.$

240.

Mittaushetki (min)	0	20	40	60	80	100
Lukumäärän muutos (kpl/min)	52	39	30	25	17	11

Piirretään havaintoaineiston pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan pisteisiin eksponenttifunktio.

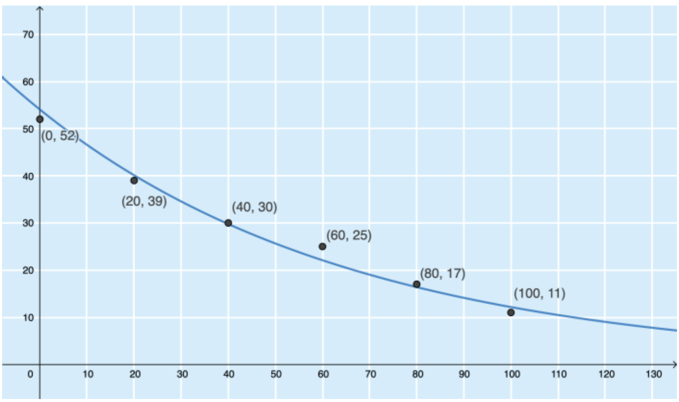
Geogebralla

1. Lisätään luvut taulukkoon (mittaushetket sarakkeeseen A ja lukumäärän muutokset sarakkeeseen B).

	A	B
2	20	39
3	40	30
4	60	25
5	80	17
6	100	11

2. Luodaan taulukon tiedoista pistelista.

3. Sovita eksponenttifunktio pisteisiin komennolla SovitaEksp[<Pistelista>].



a) Aineistoon sovitettu eksponenttifunktio on $f(x) \approx 54{,}058e^{-0{,}015x}$, kun kertoimet ilmoitetaan kolmen desimaalin tarkkuudella. Käytetään jatkossa funktiosta GeoGebran käyttämää mahdollisimman tarkkaa muotoa.

Funktio f ilmoittaa populaation eliöiden määrän muutoksen hetkellä x (min).

Hetkellinen muutosnopeus saadaan funktion arvona hetkellä $2{,}5\ h = 150$ min.

$f(150) = 5{,}77\ldots \approx 6$

Populaation hetkellinen muutosnopeus 2,5 tunnin kuluttua on noin 6 eliötä minuutissa.

b) Populaation koko saadaan funktion f integraalifunktion avulla symbolisella laskennalla.

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = -3624{,}525\,e^{-0.015x} + C$$

Alkuhetkellä $x = 0$ eliöitä on noin 500 kpl. Ratkaistaan tästä ehdosta vakio C.

$$\begin{aligned} F(0) + C &= 500 \\ C &= 4124{,}53 \end{aligned}$$

Populaation kokoa kuvaa funktio $F(x) = -3624{,}53\,e^{-0.015x} + 4124{,}53$.
Tunnin kuluttua mittauksen aloittamisesta populaation koko on $F(60) = 2643{,}32 \approx 2600$ eliötä.

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

241. **a)** $\int \frac{\sin x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(-\cos x) + C = -\frac{\cos x}{2} + C = -\frac{1}{2}\cos x + C$

b) $\int \underset{\substack{s(x)=\frac{1}{2}x \\ s'(x)=\frac{1}{2}}}{\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\int \underset{s'(x)}{\frac{1}{2}}\,\underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x = -2\cos\frac{x}{2} + C$

c) $\int (2x + \sin 2x)\mathrm{d}x = x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$

242. **a)** $\int \frac{e^x}{4}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4}e^x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^x + C$

b) $\int e^{\frac{x}{4}}\mathrm{d}x = 4\int \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}\mathrm{d}x = 4e^{\frac{x}{4}} + C$

c) $\int \frac{e^{-4x}}{-4}\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{4}e^{-4x}\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int -4e^{-4x}\mathrm{d}x = \frac{1}{16}e^{-4x} + C$

243. **a)** $\int (e^x)^2\mathrm{d}x = \int \underset{\substack{s(x)=2x \\ s'(x)=2}}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

b) $\int \sqrt{e^{-x}}\mathrm{d}x = \int \underset{\substack{s(x)=-\frac{1}{2}x \\ s'(x)=-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}x}}\,\mathrm{d}x = -2\int -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x = -2e^{-\frac{1}{2}x} + C = -2\sqrt{e^{-x}} + C$

c) $\int (\frac{1}{e^x})^3\mathrm{d}x = \int \underset{\substack{s(x)=-3x \\ s'(x)=-3}}{e^{-3x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int -3e^{-3x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$

$= -\frac{1}{3e^{3x}} + C$

244. **A** $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$

Kosinin jakso on 2π, joten mahdollisia kuvaajia ovat II ja IV.
Sini on positiivinen yksikköympyrän kahdessa ensimmäisessä neljänneksessä, eli kun $0 < x < \pi$, joten integraalifunktio $-\cos x$ on kasvava tällä välillä. Oikea kuvaaja on IV.

B $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$

Sinin jakso on 2π, joten mahdollisia kuvaajia ovat II ja IV. Kosini on negatiivinen yksikköympyrän toisessa ja kolmannessa neljänneksessä, eli kun $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$. Tällöin integraalifunktio $\sin x$ on vähenevä. Ainoa mahdollinen kuvaaja on II.

C $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$

Eksponenttifunktio on kasvava koko määrittelyjoukossaan, joten eksponenttifunktion kuvaajaksi käy vain kuva III.

245. Kaikki funktion $h(x) = e^{2x}$ integraalifunktiot ovat
$H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -1)$, joten $H(0) = -1$.
Ratkaistaan C tästä ehdosta.

$$H(0) = \frac{1}{2}e^{2\cdot 0} + C = \frac{1}{2} + C$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + C &= -1 \\ C &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

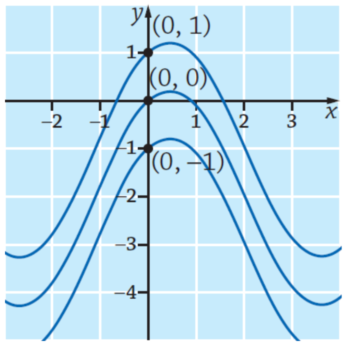
Kysytty integraalifunktio on $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$.

Funktion kuvaaja leikkaa x-akselin, kun y-koordinaatti on nolla.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} &= 0 \\ x &= \frac{\ln 3}{2} \end{aligned}$$

Funktion H kuvaaja leikkaa x-akselin kohdassa $x = \frac{\ln 3}{2}$.

246. Funktion $f(x) = \cos x - 2\sin x$ kaikki integraalifunktiot ovat
$F(x) = \sin x + 2\cos x + C$.



Kuvaaja kulkee pisteen (0, 1) kautta,
kun $C = -1$, koska:

$F(0) = \sin 0 + 2\cos 0 + C = 2 + C$

$2 + C = 1$
$C = -1.$

Vastaavasti kuvaaja kulkee pisteen
(0, 0) kautta, kun $C = -2$ ja pisteen (0, −1) kautta, kun $C = -3$.

247. Funktion $f(x) = e^x - 3$ kaikki integraalifunktiot ovat

$$F(x) = \int (e^x - 3)\,\mathrm{d}x = e^x - 3x + C.$$

Muodostetaan funktion F kulkukaavio.
Funktio F derivaattafunktio on f. Lasketaan sen nollakohdat.
$e^x - 3 = 0$
$x = \ln 3$

		ln 3	
$F'(x)$	–		+
$F(x)$	↘		↗

Funktiolla on pienin arvo kohdassa $x = \ln 3$.
Ratkaistaan C yhtälöstä $F(\ln 3) = 4$.

$e^{\ln 3} - 3\ln 3 + C = 4$
$C = 3\ln 3 + 1$

Kysytty funktio on $F(x) = e^x - 3x + 3\ln 3$.

248. **a)** $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{e^x}_{s'(x)} \underbrace{(e^x+1)^{-1}}_{u(s(x))}\,\mathrm{d}x = \ln|\underbrace{e^x+1}_{>1}| + C = \ln(e^x+1) + C$

b) $\int \frac{e^x+1}{e^x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)\mathrm{d}x = \int \left(1 + e^{-x}\right)\mathrm{d}x = x - e^{-x} + C = x - \frac{1}{e^x} + C$

c) $\int e^x \sqrt{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{e^x}_{s'(x)} \underbrace{(e^x+1)^{\frac{1}{2}}}_{u(s(x))}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1} + C$$

249. **a)** $\int (e^x+1)^2\,\mathrm{d}x = \int (e^{2x} + 2e^x + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$

b) $\int \underbrace{e^x}_{s'(x)} \underbrace{(e^x+1)^3}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(e^x+1)^4 + C$

c) $\int \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = -\int \underbrace{-\sin x}_{s'(x)} \underbrace{(\cos x)^2}_{u'(s(x))}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(\cos x)^3 + C$

250. Kaikki funktion $g(x) = -6 \sin 3x$ integraalifunktiot ovat
$G(x) = \int -6 \sin 3x \mathrm{d}x = -2\int 3\sin 3x \mathrm{d}x = -2(-\cos 3x) + C = 2\cos 3x + C.$

Kuvaaja kulkee pisteen $(\frac{\pi}{2}, 1)$ kautta, joten $G(\frac{\pi}{2}) = 1$.
Ratkaistaan vakio C tästä ehdosta.

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + C = 2 \cdot 0 + C = C$$

$$C = 1$$

Kysytty funktio on $G(x) = 2\cos 3x + 1$.

Ratkaistaan yhtälö $G(x) = 2$.

$$\begin{aligned}
2\cos 3x + 1 &= 2 \\
2\cos 3x &= 1 \quad \|:2 \\
\cos 3x &= \frac{1}{2} \\
3x &= \pm\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \|:3 \\
x &= \pm\frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, \ n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

251. **a)** Funktion $f(x) = 6\cos 2x$ kaikki integraalifunktiot ovat

$$H(x) = \int 6\cos 2x\,dx = 3\int 2\cos 2x\,dx = 3\sin 2x + C.$$

Funktiolla H on nollakohta $x = \frac{\pi}{4}$, eli $H(\frac{\pi}{4}) = 0$.

Ratkaistaan C tästä ehdosta.

$$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) + C = 3\sin\frac{\pi}{2} + C = 3 + C$$

$$\begin{aligned} 3 + C &= 0 \\ C &= -3 \end{aligned}$$

Kysytty funktio on $H(x) = 3\sin 2x - 3$.

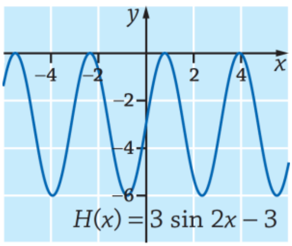
Muut funktion H nollakohdat:

$$\begin{aligned} 3\sin 2x - 3 &= 0 \\ 3\sin 2x &= 3 \quad \|:3 \\ \sin 2x &= 1 \end{aligned}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \quad \|:2 \qquad \text{tai} \qquad 2x = \pi - \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{Z} \qquad\qquad x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$

b) Funktion H suurin arvo on 0 ja pienin arvo on −6. Funktio saa arvot väliltä [−6, 0].



c) $H(x) = 3\sin 2x - 3$

Funktio $\sin 2x$ saa arvot väliltä [−1, 1], funktio $3\sin 2x$ saa arvot väliltä [−3, 3] ja funktio $3\sin 2x - 3$ saa arvot väliltä [−6, 0].

$$\begin{aligned} -1 \le \sin 2x &\le 1 \quad \|\cdot 3 \\ -3 \le 3\sin 2x &\le 3 \quad \|-3 \\ -6 \le 3\sin 2x - 3 &\le 0 \end{aligned}$$

252. Funktion $f(x) = e^{2x}$ kaikki integraalifunktiot ovat

$$F(x) = \int e^{2x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2e^{2x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Tangentin $y = x + 2$ kulmakerroin on 1, eli sivuamispisteessä $F'(x) = f(x) = 1$.

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 1 \\ 2x &= \ln 1 = 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Kun $x = 0$, tangentin y-koordinaatti $y = 0 + 2 = 2$. Sivuamispiste on (0, 2). Sivuamispiste on tangentille ja käyrälle yhteinen piste. Ratkaistaan ehdosta $F(0) = 2$ vakio C.

$$F(0) = \frac{1}{2}e^{2\cdot 0} + C = \frac{1}{2} + C$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + C &= 2 \\ C &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Kysytty integraalifunktio on $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}$.

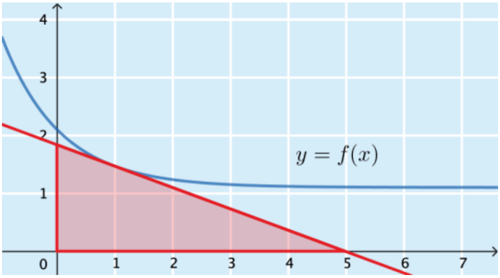
253. **a)** Funktio, jonka derivaattafunktio on sama kuin funktio itse on esimerkiksi $f(x) = e^x$. Lisäksi $f(0) = e^0 = 1$.

b) Funktio f, josta tulee derivoitaessa $-f$ on esimerkiksi $f(x) = e^{-x}$.
Tarkistus: $\mathrm{D}\, e^{-x} = -e^{-x}$.
Lisäksi $f(0) = e^0 = 1$.

c) Funktio, jonka toinen derivaatta on $-f$ on esimerkiksi $f(x) = \cos x$, koska $f'(x) = -\sin x$ ja $f''(x) = -\cos x$.
Lisäksi $f(0) = \cos 0 = 1$.

254. Funktion $g(x) = -e^{-x}$ kaikki integraalifunktiot ovat
$G(x) = \int -e^{-x}\mathrm{d}x = e^{-x} + C.$

Hahmotellaan kuva jollakin muuttujan C arvolla.



Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 1$ on $G'(1) = g(1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

Sivuamispisteen y-koordinaatti on

$G(1) = e^{-1} + C = \frac{1}{e} + C.$

Tangentti kulkee pisteen $(1, \frac{1}{e} + C)$ kautta.

Tangentin yhtälö on

$$y - (\frac{1}{e} + C) = -\frac{1}{e}(x - 1)$$
$$y = -\frac{1}{e}x + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + C$$
$$y = -\frac{1}{e}x + \frac{2}{e} + C.$$

Kolmion kanta on tangentin ja x-akselin leikkauspiste:

$$-\frac{1}{e}x + \frac{2}{e} + C = 0$$
$$x = 2 + Ce.$$

Kolmion korkeus on tangentin ja tangentin ja y-akselin leikkauspiste:

$$y = \frac{2}{e} + C.$$

Muodostetaan pinta-alan lauseke kannan ja korkeuden avulla.

$$A=\frac{1}{2}(2+Ce)(\frac{2}{e}+C)=\frac{1}{2}(\frac{4}{e}+2C+2C+C^2e)=\frac{2}{e}+2C+\frac{C^2e}{2}$$

Koska pinta-ala on $\frac{2}{e}$, muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan C:

$$\begin{aligned}\frac{2}{e}+2C+\frac{C^2e}{2}&=\frac{2}{e}\\ 2C+\frac{C^2e}{2}&=0\\ C(2+\frac{Ce}{2})&=0\\ C=0 \text{ tai } 2+\frac{Ce}{2}&=0\\ \frac{Ce}{2}&=-2\\ C&=-\frac{4}{e}\end{aligned}$$

Kysytty integraalifunktio on

$$G(x)=e^{-x} \text{ tai } G(x)=e^{-x}-\frac{4}{e}.$$

255. Funktion $f(x)=\frac{\sqrt{e^x}}{2}$ kaikki integraalifunktiot ovat

$$F(x)=\int\frac{\sqrt{e^x}}{2}\,\mathrm{d}x=\int\underbrace{\frac{1}{2}}_{s'(x)}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{u(s(x))}\,\mathrm{d}x=e^{\frac{1}{2}x}+C=\sqrt{e^x}+C.$$

Kohdassa $x = 1$ tangentin kulmakerroin on

$$F'(1)=f(1)=\frac{\sqrt{e^1}}{2}=\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Tangentin yhtälö, kun $k=\frac{\sqrt{e}}{2}$ ja tangentti kulkee pisteen $(-3, 0)$ kautta:

$$y-0=\frac{\sqrt{e}}{2}(x+3)$$
$$y=\frac{\sqrt{e}}{2}x+\frac{3\sqrt{e}}{2}.$$

Kun $x = 1$, sivuamispisteen y-koordinaatti on

$$y=\frac{\sqrt{e}}{2}\cdot 1+\frac{3\sqrt{e}}{2}=\frac{4\sqrt{e}}{2}=2\sqrt{e}.$$

Tangentin sivuamispiste on $(1,\ 2\sqrt{e})$.

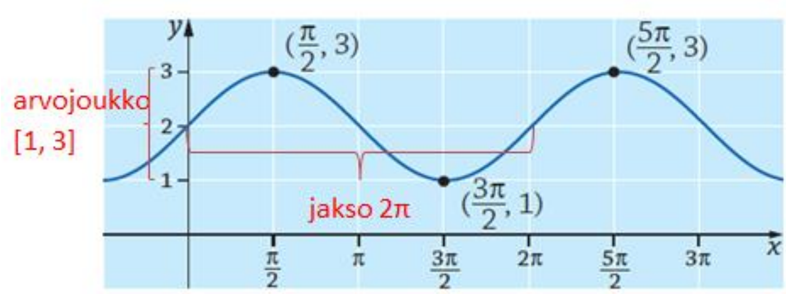
Piste on myös käyrällä $F(x)$, joten $F(1)=2\sqrt{e}$.

$$F(1)=\sqrt{e^1}+C=\sqrt{e}+C$$

$$\sqrt{e}+C=2\sqrt{e}$$
$$C=\sqrt{e}$$

Kysytty integraalifunktio on $F(x)=\sqrt{e^x}+\sqrt{e}=(e^x)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{e}=e^{\frac{x}{2}}+\sqrt{e}$.

256. Funktion $g(x)$ jakso on 2π ja arvojoukko on $[1, 3]$.



Oletetaan, että funktio on $g(x) = A\sin x + B$.

Koska $f(\frac{\pi}{2}) = 3$, saadaan $A\sin\frac{\pi}{2} + B = 3$ eli $A + B = 3$. Ehdosta $f(\frac{3\pi}{2}) = 1$ saaadaan $A\sin\frac{3\pi}{2} + B = 1$ eli $-A + B = 1$.

Yhtälöparista ratkeaa, että $B = 2$ ja $A = 1$. Siten $g(x) = \sin x + 2$ ja $f(x) = g'(x) = \cos x$.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

257. Ratkaistaan integraali kirjoittamalla a^x kantaluvun e eksponenttina ja käytetään yhdistetyn funktion integrointisääntöä.

$$a = e^{\ln a}$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \int \underbrace{e^{x\ln a}}_{\substack{u(x)=e^x \\ s(x)=x\ln a \\ s'(x)=\ln a}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\int \underbrace{\ln a}_{s'(x)} \cdot \underbrace{e^{x\ln a}}_{u(s(x))} \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} \underbrace{e^{x\ln a}}_{=a^x} + C$$

$$= \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

Sovelletaan saatua kaavaa funktioon 2^x, eli kun $a = 2$.

$$\int 2^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2} 2^x + C = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

Esimerkissä 2 päädyttiin samaan tulokseen.

<u>Vaihtoehtoinen tapa kaavan johtamiselle:</u>

Ratkaistaan integraali derivaatan avulla.

$$Da^x = a^x \ln a$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\int \underbrace{\ln a \cdot a^x}_{Da^x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

258. **a)** $\int (6xe^{3x^2+x}+e^{3x^2+x})\mathrm{d}x = \int (\underline{6x}\cdot e^{3x^2+x}+\underline{1}\cdot e^{3x^2+x})\mathrm{d}x$

$= \int e^{3x^2+x}(6x+1)\mathrm{d}x = \int \underbrace{(6x+1)}_{s'(x)}e^{3x^2+x}\mathrm{d}x = e^{3x^2+x}+C$

b) $\int (e^{2x}\sin^2 x + e^{2x}\cos^2 x)\mathrm{d}x = \int \underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{=1}e^{2x}\mathrm{d}x$

$= \int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}+C$

259. Ratkaistaan ensimmäisen kertaluvun derivaatta f'.

$f'(x) = \int f''(x)\mathrm{d}x = \int (-4\sin 2x - 4\cos 2x)\ \mathrm{d}x$
$= -2\int 2\sin 2x\ \mathrm{d}x - 2\int 2\cos 2x\ \mathrm{d}x$
$= 2\cos 2x - 2\sin 2x + C$

Ratkaistaan vakio C ehdosta $f'(\frac{\pi}{4}) = -2$.

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos(2\cdot\frac{\pi}{4}) - 2\sin(2\cdot\frac{\pi}{4}) + C = 2\cos\frac{\pi}{2} - 2\sin\frac{\pi}{2} + C = 2\cdot 0 - 2\cdot 1 + C$
$= -2 + C$

$-2 + C = -2,$ joten $C = 0$

$f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin 2x$

Selvitetään funktion f lauseke integroimalla:

$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int (2\cos 2x - 2\sin 2x)\ \mathrm{d}x = \sin 2x + \cos 2x + D$

Lasketaan $f(\frac{\pi}{6})$ ja ratkaistaan vakio D ehdosta $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

$$f(\frac{\pi}{6}) = \sin(2 \cdot \frac{\pi}{6}) + \cos(2 \cdot \frac{\pi}{6}) + D = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} + D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + D$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + D = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + D$$

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{6}) &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} + D &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ D &= \frac{\sqrt{3}-1-1-\sqrt{3}}{2} \\ D &= -1 \end{aligned}$$

Kysytty funktio on $f(x) = \sin 2x + \cos 2x - 1$.

$$f(\frac{\pi}{8}) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

260. Muunnoskaavasta $2\sin x \cos x = \sin 2x$ saadaan
$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \cdot 2\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{2}\sin 2x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\int 2\sin 2x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}(-\cos 2x) + C \\ &= -\frac{1}{4}\cos 2x + C \end{aligned}$$

Ratkaistaan vakio C ehdosta $F(\frac{\pi}{3}) = 1.$

$$F(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{4}\cos(2 \cdot \frac{\pi}{3}) + C = -\frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{2}) + C = \frac{1}{8} + C$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} + C &= 1 \\ C &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Kysytty funktio on $F(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{7}{8}.$

261. **a)** Koska $\sin^2 x = (\sin x)^2$, eikä sisäfunktion sin x derivaattaa cos x ole lausekkeessa, on tästä muodosta mahdotonta jatkaa tämän luvun keinoin. Hyödynnetään muunnoskaavaa $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

b) Vastaavalla tavalla kuin a-kohdassa, nytkään ei voida jatkaa integrointia annetusta muodosta, mutta taulukkokirjasta löytyvää kaavaa $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ hyödyntäen voidaan lauseke muokata muotoon, josta integrointi onnistuu.

$$\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\mathrm{d}x = \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

c) $$\int (\underbrace{\sin^4 x - \cos^4 x}_{a^2-b^2=(a-b)(a+b)})\mathrm{d}x = \int (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1})(\underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x})\mathrm{d}x$$

$$= \int 1\cdot(-\cos 2x)\mathrm{d}x = \int(-\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 2x + C$$