

Fysiikan laboratoriotyöt 3

Sähkömotorinen voima

Työn suorittaja: Antti Pekkala (1988723)

Mittaukset suoritettu	8.10.2014
Selostus palautettu	16.10.2014
Valvonut assistentti	Martti Kiviharju

1 Annettu tehtävä ja työn tarkoitus

Työn tarkoituksena oli tutustua paristoon tutkimalla sen sähkömotorista voimaa eli lähdejännitettä. Tehtävänä oli mitata pariston lähdejännite kuormittamatta sitä sähkövirralla. Tämä tuli toteuttaa Poggendorffin kompensatiomenetelmällä, missä siltakytkentää ja tunnettua lähdejännitettä hyväksi käyttäen voidaan selvittää tuntemattoman komponentin (eli pariston) lähdejännite. Lisäksi tuli tutkia pariston sisäinen resistanssi mittaamalla sen napajännitettä erilaisilla virroilla.

2 Työhön liityvä teoria

2.1 Napajännite

Ideaalinen jännitelähde tuottaa jännitteen ε , joka ei riipu sen läpi kulkevasta virrasta. Todellisuudessa tämä lähdejännite kuitenkin menettää potentiaaliaan jännitelähteen sisäisen resistanssin takia. Tällöin jännitelähteen napajännite, eli jännite joka on mitattavissa jännitelähteestä, on

$$V = \varepsilon - Ir, \quad (1)$$

missä I on jännitelähteen läpi kulkeva virta ja r sen sisäinen resistanssi. Tästä nähdään, että lähdejännitteen mittaamiseksi jännitelähteen läpi kulkevan virran tulee olla nolla.

Kun muodostetaan suljettu virtapiiri, missä jännitelähde on kytketty vastuksen kanssa sarjaan, on virtapiirissä kulkevan virran lauseke Ohmin lain mukaan

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R_m}, \quad (2)$$

missä R_m on vastuksen resistanssi. Sijoittamalla tämä yhtälöön (1) saadaan

$$V = \varepsilon - \frac{\varepsilon \cdot r}{r + R_m} = \varepsilon \frac{R_m}{r + R_m}. \quad (3)$$

Tästä nähdään, että mikäli sisäinen resistanssi on pieni verrattuna vastuksen resistanssiin ($r \ll R_m$), niin on mitattu napajännite hyvin lähellä lähdejännitteen arvoa ε .

2.2 Poggendorffin kompensatiomenetelmä

Poggendorffin kompensatiomenetelmässä on tarkoitus mitata tutkittavan jännitelähteen lähdejännitettä siten, että sen läpi ei kulje virtaa. Tämä toteutetaan siltakytkennällä, jonka kytkentäkaavio löytyy Työohjeesta (Liite 1,

Kuva 2.). Säättämällä helipotti, eli liukuvastus AB , kohtaan C , missä galvanometrin läpi ei kulje virtaa, saadaan helipotin läpi kulkeva virta pysymään vakiona. Tämä virta on myös sama vertailujännitelähteelle, kun galvanometrin avulla virta on jälleen säädetty nolnaan. Jos merkitään tutkittavan jännitelähteen tapauksen helipotin arvoa kirjaimella C_x ja helipotin osan, eli pituuden, $AC_x = x$ resistanssia kirjaimella R_x ja vastaavasti tunnetulle jännitelähteelle C_n , $AC_n = n$ ja R_n , niin saadaan yhtälöpari

$$\frac{R_x}{R_{AB}} = \frac{x}{AB}$$

$$\frac{R_n}{R_{AB}} = \frac{n}{AB}.$$

Näistä saadaan ratkaistua

$$\frac{R_n}{R_x} = \frac{n}{x}.$$

Kun merkitään tutkittavan jännitelähteen lähdejännitettä kirjaimelle ε_P ja vastaavalle tunnetulle jännitelähteelle ε_W , saadaan Kirchoffien laeista yhtälöpari

$$IR_n = \varepsilon_W$$

$$IR_x = \varepsilon_P,$$

josta edelleen saadaan

$$\varepsilon_P = R_x \frac{\varepsilon_W}{R_n} = \frac{x}{n} \varepsilon_W. \quad (4)$$

Tämän yhtälön ratkaisu löytyy ennakkotehtävien ratkaisusta (Liite 2.).

2.3 Pariston sisäinen resistanssi

Poggendorffin kompensatiomenetelmässä käytettyä kytkentäkaaviota hieman muuttamalla voidaan tutkia jännitelähteen sisäistä resistanssia. Lisäämällä pariston rinnalle säädettävän kuormitusvastuksen kytkentäkaavion Kuvasessa 3. mukaisesti (Liite 1.), voidaan jännitelähdettä kuormittaa virralla. Tätä virtaa voidaan säätää säättämällä vastuksen suuruutta ja se mitataan virtamittarilla. Koska kyseessä on kuitenkin sama siltakytkentä, pätee myös yhtälö (4). Tässä tapauksessa käytetään merkinnöissä pilkkua erottamaan muuttujat toisistaan:

$$V_{x'} = \frac{x'}{n'} \varepsilon_W. \quad (5)$$

Jos pariston läpi menevää virtaa merkitään kirjaimella $I_{x'}$, on pariston napajännite silloin

$$V_{x'} = \varepsilon_P - I_{x'} r_{x'}, \quad (6)$$

mistä edelleen pariston sisäinen resistanssi on

$$r_{x'} = \frac{\varepsilon_P - V_{x'}}{I_{x'}}. \quad (7)$$

3 Mittausmenetelmät ja -välineet

Mittauslaitteisto poikkeaa vielä hieman teoreettisista välineistä. Siihen on lisätty suojavastuksia ja kytkimiä herkempien laitteiden suojaamiseksi liian suurilta virroilta. Kuva kytkentäkaaviosta löytyy työohjeen kuvasta 4 (Liite 1). Käytetyn helipotin säätö on asteikolla nolasta kymmeneen. Sekä sähkömotorinen voima, että sisäinen resistanssi saadaan mitattua tällä yhdellä kytkentäkaaviolla. Tunnettuna jännitelähteenä käytetään Weston-elementtiä, jonka lähdejännitteelle on annettu työohjeessa lämpötilasta t riippuva yhtälö

$$\varepsilon_W = 1,0183V - 0,0004(t - 20)V. \quad (8)$$

Napajännitteen mittaus suoritettiin ensin säätämällä ulkoisen jännitelähteen ja etuvastus sellaiseen asentoon, missä tutkittavan pariston helipotin säätö tuli mahdollisimman lähelle maksimia, eli lähellä arvoa $AC_x = AB$. Tällöin saatiin tarkin mahdollisin mittaus. Kytkimen K ollessa auki mitattiin kytkimen S molemmat puolet, eli mittausarvot x ja n . Mittaus suoritettiin myös kahdelle pienemmälle etuvastuksen arvolle. Lisäksi arvioitiin molempien arvojen absoluuttiset virheet ja mitattiin huoneen lämpötila.

Tämän jälkeen kytkin K suljettiin ja mitattiin jälleen mahdollisimman tarkalla lukemalla arvot x' , eli säätämällä etuvastus mahdollisimman suureksi, jolloin muuttujan x' arvo on lähellä kymmentä. Tämän jälkeen säädettiin pariston läpi kulkevaa virtaa $I_{x'}$ ja se mitattiin ylös virtamittarin avulla. Mittaus aloitettiin kymmenestä milliampeerista, jonka jälkeen mitattiin virtaa kasvatettiin noin kymmenen milliampeerin verran/mittaus, kymmenen toiston verran. Vertailuksi mitattiin muutaman kerran myös muuttujan n' arvo. Lisäksi virran absoluuttinen virhe arvioitiin virtamittarin lukematarkkuudesta.

Lopuksi vertailuarvoiksi mitattiin yleismittarilla sekä Weston-elementin että pariston napajännitteet erikseen.

4 Mittaustulokset ja niiden käsittely

Välittömät mittaustulokset löytyvät mittauspöytäkirjasta (Liite 3).

4.1 Sähkömotorinen voima

Yhtälöiden (4) ja (8) perusteella pariston sähkömotorinen voima eli lähdejännite on

$$\varepsilon_P = \frac{x}{n}\varepsilon_W = \frac{x}{n}[1,0183 - 0,0004(22 - 20)],$$

jolloin mittauksille 1-3 saadaan

$$\varepsilon_{P1} = \frac{4,87}{3,40}[1,0183V - 0,0004(t - 20)V] = \frac{4,87}{3,40}[1,0175V] = 1,45741912V$$

$$\varepsilon_{P2} = \frac{6,59}{4,62}[1,0175V] = 1,45136905V$$

$$\varepsilon_{P3} = \frac{9,53}{6,63}[1,0175V] = 1,46256033V$$

josta keskiarvona saadaan

$$\varepsilon_P = \frac{1,45741912V + 1,45136905V + 1,46256033V}{3} = 1,45711617V.$$

4.2 Sisäinen resistanssi

Yhtälöiden (5), (7) ja (8) perusteella pariston sisäinen resistanssi on

$$r = \frac{\varepsilon_P - x'/n'[1,0183 - 0,0004(t - 20)]}{I_{x'}}.$$

Muuttujan ε_P arvona käytetään työn alkuosassa saatua tulosta. Tällöin kaikille kymmenelle mittaustulokselle laskettu r on

$$r_1 = \frac{1,45711617V - 9,46/6,63 \cdot 1,0175V}{10,0 \cdot 10^{-3}A} = 0,529866947\Omega$$

$$r_2 = 0,648606173\Omega$$

$$r_3 = 0,637029555\Omega$$

$$r_4 = 0,631241246\Omega$$

$$r_5 = 0,689155893\Omega$$

$$r_6 = 0,676609298\Omega$$

$$r_7 = 0,682744156\Omega$$

$$r_8 = 0,709606872\Omega$$

$$r_9 = 0,711262125\Omega$$

$$r_{10} = 0,718451743\Omega$$

Sisäisen resistanssin riippuvuus pariston läpi kulkevasta virrasta on taulukoitu kuvaajaksi (Liite 4).

5 Virheenarviointi

5.1 Sähkömotorinen voima

Sähkömotorisen voiman eli lähdejännitteen absoluuttinen virhe saadaan kokonaisdifferentiaalimenetelmällä:

$$|\Delta\varepsilon_P| \leq \left| \frac{\delta\varepsilon_P}{\delta x} \Delta x \right| + \left| \frac{\delta\varepsilon_P}{\delta n} \Delta n \right| + \left| \frac{\delta\varepsilon_P}{\delta t} \Delta t \right| = \left| \frac{\varepsilon_W \Delta x}{n} \right| + \left| \frac{-\varepsilon_W x \Delta n}{n^2} \right| + \left| \frac{-0,0004x \Delta t}{n} \right|$$

Tästä laskemalla saadaan

$$|\Delta\varepsilon_{P1}| \leq \left| \frac{1,0175V \cdot 0,005}{3,40} \right| + \left| \frac{-1,0175V \cdot 4,87 \cdot 0,005}{3,40^2} \right| + \left| \frac{-0,0004V \cdot 4,87 \cdot 0,5}{3,40} \right|$$
$$|\Delta\varepsilon_{P2}| \leq 0,002957218V$$
$$|\Delta\varepsilon_{P3}| \leq 0,002157813V$$

Vertaamalla kuitenkin laskettujen arvojen poikkeamia keskiarvosta, huomataan että osa poikkeamista on näitä laskettuja virheitä suurempia:

$$\text{Poikkeama 1 : } |1,45741912V - 1,45711617V| = 0,000302952V$$

$$\text{Poikkeama 2 : } |1,45136905V - 1,45711617V| = 0,005747118V$$

$$\text{Poikkeama 3 : } |1,46256033V - 1,45711617V| = 0,005444166V$$

Käytetään siis absoluuttisen virheen ylärajana näistä suurinta arvoa, eli

$$|\Delta\varepsilon_P| \leq 0,005747118V.$$

Tästä lasketaan vielä suhteellinen virhe:

$$\left| \frac{0,005747118V}{1,45711617V} \right| = 0,003944173 = 0,3944173\%$$

5.2 Sisäinen resistanssi

Sisäisen resistanssin absoluuttisen virheen yläraja lasketaan myös kokonaisdifferentiaalimenetelmällä. Yhtälön johtaminen löytyy ennakkotehtävistä (Liite 2). Muuttujan ε_P arvona käytetään työn alkuosassa saatua tulosta (ja sitä vastaavaa virhettä).

$$|\Delta r| \leq \left| \frac{\Delta\varepsilon_P}{I_{x'}} \right| + \left| \frac{-(\varepsilon_P - V_{x'}) \Delta I_{x'}}{I_{x'}^2} \right| + \left| \frac{\varepsilon_W \Delta x'}{n' I_{x'}} \right| + \left| \frac{x' \varepsilon_W \Delta n'}{I_{x'} n'^2} \right| + \left| \frac{0,0004x' \Delta t}{n' I_{x'}} \right|$$

Tällä yhtälöllä laskettuna virheeksi mittauksille 1-10 saadaan

$$\begin{aligned}
 |\Delta r_1| &\leq \left| \frac{0,005747118V}{0,01A} \right| + \left| \frac{-(0,005747118V - 9,46/6,63 \cdot 1,0175V)0,00005}{0,01^2} \right| \\
 &+ \left| \frac{1,0175V \cdot 0,005}{6,63 \cdot 0,01A} \right| + \left| \frac{9,46 \cdot 1,0175V \cdot 0,005}{0,01A \cdot 6,63^2} \right| + \left| \frac{0,0004V \cdot 9,46 \cdot 0,5}{6,63 \cdot 0,01A} \right| \\
 |\Delta r_1| &\leq 0,792121135\Omega \\
 |\Delta r_2| &\leq 0,395992655\Omega \\
 |\Delta r_3| &\leq 0,26378127\Omega \\
 |\Delta r_4| &\leq 0,197682813\Omega \\
 |\Delta r_5| &\leq 0,15802908\Omega \\
 |\Delta r_6| &\leq 0,131583175\Omega \\
 |\Delta r_7| &\leq 0,111570043\Omega \\
 |\Delta r_8| &\leq 0,097291246\Omega \\
 |\Delta r_9| &\leq 0,085953913\Omega \\
 |\Delta r_{10}| &\leq 0,07599018\Omega
 \end{aligned}$$

6 Lopputulokset

Ilmoitetaan lopuksi saadut tulokset.

Pariston säkömotoriseksi voimaksi virherajoiheen saatiin

$$\varepsilon_P = 1,457V \pm 0,006V$$

$$\varepsilon_P = 1,457V \pm 0,4\%$$

Sisäisen resistanssin arvot $r_1 - r_{10}$ on ilmoitettu alla taulukossa.

r_i	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
Arvo (Ω)	0,5	0,6	0,6	0,6	0,7	0,68	0,68	0,71	0,71	0,72
Virhe \pm	0,8	0,4	0,3	0,2	0,2	0,14	0,12	0,10	0,09	0,08

7 Omia mietteitä

Työ ei onnistunut aivan toivotulla tavalla. Vaikkakin varsinainen työn suoritus ja toteutus sujui vaivatta, antaa mittaustulokset hieman toivomisen varaa. Sähkömotorisen voiman virhe on kyllä pieni, mutta se ei sisällytä virherajojensa sisälle jännitemittarilla mitattua arvoa $V_P = 1,435V$. Se on kuitenkin sitä lähellä, joten mittauksen voidaan sanoa säästyneen sen osalta karkeimmilta virheiltä. Sähkömotorisen virheen suuruus kuitenkin ajoi sisäisen resistanssin virheen paikoin järjettömän suureksi. Ensimmäisestä mittauksesta saatu tulos on pienempi kuin itse virhe! Virran kasvaessa virhe pienenee kuitenkin rajusti, ja voidaan olettaa viimeisimpien mittaustulosten virheiden olevan luotettavia. Yksi mahdollinen selitys voi olla käytetyn kuormitusvirran suuruus; työohje ehdottaa käytettäväksi mikroamppeerien kokoluokkaisia virtoja, kun työn suorituksessa käytettiin milliampeerisia virtoja (assistentin ohjeistuksesta).

Tuloksista saatu kuvaaja ei anna myöskään toivottuja tuloksia. Kuvaaja ei ole samanmallinen kuin assistentin luonnos, pikemminkin päinvastainen. Kuvaajassa on kuitenkin haluttua muotoa, joten jonkinlainen ajatusvirhe tai jokin muu karkea virhe voisi selittää sen. Suurin osa, ja erityisesti luotettavimmat loppupään mittaukset antavat kuitenkin odotetun, lähes vaakasuoran kuvaajan, mikä tarkoittaisi muuttumatonta sisäistä resistanssia. Näin oletetaan usein yksinkertaisemmissa sisäisen resistanssin määrittelyissä. Kuvaajan muoto vittaa siihen, että pariston sisäinen resistanssi kasvaa sitä kuormittavan virran kasvaessa. Ainakin nopealla päättelyllä tämä tuntuu loogiselta, joten kenties kuvaaja kuvastaakin todellista tilannetta kohtuullisen hyvin.

Liitteet

- LIITE 1: Työohje
- LIITE 2: Ennakkotehtävät
- LIITE 3: Mittauspöytäkirja
- LIITE 4: Kuvaaja pariston sisäisen resistanssin ja virran suhteesta