

RATKAISUT: 2. Säteilyä ja ainetta kuvataan useilla malleilla

1. a) Röntgensäteilyn aallonpituus on merkittävästi pienempi kuin näkyvän valon aallonpituus. Röntgensäteilyn fotonin energia on siten suurempi kuin näkyvän valon fotonin.
 - b) Röntgensäteilyä syntyy, kun suurella nopeudella metallin pintaan osuvat elektronit jarruuntuvat. Kiihtyvässä liikkeessä olevat elektronit lähettävät sähkömagneettista säteilyä. Elektronien jarruuntumisesta aiheutuva säteily, jota kutsutaan **jarrutussäteilyksi**, aiheuttaa spektrin jatkuvan osan. Spektrin piikit, eli **ominaissäteily**, syntyvät elektronisuihkun törmätessä anodimateriaalin atomeihin.
 - c) Röntgensäteilyn läpitunkevuutta hyödynnetään esimerkiksi lääketieteessä luuston kuvauksessa. Röntgenkuvaus perustuu röntgensäteilyn erilaiseen absorptioon eri kudoksissa. Luu absorboi säteilyä paremmin kuin sitä ympäröivä pehmytkudos, joten luut näkyvät röntgenkuvissa ympäristöään vaaleampina. Röntgensäteitä voidaan käyttää myös teollisuudessa rakenteiden tutkimisessa. Fysiikassa röntgensäteilyn avulla tutkitaan aineen rakennetta.
2. Röntgensäteily kulkee suoraviivaisesti sähkö- ja magneettikentissä sekä läpäisee useimmat kiinteät aineet. Se myös diffraktoituu, eli aaltorintaman muoto muuttuu, kapeassa raossa. Diffraktoituminen on tyypillistä aalloille.
 3. Röntgensäteilyn aallonpituus on $\lambda = 0,19 \text{ nm}$.

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan

$$c = \lambda f, \text{ joten}$$

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

$$= \frac{2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,19 \cdot 10^{-9} \text{ m}}$$

$$= 1,5779 \cdot 10^{18} \text{ Hz} \approx 1,6 \cdot 10^{18} \text{ Hz.}$$

Fotonin energia on

$$E = hf$$

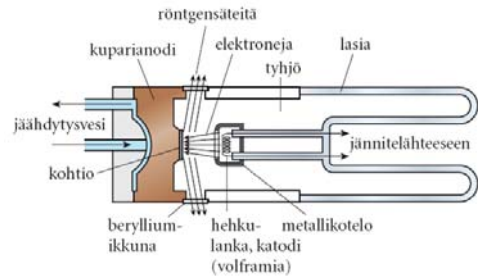
$$= 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \cdot 1,5779 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$$

$$= 6,5262 \cdot 10^3 \text{ eV} \approx 6,5 \text{ keV.}$$

Vastaus:

- a) Fotonin taajuus on $1,6 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$.
- b) Fotonin energia on $6,5 \text{ keV}$.

4. a) Röntgenputkessa on hehkukatodi, jota kuumennetaan sähkövirralla. Metallista irtoaa kuumennettaessa elektroneja, jotka kiihdytetään sähkökentällä suureen nopeuteen. Kun elektronit osuvat anodimetalliin, syntyy röntgensäteilyä.



- b) Vain pieni osa elektronien liike-energiasta muuttuu röntgensäteilyn energiaksi. Suurimman osan liike-energiastaan elektronit luovuttavat anodimateriaalille, jolloin anodi kuumenee merkittävästi. Nykyisissä röntgenputkissa on tästä syystä vesijähdytys.

5. Röntgenputken jännite on $U = 19 \text{ kV}$.

Kun elektroni luovuttaa koko liike-energiansa, saadaan säteilykvantin energian suurin arvo

$$hf_0 = \Delta E_k = E_k.$$

Työperiaatteen mukaan

$$W = \Delta E_k$$

$$Q_e U = \Delta E_k, \text{ joten } hf_0 = Q_e U.$$

Koska $c = \lambda f$, saadaan

$$\frac{hc}{\lambda_0} = Q_e U, \text{ josta ratkaistaan}$$

$$\lambda_0 = \frac{hc}{Q_e U}$$

$$= \frac{4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ e} \cdot 19 \cdot 10^3 \text{ V}}$$

$$= 6,5262 \cdot 10^{-11} \text{ m} \approx 65 \text{ pm}.$$

Vastaus: Lyhin aallonpituus on 65 pm.

6. Röntgensäteilylle saadaan kiteessä **vahvistava interferenssi**, kun säteily heijastuu kiteen kahdesta eri atomitasosta siten, että matkaero on säteilyn aallonpituuden monikerta. Vahvistusehtoa kutsutaan Braggin laiksi, ($2d \sin \theta = n\lambda$). Röntgensäteilyn aallonpituus on riittävän lyhyt, jotta sen avulla voidaan ”nähdä”, kuinka atomit ovat sijoittuneet kiteeseen. Tuntemattoman kiteen rakenne voidaan määrittää mittaamalla tunnetun röntgensäteilyn diffraktiomaksimien suunnat ja intensiteetit.

7. Kun $n=1$ $\theta_1 = 17,5^\circ$

$$n=2 \quad \theta = 36,98^\circ$$

$\theta_3 = ?$ Braggin lain mukaan saadaan vahvistus, kun

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

$$2d \sin 17,5^\circ = 1\lambda \quad \frac{\lambda}{d} = 2 \sin 17,5^\circ = 0,60141$$

$$2d \sin 36,98^\circ = 2\lambda \quad \frac{\lambda}{d} = \sin 36,98^\circ = 0,60152$$

$$2d \sin \theta_3 = 3\lambda$$

$$\sin \theta_3 = \frac{3\lambda}{2d}$$

$$\sin \theta_3 = \frac{3}{2} \cdot 0,601$$

$$\theta_3 = 64,356^\circ \approx 64^\circ$$

Vastaus: Kolmas heijastus havaitaan kulmalla 64° .

8. Suurin energiakvantti syntyy, kun elektronin röntgenputken kiihdytyksessä saama liike-energia muuttuu kokonaan röntgenkvantin energiaksi. Tätä energiaa vastaa spektrin jatkuvan osan pienin aallonpituus λ_0 .

Työperiaatteen mukaan

$$W = \Delta E_k, \text{ joten } Q_e U = E_k.$$

$$Q_e U = \frac{hc}{\lambda_{\min}}, \text{ josta ratkaistaan jännite}$$

$$U = \frac{hc}{\lambda_{\min} Q_e}.$$

Kuviosta nähdään $\lambda_{\min} = 0,112 \text{ nm}$,

joten

$$U = \frac{4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,112 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1 \text{ e}} \\ = 1,1071 \cdot 10^4 \text{ V} \approx 11,1 \text{ kV}.$$

Vastaus: Putken jännite on 11,1 kV

9. Aallonpituus on $\lambda_{\min} = 0,12 \text{ nm}$.

Työperiaatteen mukaan

$$W = \Delta E_k$$

$$Q_e U = E_k$$

$$Q_e U = \frac{hc}{\lambda_{\min}}, \text{ josta ratkaistaan jännite}$$

$$U = \frac{hc}{Q_e \lambda_{\min}}$$

$$= \frac{4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ e} \cdot 0,12 \cdot 10^{-9} \text{ m}}$$

$$= 1,0333 \cdot 10^4 \text{ V} \approx 10,3 \text{ kV}.$$

Vastaus: Jännite on 10,3 kV.

10. Kaikilla säteilyn lajeilla on sekä aalto- että hiukkasominaisuuksia. Säteilyn liikemäärälle ja energialle on voimassa

$$(1) p = \frac{h}{\lambda} \text{ ja}$$

$$(2) E = hf.$$

11. Sen osoittaa esimerkiksi elektronien diffraktoituminen kaksoisrakokokeessa. Myös elektronisironna metalleista vahvistaa käsitystä materiaihiukkasten aaltoluonteesta.

12. Elektronin de Broglie'n aallonpituus on huomattavasti pienempi kuin näkyvän valon aallonpituus, noin tuhannesosa siitä, joten elektronimikroskoopin erotuskyky on huomattavasti parempi kuin valomikroskoopin erotuskyky.

13. Liike-energia on $E_k = 150 \text{ eV}$.

Fotonille $E = \frac{hc}{\lambda}$, josta voidaan ratkaista aallonpituus

$$\lambda = \frac{hc}{E}$$

$$= \frac{4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{150 \text{ eV}}$$

$$= 8,2665 \cdot 10^{-9} \text{ m} \approx 8,3 \text{ nm}.$$

Käytetään liike-energian yhtälöä

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

Ratkaistaan nopeus

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_e}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 0,16021 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{9,1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}}$$

$$= 7,2637 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nopeus on pieni valonnopeuteen verrattuna, joten voidaan käyttää klassisen mekaniikan liike-energian lauseketta. Lasketaan aallonpituus

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$$= \frac{6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 7,2637 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$= 1,0015 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 1,00 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_p}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 0,16021 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 1,6952 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_v}$$

$$= \frac{6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 1,6952 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$= 2,33693 \cdot 10^{-12} \text{ m} \approx 2,3 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Vastaus:

- a) Fotonin aallonpituus on 8,3 nm.
- b) Elektronin aallonpituus on 0,10 nm.
- c) Protonin aallonpituus on 2,3 pm

14. Kiihdytysjännite on $U = 2,7 \text{ kV}$.

Protonin liike-energia kiihdytyksen jälkeen on

$$E_k = Q_p U . \text{ Lasketaan protonin nopeus}$$

$$\begin{aligned}
 Q_p U &= \frac{1}{2} m_p v^2 \\
 v &= \sqrt{\frac{2Q_p U}{m_p}} \\
 \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{m_p v} \\
 &= \frac{h}{m_p \sqrt{\frac{2Q_p U}{m_p}}} \\
 &= \frac{h}{\sqrt{2Q_p U m_p}} \\
 &= \frac{6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \cdot 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2,7 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \\
 &= 5,5077 \cdot 10^{-13} \text{ m} \approx 5,5 \cdot 10^{-13} \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Vastaus: Protonin de Broglien aallonpituus on $5,5 \cdot 10^{-13} \text{ m}$

15. Luodin massa ja nopeus ovat $m = 25 \text{ g}$ ja $v = 650 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Luodin de Broglien aallonpituus saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\
 &= \frac{6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{25 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 650 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\
 &= 4,0776 \cdot 10^{-32} \text{ m} \approx 4,1 \cdot 10^{-32} \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Vastaus: Luodin de Broglien aallonpituus on $4,1 \cdot 10^{-32} \text{ m}$.

16. Lasketaan elektronin nopeus

$$\begin{aligned}
 Q_e U &= \frac{1}{2} m_e v^2 \\
 v &= \sqrt{\frac{2Q_e U}{m_e}} \\
 \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2Q_e U m_e}} \\
 &= \frac{6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \cdot 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 130 \text{ V} \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \\
 &= 1,0757 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 110 \text{ pm}.
 \end{aligned}$$

Vastaus: Aallonpituus on 110 pm.

17. Aallonpituuden on oltava 0,1 mm, jotta havainnointi onnistuisi.

$$Q_e U = \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$\begin{cases} p = m_e v, \text{ josta} \\ p = \frac{h}{\lambda} \end{cases}$$

$$m_e v = \frac{h}{\lambda}$$

$$v = \frac{h}{m_e \lambda}$$

$$U = \frac{m_e v^2}{2Q_e} = \frac{m_e \left(\frac{h}{m_e \lambda}\right)^2}{2Q_e} = \frac{h^2}{2m_e Q_e \lambda^2}$$

$$U = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2}{2 \cdot 9,103 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,6022 \cdot 10^{-19} \cdot (0,1 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2}$$

$$= 1,5051 \cdot 10^2 \text{ V} \approx 150 \text{ V}.$$

Vastaus: Käyttöjännite on 150 V.

18. Fysiikan tutkimuskohteet ovat usein erittäin pieniä, erittäin suuria ja aina monimutkaisia. Tällaisten kohteiden kuvaamiseen ja tutkimiseen käytetään malleja, jotka ovat yksinkertaistuksia kohteesta. Malli sisältää kohteen keskeiset rakenteet ja ominaisuudet.

19. Mikromaailman kohteet ovat niin pieniä, että niistä ei ole mahdollista saada välittömiä havaintoja. Esimerkiksi atomin ydin ja alkeishiukkaset ovat tällaisia kohteita.

20. Hiukkanen ja aalto ovat kaksi konkreettisiin mielikuviin perustuvaa havainnollista mallia, joilla esitetään havaittuja ilmiöitä. Tietyissä ilmiöissä elektronia kuvataan hiukkasmallilla ja toisissa aaltomallilla.

21. a) Hiukkasmalli sopii esimerkiksi kemiallisten ominaisuuksien kuvaamiseen ja atomin virittymisen ja viritystilan purkautumisen selittämiseen.

b) Aaltomalli soveltuu esimerkiksi elektronisuihkun kaksoisrakokokeen ja metalleista tapahtuvan elektronisironnan selittämiseen.

22. Hiukkasmallissa elektroni kuvataan hiukkasena, jolla on mm. massa, liikemäärä, energia ja varaus. Elektronit ovat paikallisia ja erillisiä. Elektronit liikkuvat omia ratojaan, joita voidaan seurata. Elektronit voivat myös törmätä. Duaalisen mallin mukaan elektronit voidaan havaita ainoastaan sillä hetkellä ja siinä paikassa, jossa

elektronisäteily osuu kohteeseensa, esimerkiksi fluoresoivaan levyyn tai hiukkasilmäimeen.

- 23.** Duaalisen mallin mukaan hiukkasäteilyn aalto-ominaisuudet tulevat näkyviin vasta, kun hiukkasilmäimeen tai fluoresoivalle levyille osuu riittävän monta säteilyn hiukkasta. Yksittäisen fotonin tai elektronin osumapaikkaa levyllä ei voi tarkasti ennustaa. Aaltomallin aaltoliikkeessä ei voida kuvata hiukkasäteilyn interferenssiä.