Vipu Kertaus

Tehtävien ratkaisut

1 Fysiikan ylioppilaskokeesta

Harjoittele

Tehtävä 1.1.

Oikeat vastaukset:

a) C

b) D

c) D

d) A

e) B

f) C

g) B

h) A

i) C

j) D

k) C

l) A

Tehtävä 1.2

a) 15 ml = 1,5 cl = 0,15 dl

b) 1,25 km^2 = 125 ha = 12 500 a = 1 250 000 m^2

c) 18 000 ml = 18 l = 18 dm^3 = 0,018 m^3

d) $31\,800\text{ s} = \dfrac{31\,800\text{ s}}{3\,600\,\dfrac{\text{s}}{\text{h}}} = 8{,}833\,33\text{ h} \approx 8{,}83\text{ h}$

e) $7{,}9\,\dfrac{\text{g}}{\text{ml}} = 7{,}9\,\dfrac{0{,}001\text{ kg}}{0{,}001\text{ l}} = 7{,}9\,\dfrac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 7{,}9\,\dfrac{\text{kg}}{0{,}001\text{ m}^3} = 7\,900\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

f) 13 120 µg = 0,013 120 g = 0,013 120 · 10^{-3} kg
= 13,120 · 10^{-6} kg

g) $185\text{ mi} = \dfrac{185\text{ mi}}{1{,}609\,344\,\dfrac{\text{mi}}{\text{km}}} = 114{,}953\,671\text{ km} \approx 115\text{ km}$

Tehtävä 1.3.

1 B, 2 G, 3 H, 4 F, 5 A, 6 C

Tehtävä 1.4.

1 G, 2 B, 3 F, 4 A, 5 C, 6 D

Tehtävä 1.5.

1 B, 2 G, 3 K, 4 E, 5 J, 6 D

Tehtävä 1.6.

akkuun tarvittavan koboltin massa m = 4,5 kg

meriveden kobolttipitoisuus

$$c = 0{,}39\,\frac{\mu\text{g}}{\text{l}} = 0{,}39\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{g}}{\text{dm}^3} = 0{,}39\cdot 10^{-9}\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 0{,}39\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Merkitään käsiteltävän meriveden tilavuutta V. Jotta kobolttia saadaan riittävästi, sitä on oltava $m = cV$. Käsiteltävän meriveden tilavuus on vähintään

$$V = \frac{m}{c} = \frac{4{,}5\,\text{kg}}{0{,}39\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 11\,538\,461{,}54\,\text{m}^3 \approx 12\cdot 10^6\,\text{m}^3.$$

Tehtävä 1.7.

koripallon halkaisija d = 24 cm = 0,24 m

Auringon halkaisija $D = 2R = 2 \cdot 6{,}957 \cdot 10^8$ m

Maan keskietäisyys Auringosta $L = 149{,}60 \cdot 10^9$ m

Merkitään etäisyyttä koripallosta x.

Koripallon halkaisijan suhde Auringon halkaisijaan on oltava sama kuin etäisyyksien suhteen.

$$\frac{d}{D} = \frac{x}{L}$$

$$x = \frac{d}{D}L = \frac{0{,}24\,\text{m}}{2 \cdot 6{,}957 \cdot 10^8\ \text{m}} \cdot 149{,}60 \cdot 10^9\ \text{m} = 25{,}804\,\text{m} \approx 26\,\text{m}$$

Etäisyyden koripallosta tulee olla 26 m.

Tehtävä 1.8.

a) Vakiolämpötilassa kaasun paine ja lämpötila ovat kääntäen verrannollisia. Kun toinen suureista kaksinkertaistuu, toinen puolittuu. Tämä voidaan osoittaa myös suureyhtälön avulla.

Merkitään uutta painetta p_x, ja uutta tilavuutta $V_x = 2V$. Lämpötila on koko ajan sama, T.

Saadaan yhtälö $\frac{p_x V_x}{T} = \frac{pV}{T}$, josta ratkaistaan uusi paine.

$$\frac{p_x 2\cancel{V}}{\cancel{T}} = \frac{p\cancel{V}}{\cancel{T}}$$

$$p_x = \frac{p}{2}$$

Kun kaasun lämpötila pysyy vakiona ja kaasun tilavuus kaksinkertaistuu, kaasun paine puolittuu.

b) Vastuksen teho on suoraan verrannollinen sähkövirran neliöön. Kun sähkövirta kaksinkertaistuu, teho nelinkertaistuu. Tämä voidaan osoittaa myös suureyhtälön avulla.

Merkitään muuttunutta sähkövirtaa $I_x = 2I$. Yhtälöstä saadaan vastuksen uudeksi tehoksi

$P_x = RI_x{}^2 = R(2I)^2 = 4RI^2 = 4P$.

Tehtävä 1.9.

a) Hydrostaattisen paineen yhtälön perusteella hydrostaattinen paine riippuu nesteen tiheydestä ρ, putoamiskiihtyvyydestä g ja syvyydestä h, jolla nesteessä ollaan. Hydrostaattinen paine ei riipu upotettavan kappaleen tilavuudesta V. Jos kappaleen alapinta on molemmissa tilanteissa samassa nesteessä samalla syvyydellä h, on hydrostaattinen paine samansuuruinen molemmissa tilanteissa.

b) Merkitään äänen uutta nopeutta $v_x = \frac{v}{2}$. Yhtälön $v = \text{vakio} \cdot \sqrt{T}$ perusteella äänen nopeus *v* on suoraan verrannollinen lämpötilan neliöjuureen, ja suhde $\frac{v}{\sqrt{T}} = \text{vakio}$. Jos äänen nopeus puolittuu, myös lämpötilan neliöjuuri puolittuu. Tämä voidaan osoittaa myös suureyhtälön avulla.

$$\frac{v_x}{\sqrt{T_x}} = \text{vakio}$$

$$\frac{v_x}{\sqrt{T_x}} = \frac{v}{\sqrt{T}}$$

$$\frac{\frac{\cancel{v}}{2}}{\sqrt{T_x}} = \frac{\cancel{v}}{\sqrt{T}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{T_x}} = \frac{1}{\sqrt{T}}$$

$$2\sqrt{T_x} = \sqrt{T}$$

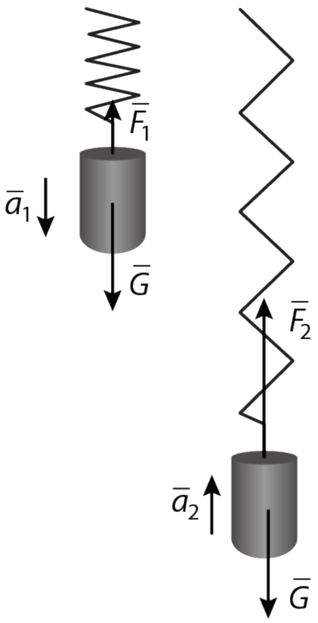
$$\sqrt{T_x} = \frac{\sqrt{T}}{2} \quad \| \, ()^2$$

$$T_x = \frac{T}{4}$$

Uusi lämpötila on neljäsosa alkuperäisestä lämpötilasta.

Tehtävä 1.10.

Jouseen ripustettuun punnukseen vaikuttavat voimat ovat punnuksen paino $\overline{G}$ ja jousen punnukseen kohdistama voima $\overline{F}$.



Värähtelyn ylimmässä kohdassa vaikuttavat voimat

$\overline{G}$ = punnuksen paino

$\overline{F}_1$ = jousen punnukseen kohdistama voima

Värähtelyn alimmassa kohdassa vaikuttavat voimat

$\overline{G}$ = punnuksen paino

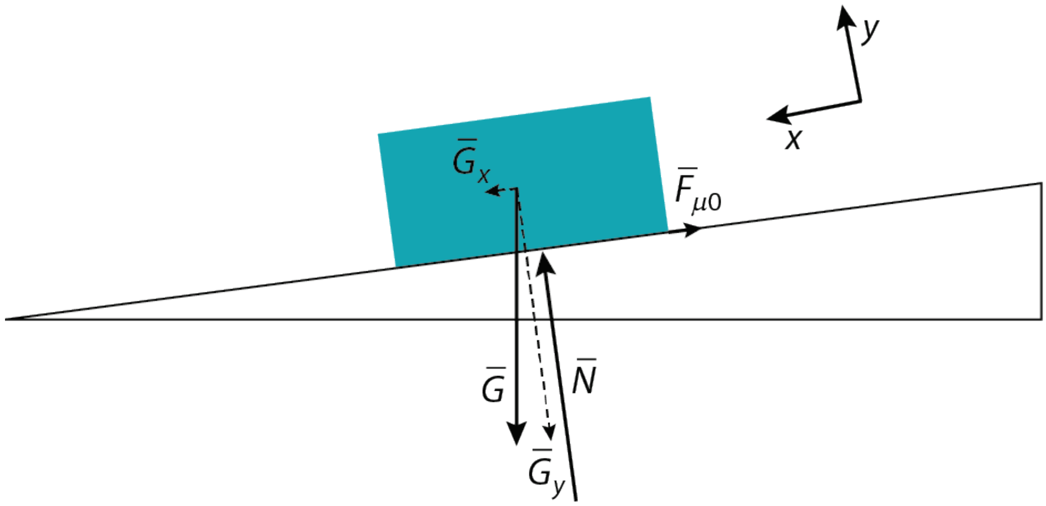
$\overline{F}_2$ = jousen punnukseen kohdistama voima

Huomaa, että voimakuvioissa voimavektorit tulee piirtää oikeisiin vaikutuspisteisiin ja vektorien pituuksien tulee olla oikein. Voimat pitää nimetä. Kiihtyvyys merkitään kappaleen vierelle ja selvästi erilleen voimista.

Värähdysliikkeessä oleva punnus värähtelee tasapainoaseman molemmin puolin. Värähtelijän suurin etäisyys tasapainoasemasta on amplitudin suuruinen. Värähtelyn ääriasemassa kokonaisvoima on yhtä suuri, mutta eri suuntainen. Silloin $G - F_1 = F_2 - G$. Tämän voi huomioida voimavektorien pituudessa.

Tehtävä 1.11.

Laaditaan puupalikan voimakuvio. Puukappale on paikallaan, joten Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Jaetaan painovoima *x*- ja *y*-suuntaisiin komponentteihin eli tason suuntaiseen ja tasoa vastaan kohtisuorassa olevaan komponenttiin. Piirretään voimavektorien pituudet niin, että *x*- ja *y*-suuntaisten voimien summa on nolla.



$\overline{G}$ = puupalikan paino

$\overline{N}$ = tason tukivoima

$\overline{F}_{\mu 0}$ = lepokitka

Huomaa, että voimakuvioissa voimavektorit tulee piirtää oikeisiin vaikutuspisteisiin ja vektorien pituuksien tulee olla oikein. Voima pitää nimetä.

Tehtävä 1.12.

a) merisuolan massa m = 94 g

merisuolan tilavuus V = 90 ml

Merisuolan tiheydeksi saadaan

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{94\,\text{g}}{90\,\text{ml}} = 1{,}044\,\frac{\text{g}}{\text{ml}} = 1{,}044 \cdot \frac{\cancel{10^{-3}}\,\text{kg}}{\cancel{10^{-3}}\,\text{l}} = 1{,}044\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

$$= 1{,}044 \cdot \frac{\text{kg}}{10^{-3}\,\text{m}^3} = 1\,044\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 1\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

b) Mittalasilla on rajallinen tarkkuus, kuten 5 ml tai 10 ml. Vaa'allakin on rajallinen tarkkuus, kuten 0,5 g tai 1,0 g. Mittauksen tarkkuutta voidaan parantaa mittaamalla isompi määrä merisuolaa, sillä massan ja tilavuuden mittauksen suhteellinen virhe pienenee, kun merisuolaa kaadetaan isompi määrä mittalasiin.

Mittauksen tarkkuus paranee myös tekemällä yhden mittauksen sijaan useamman mittauksen. Toistomittauksessa sama mittaus toistetaan useamman kerran, ja mittaustulos saadaan yksittäisten mittausten keskiarvosta.

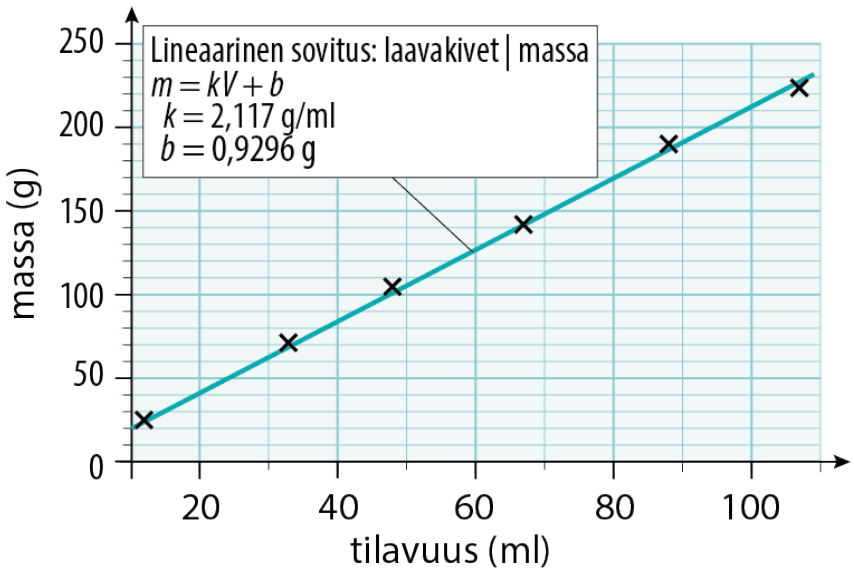
Paras arvio tiheydelle saadaan mittaamalla merisuolan massaa useilla eri tilavuuksilla. Massa m on suoraan verrannollinen merisuolan tilavuuteen V. Suureiden riippuvuutta kuvaa yhtälö $m = \rho V$, jossa ρ on merisuolan tiheys. Kun mittaustulokset esitetään (V, m)-koordinaatistossa, mittaustulosten tulisi asettua origon kautta kulkevalle suoralle. Suoran fysikaalinen kulmakerroin on merisuolan tiheys.

Tehtävä 1.13.

a) Mittaustulokset kannattaa esittää (V, m)-koordinaatistossa. Massa m on suoraan verrannollinen materiaalin tilavuuteen V. Suureiden riippuvuutta kuvaa yhtälö $m = \rho V$, jossa ρ on materiaalin tiheys. Aineistoon kannattaa siten sovittaa suora.

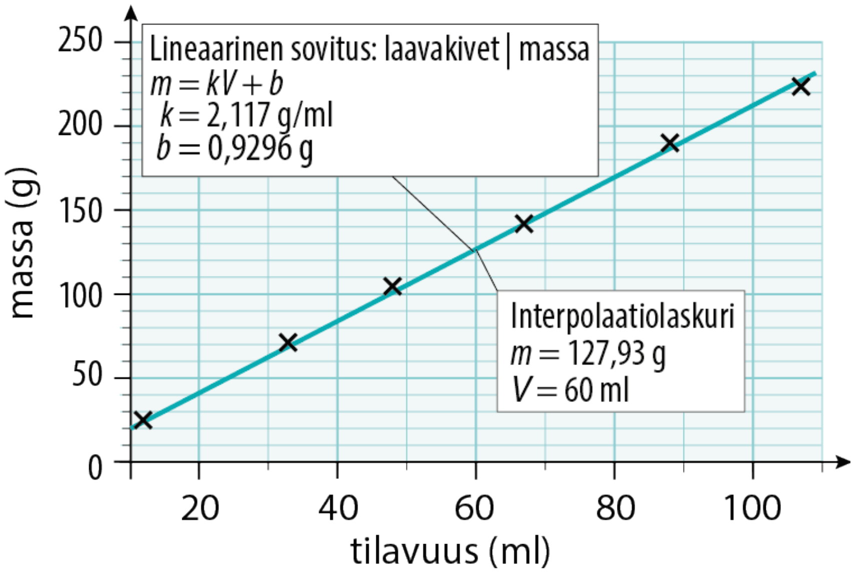
Suoran fysikaalinen kulmakerroin on laavakiven tiheys, ρ = 2,117 g/ml ≈ 2,1 g/ml.

Vakiotermin perusteella mittaukseen liittyy hyvin pieni systemaattinen virhe.



Huomaa, että kuvaajassa akseleilla olevat suureet ja niiden yksiköt tulee olla selvästi näkyvillä. Mittapisteet on merkitty näkyville. Pisteisiin on sovitettu niihin sopiva sovitefunktio, joka tässä on ensimmäisen asteen polynomifunktio eli suora.

b) Kun laavakiven tilavuus V_1 = 60 ml, saadaan interpoloimalla laavakiven massaksi
m_1 = 127,93 g ≈ 130 g.



Kun laavakiven tilavuus V_2 = 150 ml, voidaan kuvaajasta ekstrapoloida laavakiven massaksi
m_2 = 318,43 g ≈ 320 g.

Massat voidaan määrittää myös tilannetta kuvaavan matemaattisen mallin avulla

$m_1 = \rho V_1 = 2{,}117\,\dfrac{\text{g}}{\text{ml}} \cdot 60\,\text{ml} = 127{,}02\,\text{g} \approx 130\,\text{g}$ ja

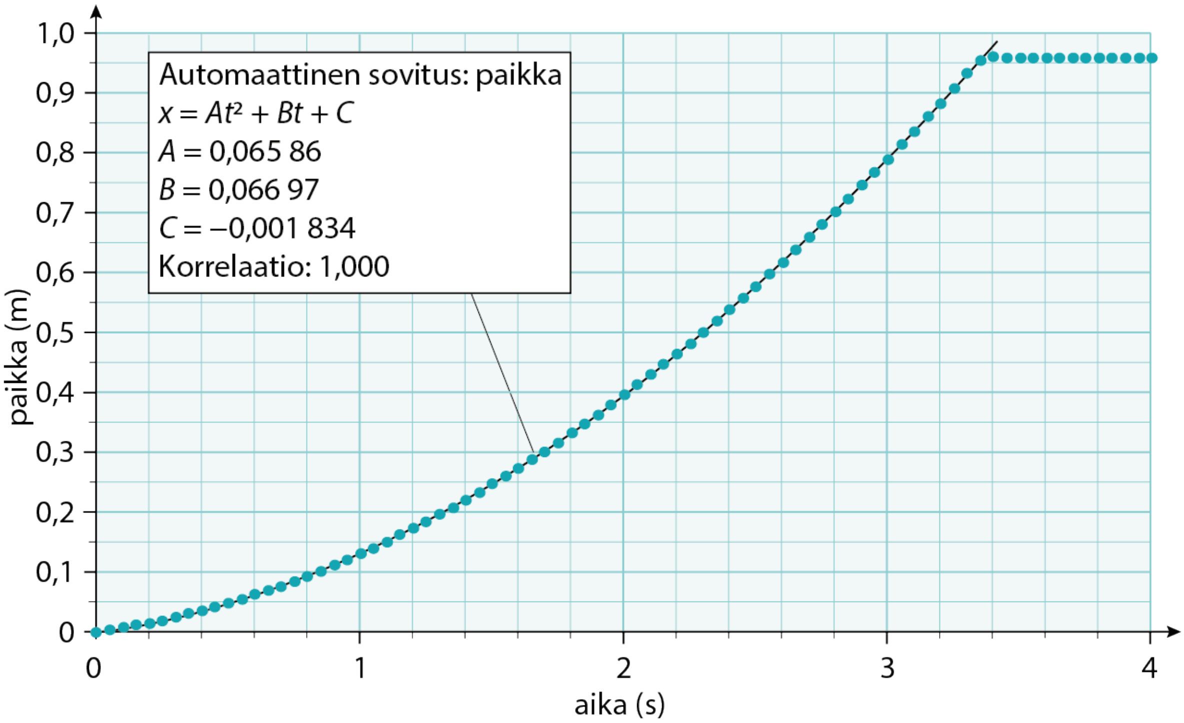
$m_2 = \rho V_2 = 2{,}117\,\dfrac{\text{g}}{\text{ml}} \cdot 150\,\text{ml} = 317{,}55\,\text{g} \approx 320\,\text{g}.$

Ekstrapoloinnissa oletetaan, että laavakiven koon kasvaessa sen rakenne ja koostumus on edelleen samanlaista. Todellisuudessa laavakivessä on ilmataskuja, joten oletusta kiven homogeenisuudesta ei voida tehdä.

c) Mittauksen virheet aiheutuvat kiven tilavuuden määrittämisessä ja kiven massan määrittämisessä. Kiven tilavuus määritettiin upottamalla kivi nesteeseen ja lukemalla nesteen tilavuuden muutos. Nesteenä käytettiin mittalasissa olevaa vettä. Kapilaari-ilmiön vuoksi veden pinta kaareutuu mittalasin reunoille, joten tilavuuden mittaukseen tulee virhettä, jos nestepinnan korkeutta ei lueta nestepatsaan alimmasta kohdasta joka kerta samalla tavalla. Mittausvirhettä tulee myös massa määrittämisessä. Mitä suurempia tilavuuksia ja massoja mitataan, sitä pienemmiksi mittauksen mittausvirheet tulevat. Mittauksen mittausvirheet eivät ole kovin merkittäviä. Tämä ilmenee korrelaatiokertoimesta, mikä on hyvin lähellä arvoa 1. Lisäksi mittauksessa on mitattu vaa’an ja mittalasin tarkkuuteen nähden suuria massoja, joten massan ja tilavuuden virheet ovat hyvin pieniä.

Tehtävä 1.14.

a) Laaditaan kuvaaja, jossa mittaustulokset on esitetty (t, x)-koordinaatistossa. Tasaisesti kiihtyvää liikettä voidaan mallintaa toisen asteen polynomifunktion avulla, sillä tasaisesti kiihtyvän liikkeen paikka ajan funktiona on $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.



Huomaa, että kuvaajassa akseleilla olevat suureet ja niiden yksiköt tulee olla selvästi näkyvillä. Mittapisteet on merkitty näkyville. Pisteisiin on sovitettu niihin sopiva sovitefunktio, joka tässä on toisen asteen polynomifunktio eli paraabeli.

b) Ajanhetken t = 3,3 s jälkeen vaunu jää mittausaineiston perusteella paikalleen etäisyydelle, joka 0,96 m päässä vaunun lähtöpaikasta. Vaunuradan pituutta ei tiedetä. Siten malli sopii ainoastaan vaunun paikan ja liikkeen määrittämiseen aikavälillä [0 s, 3,3 s].

c) Vaunun liikettä voidaan mallintaa toisen asteen polynomifunktiolla $x = At^2 + Bt + C$, jossa $A = 0{,}065\,86\ \mathrm{m/s^2}$, $B = 0{,}066\,97$ m/s ja $C = -0{,}001\,834$ m. Parametrien yksiköt voidaan päätellä siitä, että lopputuloksen eli suureen x yksikkö on metri, m.

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä paikka ajan funktiona on $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Toisen asteen termin edessä oleva kerroin on $\frac{1}{2}a = A$. Tämän parametrin avulla voidaan ratkaista vaunun kiihtyvyys, $a = 2A = 2 \cdot 0{,}065\,86\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0{,}131\,72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 0{,}13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Ensimmäisen asteen termin edessä oleva kerroin on vaunun nopeus mittauksen alkaessa, $v_0 = B = 0{,}066\,97\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}067\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

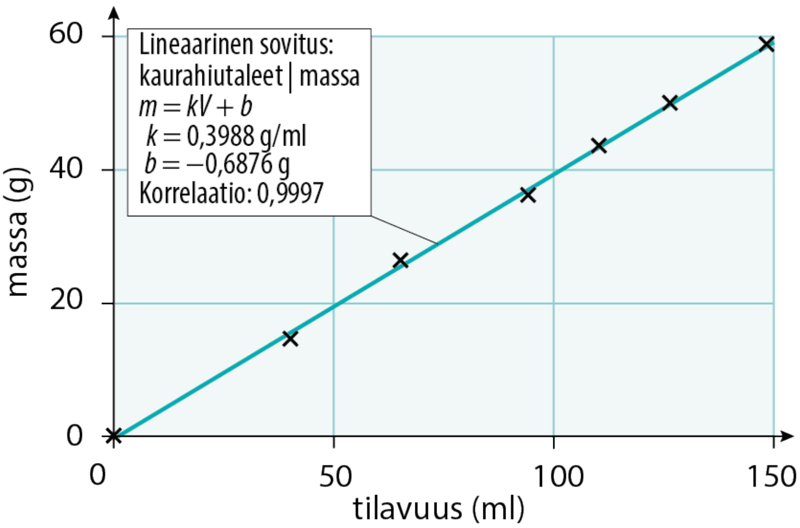
Vakiotermi on vaunun paikka mittauksen alkaessa, $x_0 = C = -0{,}001\,834\ \mathrm{m} \approx -0{,}001\,8\ \mathrm{m}$.

Tehtävä 1.15.

a) Poimitaan videolta kaurahiutaleiden tilavuuden *V* ja massan *m* arvoja. Suureiden riippuvuutta kuvaa yhtälö $m = \rho V$, jossa ρ on materiaalin tiheys. Suureet ovat suoraan verrannollisia, joten mittaustulosten tulisi asettua (V, m)-koordinaatistossa origon kautta kulkevalle suoralle.

Esitetään mittaustulokset (V, m)-koordinaatistossa.

Kaurahiutaleet	
tilavuus (ml)	massa (g)
0	0
40	14,5
65	25,3
94	36,1
110	43,4
126	49,8
148	58,6



Huomaa, että kuvaajassa akseleilla olevat suureet ja niiden yksiköt tulee olla selvästi näkyvillä. Mittapisteet on merkitty näkyville. Pisteisiin on sovitettu niihin sopiva sovitefunktio, joka tässä on ensimmäisen asteen polynomifunktio eli suora.

b) Massan *m* ja tilavuuden *V* välillä on riippuvuus $m = \rho V$, jossa ρ on materiaalin tiheys. Kuvaajasuoran fysikaalinen kulmakerroin on kaurahiutaleiden tiheys, $\rho = 0{,}3988 \text{ g/ml} \approx 0{,}40 \text{ g/ml}$.

c) Mittaukseen aiheutuu virhettä eniten tilavuuden määrittämisestä. Kaurahiutaleiden pinta mittalasissa on epätasainen, joten tilavuutta ei voida määrittää tarkasti. Mittalasin asteikon tarkkuus on 2 ml. Mitatut arvot ovat kuitenkin 40–150 ml luokkaa, joten mittausvirhe pienenee sitä enemmän, mitä suurempia tilavuuksia on mitattu. Tämä näkyy kuvaajassa siten, että suurilla tilavuuksilla mittauspisteet osuvat paremmin sovitesuoralle kuin pienten tilavuuksien mittauksissa.

Vaa'an tarkkuus on 0,1 g. Massan mittauksen virheet ovat mittauksessa hyvin olemattomat. Massan mittaamisen satunnaista virhettä voi aiheuttaa pöydän tärinä tai mittalasin sijoittaminen vaa'an reunalle.

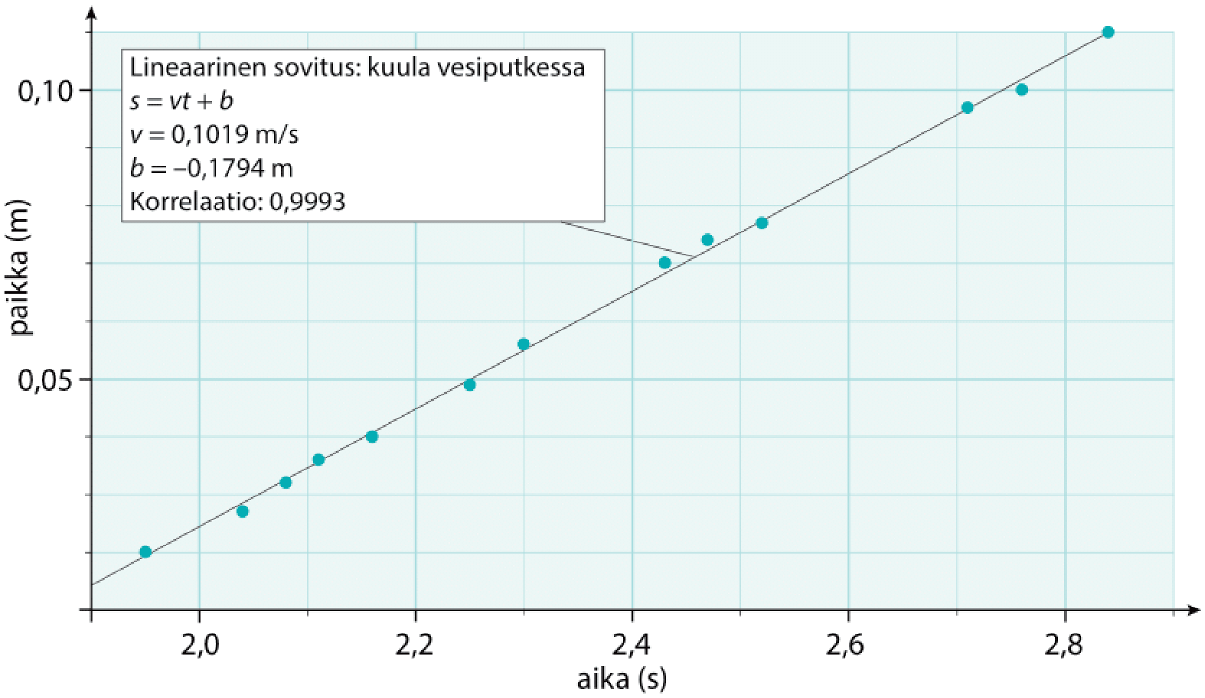
Vakiotermin $b = -0{,}6876$ g perusteella mittaukseen liittyy pieni systemaattinen virhe. Mittauksen systemaattinen virhe ei vaikuta sovitetun suoran kulmakertoimeen, joten systemaattinen virhe ei vaikuta määritettyyn tiheyteen.

Systemaattisen virheen massan mittaukseen voi aiheuttaa vaa'an huolimaton taaraaminen eli nollaaminen alussa.

Tehtävä 1.16.

a) Poimitaan videolta ajan ja paikan arvoja, ja laaditaan niiden perusteella kuvaaja (t, x)-koordinaatistoon. Havaitaan, että pisteet asettuvat suoralle, joten lisätään sovitefunktioksi suora.

Aika (s)	**Paikka (m)**
1,95	0,02
2,04	0,027
2,08	0,032
2,11	0,036
2,16	0,04
2,25	0,049
2,3	0,056
2,43	0,07
2,47	0,074
2,52	0,077
2,71	0,097
2,76	0,1
2,84	0,11



b) Kappaleen nopeus saadaan (t, x)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Koska kuulan liikkeen kuvaaja (t, x)-koordinaatistossa on suora, kuulan nopeus on koko ajan sama eli kuula on tasaisessa liikkeessä.

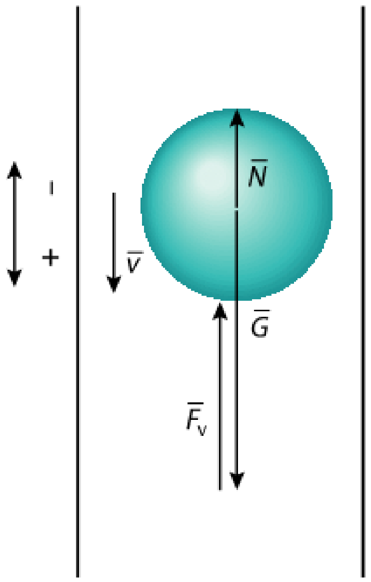
c) Kuulan nopeus on (t, x)-koordinaatistossa olevan kuvaajasuoran fysikaalinen kulmakerroin,
$v = 0{,}1019\ \mathrm{m/s} \approx 0{,}10\ \mathrm{m/s}$.

Vakiotermi ilmaisee kuulan paikan ajanhetkellä $t = 0$ s, mikäli kuula olisi liikkunut samalla tavalla vedessä jo mittauksen alussa ajanoton käynnistyessä. Koska alussa kuula pudotetaan ilmasta veteen, ei vakiotermin arvo tarkoita mitään mielekästä mittaukseen liittyvää suuretta.

d) Kuula etenee vedessä vakionopeudella, joka on kuulan ns. rajanopeus.

Koska kuula on tasaisessa liikkeessä, Newtonin II lain mukaan kuulan liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Laaditaan kuulan voimakuvio.



$\overline{G}$ = kuulan paino

$\overline{N}$ = veden aiheuttama noste

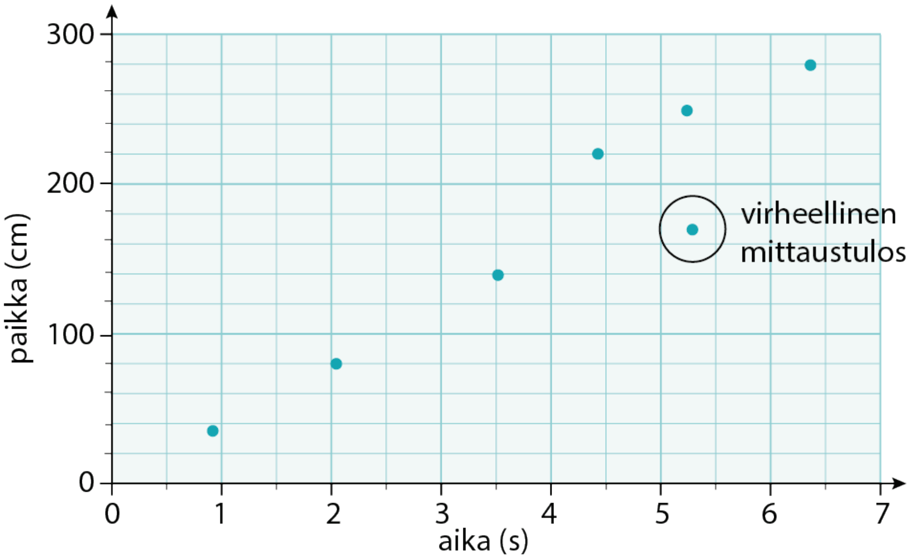
$\overline{F}_v$ = veden aiheuttama väliaineen vastus

Huomaa voimakuviota laatiessa, että $G - F_v - N = 0$ eli $G = F_v + N$.

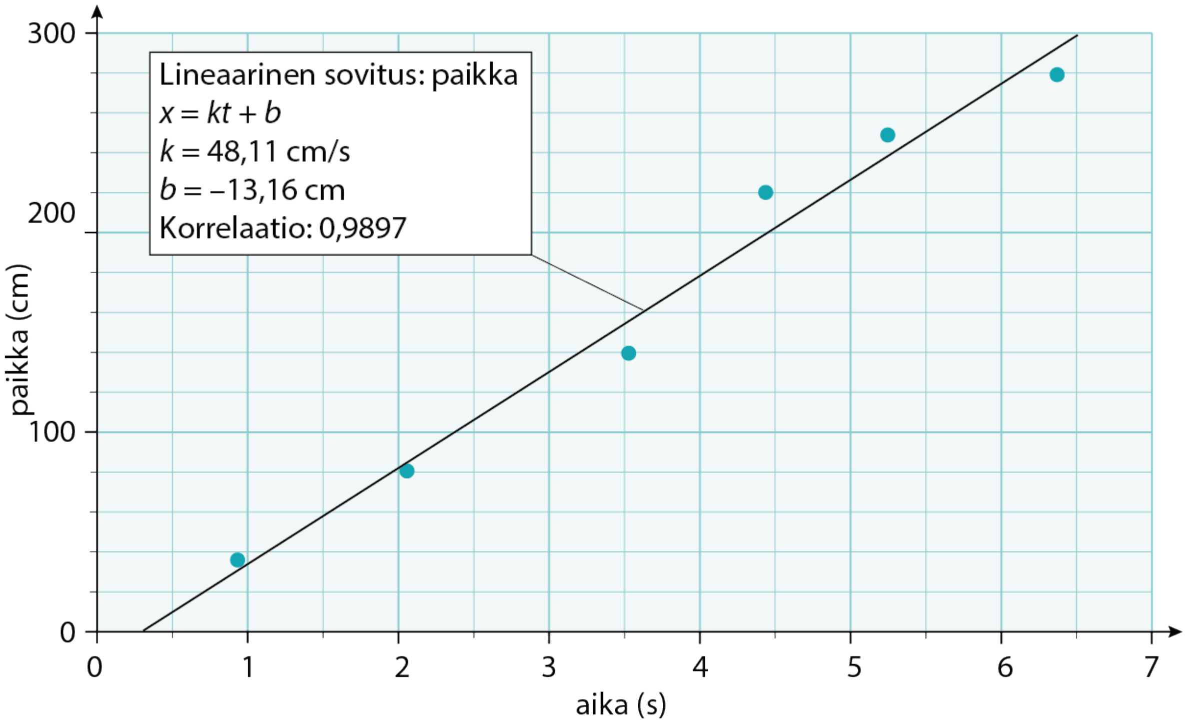
Tehtävä 1.17.

a) Laaditaan mittausaineiston pohjalta kuvaaja, jossa aika on vaaka-akselilla ja paikka pystyakselilla. Huomataan, että mittausaineistossa on yksi selvästi virheellinen mittaustulos. Virheellisen mittaustuloksen mukaan opiskelija ohittaa 170 cm:n mittauskohdan myöhemmin kuin 220 cm:n tai 250 cm:n kohdan. Poistetaan virheellinen mittaustulos.

Paikka (cm)	**Aika (s)**
35	0,93
80	2,05
140	3,52
~~170~~	~~5,28~~
220	4,43
250	5,24
280	6,36



Koska pisteet näyttävät asettuvan suoralle, sovitetaan aineistoon suora.



Huomaa, että kuvaajassa akseleilla olevat suureet ja niiden yksiköt tulee olla selvästi näkyvillä. Mittapisteet on merkitty näkyville. Pisteisiin on sovitettu niihin sopiva sovitefunktio, joka tässä on ensimmäisen asteen polynomifunktio eli suora.

b) Koska opiskelijan liikkeen kuvaaja (t, x)-koordinaatistossa on suora, liike on tasaista. Opiskelija etenee vakionopeudella. Nopeus on (t, x)-koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin, v = 48,11 cm/s ≈ 0,48 m/s.

c) Paikan arvot oli virheellisesti katsottu rullamitan tuuma-asteikolta senttimetriasteikon sijaan. Koska 1,0 in = 2,54 cm, todelliset paikan arvot ovat 2,54-kertaisia kuvaajaan merkittyihin paikan arvoihin nähden. Todellinen kävelynopeus oli mittauksessa siten v = 48,11 in/s = 48,11 · 2,54 cm/s = 112,20 cm/s ≈ 1,1 m/s. Väärän mitta-asteikon lukeminen aiheutti mittauksessa merkittävän systemaattisen virheen.

Tasaisen liikkeen paikan yhtälössä esiintyy myös vakiotermi. Sen mukaan ajanhetkellä t = 0 s opiskelijan paikka x < 0 m. Selitys tähän voi olla se, että opiskelija on lähtenyt liikkeelle vasta ajanoton käynnistämisen jälkeen. Tämä reagoinnin viive aiheutti mittaukseen systemaattisen virheen.

Mittapisteet eivät sijaitse täydellisesti sovitetulla suoralla. Ajan mittaamiseen liittyy epätarkkuutta, sillä jokainen mittaaja käynnisti ja pysäytti ajanoton käsin. Tämä aiheutti mittaukseen satunnaisen virheen.

Yksi mittapisteistä hylättiin, koska se poikkesi selvästi muista mittauksista. Kyseessä oli karkea virhe.

Tehtävä 1.18.

a) Jaksonajan saa määritettyä tarkemmin, kun mittaa useamman värähtelyn jaksonajan ja jakaa lopuksi värähtelyjen lukumäärällä. Mitataan esimerkiksi kymmeneen värähdykseen kulunut aika ja jaetaan lopuksi saatu aika kymmenellä.

b) Kulman määrityksessä kannattaa valita pidempi matka, jolta tason nousua määrittää. Lyhyessä mitassa yhden millimetrin virhe mitassa aiheuttaa merkittävän virheen kulman arvoon.

2 Lämpö ja energia

Harjoittele

Tehtävä 2.1.

Oikeat vastaukset:

a) A

b) C

c) C

d) B

e) B

f) A

g) D

h) B

i) C

j) C

k) A

l) A

m) B

Tehtävä 2.2.

a) Raudan ja messingin pituuden lämpötilakertoimet ovat

$$\alpha_{\text{Fe}} = 11{,}7 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}$$

$$\alpha_{\text{M}} = 21 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}$$

Kertoimista huomataan, että kun osia lämmitetään, messinki laajenee enemmän kuin rauta. Toisaalta, kun osia jäähdytetään, messinki kutistuu enemmän kuin rauta. Siksi osat todennäköisesti irtoavat toisistaan, kun osia jäähdytetään nestetypessä. Ideoista parempi on siten vaihtoehto 2.

b) messinkitangon halkaisija l_0 = 25,42 mm

messingin pituuden lämpötilakerroin $\alpha_{\text{M}} = 21 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}$

messingin lämpötilan muutos

ΔT = 195,8 °C − 21,1 °C = −216,9 °C = −216,9 K

Messinkitangon halkaisija nestetypessä on

$$l = l_0 + \alpha l_0 \Delta T = 25{,}42\,\text{mm} + 21 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}} \cdot 25{,}42\,\text{mm} \cdot (-216{,}9\ \text{K})$$

$$= 25{,}3042\ \text{mm} \approx 25{,}30\ \text{mm}.$$

Tehtävä 2.3.

a) Vakiopaineessa olomuodon muutoksen aikana lämpötila ei muutu. Keittolevyltä kattilaan johtuva energia kasvattaa veden sisäenergiaa. Sisäenergian kasvu ilmenee rakenneosasten potentiaalienergioiden muutoksina, eli vesimolekyylit irtoavat veden pinnasta ja muuttuvat kaasumaiseen olomuotoon. Rakenneosasten keskimääräiset liike-energiat eivät muutu tilanteessa, eli lämpötila ei siten tilanteessa kasva.

b) veden tilavuus V = 3,0 l

veden ominaislämpökapasiteetti $c = 4{,}19\,\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

veden ominaissulamislämpö $s = 333\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

Koska veden tiheys on ρ = 1,0 kg/l, on veden massa $m = \rho V = 1{,}0\,\frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 3{,}0\,\text{l} = 3{,}0\,\text{kg}.$

1) Vedestä siirtyy pois energiaa, kun veden lämpötila laskee 23 °C:sta 0 °C:een.

Lämpötilan muutos on ΔT = 23 °C = 23 K.

Siirtynyt energia on $Q_1 = cm\Delta T$.

2) Vedestä siirtyy pois energiaa, kun veden olomuoto muuttuu. Kun puolet vedestä jähmettyy, siirtynyt energia on puolet koko vesimäärän jähmettymisessä vapautuvasta energiasta $Q_2 = s \cdot \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}sm.$

Energiaa siirtyy pois ämpäristä olevasta vedestä, kun vesi jäähtyy ja kun veden olomuoto muuttuu. Siirtynyt energia yhteensä on

$$Q = Q_1 + Q_2 = cm\Delta T + \frac{1}{2}sm$$

$$= 4{,}19\,\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 3{,}0\,\text{kg} \cdot 23\,\text{K} + \frac{1}{2} \cdot 333\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \cdot 3{,}0\,\text{kg} = 788{,}61\,\text{kJ} \approx 790\,\text{kJ}.$$

Tehtävä 2.4.

a) Kuula lämpenee, koska osa pajavasaran mekaanisesta energiasta muuntuu iskussa lyijykuulan sisäenergiaksi. Osa sisäenergian muutoksesta liittyy lyijykuulan muodonmuutokseen, mutta osa liittyy lyijykuulan rakenneosasten liike-energioihin. Kun rakenneosasten liike-energia kasvaa, lämpöliike lisääntyy ja lyijykuulan lämpötila nousee.

b) vasaran massa m_v = 1,2 kg

vasaran nopeus v = 5,3 m/s

lyijykuulan massa m_k = 9,30 g = 0,009 30 kg

lyijyn ominaislämpökapasiteetti $c = 0{,}128\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} = 128\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$

Jos oletetaan, että iskun vaikutus ilmenee vain lyijykuulan lämpötilan nousuna, saadaan yhtälö $\Delta E_\mathrm{k} = Q$.

Ratkaistaan tästä lämpötilan muutos.

$$\frac{1}{2} m_\mathrm{v} v^2 = c m_\mathrm{k} \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\frac{1}{2} m_\mathrm{v} v^2}{c m_\mathrm{k}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1{,}2\ \mathrm{kg} \cdot \left(5{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{128\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot 0{,}009\,30\ \mathrm{kg}} = 14{,}1583\ \mathrm{K} \approx 14\ \mathrm{K}$$

Kuulan lämpötila nousee siis 14 K tai 14 °C.

Tehtävä 2.5.

a) Kylläisen vesihöyryn paine ja tiheys -taulukosta voidaan lukea, että lämpötilassa T = 19 °C kylläisen vesihöyryn tiheys ρ_{max} = 16,30 g/m^3.

Koska ρ_{max} = 16,30 g/m^3 ja ilmassa olevan vesihöyryn määrä on ρ_{ilma} = 12,0 g/m^3, suhteelliseksi kosteudeksi saadaan

$$RH = \frac{12{,}0\,\frac{\text{g}}{\text{m}^3}}{16{,}30\,\frac{\text{g}}{\text{m}^3}} \cdot 100\,\% = 73{,}6196\,\% \approx 74\,\%.$$

b) Kylläisen vesihöyryn tiheys on 12,07 g/m^3, kun lämpötila on 14 °C. Kun lämpötila laskee hieman tämän alapuolelle, 12,0 g/m^3 vesihöyryä ilmassa on maksimimäärä vesihöyryä tälle lämpötilalle. Kun lämpötila laskee, alkaa vettä tiivistyä ilmasta pinnoille kasteeksi. Kastepiste on siten liki pitäen 14 °C.

Tehtävä 2.6.

a) Kun veden lämpötila on 140 °C ja paine 90 000 Pa, vesi on kaasun olomuodossa.

b) Kolmoispiste tarkoittaa tiettyä lämpötilan ja paineen arvoa, jossa aine voi esiintyä tasapainossa kaikissa kolmessa aineen olomuodossa eli kiinteänä nesteenä ja kaasuna.

   Kriittinen piste on tietty lämpötilan ja paineen arvo, johon höyrystymiskäyrä päättyy. Kun lämpötila on korkeampi kuin kriittisen pisteen lämpötila, ainetta ei voida puristaa nesteeksi. Aine esiintyy silloin vain kaasumaisessa olomuodossa. Kaasun ja höyryn erona voidaan pitää sitä, että höyryn voi puristaa nesteeksi.

c) Lämpötila on 400 °C on korkeampi kuin veden kriittisen pisteen lämpötila. Silloin vesi esiintyy vain kaasumaisessa olomuodossa.

Tehtävä 2.7.

a) Mitä kauemman paistinpannu on liedellä, sitä korkeammaksi pannun lämpötila nousee.

b) Koska paistinpannun lämpötila kasvaa, voidaan päätellä, että pannun sisäenergia lisääntyy.

c) Lämmön johtuminen näkyy lämpökamerakuvassa paistinpannun pohjan ja paistinpannun reunojen lämpenemisenä. Lämpökamera kuvaa paistinpannun lähettämää lämpösäteilyä.

Tehtävä 2.8.

a) Lämmittimen teho $P = 750$ W.

Lämmittämiseen käytetty aika $t = 15 \cdot 60 \text{ s} = 900 \text{ s}$.

Lämmitin luovuttaa energiaa

$E = Pt = 750 \text{ W} \cdot 900 \text{ s} = 675\,000 \text{ J} \approx 680 \text{ kJ}$.

b) Lämmitin kasvattaa huoneilman sisäenergiaa. Sisäenergian kasvu havaitaan huoneilman lämpötilan nousuna.

c) Hiustenkuivaajassa on vastuslanka, jonka lämpötila on huoneen ilman lämpötilaa suurempi. Vastuslangasta siirtyy energiaa ympäristöön eli langan ympärillä olevaan ilmaan johtumalla ja säteilemällä. Lämmin ilma virtaa hiustenkuivaajan läpi, jolloin energiaa siirtyy vastuslangasta huoneilmaan kuljettumalla.

Tehtävä 2.9.

Rautanaulan massa m = 9,2 g = 0,0092 kg

Lämmitysaika t = 56 s

Lämpötilan muutos ΔT = 430 °C

Raudan ominaislämpökapasiteetti c = 450 J/(kgK)

Kaasupoltin lämmittää rautanaulaa teholla P, jolloin kaasupolttimen rautanaulalle luovuttama energia on yhtä suuri kuin rautanaulan vastaanottama energia

$Q_{\mathrm{poltin}} = Q_{\mathrm{naula}}$

$Pt = cm\Delta T$

Kaasupolttimen lämmitysteho

$$P = \frac{cm\Delta T}{t} = \frac{450\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}} \cdot 0{,}0092\,\mathrm{kg} \cdot 430\,\mathrm{K}}{56\,\mathrm{s}} = 31{,}789\,\mathrm{W} \approx 32\ \mathrm{W}.$$

Tehtävä 2.10.

a) lämpimän veden massa $m_1 = 0{,}348$ kg

lämpimän veden lämpötila alussa $T_1 = 97{,}5$ °C

lämpimän veden lämpötila lopussa $T = 42{,}0$ °C

kylmän veden lämpötila alussa $T_2 = 10{,}7$ °C

Termosastia on eristetty systeemi, jonka ei oleteta vastaanottavan eikä luovuttavan energiaa. Kun vedet yhdistettiin, lämmin vesi luovutti jäähtyessään yhtä paljon energiaa kuin kylmä vesi vastaanotti lämmetessään.

$$
\begin{aligned}
Q_{\text{lämmin vesi}} &= Q_{\text{kylmä vesi}} \\
\cancel{c}m_1\Delta T_1 &= \cancel{c}m_2\Delta T_2 \\
m_1\left(T_1 - T\right) &= m_2\left(T_2 - T\right).
\end{aligned}
$$

Kylmän veden massa on

$$m_2 = \frac{m_1\left(T_1 - T\right)}{\left(T_2 - T\right)} = \frac{0{,}348\,\text{kg} \cdot \left(97{,}5\,°\text{C} - 42{,}0\,°\text{C}\right)}{\left(42{,}0\,°\text{C} - 10{,}7\,°\text{C}\right)} = 0{,}617\,0607\,\text{kg} \approx 617\,\text{g}.$$

b) jääharkon lämpötila alussa $T_1 = -17\ °C$

jääharkon lämpötila lopussa = nestemäisen veden lämpötila alussa $T_2 = 0\ °C$

jäästä syntyneen nestemäisen veden lämpötila lopussa $T_1 = 15\ °C$

veden massa $m = 0{,}680$ kg

jään ominaislämpökapasiteetti $c_1 = 2{,}09$ kJ/(kgK)

nestemäisen veden ominaislämpökapasiteetti $c_2 = 4{,}19$ kJ/(kgK)

jään ominaissulamislämpö $s = 333$ kJ/kg

jään lämpötilan muutos
$\Delta T_1 = 0\ °C - (-17\ °C) = 17\ °C = 17$ K

jäästä sulaneen nestemäisen veden lämpötilan muutos
$\Delta T_2 = 15\ °C - 0\ °C = 15\ °C = 15$ K

Vesi vastaanotti energiaa, kun jää lämpeni sulamispisteeseen, jää suli ja jäästä sulanut vesi lämpeni. Tällöin energiaa tarvittiin

$$\begin{aligned}Q &= c_1 m\Delta T_1 + sm + c_2 m\Delta T_2\\ &= 2{,}09\,\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\cdot 0{,}680\,\text{kg}\cdot 17\,\text{K} + 333\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\cdot 0{,}680\,\text{kg} + 4{,}19\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\cdot 0{,}680\,\text{kg}\cdot 15\,\text{K}\\ &= 293{,}3384\,\text{kJ} \approx 290\,\text{kJ}.\end{aligned}$$

c) veden massa m = 0,42 kg

veden lämpötila alussa T_1 = 14 °C

energiaa siirtyi kattilasta veteen teholla P = 380 W

nestemäisen veden ominaislämpökapasiteetti
c_2 = 4,19 kJ/(kgK)

veden ominaishöyrystymislämpö r = 2 260 kJ/kg

Kun vettä lämmitettiin, nestemäinen veden lämpötila nousi kiehumispisteeseen. Nestemäisen veden lämpötilan muutos on ΔT = 100 °C − 14 °C = 86 °C = 86 K. Kattilan vedelle luovuttama energia oli yhtä suuri kuin nestemäisen veden lämpenemiseen ja veden höyrystämiseen tarvittava energia. Tällöin

$Pt = cm\Delta T + rm$.

Tästä saadaan ratkaistua aika

$$t = \frac{cm\Delta T + rm}{P} = \frac{4\,190\,\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 0{,}42\,\text{kg} \cdot 86\,\text{K} + 2\,260\,000\,\frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 0{,}42\,\text{kg}}{380\,\text{W}}$$

$$= 2\,896{,}165\,\text{s} \approx 48\,\text{min.}$$

Sovella

Tehtävä 2.11.

a) osan alkulämpötila $T_1 = 16{,}2$ K

osan halkaisija alussa $l_0 = 84{,}60$ mm

osan uusi lämpötila
$T_2 = 17{,}5\ °\text{C} = (273{,}15 + 17{,}5)\ \text{K} = 290{,}65\ \text{K}$

halkaisijan muutos $\Delta l = l - l_0 = 0{,}39$ mm

Kun osan lämpötila kasvoi, osa lämpölaajeni. Osan halkaisija 20,1 °C:n lämpötilassa

$l = l_0 + l_0\alpha\Delta T.$

Halkaisijan muutos on

$l - l_0 = l_0\alpha\Delta T.$

Ratkaistaan materiaalin pituuden lämpötilakerroin

$$\alpha = \frac{l - l_0}{l_0\Delta T} = \frac{0{,}39\cdot 10^{-3}\ \text{m}}{84{,}60\cdot 10^{-3}\ \text{m}\cdot(290{,}65\ \text{K} - 16{,}2\ \text{K})}$$
$$= 1{,}679\,697\cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}} \approx 16{,}8\cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}.$$

Verrataan tulosta Kiinteiden alkuaineiden ominaisuuksia -taulukossa oleviin pituuden lämpötilakertoimen arvoihin ja havaitaan, että arvo vastaa kuparin pituuden lämpötilakerrointa. Kyseinen osa oli todennäköisesti valmistettu kuparista.

b) sylinterin lämpötila alussa $T_1 = -18$ °C

sylinterin lämpötila lopussa $T_2 = 100$ °C

sylinterin tilavuus kiehuvassa vedessä $V = 1\,620\ \text{cm}^3$

alumiinin pituuden lämpötilakerroin $\alpha = 23{,}2 \cdot 10^{-6}$ 1/K

alumiinisylinterin lämpötilan muutos
$\Delta T = T_2 - T_1 = 100\ °\text{C} - (-18\ °\text{C}) = 118\ °\text{C} = 118\ \text{K}$.

Alumiinin tilavuuden lämpötilakerroin $\gamma = 3\alpha$. Alumiini laajenee, kun alumiinin lämpötila kasvaa.

Sylinterin tilavuus kiehuvassa vedessä
$V = V_0 + V_0\gamma\Delta T = V_0 + V_0 3\alpha\Delta T$.

Ratkaistaan sylinterin tilavuus pakastimessa.

$$V = V_0\left(1 + 3\alpha\Delta T\right)$$

$$V_0 = \frac{V}{1 + 3\alpha\Delta T} = \frac{1620\ \text{cm}^3}{1 + 3 \cdot 23{,}2 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}} \cdot 118\ \text{K}} = 1\,606{,}80\ \text{cm}^3 \approx 1\,610\ \text{cm}^3.$$

Tehtävä 2.12.

Osien halkaisijat ovat l_{Fe} = 60,00 mm ja l_{Al} = 59,80 mm.

Raudan ja alumiinin pituuden lämpötilakertoimet ovat
$\alpha_{Fe} = 11{,}7 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{K}$ ja $\alpha_{Al} = 23{,}2 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{K}$.

Kertoimista huomataan, että kun osia lämmitetään, alumiini laajenee enemmän kuin rauta. Tästä voidaan päätellä, että alumiinimäntä juuttuu lopulta kiinni rautasylinteriin. Tällöin rautasylinterin sisähalkaisija on yhtä suuri kuin alumiinimännän ulkohalkaisija, eli

$$\begin{aligned}
l_{Al,lopussa} &= l_{Fe,lopussa} \\
l_{Al} + \alpha_{Al} l_{Al} \Delta T &= l_{Fe} + \alpha_{Fe} l_{Fe} \Delta T \\
\alpha_{Al} l_{Al} \Delta T - \alpha_{Fe} l_{Fe} \Delta T &= l_{Fe} - l_{Al} \\
(\alpha_{Al} l_{Al} - \alpha_{Fe} l_{Fe}) \Delta T &= l_{Fe} - l_{Al} \\
\Delta T &= \frac{l_{Fe} - l_{Al}}{\alpha_{Al} l_{Al} - \alpha_{Fe} l_{Fe}} \\
&= \frac{(60{,}00 - 59{,}80)\,\text{mm}}{23{,}2 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{K} \cdot 59{,}80\ \text{mm} - 11{,}7 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{K} \cdot 60{,}00\ \text{mm}} \\
&= 291{,}817\ \text{K} \approx 292\ \text{K}
\end{aligned}$$

Sylintereitä pitää siis lämmittää 292 °C, jolloin loppulämpötila on T = 20 °C + 292 °C = 312 °C.

Tehtävä 2.13.

a) Kuva liittyy energian siirtymiseen johtumalla. Sormista siirtyy energiaa kappaleisiin johtumalla. Lämpökamerakuva paljastaa, että vasemmanpuoleinen kappale on lämpimämpi kuin oikeanpuoleinen. Tästä voidaan päätellä, että vasemmanpuoleinen kappale on parempi lämmönjohde kuin oikeanpuoleinen kappale.

b) Kuva liittyy energian siirtymiseen kuljettumalla. Punaiseksi värjätty vesi kohoaa mittalasista vadin pintaan, sillä lämpimän veden tiheys on pienempi kuin kylmemmän veden. Punaiseksi värjätty vesi on lämpimämpää kuin astiassa oleva kirkas vesi.

c) Kuva liittyy energian siirtymiseen säteilemällä. Tilanteessa kuvataan ikkunalasia, josta säteily heijastuu. Tavallinen kamera muodostaa kuvan näkyvän valon avulla, ja siinä henkilö ei juurikaan erotu. Lämpökamera mittaa infrapunasäteilyä, jota lämpimät kohteet säteilevät enemmän kuin viileät. Koska henkilö on ympäristöään lämpimämpi, hän säteilee enemmän infrapunasäteilyä kuin ympäristönsä ja erottuu hyvin lämpökamerakuvassa.

Tehtävä 2.14.

a) Taulukkokirjan kiinteiden aineiden ominaisuuksia -taulukon perusteella raudan ominaislämpökapasiteetti on 0,45 kJ/(kgK) ja puun 1,2 kJ/(kgK). Tällöin puun ominaislämpökapasiteetti on suurempi kuin raudan.

b) Koska molemmat esineet olivat pakkasessa pihalla, molempien esineiden lämpötilat olivat yhtä suuret. Rauta on huomattavasti parempi lämmönjohde kuin puu, joten energiaa siirtyy kädestä rautaan huomattavasti suuremmalla teholla kuin puuhun. Mitä suuremmalla teholla energiaa siirtyy kädestä esineeseen, sitä nopeammin lämpötilaerot pyrkivät tasoittumaan ja käden iho jäähtyy. Koska rauta on parempi lämmönjohde puuhun verrattuna, rauta tuntuu kylmemmältä kuin puu.

Tehtävä 2.15.

a) Olomuodon muutoksen aikana lämpötila pysyy vakiona, joten kuvaajien vaakasuorien osuuksien aikana olomuoto muuttuu. Se vaakasuora osa, joka on matalammassa lämpötilassa, liittyy sulamiseen. Siten alhaisin sulamispiste on näytteellä 3.

b) Höyrystymistä kuvaa korkeammassa lämpötilassa oleva vaakasuora osuus kuvaajassa. Jos näytettä lämmitetään vakioteholla, on näytteeseen siirtynyt energia $Q = Pt$. Mitä pidempi aika näytettä lämmitetään, sitä suurempi on siihen siirtynyt energia. Näytteellä 1 höyrystyminen kestää pisimmän ajan, joten sen höyrystymisessä sitoma energia on suurin. Ominaishöyrystymislämpö ilmaisee aineen höyrystymiseksi tarvittavan energian massayksikköä kohden, eli $r = \frac{Q}{m}$.

Koska eri näytteillä oli sama massa, täytyy näytteen 1 ominaishöyrystymislämmön olla suurin.

c) Kuvaajan keskimmäinen vino osuus esittää näytteen käyttäytymistä nesteenä. Ominaislämpökapasiteetti kuvaa aineen kykyä sitoa energiaa lämpötilan kohotessa. Näytteen 3 kuvaajan kulmakerroin on tuossa kohdassa suurin eli näytteen 3 lämpötila kohoaa helpoiten, kun siihen tuodaan energiaa. Se tarkoittaa, että näytteen 3 ominaislämpökapasiteetti nesteenä on pienin.

Tehtävä 2.16.

a) Etsitään veden faasidiagrammilta piste, jossa lämpötila on 110 °C ja paine 101 325 Pa. Veden olomuoto on tuolloin kaasu.

b) Etsitään kuvaajalta piste, jossa lämpötila on 50 °C ja paine 1 MPa. Veden olomuoto on tuolloin neste.

c) Lämpötilassa 100 °C ja paineessa 100 Pa veden olomuoto on kaasu. Kun lämpötila laskee ja paine pysyy samana, liikutaan faasidiagrammissa vaakasuunnassa vasemmalle. Silloin kaasumaisen veden olomuoto muuttuu kiinteäksi, eli vesi härmistyy.

d) Lämpötilassa 150 °C ja paineessa 0,1 bar eli 100 mbar veden olomuoto on kaasu. Kun lämpötila pysyy samana ja paine kasvaa, liikutaan faasidiagrammissa suoraan ylöspäin. Silloin kaasumaisen veden olomuoto muuttuu nesteeksi, eli vesi tiivistyy.

Tehtävä 2.17.

Lämpötila voidaan määrittää jonkin lämpötilasta riippuvan fysikaalisen ilmiön avulla. Tällaisia ilmiöitä ovat esimerkiksi lämpölaajeneminen, sähkönjohtavuus ja lämpösäteily.

Nestelämpömittareissa hyödynnetään aineen lämpölaajenemista ja energian siirtymistä johtumalla. Kun nestelämpömittari upotetaan esimerkiksi kuumaan veteen, kuuma vesi luovuttaa sisäenergiaa mittarille. Tällöin nesteen lämpötila kasvaa ja mittarin sisällä oleva neste laajenee. Samalla nesteen pinta nousee lasiputken sisällä. Usein mittarissa oleva neste on alkoholia. Mittarilla voidaan mitata kohteita, joiden lämpötila on mittarissa olevan nesteen sulamis- ja kiehumislämpötilan välissä, esimerkiksi ilman tai kehon lämpötilaa.

Kaksoismetallilämpömittarin toiminta perustuu lämpölaajenemiseen ja energiaan siirtymiseen johtumalla. Kaksoismetalli on liuska, jossa kaksi eri metallia on liitetty yhteen. Kaksoismetalliliuskan sisäenergia muuttuu, kun metallisliuskasta siirtyy energiaa joko ympäristöstä liuskaan tai liuskasta ympäristöön ja liuskan lämpötila muuttuu. Liuska taipuu, kun toinen metalli laajenee lämmetessään enemmän kuin toinen. Liuskaan on kiinnitetty osoitin, jonka paikka muuttuu liuskan taipuessa. Kaksoismetalliliuska-anturilla voidaan mitata esimerkiksi huoneilman, kuten saunan ilman lämpötilaa.

Monissa digitaalisissa lämpömittareissa hyödynnetään aineen sähköisten ominaisuuksien, kuten sähkönjohtavuuden, riippuvuutta lämpötilasta. Digitaaliset lämpömittarit perustuvat myös energian siirtymiseen johtumalla mittarin ja mitattavan kohteen välillä. Kun mittari vastaanottaa energiaa ympäristöstä, mittarin lämpötila kasvaa. Lämpötilan kasvu muuttaa mittarin sähköjohtavuutta. Yleisimpiä tällaisia mittareita ovat digitaaliset kuumemittarit ja ulkolämpömittarit.

Termoparissa kahden eri metallin liitos aiheuttaa jännitteen, jonka suuruus riippuu lämpötilasta. Termopari pitää olla fyysisessä kosketuksessa mitattavan kohteen kanssa eli kyseessä tapahtuu energian siirtymistä johtumalla. Termoparia voidaan käyttää erittäin kylmissä ja kuumissa olosuhteissa, ja se on erittäin tarkka. Mittari kestää myös suuria paineen muutoksia.

Säteilylämpömittari perustuu kohteen lähettämän lämpösäteilyn mittaamiseen. Säteilylämpömittarin avulla voidaan määrittää esimerkiksi kehon lämpötila korvan tärykalvon lähettämän säteilyn perusteella. Myös lämpökamera hyödyntää tätä ilmiötä.

Tehtävä 2.18.

a) Kiehuminen tarkoittaa tilannetta, jossa kaikkialla nesteessä tapahtuu höyrystymistä. Kiehuminen on mahdollista, kun nesteen sisäinen höyrynpaine on ulkoisen paineen suuruinen tai suurempi.

b) Videolla näkyvät kuplat syntyvät kiehumisen yhteydessä nestepinnan alapuolella. Kuplat ovat vesihöyryä.

c) Kun vesi kiehuu, syntyy vesihöyryä. Kylläisen vesihöyryn tiheys riippuu lämpötilasta. Kastepisteessä vesihöyryä on ilmassa suurin mahdollinen määrä ja vesihöyry on kylläistä. Kun lämmin vesihöyry osuu huoneenlämpöisen ruiskun seinämään, lämpötila on alempi kuin vesihöyryn kastepisteen lämpötila, joten vesihöyryä tiivistyy nestepisaroiksi.

   Läpinäkymätön aine on pieniä vesipisaroita. Kun valo osuu vesipisaroihin, valo siroaa. Pisaran takana olevia asioita ei voi nähdä, koska pisaran takaa valo ei pääse sironnan vuoksi havaitsijan silmiin.

Tehtävä 2.19.

a) ketjun massa m = 522 g

ketjun tilavuus on V = 73 ml

Ketjun massan ja tilavuuden avulla pystyy määrittämään ketjun materiaalin tiheyden. Aineen tiheys on

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{522\,\mathrm{g}}{73\,\mathrm{ml}} = 7{,}150\,68\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{ml}} \approx 7{,}15\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{ml}}.$$

b) Koska ketju on ollut pitkään kiehuvassa vedessä, on ketjun lämpötila alussa $T_{1,\mathrm{a}}$ = 100 °C.

ketjun lämpötila lopussa $T_{1,\mathrm{l}}$ = 30,4 °C

veden lämpötila alussa $T_{2,\mathrm{a}}$ = 22,0 °C

veden lämpötila lopussa $T_{2,\mathrm{l}}$ = 30,4 °C

ketjun lämpötilan muutos
$\Delta T_1 = T_{1,\mathrm{a}} - T_{1,\mathrm{l}}$ = 100 °C − 30,4 °C = 69,6 °C

veden lämpötilan muutos
$\Delta T_2 = T_{2,\mathrm{l}} - T_{2,\mathrm{a}}$ = 30,4 °C − 22,0 °C = 8,4 °C

ketjun massa m_1 = 522 g = 0,522 kg

veden tiheys $\rho_2 = 1{,}0\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}$

veden tilavuus V_2 = 0,400 l

veden ominaislämpökapasiteetti $c_2 = 4\,190\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$

Ketjun jäähtyessä luovuttama energia siirtyy veden lämpenemiseen tarvittavaksi energiaksi

$Q_{\text{ketju}} = Q_{\text{vesi}}$

$c_1 m_1 \Delta T_1 = c_2 m_2 \Delta T_2 = c_2 \rho_2 V_2 \Delta T_2$,

josta ketjun aineen ominaislämpökapasiteetiksi

$$c_1 = \frac{c_2 \rho_2 V_2 \Delta T_2}{m_1 \Delta T_1} = \frac{4\,190\,\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 1{,}0\,\frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 0{,}400\,\text{l} \cdot 8{,}4\,^{\circ}\text{C}}{0{,}522\,\text{kg} \cdot 69{,}6\,^{\circ}\text{C}}$$

$$= 387{,}50\,\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \approx 390\,\frac{\text{J}}{\text{kgK}}.$$

c) Ketjussa olevan aineen tiheys $\rho = 7{,}15\,\frac{\text{g}}{\text{ml}}$ ja

ominaislämpökapasiteetti $c_2 = 390\,\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

Taulukkokirjan mukaan aine on sinkkiä, sillä sinkin arvot tiheydelle ja ominaislämpökapasiteetille on kaikista lähimpänä määritettyjä arvoja.

Tehtävä 2.20.

lämpimän veden tilavuus $V_1 = 0{,}18$ l

veden tiheys $\rho_1 = 1{,}0$ kg/l

veden lämpötila alussa $T_1 = 20{,}0$ °C

veden ja mukin lämpötila lopussa $T_2 = 6{,}5$ °C

jään alkulämpötila $T_3 = -18$ °C

mukin lämpökapasiteetti $C = 0{,}170$ kJ/K

nestemäisen veden ominaislämpökapasiteetti
$c_1 = 4{,}19$ kJ/(kgK)

jään ominaissulamislämpö $s = 333$ kJ/kg

jään ominaislämpökapasiteetti $c_\mathrm{j} = 2{,}09$ kJ/(kgK)

Jäähtyvän veden ja mukin lämpötilan muutos
$\Delta T_1 = 20{,}0\ °\mathrm{C} - 6{,}5\ °\mathrm{C} = 13{,}5\ °\mathrm{C} = 13{,}5\ \mathrm{K}$.

Jään lämpötilan muutos $\Delta T_2 = 18\ °\mathrm{C} = 18\ \mathrm{K}$.

Jäästä syntyneen veden lämpötilan muutos
$\Delta T_3 = 6{,}5\ °\mathrm{C} = 6{,}5\ \mathrm{K}$.

Tarkastellaan energian siirtymisiä.

Lämmin vesi ja muki luovuttavat energiaa $Q_1 + Q_2$, jonka jään lämpeneminen, jään sulaminen ja veden lämpeneminen

$Q_3 + Q_4 + Q_5$ ottavat vastaan eli

$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 + Q_5$

$cm_1\Delta T_1 + C\Delta T_1 = c_j m_2\Delta T_2 + sm_2 + cm_2\Delta T_3$.

Tarvittavan jään massa

$$m_2 = \frac{c\rho_1 V_1\Delta T_1 + C\Delta T_1}{c_j\Delta T_2 + s + c\Delta T_3}$$

$$= \frac{4{,}19\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 1{,}0\frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 0{,}18\ \text{l} \cdot 13{,}5\ \text{K} + 0{,}170\ \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \cdot 13{,}5\ \text{K}}{2{,}09\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 18\ \text{K} + 333\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + 4{,}19\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 6{,}5\ \text{K}}$$

$$= 0{,}031\,35\,\text{kg} \approx 31\,\text{g}$$

Tehtävä 2.21.

a) Hiki on nestettä, joka höyrystyy ihon pinnalta. Höyrystyminen vaatii energiaa, jonka hiki vastaanottaa iholta. Kun iho luovuttaa energiaa hielle, ihon pintalämpötila alenee. Elimistö siirtää energiaa ihon pinnalle, mikä pienentää kehon lämpötilaa.

b) ihmisen massa m_1 = 65 kg

Ihmisen kehon lämpötilan muutos ΔT = 1,0 °C = 1,0 K

ihmisen ominaislämpökapasiteetti on c = 3 480 $\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

Kyseisen ihmisen hikoilussa vapautuu energiaa
r = 2,42·10^6 $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$·

Ihmisen kehon luovuttama energia on yhtä suuri kuin hikoilussa vapautunut energia

$Q_{\text{ihminen}} = E$

$cm_1\Delta T = rm$

Hikoillun veden massa

$$m = \frac{cm_1\Delta T}{r} = \frac{3\,480\,\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 65\,\text{kg} \cdot 1{,}0\,\text{K}}{2{,}42 \cdot 10^6\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 0{,}093\,47\,\text{kg} \approx 9{,}3\text{ g}.$$

Tehtävä 2.22.

veden massa on m = 580 g = 0,580 kg

veden ominaislämpökapasiteetti $c = 4\,190\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$

Uunin sähköverkosta ottama teho P = 1,0 kW.

Mikroaaltouunin siirtää vedelle energiaa teholla P_{anto}.

Mikroaaltouunin vedelle siirtämä energia on yhtä suuri kuin veden vastaanottama energia

$Q_{\mathrm{anto}} = Q_{\mathrm{vesi}}$

$P_{\mathrm{anto}}\Delta t = cm\Delta T$, josta antotehoksi

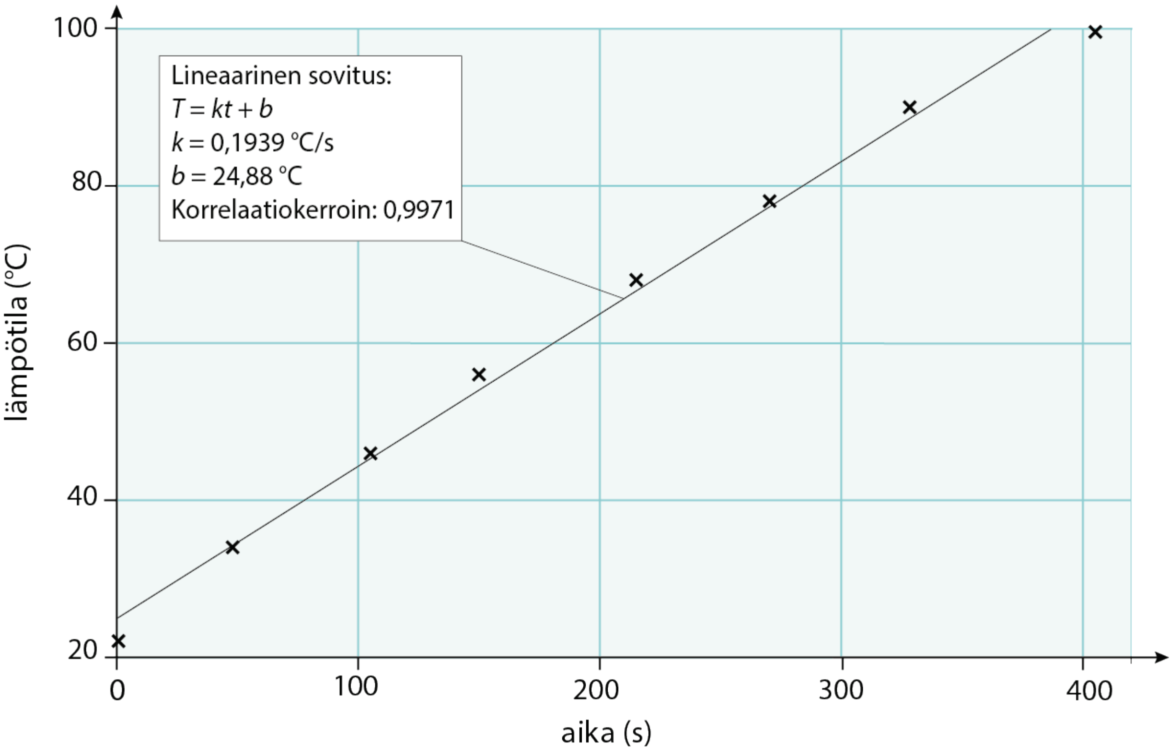
$$P_{\mathrm{anto}} = \frac{cm\Delta T}{\Delta t} = cm\frac{\Delta T}{\Delta t}.$$

Piirretään mittaustuloksista kuvaaja (t, T)-koordinaatistoon, jonka fysikaalisena kulmakertoimena on $\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$.

Määritetään fysikaalinen kulmakerroin tasaisesti nousevalle suoran osuudelle.

Suoran fysikaalinen kulmakerroin on lämpötilan muutosnopeus

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = 0{,}1939\,\frac{^\circ\text{C}}{\text{s}}.$$



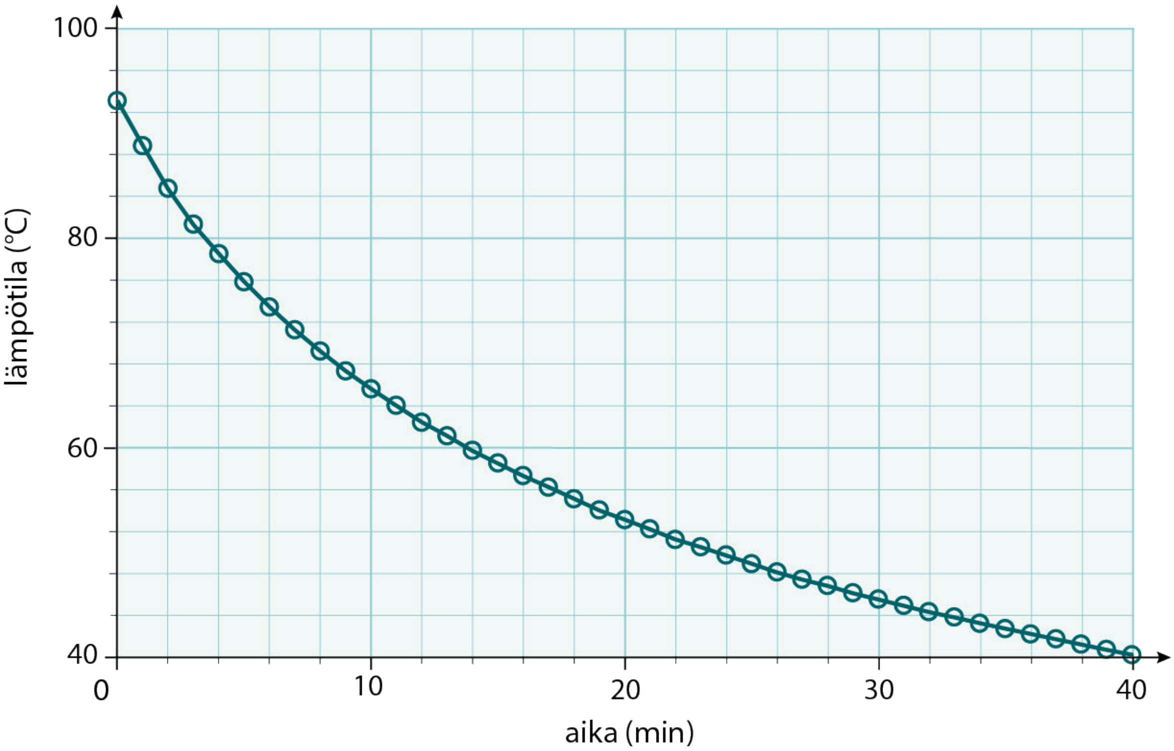
Hyötysuhde saadaan vertaamalla mikroaaltouunin lämmitysteho sen sähköverkosta ottamaan tehoon.

$$\eta = \frac{P_{\text{anto}}}{P_{\text{otto}}} = \frac{cm\dfrac{\Delta T}{\Delta t}}{P_{\text{otto}}} = \frac{4\,190\,\dfrac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \cdot 0{,}580\,\text{kg} \cdot 0{,}1939\,\dfrac{^\circ\text{C}}{\text{s}}}{1\,000\,\text{W}} = 0{,}4712 \approx 47\,\%.$$

Mikroaaltouunin hyötysuhde on 47 %.

Tehtävä 2.23.

a)



b) Aikavälillä 2,5 min – 5,5 min kahvi jäähtyy lämpötilasta 83,0 °C lämpötilaan 74,6 °C, eli ΔT = 83,0 °C − 74,6 °C = 8,4 °C = 8,4 K.

Kahvi on lämpöopillisesti samanlaista kuin vesi, jonka ominaislämpökapasiteetti on $c = 4{,}19\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$.

Kahvin tilavuus V = 192 ml ja sen tiheys on käytännössä sama kuin vedellä, joka on 80 °C lämpötilassa ρ = 0,971 81 kg/l. Kahvin tiheyden ja tilavuuden avulla voidaan laskea massa: $m = \rho V$.

Kahvin luovuttama lämpö on

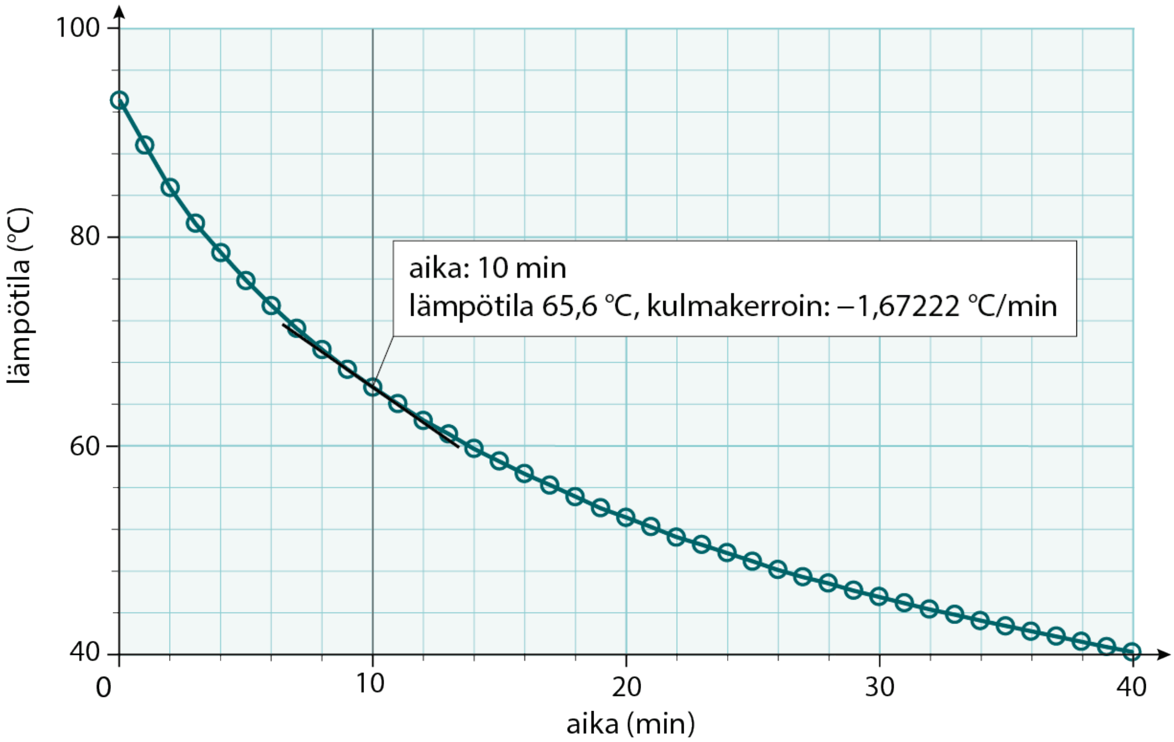
$$\begin{aligned} Q &= cm\Delta T \\ &= c\rho V\Delta T \\ &= 4{,}19\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 0{,}971\,81\,\frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 0{,}192\,\text{l} \cdot 8{,}4\,\text{K} \\ &= 6{,}567\,13\,\text{kJ} \approx 6{,}6\,\text{kJ}. \end{aligned}$$

Kahvi luovutti ympäristöönsä lämmön 6,6 kJ.

c) Määritetään kahvin lämpötilan muutosnopeus kuvaajan fysikaalisen kulmakertoimen avulla.

Kuvaajalle mahdollisimman lähelle 65 °C lämpötilaa piirretyn tangentin kulmakerroin on

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \approx -1{,}6722\,\frac{°\text{C}}{\text{min}} = -1{,}6722\,\frac{\text{K}}{\text{min}} \approx -0{,}027\,87\,\frac{\text{K}}{\text{s}}.$$



Jotta kahvi pysyisi vakiolämpötilassa, kahvia pitää lämmittää itseisarvoltaan yhtä suurella teholla kuin millä energiaa poistuu kahvista.

Jäähtymisen teho on

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = cm\frac{\Delta T}{\Delta t} = c\rho V\frac{\Delta T}{\Delta t}$$

$$= 4{,}19\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 0{,}971\,81\,\frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 0{,}192\,\text{l} \cdot (-0{,}027\,87\,\frac{\text{K}}{\text{s}})$$

$$= -0{,}0217\,89\,\frac{\text{kJ}}{\text{s}} \approx -22\,\text{W}$$

Eli kahvia pitää lämmittää 22 W teholla.

Syvennä

Tehtävä 2.24.

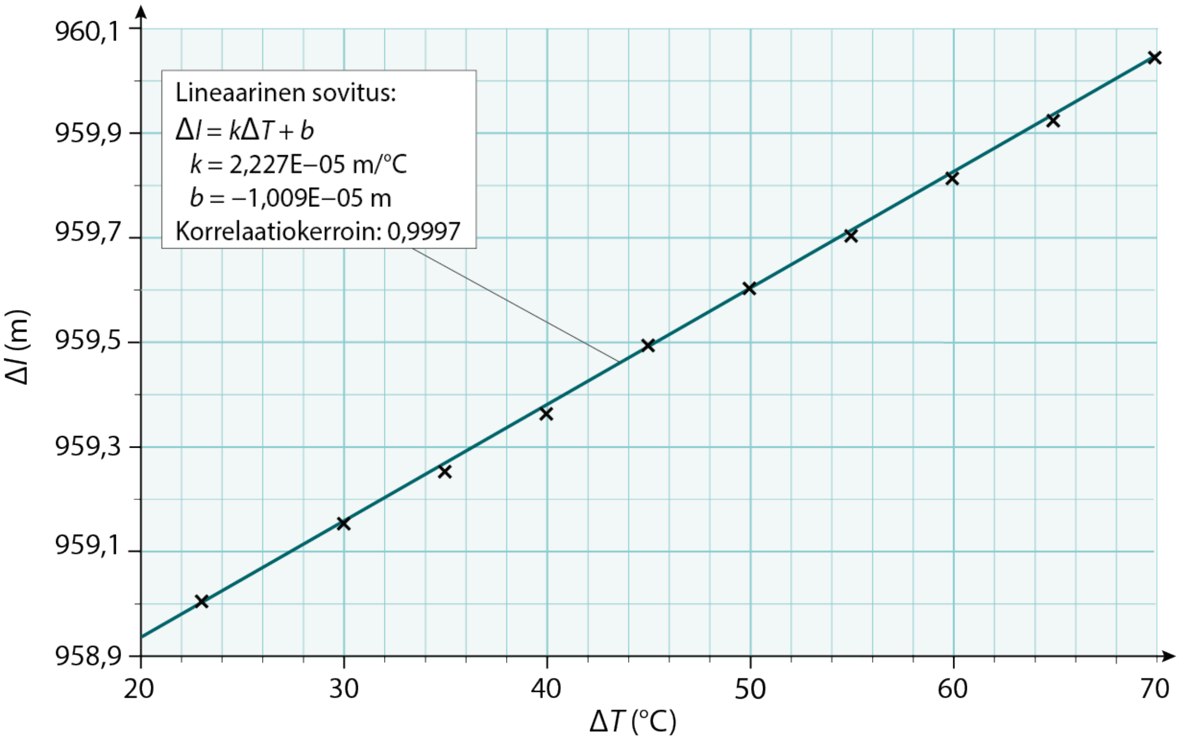
Alumiini laajenee, kun sen lämpötila nousee. Alumiinin pituus lämpötilan muutoksen jälkeen voidaan esittää muodossa

$$l = l_0 + l_0 \alpha \Delta T,$$

missä l on putken pituus lämpötilan muutoksen jälkeen, l_0 on putken pituus alkulämpötilassa, α on pituuden lämpötilakerroin ja ΔT on lämpötilan muutos. Kun lämpötila muuttuu, putken pituuden muutos on

$$l - l_0 = l_0 \alpha \Delta T$$
$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta T.$$

Tällöin (ΔT, Δl)-koordinaatistoon piirretyn kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin on $l_0\alpha$. Lasketaan uudet arvot lämpötilan ja pituuden muutoksille, tehdään (ΔT, Δl)-koordinaatistoon kuvaaja ja määritetään mittausaineistoon sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin.



Kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin

$l_0\alpha = 2{,}227\cdot 10^{-5}\ \dfrac{\text{m}}{°\text{C}}.$

Aineistosta nähdään, että putken pituus mittauksen alussa oli l_0 = 959 mm. Alumiinin pituuden lämpötilakertoimeksi saadaan

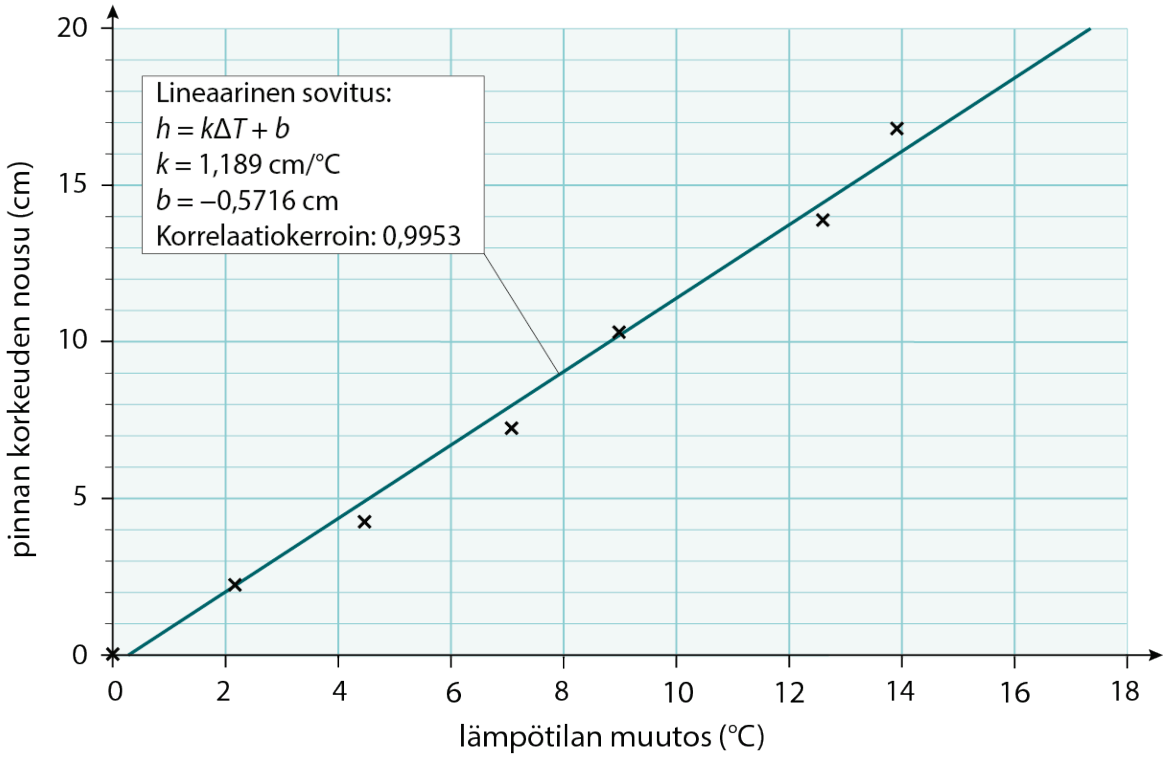
$$\alpha = \frac{2{,}227\cdot 10^{-5}\ \dfrac{\text{m}}{°\text{C}}}{l_0} = \frac{2{,}227\cdot 10^{-5}\ \dfrac{\text{m}}{°\text{C}}}{0{,}959\,\text{m}}$$

$$= 23{,}2221\cdot 10^{-6}\ \frac{1}{°\text{C}}$$

$$\approx 23{,}2\cdot 10^{-6}\ \frac{1}{°\text{C}} = 23{,}2\cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{K}}$$

Tehtävä 2.25.

Esitetään mittaustulokset (ΔT, h)-koordinaatistossa. Huomataan, että nestepatsaan korkeus riippuu lineaarisesti lämpötilan muutoksesta. Sovitetaan aineistoon suora, jonka fysikaalinen kulmakerroin on $k = 1{,}189\ \frac{\text{cm}}{^\circ\text{C}}$.



Putken sisähalkaisija d = 4,8 mm ja säde r = 2,4 mm = 0,24 cm.

Nesteen määrä alussa V_0 = 233,4 ml = 233,4 cm^3.

Tilavuuden lämpölaajenemiselle pätee $\Delta V = \gamma V_0 \Delta T$, jossa ΔV on tilavuuden muutos, γ on tilavuuden lämpötilakerroin ja ΔT lämpötilan muutos.

Putkessa tapahtuva tilavuuden muutos saadaan lieriön tilavuuden avulla $\Delta V = Ah = \pi r^2 h$.

Yhdistämällä edelliset saadaan $\pi r^2 h = \gamma V_0 \Delta T$, josta $h = \frac{\gamma V_0}{\pi r^2} \Delta T$.

Tilannetta kuvaa (ΔT, h)-koordinaatistossa suora, jonka fysikaalinen kulmakerroin on $k = \frac{\gamma V_0}{\pi r^2}$.

Ratkaistaan tilavuuden lämpötilakerroin kulmakertoimen avulla:

$$k = \frac{\gamma V_0}{\pi r^2} \Rightarrow \gamma = \frac{k \pi r^2}{V_0} = \frac{1{,}189\ \frac{\text{cm}}{°\text{C}} \cdot \pi \cdot (0{,}24\ \text{cm})^2}{233{,}4\ \text{cm}^3} = 9{,}218\,35 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{°\text{C}} \approx 9{,}2 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{°\text{C}}$$

Tuntemattoman nesteen tilavuuden lämpötilakerroin on

$9{,}2 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{°\text{C}} = 9{,}2 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\text{K}}$.

Tehtävä 2.26.

keittokiven massa $m_1 = 2{,}1$ kg

kiven ominaislämpökapasiteetti $c_1 = 870$ J/(kg°C)

kiven alkulämpötila $T_1 = 430$ °C

veden tilavuus $V = 2{,}0$ l

veden tiheys on $\rho = 1{,}0$ kg/l, joten veden massa on
$m_2 = 2{,}0$ kg

veden ominaislämpökapasiteetti $c_2 = 4\,190$ J/(kg°C)

veden alkulämpötila $T_2 = 20$ °C

astian lämpökapasiteetti $C_3 = 380$ J/°C

astian alkulämpötila $T_3 = T_2 = 20$ °C

Lopuksi kivet, vesi ja astia ovat samassa lämpötilassa T_x

Energiaa luovuttaa:

1) keittokivi jäähtyessään

$Q_1 = c_1 m_1 (T_1 - T_x)$,

Energiaa vastaanottaa:

2) vesi lämmetessään

$Q_2 = c_2 m_2 (T_x - T_2)$

3) astia lämmetessään

$Q_3 = C_3 (T_x - T_3)$

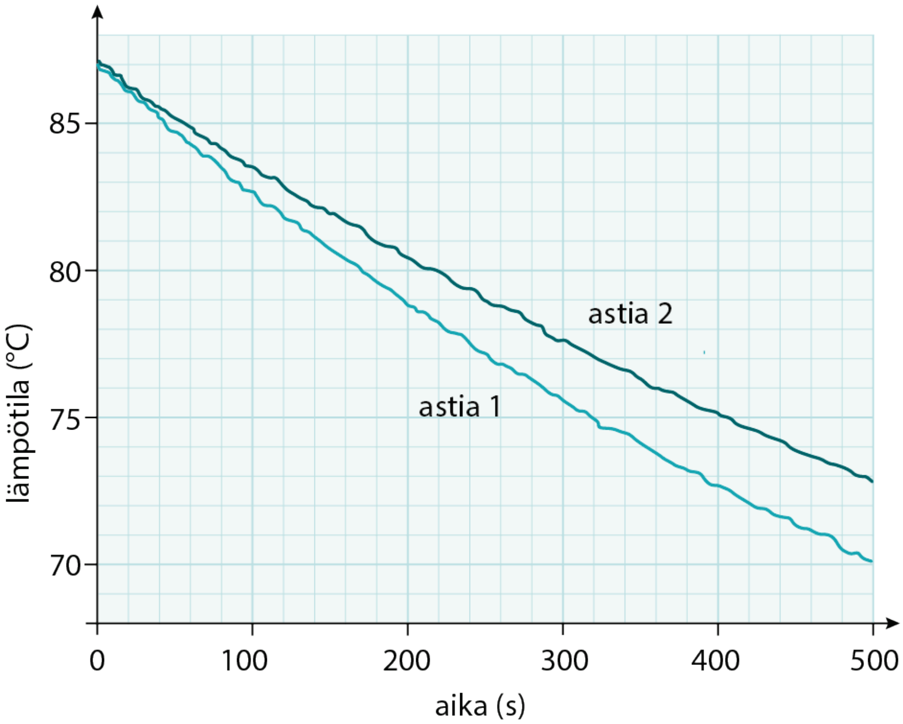
Oletetaan, että kaikki kivien luovuttama energia siirtyy veteen ja astiaan.

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= Q_2 + Q_3 \\
c_1 m_1 \left(T_1 - T_x\right) &= c_2 m_2 \left(T_x - T_2\right) + C_3 \left(T_x - T_2\right) \\
c_1 m_1 T_1 - c_1 m_1 T_x &= c_2 m_2 T_x - c_2 m_2 T_2 + C_3 T_x - C_3 T_2 \\
T_x \left(c_1 m_1 + c_2 m_2 + C_3\right) &= c_1 m_1 T_1 + \left(c_2 m_2 + C_3\right) T_2 \\
T_x &= \frac{c_1 m_1 T_1 + \left(c_2 m_2 + C_3\right) T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2 + C_3} \\
T_x &= \frac{870\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg°C}} \cdot 2{,}1\ \text{kg} \cdot 430\ ^\circ\text{C} + \left(4\,190\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg°C}} \cdot 2{,}0\,\text{kg} + 380\ \dfrac{\text{J}}{\text{°C}}\right) \cdot 20\ ^\circ\text{C}}{870\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg°C}} \cdot 2{,}1\,\text{kg} + 4\,190\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg°C}} \cdot 2{,}0\,\text{kg} + 380\ \dfrac{\text{J}}{\text{°C}}} \\
&= 90{,}7538\ ^\circ\text{C} \approx 91\ ^\circ\text{C}
\end{aligned}
$$

Vesi lämpenee lämpötilaan 91 °C.

Tehtävä 2.27.

a)



Se astia, josta siirtyy enemmän energiaa ympäristöön, jäähtyy nopeammin.

Energiaa johtuu molemmista astioista yhtä paljon, koska vettä on molemmissa astioissa yhtä paljon, astiat on valmistettu samasta materiaalista, ja astiat ovat samanmuotoiset. Molempien astioiden suuaukoista vettä haihtuu yhtä paljon, joten kuljettumalla niistä siirtyy yhtä paljon energiaa ympäristöön.

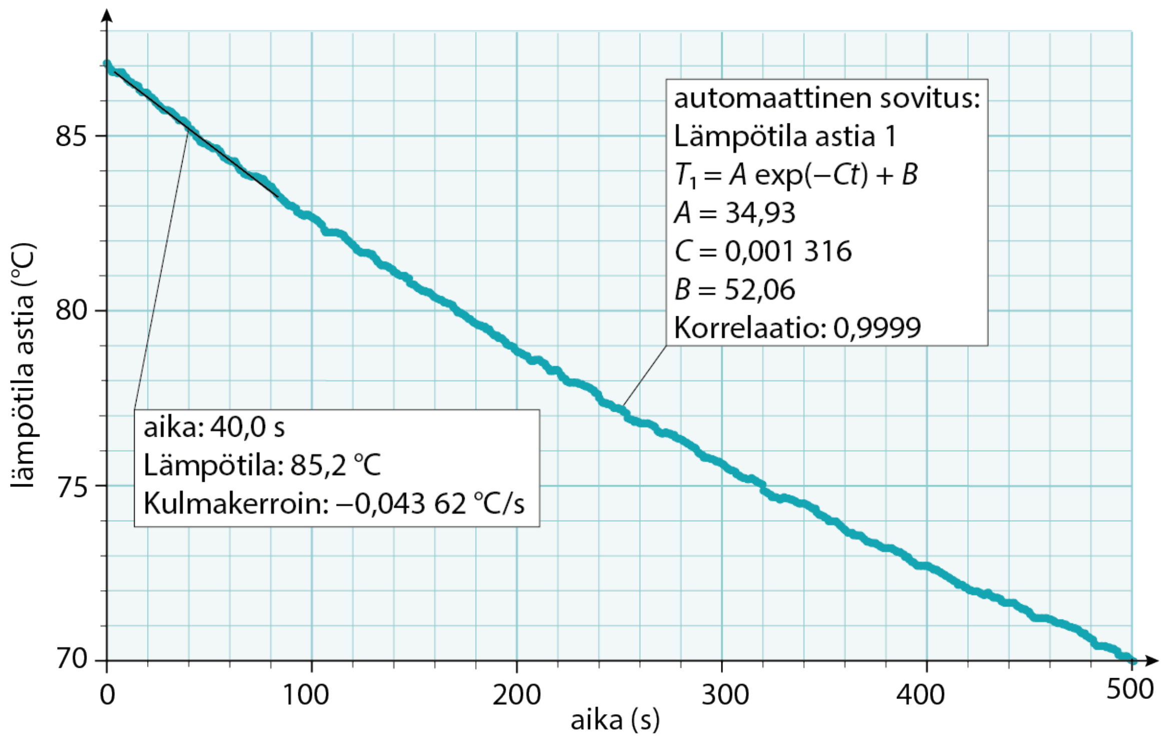
Koska astioiden väritykset ovat erilaiset, ne säteilevät energiaa ympäristöönsä eri tavalla. Mustaksi maalattu astia on parempi lämpösäteilijä. Siten väriltään musta astia jäähtyy nopeammin kuin hopeanvärinen. Tästä voidaan päätellä, että lämpötila 1 -käyrä esittää mustassa astiassa olevan veden jäähtymistä.

b) veden massa $m = 0{,}246$ kg

veden ominaislämpökapasiteetti $c = 4\,190$ J/(kgK)

Sovitetaan mittausaineistoon sovitefunktio $T = Ae^{-Ct} + B$ ja tutkitaan veden jäähtymisnopeutta 40 s kohdalla.

(t, T)-koordinaatistoon lisätyn sovitefunktion kuvaajalle piirretyn tangentin fysikaalinen kulmakerroin on jäähtymisnopeus $\frac{\Delta T}{\Delta t}$.



Ajanhetkellä t = 40 s käyrälle piirretyn tangentin fysikaalinen kulmakerroin on $\frac{\Delta T}{\Delta t} = -0{,}043\,62\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = -0{,}043\,62\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$. Miinusmerkki merkitsee, että vesi jäähtyy koska energiaa siirtyy vedestä ympäristöön.

Vesi luovuttaa sisäenergiaansa ympäristöön teholla P. Tällöin veden lämpömäärän muutos on yhtä suuri kuin teholla P ympäristöön siirtynyt energia

$$\begin{aligned} Q &= E \\ cm\Delta T &= P\Delta t \\ P &= \frac{cm\Delta T}{\Delta t} = cm\frac{\Delta T}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Astiassa 1 oleva vesi luovuttaa energiaa ympäristöön teholla

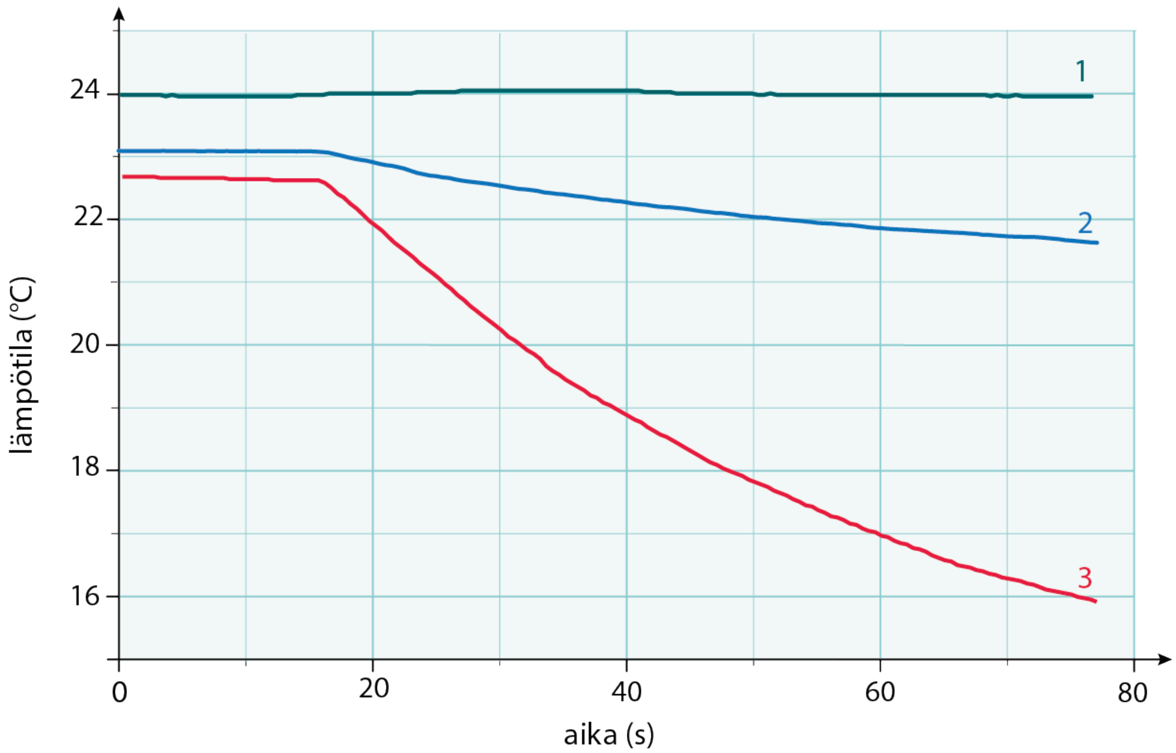
$$P = cm\frac{\Delta T}{\Delta t} = 4\,190\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}} \cdot 0{,}246\,\mathrm{g} \cdot (0{,}043\,62\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}) = 44{,}9609\,\mathrm{W} \approx 45{,}0\,\mathrm{W}.$$

c) Jäähtymisteho $P = cm\frac{\Delta T}{\Delta t}$ pienenee mittauksen edetessä, sillä lämpötilan muutosnopeus $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ pienenee mittauksen edetessä.

Alussa astiassa olevan veden lämpötila on suurempi kuin lopussa. Mitä suurempi on veden ja ympäristön välinen lämpötilaero, sitä suuremmalla teholla vesi luovuttaa energiaa ympäristöön ja sitä jyrkemmin kuvaaja laskee.

Tehtävä 2.28.

a)



b) Huoneilman lämpötila ei juurikaan muutu, joten käyrä 1 kuvaa huoneen lämpötilan mittausta.

Kun mittari nostetaan pois nesteestä, mittarin pinnalla oleva neste alkaa höyrystyä. Lämpömittari luovuttaa sisäenergiaansa nesteen höyrystymiseen, jolloin lämpömittarin lämpötila laskee. Mitä suuremmalla teholla mittari luovuttaa mittarin pinnalla olevalle nesteelle energiaa, sitä nopeammin lämpömittarin lämpötila laskee.

Etanolia höyrystyy sekunnin aikana huomattavasti enemmän kuin vettä. Vaikka veden ominaislämpökapasiteetti on etanolin ominaislämpökapasiteettiä suurempi, etanolin höyrystymiseen tarvittava energia on silti suurempi kuin veden. Käyrän 3 mittauksessa lämpötila laskee kaikkein nopeimmin, joten mittari on ollut etanolia sisältävässä keitinlasissa. Käyrä 2 on saatu, kun mittari on ollut vettä sisältävässä keitinlasissa.

c) Kun mittarit nostetaan pois nesteistä, jää mittarin pinnalle nestettä. Mittarin pinnalla oleva neste alkaa höyrystyä, jolloin mittari alkaa luovuttaa energiaa nesteelle. Kun lämpömittari luovuttaa sisäenergiaansa nesteen höyrystymiseen, alenee lämpömittarin lämpötila.

Tehtävä 2.29.

a) Höyrystyneen veden massa saadaan vähentämällä alussa olevasta massasta kunkin taulukoidun massan arvo. Arvot ovat esimerkiksi:

m **(kg)**	***t*** **(s)**	***m*****(höyry) (kg)**
0,254	0	0,000
0,2528	11,56	0,001
0,2509	22,54	0,003
0,2486	36,57	0,005
0,2465	53,94	0,008
0,2442	71,13	0,010
0,2429	82,46	0,011
0,2411	93,01	0,013
0,2389	112,81	0,015
0,2369	128,56	0,017

Vedenkeittimen vedenlämmitysteho P = 300 W.

Energian säilymisperiaatteen mukaan vedenkeittimen vedelle luovuttama energia on yhtä suuri kuin höyrystyneen veden vastaanottama energia, sillä vesi on mittauksen alussa kiehumispisteessä.

$E_{\text{keitin}} = E_{\text{höyrystyminen}}$

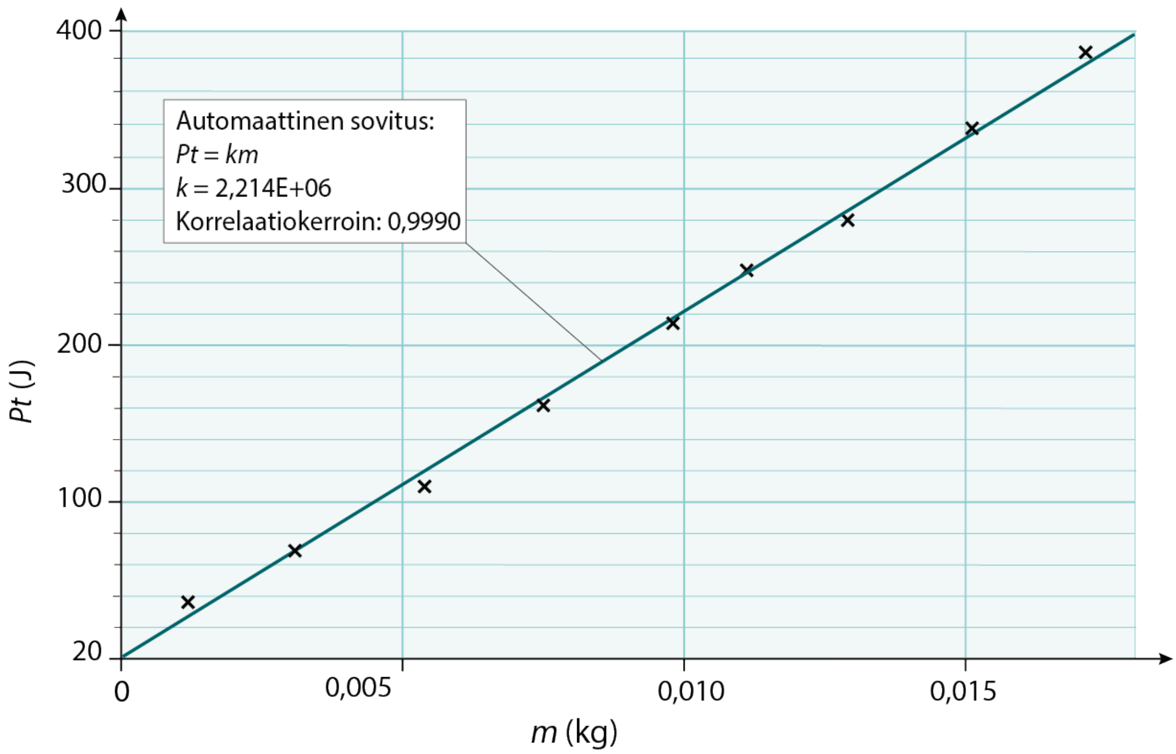
$Pt = rm$

$(y = kx)$

Veden ominaishöyrystymislämpö saadaan

(m, Pt)-koordinaatiston fysikaalisesta kulmakertoimesta.

Lasketaan uusi sarake Pt ja tehdään koordinaatistoon kuvaaja, jonka mittapisteisiin sovitetaan suora.



Kuvaajan fysikaaliseksi kulmakertoimeksi eli veden ominaishöyrystymislämmöksi saadaan

$$r = 2{,}214 \cdot 10^6 \ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \approx 2\,214 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$

b) Kirjallisuudesta $r_{\text{kirj}} = 2\,260 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.

Verrataan saatua ominaishöyrystymislämmön arvoa kirjallisuudessa esiintyvään arvoon

$$\frac{r_{\text{kirj}} - r}{r_{\text{kirj}}} = \frac{2\,260 \ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 2\,214 \ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}}{2\,260 \ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} = 0{,}020\,35 \approx 2{,}0\,\%.$$

Saatu tulos on 2,0 % kirjallisuusarvoa pienempi.

Määrityksessä $Pt = rm$, joten virhettä voi tulla tehon P, ajan t ja massan m määrityksessä. Tehoa ei mitattu, vaan se oli annettu. Tehon mittauksessa voi tulla virhettä. Jos todellinen teho on suurempi kuin annettu teho, kasvaa kuvaajan kulmakerroin ja ominaishöyrystymislämmön arvo.

Videolta näemme, kun vesi kiehuu, termosastiasta lentää pieniä vesipisaroita ympäristöön. Tällöin poistuneen veden massa kasvaa, mikä pienentää kuvaajan kulmakerrointa ja määritetyn ominaishöyrystymislämmön arvoa.

Ajanmäärityksen virhe on todella pieni, sillä kellon mittaustarkkuus on sekunnin sadasosa. Virhettä aiheutuu massan ja ajan määrityksessä, kun vaa'an lukema ei välillä muuttunut. Arvot kannattaa ottaa hetkellä, jolloin arvo on välittömästi muuttunut. Mittaus tehtiin termosastiassa, jolla on lämpökapasiteetti. Termosastia sitoo energiaa, mikä pienentää ominaishöyrystymislämmön arvoa.

Tehtävä 2.30.

uppokuumentimen vedenlämmitysteho P = 300 W

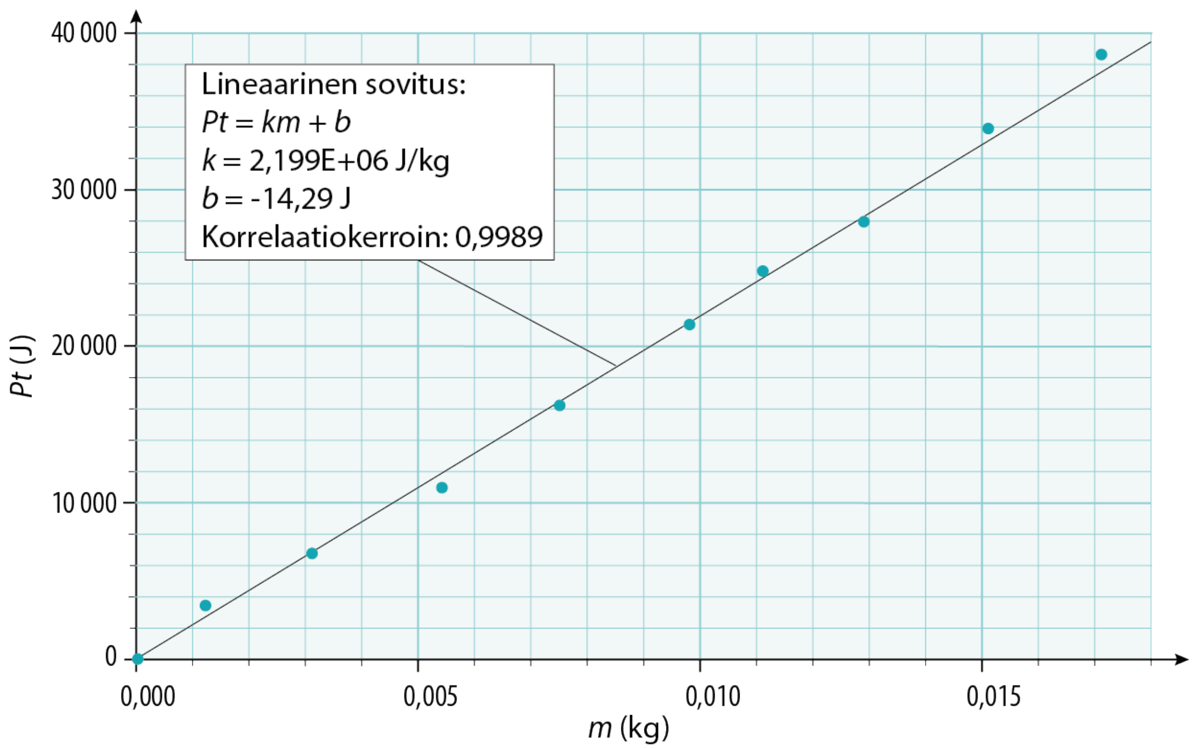
Kun uppokuumentimen avulla höyrystetään vettä termosastiassa, uppokuumentimen luovuttama energia on yhtä suuri kuin veden höyrystymiseen energia. Tällöin

$Pt = rm,$

jossa m on höyrystyneen veden massa, r on ominaishöyrystymislämpö ja t on höyrystymisaika.

(m, Pt)-koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta saadaan veden ominaishöyrystymislämpö. Lasketaan uudet sarakkeet höyrystyneelle vedelle m ja uppokuumentimen luovuttama energia Pt ja laaditaan kuvaaja.

M (kg)	*t* (s)	*m*(höyry) (kg)	*Pt* (W)
0,254	0	0	0
0,2528	11,56	0,0012	3468
0,2509	22,54	0,0031	6762
0,2486	36,57	0,0054	10971
0,2465	53,94	0,0075	16182
0,2442	71,13	0,0098	21339
0,2429	82,46	0,0111	24738
0,2411	93,01	0,0129	27903
0,2389	112,81	0,0151	33843
0,2369	128,56	0,0171	38568



Kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin eli veden ominaishöyrystymislämpö on

$k = r$ = 2 199 kJ/kg ≈ 2 200 kJ/kg.

b) Kirjallisuusarvo veden ominaishöyrystymislämmölle on

r_{kir} = 2 260 kJ/kg

Mitattu tulos poikkeaa kirjallisuusarvosta

$$\frac{r_{\text{kir}}-r}{r_{\text{kir}}}\cdot 100\,\% = \frac{2\,260\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 2\,199\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}}{2\,260\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}}\cdot 100\,\% = 2{,}6991\,\% \approx 2{,}7\,\%.$$

Saatu tulos on pienempi kuin kirjallisuusarvo. Vaikka tehtävässä on annettu uppokuumentimen veden lämmitysteho, energiaa siirtyy termosastiaan johtumalla vedestä ja näin ollen vedenlämmitysteho on pienempi kuin annettu arvo. Tämä pienentää saatua tulosta. Virhettä saattaa tulla myös siinä, että joitakin pisaroita vettä saattaa roiskua astiasta pois kiehumisen aikana, jolloin höyrystyneen veden massa näyttää suuremmalta kuin mitä se todellisuudessa on.

Tehtävä 2.31.

a) Polttoaineen nestemäisyyden voi huomata, jos pulloa heiluttaa. Tällöin nesteen hölskyminen kuuluu ja tuntuu kädessä.

b) Pullossa kaksi faasia on tasapainossa. Pohjan lähellä polttoaine on nesteenä ja ylempänä kaasumaisena. Pullossa olevan kaasun paine on suurempi kuin ulkoinen paine, joten kaasu virtaa paine-eron vuoksi ulos pullosta. Kun pullosta päästetään kaasua, pullossa oleva neste kiehuu ja ainetta siirtyy nestefaasista kaasufaasiin.

c) Painemittari ei voi käyttää kaasun määrän mittaamiseen, sillä pullossa on aina nestepinnan yläpuolella kaasua likipitäen samassa paineessa. Nesteen vähentyessä, säiliössä olevan kaasun osuus kasvaa. Kaasun tilavuus kasvaa, mutta paine on sama, sillä nesteestä höyrystyy lisää ainetta kaasufaasiin.

d) Jos säiliöön tulee vuoto, kaasua alkaa virrata ulos säiliöstä ja paine säiliön sisällä alkaa pienentyä. Tämän vuoksi nestekaasu alkaa kiehua pullossa. Kiehumiseen tarvittava energia siirtyy nestemäisen polttoaineen sisäenergiasta, ja nestemäisen polttoaineen lämpötila alkaa laskea. Tämä olomuodonmuutos jäähdyttää kaasusäiliön hyvin kylmäksi.

Tehtävä 2.32.

a) Veden lämpötila oli kokeen alussa 43,6 °C. Kun tyhjiöpumppu laitettiin päälle, hetken kuluttua vesi alkoi kiehua ja veden lämpötila laski.

Mittauksen lopussa veden lämpötila oli 34,4 °C.

b) Vesi alkaa jäähtyä heti mittauksen alussa, sillä se on ympäristöään lämpimämpää. Kun veden kiehuminen alkaa, veden lämpötilan alkaa laskea nopeammin. Veden höyrystyminen vaatii energiaa. Höyrystynyt vesi vastaanottaa energiaa nestemäisen veden sisäenergiasta. Nestemäisen veden sisäenergia pienenee, mikä ilmenee nestemäisen veden lämpötilan laskuna.

Tehtävä 2.33.

pesuohjelman vedentarve V_0 = 37 l

veden tiheys ρ = 1,0 kg/l

veden ominaislämpökapasiteetti c = 4 190 J/(kg°C)

Lämmitettävän veden määrä $V = \frac{V_0}{2} = 18{,}5\,\text{l}$.

Lämmityksen aika pesukoneen lämmitysvastuksen teholla P luovuttama energia on yhtä suuri kuin lämmitettävän veden vastaanottama energia eli

$E = Q$

$P\Delta t = cm\Delta T$.

Lämmitettävän veden massa $m = \rho V = \frac{\rho V_0}{2}$.

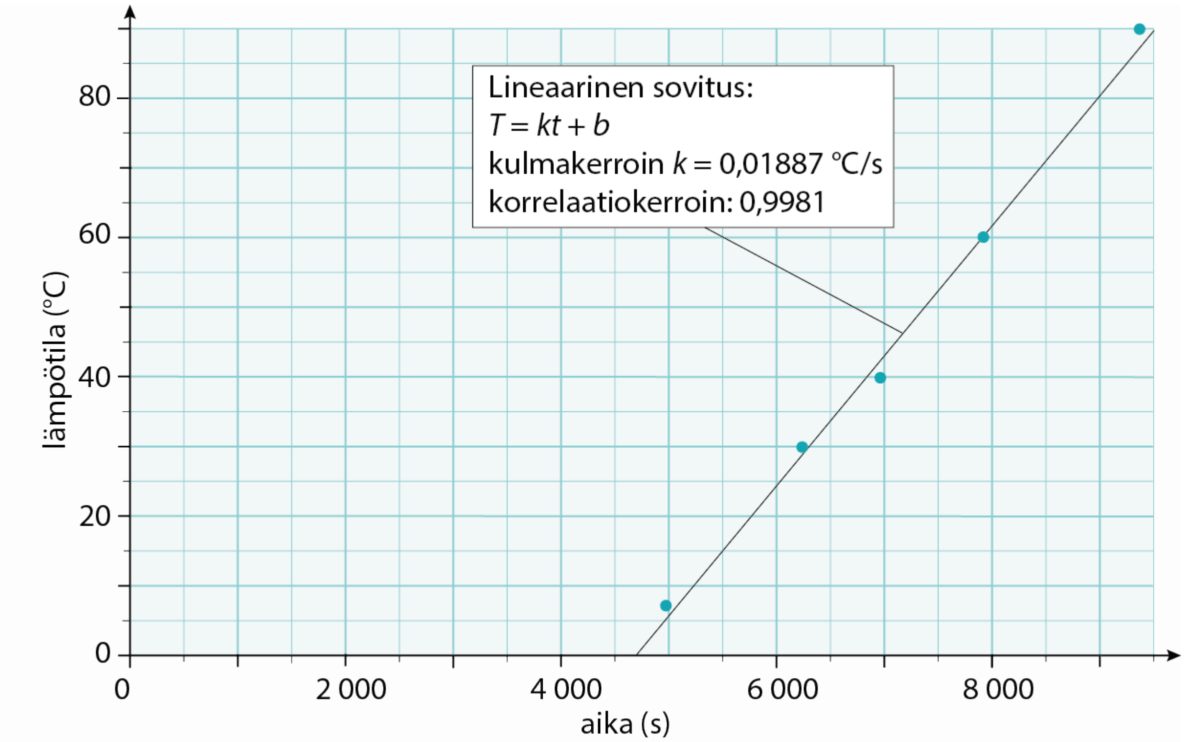
Pesukoneen lämmitysvastuksen teho on

$$P = \frac{cm\Delta T}{\Delta t} = \frac{c\rho V_0}{2}\frac{\Delta T}{\Delta t}.$$

Laaditaan aineiston taulukon arvoista (t, T)-koordinaatiston kuvaaja, jonka fysikaalinen kulmakerroin on $\frac{\Delta T}{\Delta t}$. Lasketaan ajalle uusi sarake, jossa aika on yksikössä sekuntia.

Pesuohjelman lämpötila	**Pesuohjelman kesto**	***t* (s)**
Kylmä vesi (7 °C)	1 h 23 min	4 980
30 °C	1 h 44 min	6 240
40 °C	1 h 56 min	6 960
60 °C	2 h 12 min	7 920
90 °C	2 h 36 min	9 360

Laaditaan kuvaaja.



Sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin on

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = 0{,}018\,87\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{s}}.$$

Lämmitysvastuksen teho

$$P = \frac{c\rho V_0}{2}\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{4\,190\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}^\circ\mathrm{C}}\cdot 1{,}0\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}\cdot 37\,\mathrm{l}}{2}\cdot 0{,}018\,87\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$
$$= 1\,462{,}708\,\mathrm{W} \approx 1{,}5\,\mathrm{kW}.$$

Tehtävä 2.34.

a) Tasapainotilassa höyrypuhdistimen säiliössä on nestemäistä vettä ja vesihöyryä. Systeemin tila on siis veden faasidiagrammissa kaasun ja nesteen rajakäyrällä. Laitteen arvokilven mukaan käyttöpaine on 3,5 bar. Veden lämpötila on faasidiagrammin mukaan tällöin noin 140 °C.

b) Arvokilven mukaan lämmitysvastuksen teho on P = 1 800 W.

Nestemäisen veden lämpötilan muutos
ΔT = 140 °C − 6,0 °C

Koska paineastia on täynnä vettä, kylläisen höyryn paine saavutetaan hyvin pienellä määrällä höyrystynyttä vettä. Tämä voidaan jättää huomiotta energiaa tarkasteltaessa.

Veden lämmittämiseen tarvitaan energiaa
$\Delta E = Q = cm\Delta T = P\Delta t$, josta saadaan

lämmitysajaksi

$$\Delta t = \frac{cm\Delta T}{P} = \frac{c\rho V\Delta T}{P} = \frac{4190\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg°C}}\cdot 1{,}0\,\frac{\text{kg}}{\text{l}}\cdot 1{,}0\,\text{l}\cdot(140-6{,}0)\text{°C}}{1\,800\,\text{W}}$$
$$= 311{,}922\,\text{s} \approx 310\,\text{s}.$$

c) Arvokilven mukaan lämmitysvastuksen teho on P = 1 800 W ja käyttöjännitteen tehollisarvo U = 230 V.

Sähkövastus on puhtaasti resistiivinen, joten sen lämmitysteho on tehollisen jännitteen ja virran tulo, $P = UI$. Tehollinen jännite on U = 230 V, joten vastaava tehollinen virta on

$$I = \frac{P}{U} = \frac{1\,800\ \text{W}}{230\ \text{V}} = 7{,}826\ \text{A} \approx 7{,}8\ \text{A}.$$

Tehtävä 2.35.

a) Ensimmäisenä määritetään vedenkeittimen vedenlämmitysteho.

Asetetaan vedenkeitin vaa’an päälle ja taarataan vaaka. Lisätään kylmää hanavettä vedenkeittimeen ja mitataan veden massa. Mitataan veden lämpötila. Laitetaan vedenkeitin päälle ja käynnistetään samalla sekuntikello. Lämmitetään vettä ja mitataan veden lämpötilan muutos sekä lämpötilan muutokseen kulunut aika.

Kun vesi alkaa kiehua, mitataan lämpömittarilla, että veden lämpötila ei muutu. Tämän jälkeen mitataan veden massa ja käynnistetään uudelleen sekuntikello. Mitataan veden massaa eri ajanhetkillä, kun vesi kiehuu.

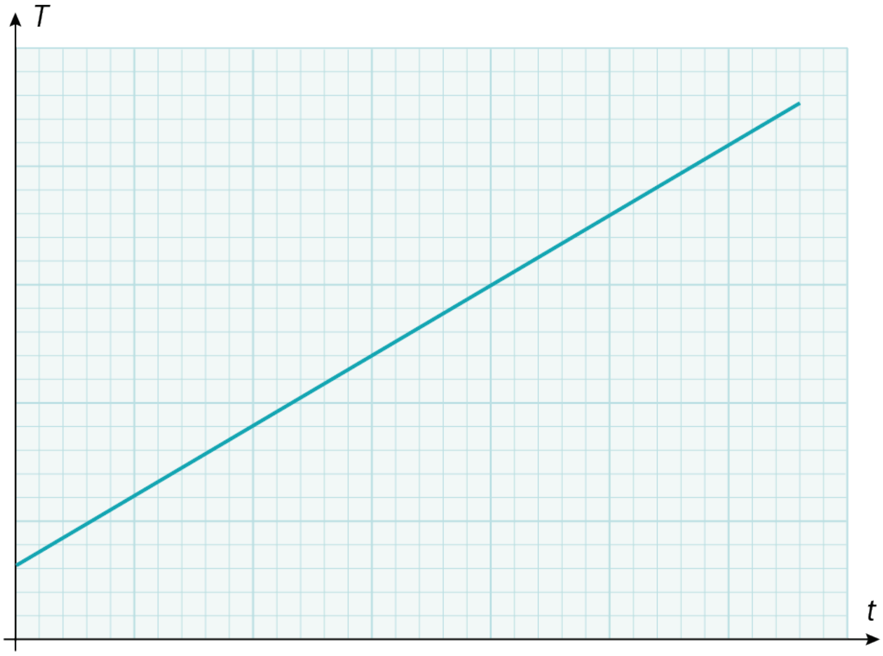
Hanaveden lisäksi tarvitaan:
3. vedenkeitin, 4. vaaka, 5. sekuntikello

Vedenkeittimen tehon määritys:

Vedenkeittimen vedelle luovuttama energia on yhtä suuri kuin veden vastaanottama energia. Kun vedenkeitin lämmittää vettä teholla P, saadaan

$P\Delta t = cm\Delta T$, jossa Δt on veden lämmittämiseen kulunut aika, c on veden ominaislämpökapasiteetti, m on lämmitettävän veden massa ja ΔT veden lämpötilan muutos.

Vedenkeittimen vedenlämmitysteho on $P = cm\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$, jossa $\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$ saadaan (t, T)-koordinaatiston mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta.



Lasketaan näiden perusteella vedenlämmitysteho.

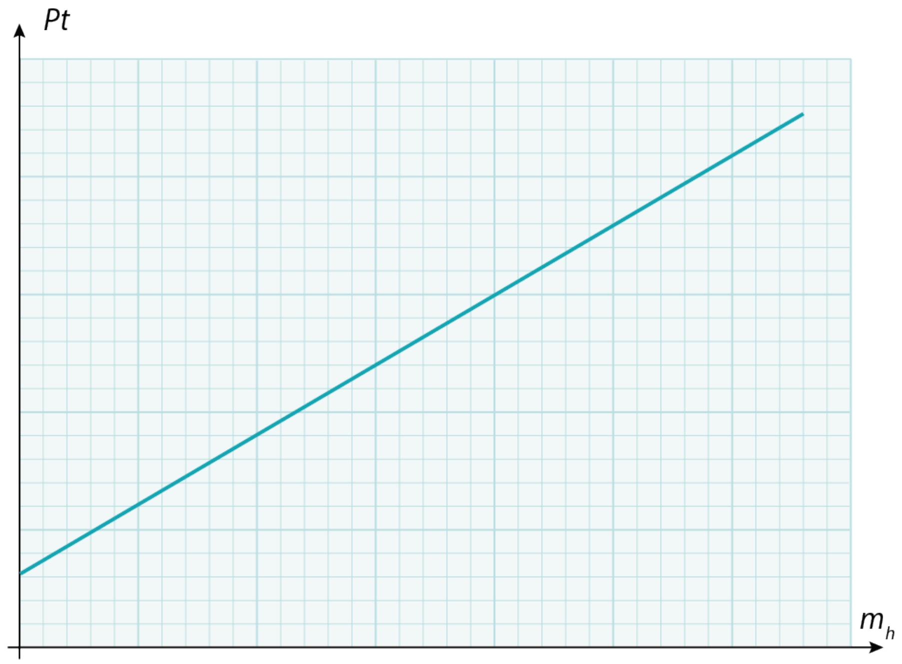
Veden höyrystäminen:

Kun vettä kiehutetaan vedenkeittimessä, vedenkeittimen vedelle luovuttama energia on yhtä suuri kuin veden höyrystymiseen tarvittava energia

$E = Q$

$Pt = rm_h$, jossa P on vedenkeittimen vedenlämmitysteho, t on veden höyrystymiseen kulunut aika, r on veden ominaishöyrystymislämpö ja m_h on höyrystyneen veden massa.

Lasketaan höyrystyneen veden massa vähentämällä kiehumisen alussa olleesta massasta eri ajanhetkillä mitatut massa arvot. Lasketaan vedenkeittimen luovuttaman energia arvot. Esitetään mittaustulokset (m_h, Pt)-koordinaatistossa. Sovitetaan mittausaineistoon suora. Sovitesuoran fysikaalinen kulmakerroin on veden omaishöyrystymislämpö.



Määritetään sovitesuoran fysikaalinen kulmakerroin eli veden ominaishöyrystymislämpö.

b) Vedenkeittimen lämmitystehon määrityksen virheet:

Vedenkeittimen lämmitysteho ei ole vakio. Mitä korkeampi on veden lämpötila, sitä enemmän vesi luovuttaa vedenkeittimestä energiaa ympäristöön säteilemällä, johtumalla sekä vesihöyryn mukana kuljettumalla. Lämmitysteho pitäisi määrittää vähän ennen kiehumista, mikä vastaa tehoa, jota käytetään ominaishöyrystymislämmön mittauksessa. Virhettä voidaan pienentää tekemällä mittauksista graafinen esitys edellisen kohdan mukaan.

Veden ominaishöyrystymislämmön määrityksen virheet:

Vedenkeittimen veden lämmitystehon virheet vaikuttavat veden ominaishöyrystymislämmön määrityksessä. Tätä virhettä voidaan pienentää määrittämällä ominaishöyrystymislämpö graafisen esityksen avulla edellisen kohdan perusteella.

Kun vettä kiehutetaan, määritetään höyrystyneen veden massaa. Osa höyrystyneestä vedestä kuitenkin tiivistyy vedenkeittimen reunoille, jolloin höyrystyneen veden massa on suurempi kuin mitä vaa’an lukema näyttää. Tämä pienentää määritettyä ominaishöyrystymislämmön arvoa.

Vedenkeittimen veden lämmitysteho ei pysy koko ajan ihan vakiona, mikä aiheutuu energian siirtymisestä ympäristöön. Teho määritettiin veden lämmityksen aikana. Koska kiehuva vesi on kuumempaa kuin lähellä kiehumista oleva vesi, kiehuvasta vedestä siirtyy energiaa ympäristöön enemmän kuin lämmitettävästä vedestä.

Kiehumisen yhteydessä vettä myös roiskuu nestemäisenä ympäristöön. Tämä lisää mitattua massan muutosta eli kasvattaa määritettyä ominaishöyrystymislämmön arvoa.

3 Paine ja kaasulait

Harjoittele

Tehtävä 3.1.

Oikeat vastaukset:

a) B

b) C

c) B

d) C

e) A

f) A

g) C

h) B

i) C

j) A

k) B

Tehtävä 3.2.

a) syvyys h = 12,0 m

ilmanpaine p_0 = 1,02 bar = 102 000 Pa

veden tiheys ρ = 1 000 kg/m^3

Kaasukuplan sisällä oleva paine on yhtä suuri kuin paine heti kaasukuplan ulkopuolella. Vedessä 12,0 m syvyydellä kokonaispaine on summa ilmanpaineesta ja hydrostaattisesta paineesta.

$$p = p_0 + \rho g h = 102\,000\,\mathrm{Pa} + 1\,000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 12{,}0\,\mathrm{m}$$
$$= 219\,720\,\mathrm{Pa} \approx 220\,000\,\mathrm{Pa}$$

Paine kaasukuplassa 12,0 metrin syvyydessä on 220 000 Pa eli 2,20 bar.

b) Kaasujen yleisen tilanyhtälön mukaan $\frac{pV}{T} = \mathrm{vakio}$.

Kun kaasukupla nousee ylemmäs pintaa kohden, paine pienenee 2,20 baarista 1,02 baariin. Kun lämpötila pysyy samana ja paine pienenee, kaasun tilavuus kasvaa. Kaasukuplan tilavuus kasvaa, kun se nousee pintaan.

Tehtävä 3.3.

a) Pakastimen oven sulkemisen jälkeen pakastimen sisälle muodostuu hetkeksi alipaine. Kun pakastimen ovi on auki, pakastimeen virtaa huoneesta lämmintä ilma, joka pakastimen oven sulkemisen jälkeen jäähtyy. Pakastimen tilavuus pysyy vakiona, mutta lämpötilan laskiessa paine pakastimen sisällä pienenee. Oven avaamiseen tarvitaan voimaa, koska pakastimessa on pienempi paine kuin huoneessa. Paine-ero tasoittuu vähitellen, koska pakastin ei ole aivan tiivis.

b) pakastimen lämpötila oven avaamisen jälkeen
T_1 = −10,0 °C = (−10,0 + 273,15) K = 263,15 K

pakastimen lämpötila normaalisti
T_2 = −16,0 °C = (−16,0 + 273,15) K = 257,15 K

oven leveys x = 58 cm = 0,58 m

oven korkeus y = 172 cm = 1,72 m

Kun pakastimen ovi on auki, paine pakastimen sisällä on normaali ilmanpaine p_1 = 101 325 Pa. Kun pakastinkaapin ovi suljetaan, kaasun lämpötila alkaa laskea ja paine pienenee. Kaasun tilanmuutos on isokoorinen, koska pakastinkaapissa olevan kaasun tilavuus ei muutu.

alkutilanne
T_1 = 263,15 K
p_1 = 101 325 Pa

tilanmuutos

V = vakio

lopputilanne
T_2 = 257,15 K
p_2 = ?

Isokoorisen tilanmuutoksen yhtälöstä $\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_2}{T_2}$ saadaan

$p_2=\frac{p_1T_2}{T_1}$.

Paine-ero $\Delta p = p_1 - p_2$ kaapin sisä- ja ulkopuolella aiheuttaa voiman, joka työntää kaapin ovea kiinni. Kaapin oven pinta-ala on $A = xy$.

Lasketaan voiman suuruus.

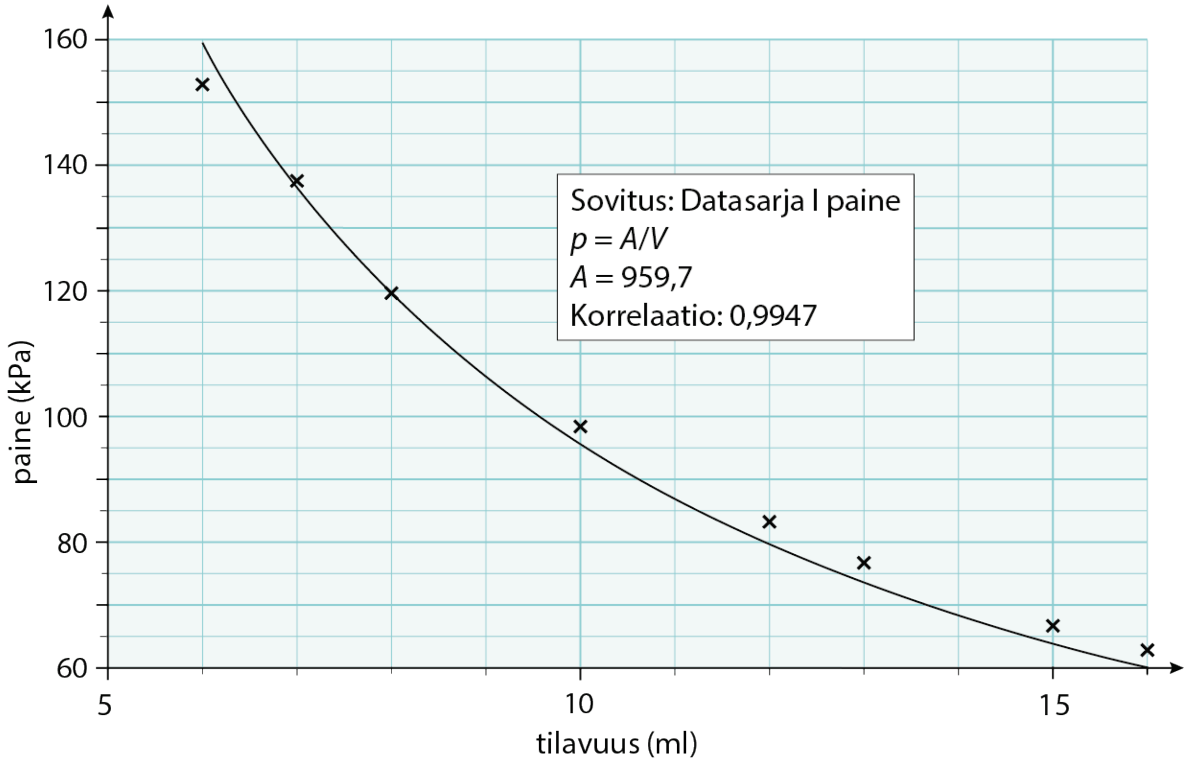
$$
\begin{aligned}
F &= \Delta pA = (p_1 - p_2)A = \left(p_1 - \frac{p_1T_2}{T_1}\right)xy \\
&= \left(101\,325\,\text{Pa} - \frac{101\,325\,\text{Pa}\cdot 257{,}15\,\text{K}}{263{,}15\,\text{K}}\right)\cdot 0{,}58\,\text{m}\cdot 1{,}72\,\text{m} \\
&= 2\,304{,}73\,\text{N} \approx 2{,}3\,\text{kN}
\end{aligned}
$$

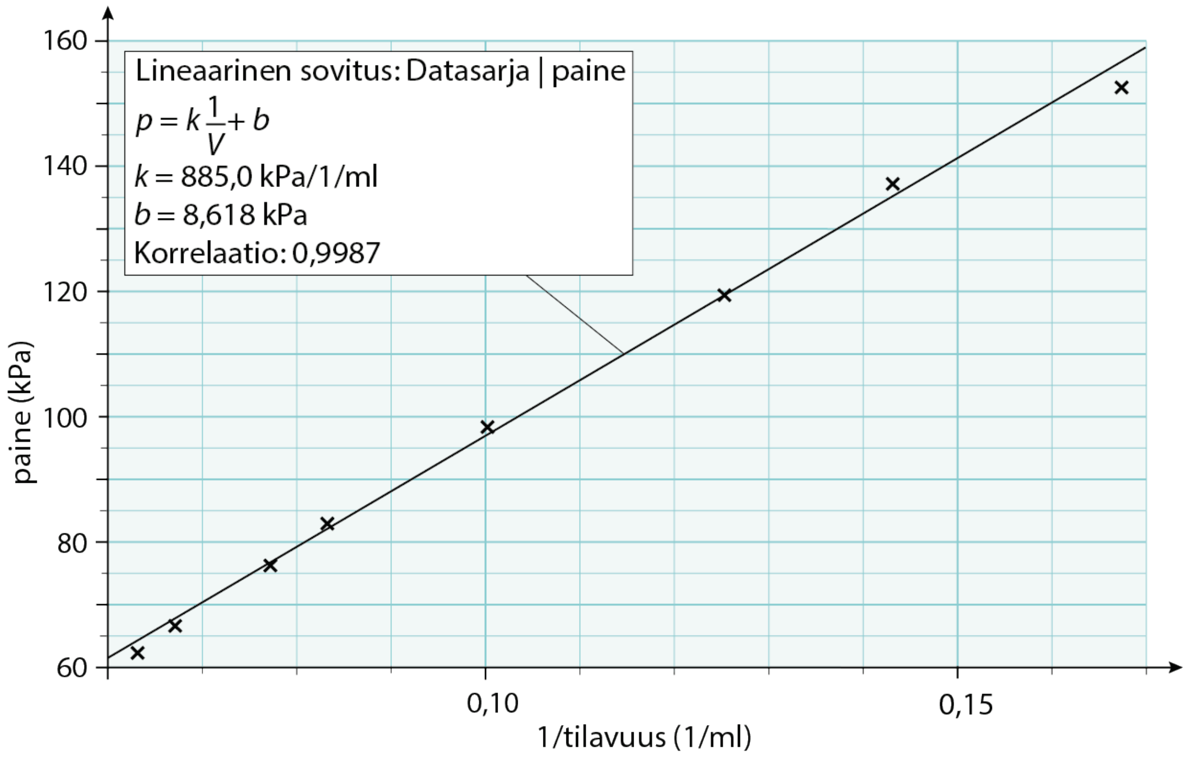
Välittömästi kaapin oven sulkemisen jälkeen kaapin ovea työntää ulkopuolelta 2,3 kN voima.

Tehtävä 3.4.

a) Ideaalikaasumallin mukaan kaasujen yleinen tilanyhtälö on $\frac{pV}{T} = \text{vakio.}$ Laaditaan mittaustuloksista kuvaaja ensin (V, p)-koordinaatistoon ja lasketaan sitten tilavuuksien käänteisluvut laaditaan kuvaaja $\left(\frac{1}{V}, p\right)$-koordinaatistoon.

V (ml)	p (kPa)	$1/V$ (1/ml)
6	153,22	0,167
7	137,76	0,143
8	119,57	0,125
10	98,49	0,100
12	83,18	0,083
13	76,65	0,077
15	66,62	0,067
16	62,66	0,063


Sovitus: Datasarja I paine
p = A/V
A = 959,7
Korrelaatio: 0,9947
paine (kPa)
160
140
120
100
80
60
5
10
15
tilavuus (ml)


Lineaarinen sovitus: Datasarja | paine
$p = k\frac{1}{V} + b$
k = 885,0 kPa/1/ml
b = 8,618 kPa
Korrelaatio: 0,9987
paine (kPa)
160
140
120
100
80
60
0,10
0,15
1/tilavuus (1/ml)

Kuvaajista nähdään, että tilavuuden kasvaessa paine pienenee.

$\left(\frac{1}{V}, p\right)$-koordinaatistossa kuvaaja on liki pitäen origon kautta kulkeva suora, sillä suoran yhtälössä vakiotermi on hyvin pieni.

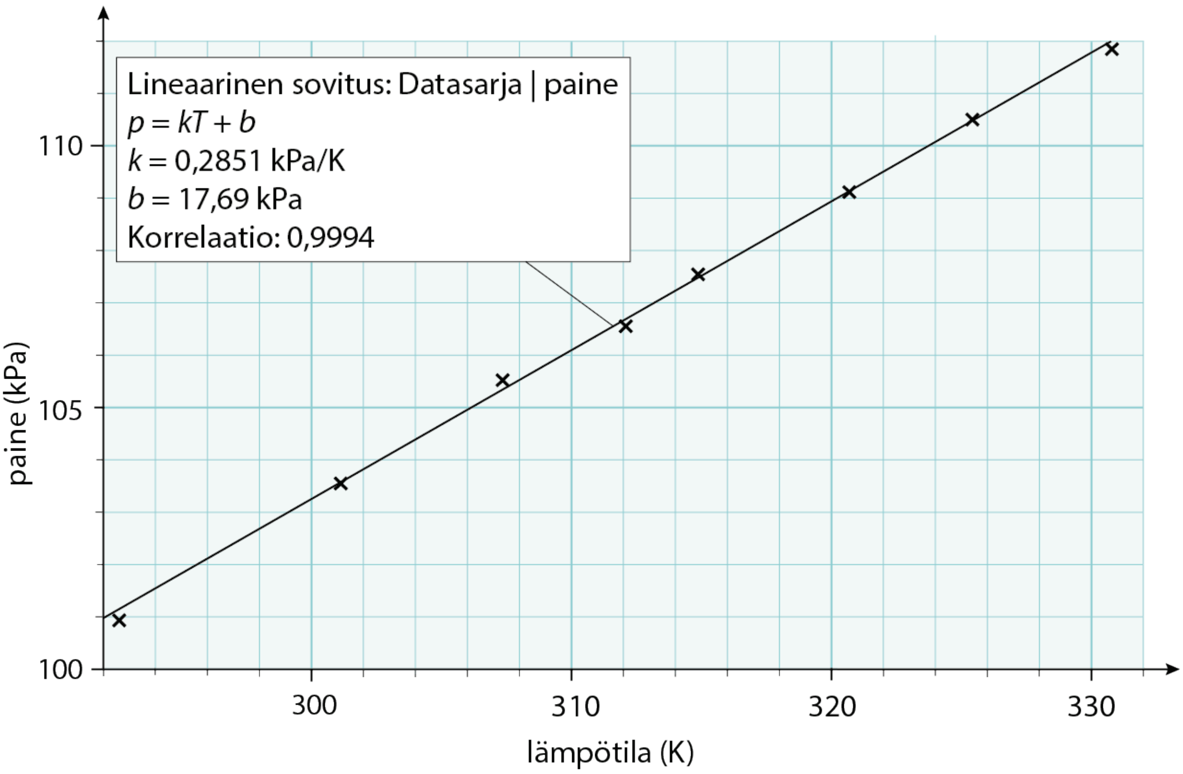
Lämpötilan ollessa vakio, tilavuuden käänteisluku $\frac{1}{V}$ ja paine p ovat suoraan verrannollisia eli

$p = \text{vakio} \cdot \frac{1}{V}$ eli pV = vakio. Paine ja tilavuus ovat kääntäen verrannollisia. Koska pisteet asettuvat suoralle hyvällä korrelaatiolla, voidaan todeta, että tutkittu kaasu noudattaa ideaalikaasumallia.

b) Ideaalikaasumallin mukaan kaasujen yleinen tilanyhtälö on $\frac{pV}{T} = \text{vakio}.$ Paineen ja lämpötilan tulisi siten olla suoraan verrannollisia. Lasketaan taulukkoon lämpötila-arvot kelvineinä, esimerkiksi
T = 19,46 °C = (19,46 + 273,15) K = 292,61 K.

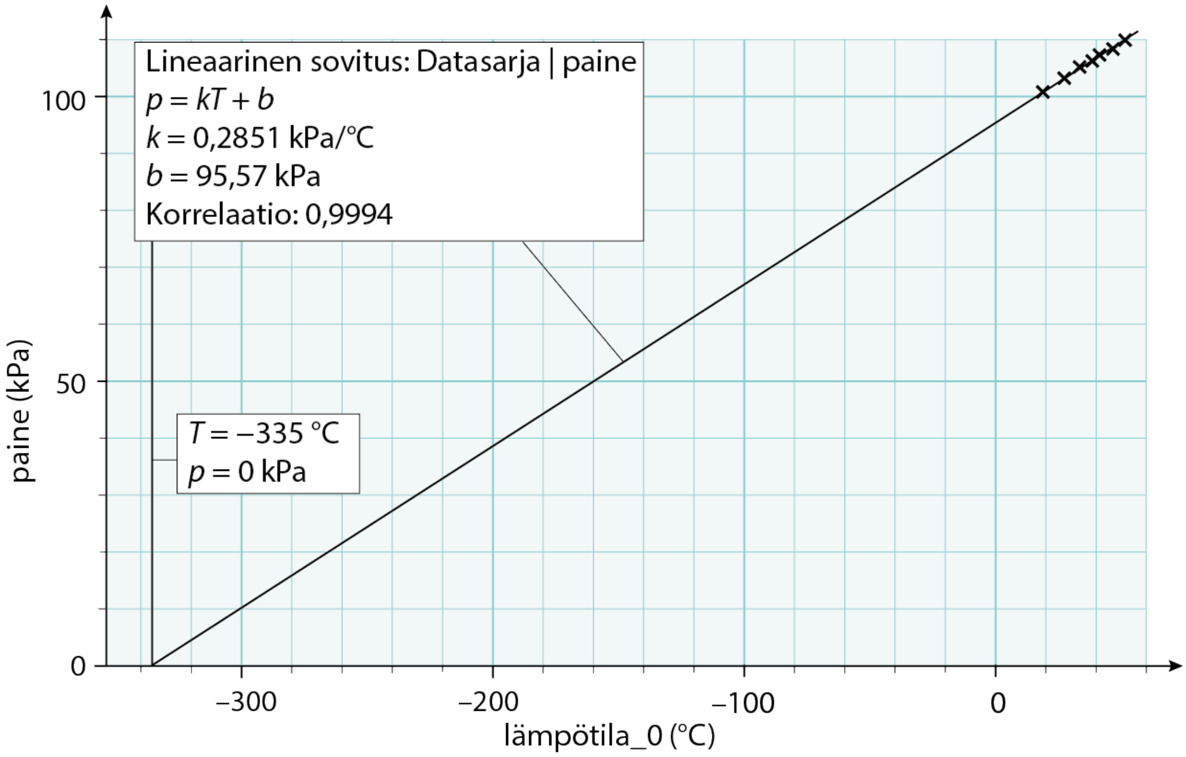
T_0 (°C)	p (kPa)	T (K)
19,46	100,97	292,61
27,97	103,57	301,12
34,23	105,53	307,38
38,96	106,62	312,11
41,75	107,60	314,90
47,60	109,14	320,75
52,25	110,53	325,40
57,64	111,85	330,79

Laaditaan mittaustuloksista kuvaaja
(T, p)-koordinaatistoon.



Kuvaajasta nähdään, että kaasun lämpötilan noustessa paine kasvaa. (T, p)-koordinaatistossa mittaustulokset ovat suoralla, joka kulkee liki pitäen origon kautta. Lämpötila ja paine ovat suoraan verrannollisia, $\frac{p}{T} = \text{vakio}$ eli p = vakio · T. Koska pisteet asettuvat suoralle hyvällä korrelaatiolla, voidaan todeta, että tutkittu kaasu noudattaa ideaalikaasumallia.

c) Absoluuttisessa nollapisteessä aineen rakenneosasten lämpöliike teoriassa pysähtyy, ja kaasun paine menee nollaan. Absoluuttisen nollapisteen sijainti voidaan ennustaa ekstrapoloimalla kuvaajaa kohtaan, jossa paine on nolla. Laaditaan kuvaaja, jossa lämpötila-asteikko on celsiusasteina. Etsitään kuvaajan nollakohta.



Kuvaajan perusteella absoluuttisen nollapisteen lämpötila olisi −335 °C. Kokeellisesti määritetyssä arvossa on virhe, koska kaasua tutkittiin hyvin suppealla lämpötila-alueella.

Tehtävä 3.5.

a) Kaasun paine, tilavuus ja lämpötila tunnetaan tilassa 1.

kaasun paine p_1 = 101 kPa = 101 000 Pa

kaasun lämpötila T_1 = 291 K

kaasun tilavuus V_1 = 0,45 l = $0{,}45 \cdot 10^{-3}$ m^3

moolinen kaasuvakio $R = 8{,}314\,46\,\dfrac{\text{Pa}\cdot\text{m}^3}{\text{mol}\cdot\text{K}} = 0{,}083\,1446\,\dfrac{\text{bar}\cdot\text{dm}^3}{\text{mol}\cdot\text{K}}$

Ideaalikaasun tilanyhtälön mukaan $pV = nRT$.
Ratkaistaan tästä kaasun ainemäärä.

$$n = \frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{101\,000\,\text{Pa}\cdot 0{,}45\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}{8{,}314\,46\,\dfrac{\text{Pa}\cdot\text{m}^3}{\text{mol}\cdot\text{K}}\cdot 291\,\text{K}}$$

$$= 0{,}018\,7848\,\text{mol} \approx 19\,\text{mmol}$$

Kaasun ainemäärä on 19 mmol.

b) (V, p)-koordinaatiston kuvaajasta voidaan päätellä, että osaprosessi 1 → 2 on isokoorinen, eli tilavuus pysyy siinä vakiona. Tämän perusteella $V_2 = V_1 = 0{,}45$ l.

Isokooriselle tilanmuutokselle on voimassa yhtälö $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$. Ratkaistaan tästä lämpötila tilassa 2.

$$T_2 = \frac{p_2 T_1}{p_1} = \frac{760\,\text{kPa} \cdot 291\,\text{K}}{101\,\text{kPa}} = 2189{,}70\,\text{K} \approx 2190\,\text{K}$$

Kuvaajasta voidaan myös päätellä, että osaprosessi 3 → 1 on isobaarinen, eli paine pysyy siinä vakiona. Siten $p_3 = p_1 = 101$ kPa.

Isobaariselle tilanmuutokselle on voimassa yhtälö $\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_1}{T_1}$. Ratkaistaan tästä tilavuus tilassa 3.

$$V_3 = \frac{V_1 T_3}{T_1} = \frac{0{,}45\,\text{l} \cdot 1230\,\text{K}}{291\,\text{K}} = 1{,}90206\,\text{l} \approx 1{,}9\,\text{l}$$

Taulukko 1 täydennettynä.

	T (K)	V (l)	p (kPa)
tila 1	291	0,45	101
tila 2	2 190	0,45	760
tila 3	1 230	1,9	101

c) Taulukko 2 täydennettynä.

	Lämpö	Työ
1 → 2	+	0
2 → 3	0	−
3 → 1	−	+

Tehtävässä ei edellytetty perusteluja. Lisätietoa:

Osaprosessi 1 → 2

Koska kaasun lämpötila nousee, kaasuun siirtyy energiaa ympäristöstä.

Kaasun tilavuus ei muutu, joten työ on nolla.

Osaprosessi 2 → 3

Tehtävänannossa kerrottiin, että osaprosessi 2 → 3 on adiabaattinen, eli kaasu ei vaihda lämpöä ympäristönsä kanssa. Siten lämmönsiirto on nolla.

Kaasun tilavuus kasvaa, joten kaasu tekee työtä ympäristöön ja tehty työ pienentää kaasun sisäenergiaa.

Osaprosessi 3 → 1

Kaasun tilavuus pienenee, joten kaasuun tehdään työtä ja tehty työ kasvattaa kaasun sisäenergiaa.

Kaasuun tehdystä työstä huolimatta kaasun lämpötila laskee. Siten kaasun täytyy luovuttaa energiaa.

Tehtävä 3.6.

ulkoinen ilmanpaine $p_0 = 100{,}8 \cdot 10^3$ Pa

painemittarin lukema $p = 102{,}2 \cdot 10^3$ Pa

etanolin syvyys $h = 0{,}18$ m

putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81$ m/s^2

Painemittari mittaa kokonaispainetta eli ilmanpaineen ja etanolin hydrostaattisen paineen summaa

$$p = p_0 + p_\mathrm{h} = p_0 + \rho g h.$$

Etanolin tiheys saadaan määritettyä kokonaispaineen yhtälöstä

$$p - p_0 = \rho g h$$

$$\rho = \frac{p - p_0}{gh} = \frac{(102{,}2 - 100{,}8) \cdot 10^3\ \mathrm{Pa}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}18\,\mathrm{m}} = 792{,}84\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \approx 790\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Tehtävä 3.7.

a) A = 65 mm^2 = 65 · 10^{-6} m^2

Kun lentokone on maanpinnalla, vallitsee normaali ilmanpaine p_0 = 101 325 Pa ja kun lentokone nousee matkustuskorkeudelle, paine on p = 77 000 Pa. Tästä saadaan paine-ero
Δp = 101 325 Pa − 77 000 Pa = 24 325 Pa.

Suurempi paine onteloista työntää tärykalvoa ulospäin voimalla, joka on

$$\begin{aligned}
F_{\text{kok}} &= F_1 - F_2 \\
&= p_1 A - p_2 A = (p_1 - p_2)A \\
&= (101325\,\text{Pa} - 77000\,\text{Pa})\cdot 65\cdot 10^{-6}\,\text{m}^2 \\
&= 24\,325\,\text{Pa}\cdot 65\cdot 10^{-6}\,\text{m}^2 \\
&= 1{,}5811\,\text{N} \\
&\approx 1{,}6\,\text{N}
\end{aligned}$$

b) Veden tiheys $\rho = 1000\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ja paine-ero Δp = 35 000 Pa

Paine veden pinnalla on ilmanpaine p_0 ja

paine syvyydellä h on $p_{\text{kok}} = p_0 + \rho g h$.

Paine-ero pinnan ja syvyyden h välillä on siten pelkkä hydrostaattinen paine.

$$\Delta p = \rho g h$$

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{35\,000\,\text{Pa}}{1\,000\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 9{,}81\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3{,}5678\,\text{m} \approx 3{,}6\,\text{m}$$

Tehtävä 3.8.

a) kaasun tilavuus alussa V_1 = 5,6 l

normaali ilmanpaine p_0 = 1,013 25 bar

kaasun tilavuus lopussa V_2 = 2,3 l

Koska painemittari näyttää ylipainetta, on kaasun paine alussa

p_1 = 0,26 bar + 1,013 25 bar = 1,273 25 bar.

alkutilanne
p_1 = 1,273 25 bar
V_1 = 5,6 l

tilanmuutos
T = vakio

lopputilanne
p_2 = ?
V_2 = 2,3 l

Oletetaan, että kaasusäiliössä oleva kaasu käyttäytyy ideaalikaasun tavoin ja noudattaa ideaalikaasun tilanyhtälöä. Kaasun tilavuuden muutos on isoterminen, jolloin

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

$$p_2 = \frac{p_1V_1}{V_2} = \frac{1{,}273\,25\,\text{bar} \cdot 5{,}6\ \text{l}}{2{,}3\,\text{l}} = 3{,}100\,09\,\text{bar}.$$

Painemittarin lukema puristamisen jälkeen

$$p = p_2 - p_0 = \frac{p_1 V_1}{V_2} - p_0$$

$$= \frac{1{,}273\,25\,\text{bar} \cdot 5{,}6\,\text{l}}{2{,}3\,\text{l}} - 1{,}013\,25\,\text{bar} = 2{,}0868\,\text{bar} \approx 2{,}1\,\text{bar}.$$

b) Alkulämpötila T_1 = (12,5 + 273,15) K = 285,65 K

Loppulämpötila T_2 = ?

Loppupaineen ja alkupaineen suhde $\frac{p_2}{p_1} = 1{,}034$

alkutilanne
T_1 = (12,5 + 273,15) K = 285,65 K
p_1

tilanmuutos
V = vakio

lopputilanne
T_2 = ?
$p_2 = 1{,}034\ p_1$

Oletetaan, että kaasusäiliössä oleva kaasu käyttäytyy ideaalikaasun tavoin ja noudattaa ideaalikaasun tilanyhtälöä. Kun kaasun tilanmuutos on isokoorinen, paineen ja tilavuuden suhde on vakio

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

Kaasun loppulämpötila on

$$T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) T_1 = 1{,}034 \cdot 285{,}65\,\text{K} = 295{,}3621\,\text{K} = 22{,}2121\,^\circ\text{C} \approx 22\,^\circ\text{C}.$$

c) Veteen lasketussa purkissa olevan ilman lämpötila nousee yhtä korkeaksi kuin veden lämpötila. Tällöin purkissa olevan ilman tilavuus kasvaa. Paine pysyy vakiona, koska purkki on avoin.

alkutilanne
$T_1 = (20{,}4 + 273{,}15)\ \text{K} = 293{,}55\ \text{K}$
$V_1 = 1{,}6\ \text{l}$

tilanmuutos
p = vakio

lopputilanne
$T_2 = (42{,}1 + 273{,}15)$
$\text{K} = 315{,}25\ \text{K}$
$V_2 = ?$

Isobaarisessa tilanmuutoksessa tilavuuden ja lämpötilan suhde on vakio $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$.

Ilman tilavuus lopputilanteessa

$$V_2 = \frac{T_2 V_1}{T_1} = \frac{315{,}25\,\text{K} \cdot 1{,}6\,\text{l}}{293{,}55\text{K}} = 1{,}7183\,\text{l}.$$

Purkkiin mahtuva ilmamäärä ei muutu, joten purkista poistuu ilmaa

$V_2 - V_1 = 1{,}7183\ \text{l} - 1{,}6\ \text{l} = 0{,}1183\ \text{l} = 1{,}183\ \text{dl} \approx 1{,}2\ \text{dl}.$

Sovella

Tehtävä 3.9.

a) Kyseessä on isokoorinen tilanmuutos eli tilavuus pysyy vakiona.

Oletetaan, että ilmanpaine on normaali ilmanpaine 101 325 Pa eli 1,013 25 bar molemmilla mittauskerroilla.

alkutilanne	tilanmuutos	lopputilanne
$T_1 = (20{,}4 + 273{,}15)\ \text{K} = 293{,}55\ \text{K}$ $V_1 = 1{,}6\ \text{l}$	p = vakio	$T_2 = (42{,}1 + 273{,}15)$ $\text{K} = 315{,}25\ \text{K}$ $V_2 = ?$

Oletetaan, että renkaan sisällä oleva kaasu käyttäytyy ideaalikaasun tavoin ja kaasun ainemäärä ei muut. Kaasujen yleisen tilanyhtälön mukaan tilanmuutokselle vakiotilavuudessa pätee $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$.

Renkaan sisällä olevan kaasun paine lämpötilassa −25 °C

$$p_2 = \frac{p_1 T_2}{T_1} = \frac{3{,}513\,25\,\text{bar} \cdot 248{,}15\,\text{K}}{291{,}15\,\text{K}} = 2{,}994\,38\,\text{bar}.$$

Painemittari näyttää ylipaineeksi
$p_m = 2{,}994\ 38\ \text{bar} - 1{,}013\ 25\ \text{bar} = 1{,}981\ 13\ \text{bar}$
$\approx 2{,}0\ \text{bar}.$

b) Ideaalikaasumallin oletukset:

Kaasu koostuu pistemäisistä molekyyleistä.

Molekyylit liikkuvat suoraviivaisesti satunnaisiin suuntiin.

Kulkusuunta muuttuu ainoastaan kimmoisissa törmäyksissä toisiin molekyyleihin tai säiliön seinämiin.

Törmäysten lisäksi muita vuorovaikutuksia ei ole.

Vastauksessa tulee selittää ainakin kaksi seuraavista:

- Renkaassa oleva kaasu on ilmaa. Ilmassa on sähköisiä vuorovaikutuksia sekä molekyylien että molekyylien ja pumpun materiaalin välillä. Ideaalikaasussa ei ole sähköisiä vuorovaikutuksia molekyylien välillä.

- Renkaassa olevilla kaasumolekyyleillä on myös tilavuus, jota ideaalikaasulla ei ole.

- Renkaassa olevien kaasumolekyylien liike ei ole suoraviivaista, sillä toisten molekyylien ja pumpun materiaalin aiheuttama sähköinen vuorovaikutus muuttaa molekyylien rataa. Ideaalikaasun rakenneosasten liike on suoraviivaista.

- Kun kaasua puristetaan kokoon, kaasun paine kasvaa. Todellisuudessa kun kaasua puristetaan pumpulla renkaaseen, kaasuun tehdään työtä. Renkaassa oleva kaasun sisäenergia kasvaa ja kaasu lämpenee. Kaasumolekyylien törmäykset eivät ole täysin kimmoisia, kuten ideaalikaasulla, vaan osa energiasta muuntuu kaasun sisäenergiaksi.

Tehtävä 3.10.

Oletetaan, että kaasu käyttäytyy kuten ideaalikaasu ja kaasun ainemäärä ei muutu. Alkutilanteessa kaasukupla on järven pohjalla syvyydellä h = 45 m, jossa sitä puristaa ilmanpaineen p_0 lisäksi hydrostaattinen paine p_h. Kaasun paine on pohjalla

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + p_h = p_0 + \rho g h \\ &= 99\,700\,\mathrm{Pa} + 1\,000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 45\,\mathrm{m} \\ &= 541\,150\,\mathrm{Pa}. \end{aligned}$$

Lopputilanteessa kaasukupla on pinnalla, jossa paine on sama kuin ilmanpaine.

alkutilanne
V_1
p_1 = 541 150 Pa
T_1 = (4,0 + 273,15) K = 277,15 K

tilanmuutos

lopputilanne
V_2
p_2 = 99,7 kPa = 99 700 Pa
T_2 = (21,0 + 273,15) K = 294,15 K

Kaasujen yleinen tilanyhtälö $\frac{pV}{T} = vakio$ eli $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$, josta

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = \frac{541\ 150\,\mathrm{Pa}\cdot 294{,}15\,\mathrm{K}}{99\,700\,\mathrm{Pa}\cdot 277{,}15\,\mathrm{K}} = 5{,}7607 \approx 5{,}8.$$

Kaasukuplan tilavuus kasvaa 5,8-kertaiseksi.

Tehtävä 3.11.

a) Hiilidioksidin massa m = 425 g

CO_2 moolimassa saadaan taulukkokirjan jaksollisen järjestelmän avulla:
$M = M_C + 2 \cdot M_O$ = 12,01 g/mol + 2 · 16,00 g/mol
= 44,01 g/mol

Ainemäärä on $n = \frac{m}{M} = \frac{425\,\text{g}}{44{,}01\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 9{,}656\,896\,\text{mol} \approx 9{,}66\,\text{mol}.$

Täydessä pullossa on 9,66 moolia CO_2-kaasua.

b) Hiilidioksidin massa m = 425 g ja

moolimassa M = 44,01 g/mol

tilavuus V = 880 cm^3 = 880 · 10^{-6} m^3

lämpötila T = (24 + 273,15) K = 297,15 K

moolinen kaasuvakio $R = 8{,}314\,46\,\frac{\text{Pa}\cdot\text{m}^3}{\text{mol}\cdot\text{K}}$

Ideaalikaasun tilanyhtälön mukaan $pV = nRT$, josta

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{MV}$$

$$= \frac{425\,\text{g} \cdot 8{,}314\,46\,\frac{\text{Pa}\cdot\text{m}^3}{\text{mol}\cdot\text{K}} \cdot 297{,}15\,\text{K}}{44{,}01\,\frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 880 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^3}$$

$$= 27\,112\,219{,}6\,\text{Pa} \approx 27\,\text{MPa}$$

Tehtävä 3.12.

a) Vesitornissa olevan veden massa aiheuttaa vesiputkistoon hydrostaattisen paineen. Mitä korkeampi ja mitä korkeammalla vesivarasto on, sitä suuremman paineen vesi aiheuttaa vesijohtoverkostoon.

b) Vesijohtoverkoston paine $p = 4{,}50 \text{ bar} = 4{,}50 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Veden tiheys $\rho = 1\,000 \, \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81 \, \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Vesitornissa olevan veden hydrostaattinen paine on yhtä suuri kuin vesijohtoverkoston vedenpaine.

$p_\text{h} = p$

$\rho g h = p$

Josta vesivaraston korkeus

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{450\,000 \text{ Pa}}{1\,000 \, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 45{,}872 \text{ m} \approx 45{,}9 \text{ m}.$$

c) Vesitornissa olevan veden hydrostaattinen paine aiheuttaa vesijohtoverkostoon tasaisen vedenpaineen. Usein vesijohtoverkoissa käytetään myös sähköisiä vesipumppuja. Sähköisten pumppujen ongelmana on se, että sähkökatkojen aikana veden paine vesijohtoverkostossa laskee. Lisäksi jos vettä otetaan hetkellisesti suuria määriä, ei vesipumppujen teho riitä pitämään vesijohtoverkoston painetta vakiona.

Tehtävä 3.13.

Oletetaan, että pullossa oleva kaasu käyttäytyy, kuten ideaalikaasu ja noudattaa ideaalikaasun tilanyhtälöä. Selvitetään kuinka suuren tilavuuden pullossa oleva kaasu ottaisi normaali-ilmanpaineisena. Lämpötila pysyy koko ajan samana. Ajatellaan alkutilanteeksi kaasu pullossa, ennen kuin sitä on käytetty. Lopputilanteessa kaikki pullossa ollut kaasu on päästetty normaaliin ilmanpaineeseen.

alkutilanne
$V_1 = 22{,}0$ l
$p_1 = 18{,}0$ MPa $= 18{,}0 \cdot 10^6$ Pa

tilanmuutos
T = vakio

lopputilanne
V_2
$p_2 = 101\,325$ Pa

Tilanmuutokselle vakiolämpötilassa pätee $p_1V_1 = p_2V_2$, josta

$$V_2 = \frac{p_1V_1}{p_2} = \frac{18{,}0 \cdot 10^6\ \text{Pa} \cdot 22{,}0\ \text{l}}{101\,325\ \text{Pa}} = 3\,908{,}2161\ \text{l} \approx 3908{,}22\ \text{l}$$

Eli kaasupullosta otettu kaasu vie normaalipaineisena tilavuuden 3 908 litraa. Jos kaasua käytetään 826 litraa, jää normaalipaineista kaasua jäljelle
$V_3 = 3\,908{,}22\ \text{l} - 826\ \text{l} = 3\,082{,}22\ \text{l}$.

Lasketaan tämän kaasun paine kaasupullon tilavuudessa.

alkutilanne	tilanmuutos	lopputilanne
V_3 = 3 082,22 l	T = vakio	V_4 = 22,0 l
p_3 = 101 325 Pa		p_4

Tilanmuutokselle vakiolämpötilassa pätee $p_3V_3 = p_4V_4$, josta

$$p_4 = \frac{p_3V_3}{V_4} = \frac{101\,325\,\text{Pa} \cdot 3\,082{,}22\,\text{l}}{22{,}0\,\text{l}} = 14\,195\,724{,}6\,\text{Pa} \approx 14{,}2\,\text{MPa}.$$

Jos pullosta on käytetty normaalipaineista kaasua 826 litraa, on paine pullossa 14,2 MPa.

Tehtävä 3.14.

a) Kaasun paine aiheutuu kaasumolekyylien törmäilystä toisiinsa ja astian seinämiin. Astiassa olevan kaasun paineeseen vaikuttavat kaasun lämpötila, tilavuus ja ainemäärä.

b) Ilman tilavuus alkutilanteessa V_1 = 0,50 l

Ilman tilavuus lopputilanteessa V_2 = 0,41 l

Ilman lämpötila alussa T_1 = (273,15 + 75) K = 348,15 K

Ilman lämpötila lopussa T_2 = (273,15 + 21) K = 294,15 K

Ilman paine alussa p_1 = 99,8 kPa

Kaasujen yleisen tilanyhtälön mukaan $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$,

josta saadaan pullon sisällä olevan kaasun paine

keittiön lämpötilassa

$$p_2 = \frac{p_1V_1T_2}{T_1V_2} = \frac{99{,}8\,\text{kPa} \cdot 0{,}50\,\text{l} \cdot 294{,}15\text{ K}}{348{,}15\,\text{K} \cdot 0{,}41\text{ l}} = 102{,}8298\,\text{kPa} \approx 103\text{ kPa}.$$

c) Ilman moolimassa M = 29,0 g/mol

Ilman tilavuus V = 0,50 l

Ilman lämpötila T = (273,15 + 75) K = 348,15 K

Ilman paine p = 99,8 kPa = 99 800 kPa

Moolinen kaasuvakio $R = 8{,}314\,46\,\dfrac{\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^3}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}$

Pullon sisällä oleva kaasu noudattaa likimain ideaalikaasun tilanyhtälöä

$pV = nRT$.

Kaasun ainemäärälle $n = \dfrac{m}{M}$, jolloin ideaalikaasun

tilanyhtälöksi saadaan $pV = \dfrac{m}{M}RT$.

Pullon sisällä olevan kaasun massa on

$$m = \frac{pVM}{RT} = \frac{99\,800\,\mathrm{Pa}\cdot 0{,}50\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3\cdot 29{,}0\,\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}}{8{,}314\,46\,\dfrac{\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^3}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}\cdot 348{,}15\,\mathrm{K}} = 0{,}4999\,\mathrm{g} = 0{,}50\,\mathrm{g}.$$

d) Jos pullon muovi olisi täysin joustavaa materiaalia, siihen ei syntyisi jännitysvoimia. Tällöin pullon sisällä olevan kaasun paine olisi lopussa yhtä suuri kuin ulkoinen paine. Koska pullon sisällä on suurempi paine kuin ilmanpaine, muovipullon muovissa on jännitysvoimia, jotka estävät pulloa rutistumasta enempää kokoon.

Tehtävä 3.15.

pullon tilavuus V = 38 l

kaasun paine p = 280 bar

kaasun lämpötila T = 22 °C = 295,15 K

tyhjän pullon massa m_0 = 26 kg

moolinen kaasuvakio R = 8,314 46 Pa · m^3/(mol · K)

argonin moolimassa M = 39,948 g/mol = 0,039 948 kg/mol

Oletetaan, että pullossa oleva kaasu käyttäytyy ideaalikaasun tavoin ja noudattaa ideaalikaasun tilanyhtälöä $pV = nRT$. Kaasun ainemäärälle on voimassa $n = \frac{m_{\mathrm{Ar}}}{M}$.

Pullossa olevan kaasun massa $m_{\mathrm{Ar}} = nM = \frac{pV}{RT}M = \frac{pVM}{RT}$.

Täytetyn kaasupullon massa

$$m = m_0 + m_{\mathrm{Ar}} = m_0 + \frac{pVM}{RT}$$

$$= 26\,\mathrm{kg} + \frac{280 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 38 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot 0{,}039\,948\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}}{8{,}314\,46\,\frac{\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^3}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}} \cdot 295{,}15\,\mathrm{K}} = 43{,}320\,\mathrm{kg} \approx 43\,\mathrm{kg}.$$

Tehtävä 3.16.

kaasun tilavuus $V = 11{,}0\ \text{l} = 11{,}0\ \text{dm}^3 = 11{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$

lämpötila alussa $T_1 = (273{,}15 + 21)\ \text{K} = 294{,}15\ \text{K}$

lämpötila lopussa $T_2 = (273{,}15 + 42)\ \text{K} = 315{,}15\ \text{K}$

paine alussa $p_1 = 111\ \text{kPa} = 111 \cdot 10^3\ \text{Pa}$

paine lopussa $p_2 = 21{,}0\ \text{Pa} = 21{,}0 \cdot 10^6\ \text{Pa}$

ilman näennäinen moolimassa
$M_\text{i} = 29{,}0\ \text{g/mol} = 29{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/mol}$

Ideaalikaasun tilanyhtälön mukaan $pV = nRT$, missä n on

ainemäärä ja $R = 8{,}314\,46\,\dfrac{\text{Pa}\cdot\text{m}^3}{\text{mol}\cdot\text{K}}$ on moolinen kaasuvakio.

Ratkaistaan tilanyhtälöstä ainemäärä: $n = \dfrac{pV}{RT}$.

Lisätyn kaasun ainemäärä on

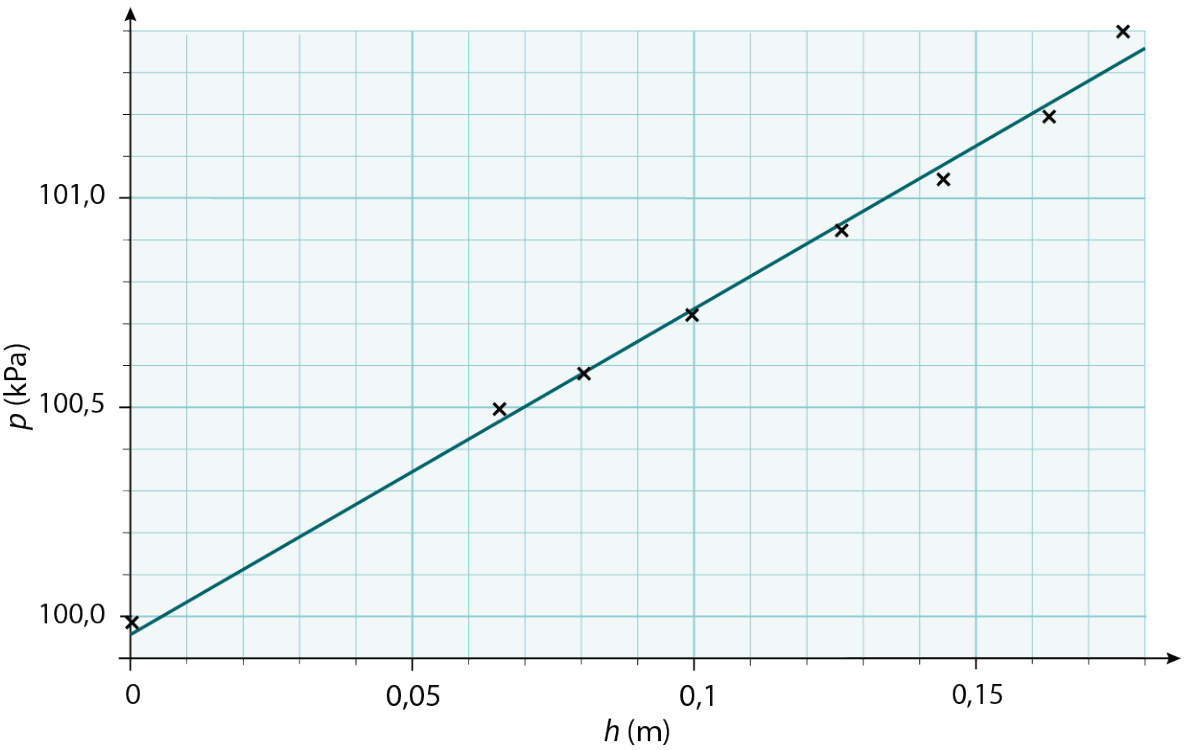
$\Delta n = n_2 - n_1 = \dfrac{p_2 V}{RT_2} - \dfrac{p_1 V}{RT_1} = \dfrac{V}{R}\left(\dfrac{p_2}{T_2} - \dfrac{p_1}{T_1}\right)$ ja lisätyn kaasun massa on

$$
\begin{aligned}
m &= \Delta n \cdot M \\
&= (n_2 - n_1)M \\
&= \frac{VM}{R}\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right) \\
&= \frac{11{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \cdot 29{,}0 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{8{,}314\,46\ \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}}}\left(\frac{21{,}0 \cdot 10^6\ \text{Pa}}{315{,}15\ \text{K}} - \frac{111 \cdot 10^3\ \text{Pa}}{294{,}15\ \text{K}}\right) \\
&= 2{,}542\,097\ \text{kg} \approx 2{,}54\ \text{kg.}
\end{aligned}
$$

Pulloon lisättiin kaasua 2,54 kg.

Tehtävä 3.17.

a)



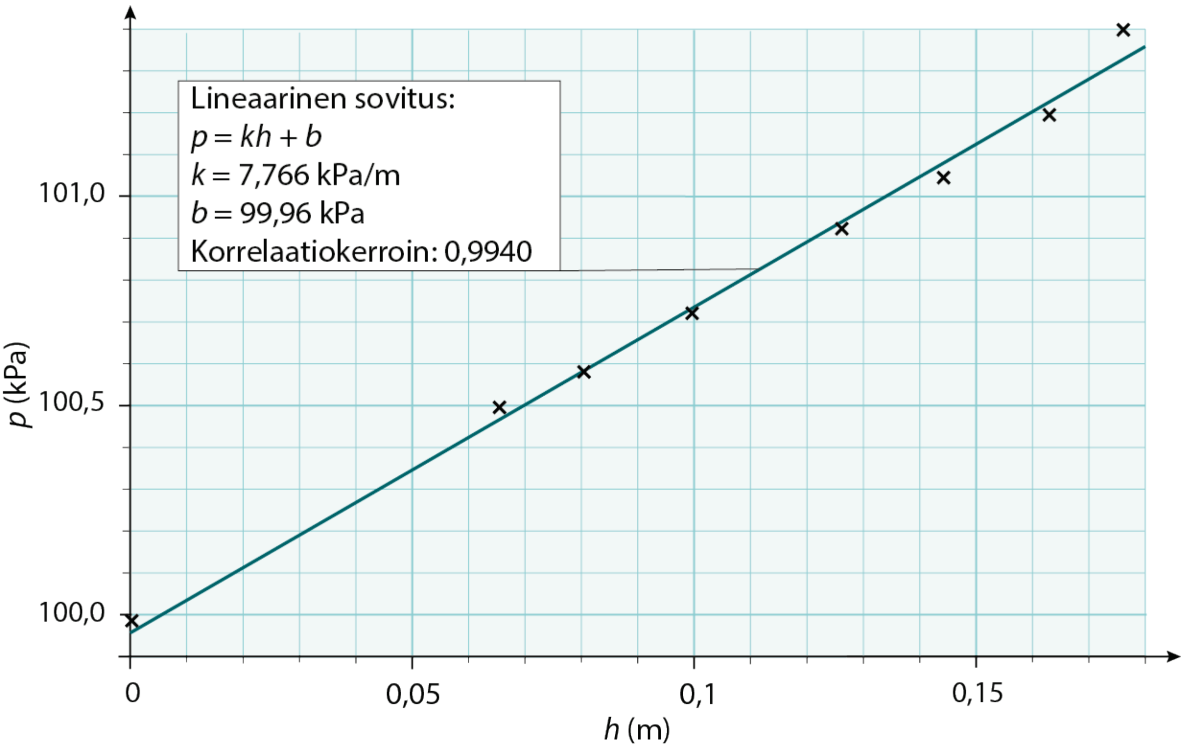
b) putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Etanolin kokonaispaine on ilmanpaineen ja hydrostaattisen paineen summa.

$p_{\text{kok}} = p_{\text{i}} + p_{\text{h}}$

$p_{\text{kok}} = p_{\text{i}} + \rho g h$

Etanolin tiheys saadaan (h, p_{kok})-koordinaatiston fysikaalisesta kulmakertoimesta.



$\rho g = 7{,}766\,\dfrac{\text{kPa}}{\text{m}}$, josta etanolin tiheydeksi saadaan

$$\rho = \frac{7\,766\,\dfrac{\text{Pa}}{\text{m}}}{9{,}81\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 791{,}641\,182\,4669\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 790\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

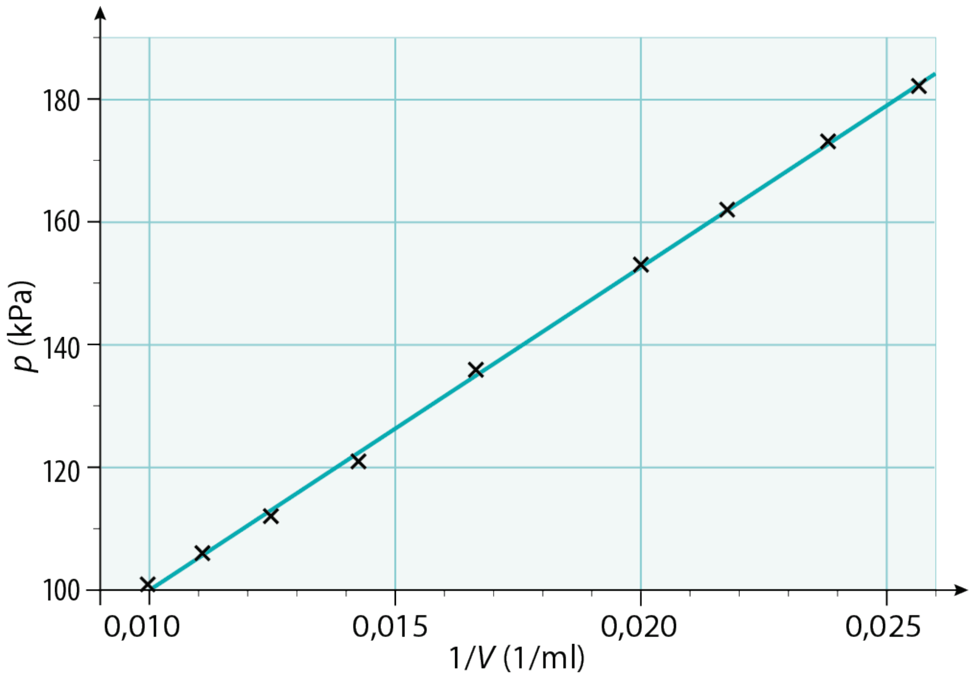
c) Kokonaispaine on yhtä suuri kuin ilmanpaine, kun syvyys $h = 0$. Ilmanpaine saadaan siis suoran vakioterminä.

$p_i = 99{,}96\ \text{kPa} \approx 100\ \text{kPa}$

Tehtävä 3.18.

a) Oletetaan, että kaasu käyttäytyy ideaalikaasun tavoin ja kaasun ainemäärä ei muutu. Isotermisessä prosessissa kaasun lämpötila ei muutu eli lämpötila on vakio. Tällöin kaasujen yleisen tilanyhtälön mukaan pV = vakio.
Saadaan $p = \text{vakio} \cdot \frac{1}{V}$, joten paine ja tilavuus ovat kääntäen verrannollisia.

b) Kaasun paine ja tilavuus ovat kääntäen verrannollisia, kun kaasun lämpötila on vakio. Lasketaan uusi sarake $\frac{1}{V}$ ja muodostetaan $\left(\frac{1}{V}, p\right)$-koordinaatiston kuvaaja.



Koska $\left(\frac{1}{V}, p\right)$-koordinaatiston kuvaajana on suora, voidaan todeta, että prosessi on isoterminen.

c) Kaasun tilanmuuttujia ovat ainemäärä, lämpötila, tilavuus ja paine.

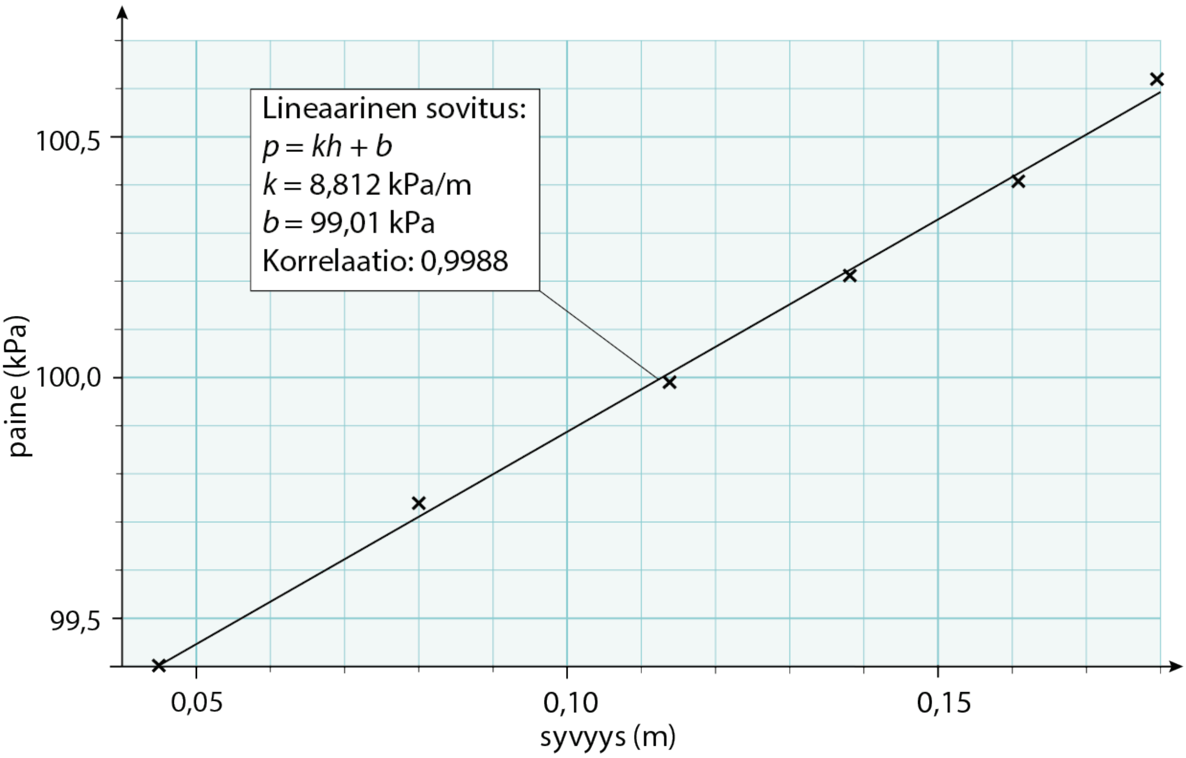
Kun sylinterissä olevaa kaasua puristetaan kanssaan, kaasun tilavuutta pienennetään, jolloin kaasuun tehdään työtä. Kaasuun tehty työ on $W = p\Delta V$. Kaasuun tehty työ kasvattaa kaasun sisäenergiaa. Tällöin kaasun lämpötila nousee. Sylinteri ei ole eristetty systeemi, joten ympäristöään lämpimämpi kaasu luovuttaa sisäenergiaansa ympäristöön. Kun kaasun tilavuutta pienennetään nopeasti, kaasun sisäenergian kasvu on suurempi kuin energia, jonka kaasu luovuttaa ympäristöön. Tällöin kaasun lämpötila nousee. Kun kaasun lämpötila nousee, kaasun rakenneosaset törmäilevät toisiinsa enemmän, jolloin kaasun paine kasvaa. Kaasun ainemäärä ei muutu, koska kaasua ei pääse pois.

Tehtävä 3.19.

Kun letku upotetaan etanolivesiseokseen, letkussa vaikuttava kokonaispaine on ilmanpaineen ja etanolivesiseoksen hydrostaattisen paineen summa

$p = p_0 + p_h$
$p = p_0 + \rho g h$.

etanolivesiseoksen tiheys saadaan (*h, p*)-koordinaatiston sovitesuoran fysikaalisena kulmakertoimena, koska $k = \rho g$. Määritetään videolta paineen arvoja eri syvyyksillä ja tehdään mittaustuloksista (*h, p*)-koordinaatistoon kuvaaja. Koska paineen ja syvyyden välillä on lineaarinen riippuvuus, sovitetaan mittausaineistoon suora.

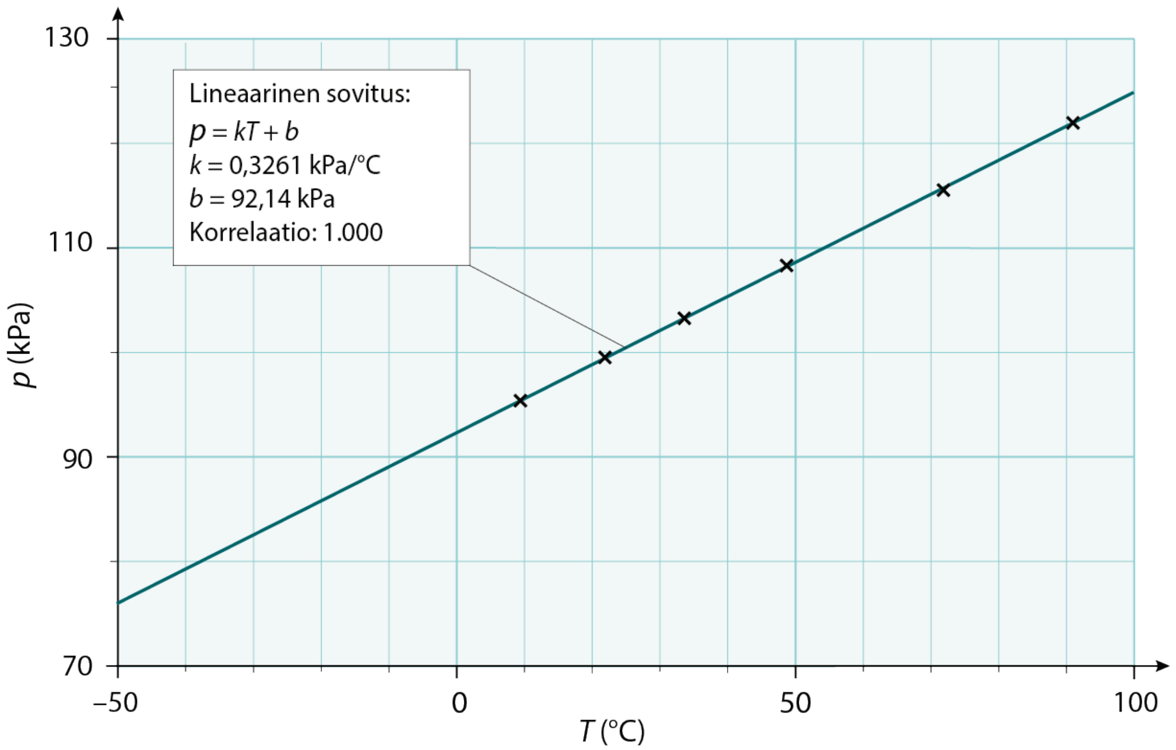


Suoran kulmakertoimeksi saadaan
k = 8,812 kPa/m = 8 812 Pa/m. Tällöin seoksen tiheys on

$$\rho = \frac{k}{g} = \frac{8\,812\,\frac{\text{Pa}}{\text{m}}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 898{,}267\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 898\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Tehtävä 3.20.

a)



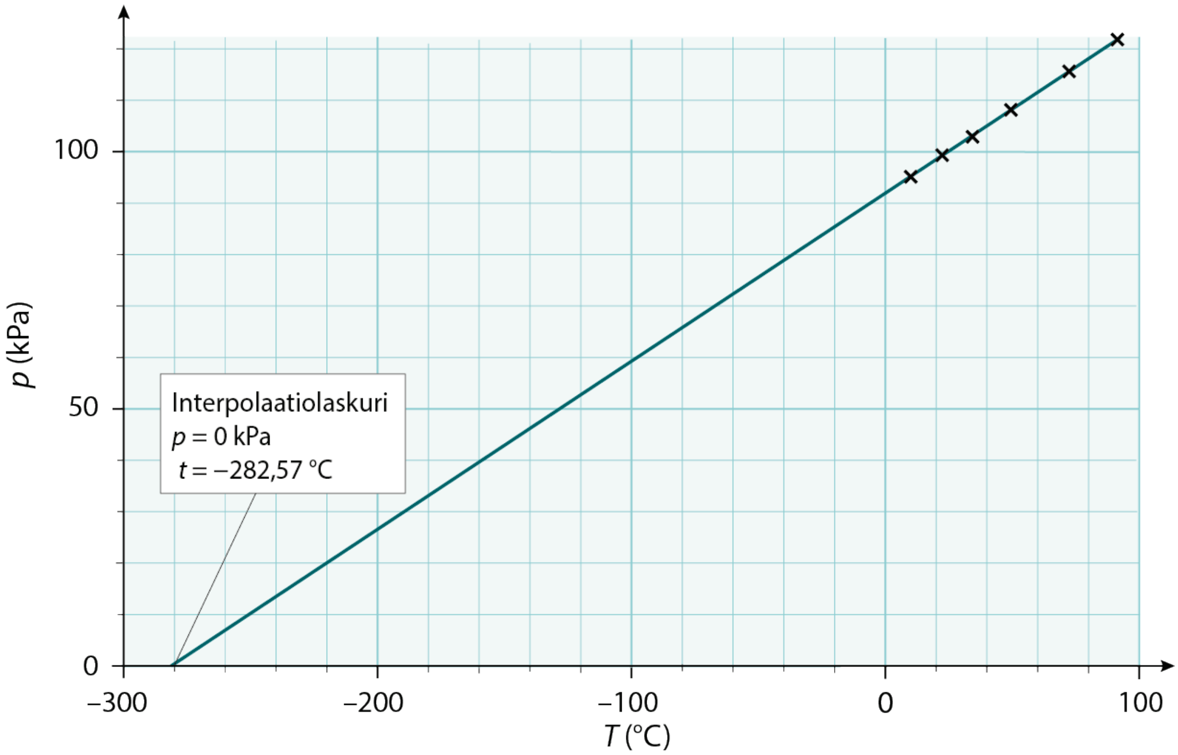
b) Oletetaan, että kaasu käyttäytyy kuten ideaalikaasu. Tällöin vakiotilavuudessa kaasu noudattaa lakia

$\frac{p}{T} = \text{vakio}$ eli p = vakio · T.

a-kohdan perusteella pisteet ovat suoralla, jota jatkamalla voidaan lukea lämpötila, kun paine on p = 88,2 kPa. Lämpötila on tuolloin t = −12,08 °C ≈ −12,1 °C.

c) Ekstrapoloidaan kuvaajaa paineen arvoon p = 0 kPa asti. Kuvaajalta voidaan lukea, että lämpötila on tuolloin

$t = -282{,}57\ °C \approx -282{,}6\ °C$.



Tehtävä 3.21.

Oletetaan, että ruiskun sisällä oleva kaasu käyttäytyy ideaalikaasun tavoin. Ideaalikaasun tilanyhtälö

$pV = nRT$

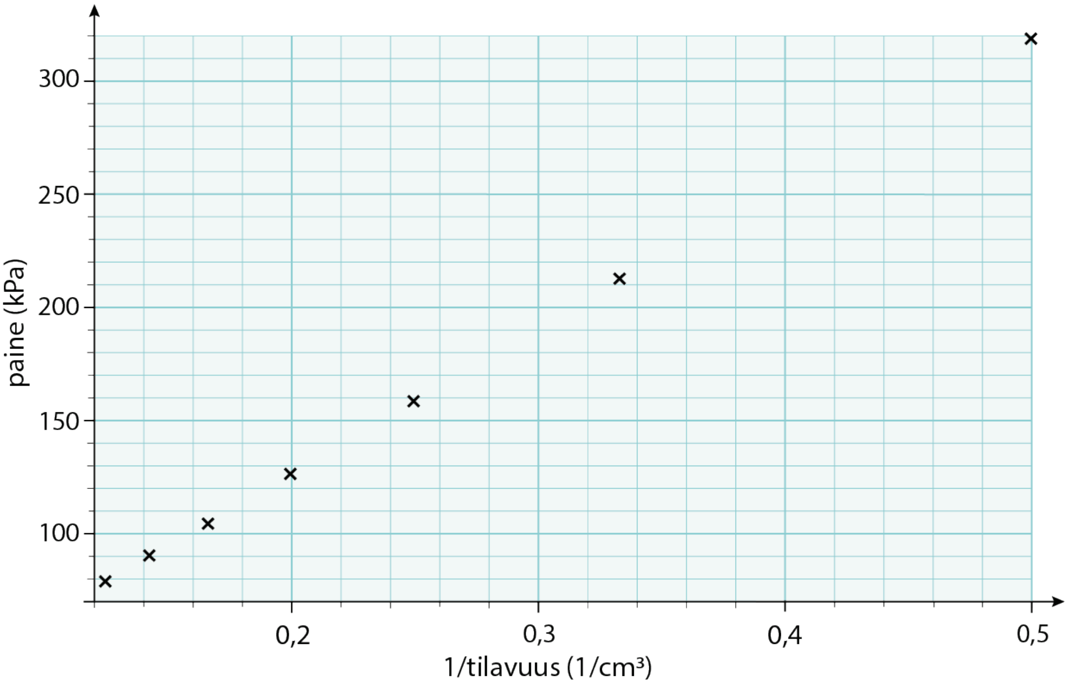
Esitetään yhtälö muodossa

$$pV = nRT \,||:V$$

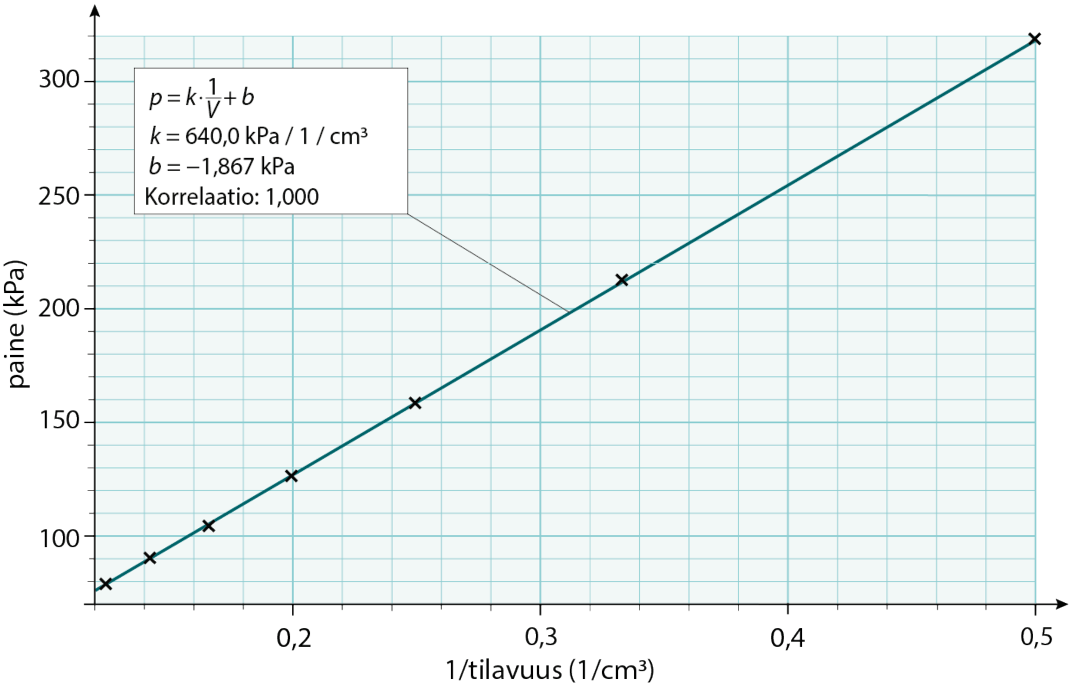
$$p = nRT\frac{1}{V}$$

Yhtälöstä voidaan päätellä, että paineen kuvaaja on suora ($1/V$, p)-koordinaatistossa. Esitetään mittaustulokset ($1/V$, p)-koordinaatistossa, eli paine tilavuuden käänteisluvun funktiona.

V (cm^3)	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
$1/V$ (cm^{-3})	0,500	0,333	0,250	0,200	0,167	0,143	0,125
p (kPa)	318	212	158	126	104	89,9	78,5



Suoran yhtälö on $p = nRT\dfrac{1}{V}$, ja suoran fysikaalinen kulmakerroin $k = nRT$.



Kulmakertoimen arvoksi saadaan $k = 640{,}0\,\dfrac{\text{kPa}}{1/\text{cm}^3}$.

Lasketaan kulmakertoimen avulla moolisen kaasuvakion arvo.

$$R = \frac{k}{nT} = \frac{640{,}0\,\dfrac{\text{kPa}}{1\,/\,\text{cm}^3}}{0{,}26\cdot 10^{-3}\ \text{mol}\cdot 293{,}15\,\text{K}}$$

$$= 8\,396{,}856\,\frac{\text{kPa}\,\text{cm}^3}{\text{mol}\,\text{K}} \approx 8{,}4\,\frac{\text{Pa}\,\text{m}^3}{\text{mol}\,\text{K}}$$

Tehtävä 3.22.

a) Lämpövoimakone muuntaa osan kuumasäiliöstä ottamastaan energiasta Q_1 mekaaniseksi energiaksi eli työksi W. Loput energiasta, Q_2, siirtyy kylmäsäiliöön. Lämpövoimakoneen energiakaavio on kaavio A.

b) Jääkaappi on lämmönsiirtokone. Lämmönsiirtokone ottaa kylmäsäiliöstä energian Q_2 ja siirtää energian Q_1 kuumasäiliöön mekaanisen energian eli työn W avulla. Jääkaapin energiakaavio on kaavio C.

c) Kaaviossa D kaikki kuumasäiliöstä otettu energia Q_1 muuttuu mekaaniseksi energiaksi eli työksi W. Tämä on mahdotonta, sillä osa energiasta menee aina hukkaan. Lämpökoneen hyötysuhde ei voi koskaan olla 100 %.

Tehtävä 3.23.

a) A

b) A

c) C

d) B

e) C

f) D

g) B

h) C

Tehtävä 3.24.

Bensiinin palamisessa vapautunut energia $Q_1 = 180$ MJ

Pakokaasujen mukana ympäristöön siirtynyt energia $Q_2 = 76$ MJ

Moottorin osien sisäenergia $Q_3 = 62$ MJ.

a) Bensiinin palaessa sen sisäenergiaa vapautuu. Vapautunut energia siirtyy pakokaasujen sisäenergiaksi. Koska palamisessa moottorin sisäosien lämpötila nousee jopa satoja asteita, osa bensiinin palamisessa vapautuneesta energiasta johtuu moottorin osien sisäenergiaksi. Pakokaasujen mukana energiaa kuljettuu moottorista ympäristöön.

b) Moottorin kuumasäiliö on moottorin sylinteri ja kylmäsäiliö on auton ympäristön ilma.

c) Auton moottorissa vapautunut energia

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + W.$$

Auton moottorin tekee lämpökoneena työn

$$W = Q_1 - Q_2 - Q_3 = 180\text{ MJ} - 76\text{ MJ} - 62\text{ MJ} = 42\text{ MJ}.$$

d) Auton moottorin hyötysuhde

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{42\,\text{MJ}}{180\,\text{MJ}} = 0{,}2333 \approx 23\,\%.$$

Tehtävä 3.25.

a) Videolla olevaan lämpövoimakoneen toimintaan liittyy lämmönsiirtymistavoista johtuminen. Energiaa luonnollisesti siirtyy lämpimästä vedestä lämpövoimakoneeseen ja siitä edelleen kylmään veteen.

b) Veden sisäenergia muuntuu lämpövoimakoneen alumiinin sisäenergiaksi. Kun koneen alumiinikennot ovat eri lämpöiset, osa lämpimän veden luovuttamasta energiasta muuntuu Peltier-kennon sähköiseksi potentiaalienergiaksi, josta energia siirtyy lämpövoimakoneen virtapiirin energiaksi. Virtapiiristä energia siirtyy sähkömoottorin sähkö- ja magneettikentän energiaksi ja siitä edelleen sähkömoottorissa olevan roottorin liike-energiaksi. Osa lämpövoimakoneen alumiinin sisäenergiasta muuntuu kylmän veden sisäenergiaksi.

c) lämpimän veden massa m_1 = 0,246 kg

kylmän veden massa m_2 = 0,258 kg

veden ominaislämpökapasiteetti c = 4190 J/(kg°C)

Videolta havaitaan, että lämpimän veden lämpötila alussa oli T_1 = 42,2 °C. Lämpimän veden lämpötila oli lämpövoimakoneen poistamishetkellä T_2 = 41,3 °C. Lämpövoimakone vastaanotti lämpimältä vedeltä energiaa enintään lämpimän veden lämpömäärän muutoksen verran

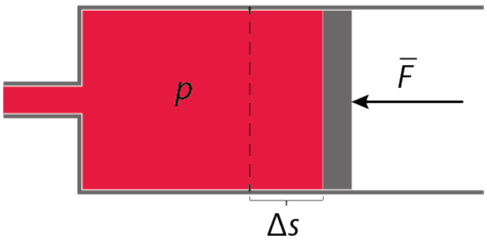
$$
\begin{aligned}
Q &= cm\Delta T = cm\left|T_2 - T_1\right| \\
&= 4\,190\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}\cdot 0{,}246\,\text{kg}\cdot\left|42{,}2\,^\circ\text{C} - 41{,}3\,^\circ\text{C}\right| \\
&= 927{,}666\,\text{J} \approx 930\,\text{J}.
\end{aligned}
$$

Todellisuudessa lämpövoimakoneen vastaanottama energia oli pienempi, sillä lämmin vesi ei ollut eristetyssä astiassa.

Tehtävä 3.26.

a) Kun mäntäpumppua puristetaan voimalla $\overline{F}$ ja mäntä siirtyy matkan Δs, tehdään työ $W = F\Delta s$. Paineen määritelmän avulla saadaan puristamiseen vaadittavan voiman suuruudeksi: $p = \frac{F}{A}$, joten $F = pA$. Kun mäntä siirtyy matkan Δs, siirtyy nestettä tilavuuden $\Delta V = A\Delta s$ verran (lieriön tilavuus).

Yhdistämällä edelliset saadaan: $W = pA\Delta s = p\Delta V$.



b) tilavuuden muutos ja $\Delta V = 70 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3$ ja

verenpaine $p = 120\ \text{mmHg} = 120 \cdot 133{,}322\ \text{Pa}$

Vasemman kammion yhden syklin aikana tekemä työ:

$$W_{\text{vasen}} = p\Delta V = 120 \cdot 133{,}322\ \text{Pa} \cdot 70 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3$$
$$= 1{,}119\,90\ \text{J}.$$

Koko sydämen tekemä työ:

$$W = W_{\text{vasen}} + W_{\text{oikea}} = W_{\text{vasen}} + \frac{W_{\text{vasen}}}{6} = \frac{7}{6}W_{\text{vasen}}$$
$$= \frac{7}{6} \cdot 1{,}119\,90\ \text{J} = 1{,}306\,56\ \text{J} \approx 1{,}3\ \text{J}.$$

Sydämen tekemä työ on 1,3 J.

c) Sydämen keskimääräinen teho:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{1{,}306\,56\ \text{J} \cdot 76}{60\ \text{s}} = 1{,}654\,97\ \text{W} \approx 1{,}7\ \text{W}.$$

Sydämen keskimääräinen teho on 1,7 W.

Tehtävä 3.27.

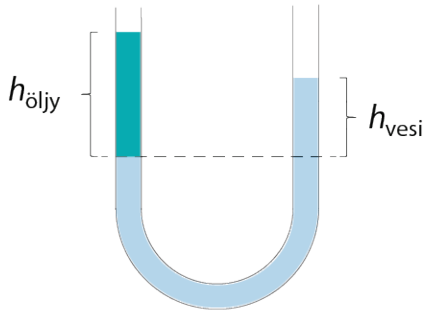
a) Jääpalan lämpötila on pienempi kuin huoneen lämpötila. Kun jääpala laitetaan ylemmän säiliön päälle, ylemmässä säiliössä olevan kaasun lämpötila pienenee. Koska kaasun tilavuus pysyy saman, kaasun paine pienenee. Koska kaasumaisen aineen lämpötila pienenee, kaasumainen aine saavuttaa kylläisen tilan pienemmällä nesteestä höyrystyneen kaasun määrällä ja tällöin nesteestä höyrystyneen kaasumaisen aineen ainemäärä pienenee.

b) Kun jääpala laitetaan ylemmän säiliön päälle, ylemmässä säiliössä olevan kaasun lämpötila pienenee. Alemman kaasusäiliön kaasu paine on suurempi kuin ylemmän kaasusäiliön kaasun paine sekä nesteen hydrostaattinen paine. Tämän seurauksena alemman säiliön kaasun paine aiheuttaa nesteeseen voiman, joka työntää nesteen ylempään säiliöön.

Tehtävä 3.28.

a) Ulkoisella ilmanpaineella ei ole vaikutusta nestepintojen korkeuseroon. Putken molemmat päät ovat avoimet, joten putken molempien päiden nestepintoihin kohdistuu ulkoisen ilmanpaineen vaikutuksesta yhtä suuri, alaspäin vaikuttava voima.

b) Paine nesteiden pinnalla on ulkoinen paine p_0 ja paine syvyydellä h kummassa tahansa aineessa on ilmanpaineen ja hydrostaattisen paineen summa $p_{kok} = p_0 + \rho g h$.



$h_{öljy} = 5{,}0\ \text{cm}$

$\rho_{öljy} = 0{,}86\ \text{kg/dm}^3$

$\rho_{vesi} = 1{,}00\ \text{kg/dm}^3$

Koska vesi on tiheämpää, on vesikerros matalampi kuin öljykerros. Kokonaispaineet kuvaan merkityllä korkeudella putken eri haaroissa ovat yhtä suuret, joten saadaan

$$\cancel{p_0} + \rho_{\text{vesi}} g h_{\text{vesi}} = \cancel{p_0} + \rho_{\text{öljy}} g h_{\text{öljy}}$$

$$\rho_{\text{vesi}} \cancel{g} h_{\text{vesi}} = \rho_{\text{öljy}} \cancel{g} h_{\text{öljy}}$$

$$h_{\text{vesi}} = \frac{\rho_{\text{öljy}} h_{\text{öljy}}}{\rho_{\text{vesi}}} = \frac{0{,}86\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 5{,}0\,\text{cm}}{1{,}00\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}} = 4{,}3\,\text{cm}$$

Silloin pintojen korkeusero on
Δh = 5,0 cm − 4,3 cm = 0,70 cm

Veden pinta on 0,70 cm alempana kuin öljypinta.

Tehtävä 3.29.

kuorman massa m = 580 kg

massan korkeuden muutos h = 0,17 m

nosturin ilmanpaine p = 9,6 bar

normaali ilmanpaine p_0 = 1,013 25 bar

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Kun hallinosturilla nostetaan, nosturin sisällä olevan kaasun tekemä työ on yhtä suuri kuin kuorman massan potentiaalienergian muutos. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi alkutilanne, jolloin kuorman massan potentiaalienergia on nolla. Tällöin

$W = E_\mathrm{p}$

$p\Delta V = mgh.$

Nosturin kaasun paine pidetään koko ajan samana, eli kyseessä on isobaarinen prosessi. Tällöin nosturin kaasun tilavuuden muutos on

$$\Delta V = \frac{mgh}{p}.$$

Oletetaan nosturin sisällä oleva kaasu sekä normaalissa ilmanpaineessa oleva kaasu ideaalikaasuksi. Lasketaan, kuinka suuri tilavuus normaalissa ilmanpaineessa olevaa kaasua tarvitaan. Isotermiselle prosessille saadaan yhtälö

$p_0V = p\Delta V.$

Yhdistämällä edelliset yhtälöt saadaan pumpattavan normaalissa ilmanpaineessa olevan kaasun tilavuus.

$$V = \frac{p\Delta V}{p_0} = \frac{mgh}{p_0} = \frac{580\,\text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}17\,\text{m}}{101\,325\,\text{Pa}} = 0{,}009\,546\,\text{m}^3 \approx 9{,}5\,\text{l}.$$

Tehtävä 3.30.

kuorman massa m = 580 kg

pienemmän sylinterin halkaisija d_1 = 12 mm

isomman sylinterin halkaisija d_2 = 38 mm

varren ja vaakatason välinen kulma α = 30°

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

pienen sylinterin kiinnityskohdan etäisyys tunkin varren kiinnityskohdasta r = 0,18 cm

voiman F etäisyys tunkin varren kiinnityskohdasta r_2 = 42 cm

Tunkin varteen liitetty sylinteri painaa tunkissa olevaa hydrauliikkaöljyä voimalla F_1. Sylinteri kohdistaa yhtä suuren voiman tunkin varteen, varren ja sylinterin kiinnityskohtaan. Voiman suunta on ylöspäin.

Tunkin sisällä oleva neste on kokoon puristumatonta. Paine leviää nesteessä tasaisesti, jolloin nesteen kohdistaa paine molempiin sylintereihin on yhtä suuri eli $p_1 = p_2$. Paineiden aiheuttamat voimat kohdistuvat sylinterien pinta-aloille. Koska sylinterit ovat paikoillaan, Newtonin II lain mukaan sylintereihin kohdistuva kokonaisvoima on nolla. Tällöin nesteen sylintereihin aiheuttama voima on yhtä suuri kuin varren pienempään sylinteriin kohdistama voima F_1 ja kuorman G suureen sylinteriin kohdistama voima. Paineiden yhtäsuuruudesta saadaan yhtälö

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{G}{A_2}.$$

Kuormalle on voimassa $G = mg$ ja pinta-aloille $A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$.

Saadaan

$$\frac{F_1}{\frac{\pi d_1^{\,2}}{4}} = \frac{mg}{\frac{\pi d_2^{\,2}}{4}}$$

$$\frac{F_1}{d_1^{\,2}} = \frac{mg}{d_2^{\,2}}.$$

Pieneen sylinteriin kohdistunut voima

$$F_1 = \frac{d_1^{\,2} mg}{d_2^{\,2}}.$$

Voima F_1 välittyy sylinteristä tunkin varteen. Tarkastellaan rajatapausta, jolloin tunkin varsi on tasapainossa pyörimisen suhteen, jolloin varteen kohdistuvien momenttien summa on nolla. Valitaan kiertopisteeksi tunkin varren kiinnityskohta, jolloin tasapainoehto momenttien suhteen on

$Fr_2 - F_1 r\cos\alpha = 0$

Tunkin varteen kohdistetun voiman suuruus on vähintään

$$F = \frac{F_1 r \cos\alpha}{r_2} = \frac{{d_1}^2 mgr \cos\alpha}{{d_2}^2 r_2}$$

$$= \frac{\left(12 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\right)^2 \cdot 580\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}18\,\text{m} \cdot \cos 30^\circ}{\left(38 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\right)^2 \cdot 0{,}42\,\text{m}} = 210{,}594\,\text{N} \approx 210\,\text{N}.$$

Tehtävä 3.31.

a) Esimerkiksi:

- Kotona ilmanpainetta voidaan mitata rasiailmapuntarilla. Rasiailmapuntarissa tapahtuu muodonmuutos, kun paineen muutos aiheuttaa voiman.

- Oppitunnilla painetta voidaan mitata tietokoneeseen liitettävällä paineanturilla, jonka toiminta perustuu kaasun paineen aiheuttamaan voimaan anturin sisällä olevassa kalvossa. Kalvon toisella puolella on tyhjiö, ja toinen puoli on ulkoisessa paineessa. Kalvon liikkuminen havaitaan anturissa jännitteen muutoksena. Tietokoneohjelma muuttaa jännitesignaalin paineen lukemaksi.

- Nesteessä vallitsevaa painetta voidaan tutkia U-putkimanometrin avulla. U-putkimanometrin toiminta perustuu siihen, että nestepinnat asettuvat U-putken haaroissa eri korkeuksille paineen mukaan. Suurempi paine painaa nestepinnan matalammalle. Paine-eron voi päätellä nestepintojen korkeuserosta.

- Auton renkaassa vallitseva ylipaine voidaan mitata bourdonputkeen perustuvan painemittarin avulla. Ylipaine aiheuttaa bourdonputkeen muodonmuutoksen, josta paine voidaan päätellä.

- Verenpaine mitataan usein verenpainemittarilla, joka perustuu vuonna 1896 kehitettyyn Riva-Roccin menetelmään. Perinteisessä verenpaineen mittauksessa olkavarren ympärille kierretään mansetti, joka puhalletaan täyteen ilmaa, jolloin se puristaa olkavarren valtimoa. Kun valtimo on puristunut, sykettä ei kuulu käsivarressa mansetin alapuolella.

- Painemittari mittaa ilmanpainetta mansetissa, Kun ilmaa päästetään mansetista pikkuhiljaa pois, painemittari ilmoittaa mansetin ilmanpaineen. Paine, jossa syke alkaa jälleen kuulua, on yhtä suuri kuin yläpaine eli systolinen paine. Sillä paineella sydän kykenee juuri ja juuri pumppaamaan verta mansetin läpi. Alapaine eli diastolinen paine saadaan, kun pulssiäänet katoavat veren päästessä kulkemaan mansetin läpi vapaasti.

- Ennen verenpainemittarin paine määritettiin elohopeapatsaan korkeuden avulla, mutta nykyään paineanturi on elektroninen. Ennen pulssia kuunneltiin stetoskoopilla, sitten verenpainemittareihin lisättiin mikrofoni. Nykyaikaiset mittarit toimivat oskillometrisella periaatteella, jossa verenpaine määritetään suoraan pulssiaallon aiheuttamien paineenvaihteluiden avulla.

b) Veden tiheys $\rho_{H_2O} = 1\,000\,\frac{kg}{m^3}$

Tasapainotilanteessa nestepatsaan alapinnalla hydrostaattinen paine on yhtä suuri kuin ilmanpaine eli $p_h = p_0$. Tästä voidaan selvittää nestepatsaan korkeus:

$$\rho g h = p_0$$

$$h = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{101\,325\,\text{Pa}}{1\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10{,}329\,\text{m} \approx 10{,}3\,\text{m}.$$

Samaan tulokseen päädytään vertailemalla nesteiden tiheyksiä.

$$\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{H_2O}} = \frac{13{,}54 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{1{,}00 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 13{,}54$$

Tämän perusteella vesipatsaasta tulee 13,54-kertainen elohopeapatsaaseen nähden: 13,54 · 0,76 m ≈ 10,3 m.

c) Säiliössä 2, sillä U-putken toinen pää on avoin. Silloin säiliössä olevan kaasun paine vastaa *h*:n korkuisen nestepatsaan hydrostaattisen paineen ja ulkoisen ilmanpaineen summaa: $p_{kaasu} = p_0 + \rho hg$.

(Säiliössä 1 paine on $p_{kaasu} = \rho hg$, sillä U-putken toinen pää on suljettu ja siellä on tyhjiö.)

4 Energia yhteiskunnassa

Harjoittele

Tehtävä 4.1.

Oikeat vastaukset:

a) A

b) C

c) B

d) C

e) D

f) C

g) B

h) A

i) D

Tehtävä 4.2.

a) Kiivihiiltä poltettaessa syntyy hiilidioksidia, rikkidioksidia, typen oksideja ja pienhiukkasia. Hiilidioksidi on merkittävä kasvihuonekaasu, jonka määrän lisääntyminen ilmakehässä voimistaa kasvihuoneilmiötä.

Vedyn palamisreaktiossa syntyy vettä. Vetyä poltettaessa ei siis vapaudu hiilidioksidia. Vesihöyrykin on kasvihuonekaasu. Ihmisten tuottaman vesihöyryn osuus on merkityksettömän pieni, kun sitä verrataan esimerkiksi veden luonnollisen haihtumisen ja sateen määrään maapallolla. Veden kiertokulku on maapallolla nopeaa. On esitetty, että haihtunut vesi tulee sateena takaisin maahan noin viikossa. Vesihöyry muodostaa ilmakehään pilviä, mikä lisää avaruudesta tulleen näkyvän valon heijastumista avaruuteen, jolloin maapallon pinnalle absorboituneen energian määrä pienenee.

b) Sekä maakaasu että uraani ovat uusiutumattomia energialähteitä, joten niiden hyödyntäminen on mahdollista vain rajallisen ajan.

Maakaasu on fossiilinen polttoaine, jonka palamisreaktiossa muodostuu hiilidioksidia. Hiilidioksidi on kasvihuonekaasu, joka voimistaa kasvihuoneilmiötä.

Maakaasu palaa fossiilisista polttoaineista puhtaimmin ilman merkittäviä hiukkaspäästöjä. Maakaasu on Suomessa tuontienergiaa, joten kriisitilanteessa maakaasun saanti voi olla epävarmaa. Maakaasun hyödyntäminen vaatii melko isoja investointeja, sillä maakaasua siirretään putkistoissa tai nesteytettynä laivoilla, jotka edellyttävät satamalta erityisen varustelutason. Maakaasua on kuitenkin melko helppo varastoida ja sen hinta on ollut muiden fossiilisten polttoaineiden tapaan melko edullinen.

Kun uraania hyödynnetään ydinvoimalaitoksessa, ei vapaudu hiilidioksidia. Siten energialähteen käyttö ei voimista kasvihuoneilmiötä. Ydinvoimalaitoksen hiilidioksidipäästöt liittyvät laitoksen rakentamisen päästöihin.

Uraania löytyy myös Suomen maaperästä, mutta toistaiseksi uraani tuodaan ulkomailta. Hyvin pienestä uraanimäärästä saadaan valtavasti energiaa. Ydinvoimalaitos tuottaa paljon energiaa tasaisesti ympäri. Käytetyt uraanisauvat ovat ydinjätettä, joita täytyy käsitellä asianmukaisesti ja joiden loppusijoittaminen on kallista. Ydinenergian mainetta ovat haitanneet ydinonnettomuudet, vaikka laskennallisesti moni muu energiantuotantotapa on pitkällä aikajänteellä aiheuttanut enemmän kuolemantapauksia ja muita haittoja. Lisäksi ydinreaktorista poistetun materiaalin väärinkäyttöön liittyy riski ydinaseiden valmistuksesta.

Tehtävä 4.3.

a) jääkaappi-pakastimen sähkönkäyttö $\frac{E}{t} = 1{,}2\,\frac{\text{kWh}}{\text{d}}$

tarkastelujakson kesto Δt_1 = 365 d

sähkön hinta $h = 0{,}40\,\frac{€}{\text{kWh}}$

Jääkaappi-pakastimen käyttö maksaa vuodessa

$$h\frac{E}{t}\Delta t_1 = 0{,}40\,\frac{€}{\text{kWh}} \cdot 1{,}2\,\frac{\text{kWh}}{\text{d}} \cdot 365\,\text{d} = 175{,}20\,€.$$

b) sähkökiukaan teho P = 6,0 kW

kiukaan käyttöaika $\Delta t_2 = 50\,\text{min} = \frac{50}{60}\,\text{h}$

suihkun energiantarve $\frac{E}{t} = 0{,}50\,\frac{\text{kWh}}{\text{min}}$

Merkitään suihkun käyttöaikaa Δt_3. Kun kiukaan lämmittämisessä tarvittu energia on yhtä suuri kuin suihkuveden lämmittämiseen tarvittava energia, saadaan

$$P\Delta t_2 = \frac{E}{t}\Delta t_3$$

$$\Delta t_3 = \frac{P\Delta t_2}{\frac{E}{t}} = \frac{6{,}0\,\text{kW} \cdot \frac{50}{60}\,\text{h}}{0{,}50\,\frac{\text{kWh}}{\text{min}}} = 10\,\text{min}.$$

Saunan lämmittämiseen käytetyllä energialla voi olla suihkussa 10 minuuttia.

Tehtävä 4.4.

lämpökoneen luovuttaman teho P_{anto} = 5 600 W

lämpökoneen hyötysuhde η = 0,72

käyttöaika t = 95 min = 5 700 s

Lämpökoneen hyötysuhde

$$\eta = \frac{E_{\text{anto}}}{E_{\text{otto}}} = \frac{P_{\text{anto}}t}{E_{\text{otto}}}.$$

Lämpösäiliöstä siirtyy koneelle energiaa

$$E_{\text{otto}} = \frac{P_{\text{anto}}t}{\eta} = \frac{5\,600\ \text{W} \cdot 5\,700\ \text{s}}{0{,}72} = 44\,333\,333{,}33\ \text{J} \approx 44\ \text{MJ}.$$

Tehtävä 4.5.

a) Jos kaikki lämmitykseen tarvittava energia tuotetaan ilmalämpöpumpulla ja sääolosuhteet ovat sellaiset, että COP-arvo on 5, tarvitaan sähköverkosta energiaa vain viidesosa lämmitykseen tarvittavasta energiasta eli

$$\frac{1}{5}\cdot 1200\,\text{kWh} = 240\,\text{kWh}.$$

Tällöin ostettavan energian määrässä säästetään 1200 kWh − 240 kWh = 960 kWh. Taloudellisesti tämä tarkoittaa 960 kWh · 0,15 €/kWh = 144 € ≈ 140 € säästöä kuukaudessa.

Kotitalous voi säästää 140 €/kk.

b) Syyskuu on leuto kuukausi, jolloin pumpun COP-arvo on korkea, toisin kuin talvikuukausina. Yksittäisen pumpun teho ei talvikuukausina välttämättä riitä lämmittämään koko asuntoa, vaikka COP-arvo olisikin korkea. Taloudellista säästöä laskiessa tulee huomioida myös ilmalämpöpumpun osto- ja asennushinta. Peruslämmitystä ei kannata kytkeä kokonaan pois päältä. Lämmityksen poistaminen saattaa aiheuttaa kosteuden tiivistymisen kylmiin seinäpintoihin. Pahimmassa tapauksessa lämmityksen poistamisen saa aikaan rakennuksen homehtumisen.

c) Muita käyttökelpoisia tapoja on muun muassa:

- Huoneiston lämpötilan lasku. Huoneen sisäenergia on sitä pienempi, mitä pienempi on huoneen lämpötila. Mitä pienempi on huoneen lämpötila, sitä vähemmän energiaa tarvitaan ylläpitämään huone tietyssä lämpötilassa.

- Ovien ja ikkunoiden kunnollinen tiivistäminen ja tiivisteiden puhtaanapito. Lämpimän huoneilman sisäenergiaa siirtyy huoneesta ulos virtaavan ilman mukana. Mitä vähemmän ilmaa virtaa talosta ulos, sitä vähemmän huoneilmaa pitää lämmittää, sillä ulosvirranneen huoneilman tilalle tulee kylmää korvausilmaa.

- Lyhyet suihkut. Mitä pidempään on suihkussa, sitä enemmän tarvitaan lämmintä vettä. Veden lämmittäminen sitoo paljon energiaa, sillä veden ominaislämpökapasiteetti melko suuri. Mitä enemmän tarvitaan lämmintä vettä, sitä enemmän energiaa tarvitaan.

- Lattian kuivaaminen suihkun jälkeen. Vesi vaatii höyrystyäkseen energiaa, ja veden ominaishöyrystymislämpö on melko suuri. Kylpyhuoneissa on yleensä lattialämmitys, joka lämmittää suihkutilan lattian. Kun kylpyhuoneen lattialla on vettä, lattiasta siirtyy höyrystyvälle vedelle energiaa ja lattia viilenee. Tällöin lattia tarvitsee lisää energiaa, jos sen lämpötila pysyy vakiona. Lattialämmitys tuottaa lattialle energiaa, mikä lisää energian tarvetta.

- Ruokien viilentäminen ennen jääkaappiin laittoa. Ruuan viilentäminen jääkaapilla vaatii sähköverkosta otettua energiaa.

- Tiskien ja pyykkien peseminen siten, että pesukoneet ovat täysiä. Tiskikone ja pyykinpesukone lämmittävät käyttämänsä veden. Mitä useammin koneita käyttää, sitä enemmän energiaa tarvitaan koneiden veden lämmittämiseen.

Tehtävä 4.6.

a) Generaattori on laite, jolla tuotetaan sähköä sähkömagneettista induktiota hyödyntämällä. Yksinkertaisessa generaattorissa käämi pyörii magneettikentässä tai magneetti pyörii jaksottaisesti käämien lähellä. Tällöin käämin läpi kulkeva magneettivuo muuttuu jaksollisesti ja käämiin indusoituu jaksollisesti muuttuva vaihtojännite.

b) aggregaatin sähköteho P = 8 800 W

aggregaatin käyttöaika t = 2,5 h = 2,5 · 60 · 60 s = 9 000 s

biodieselin massa m = 10,8 kg,

biodieselin lämpöarvo H = 40,0 MJ/kg = 40,0 · 10^6 J/kg

Aggregaatin hyötysuhde saadaan vertaamalla aggregaatin tuottamaa energiaa traktorin käyttämään energiaan

$$\eta = \frac{E_{\text{aggregaatti}}}{E_{\text{traktori}}} = \frac{Pt}{Hm} = \frac{8\,800\ \text{W} \cdot 9\,000\ \text{s}}{10{,}8\ \text{kg} \cdot 40{,}0 \cdot 10^6\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 0{,}183\,33 \approx 18\ \%$$

Sähköntuotannon hyötysuhde oli 18 %.

c) aggregaatin sähköteho P = 8 800 W

aggregaatin jännitteen tehollisarvo U = 400 V

Aggregaatin sähköteho on $P = UI$. Sähkövirran tehollisarvo on

$$I = \frac{P}{U}.$$

Generaattorin tuottama sähkövirta vaihtelee sähkövirran huippuarvojen välillä. Sähkövirran tehollisarvon ja huippuarvon välillä on voimassa $I = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$.

Sähkövirran huippuarvo on

$$i_0 = \sqrt{2}\frac{P}{U} = \sqrt{2} \cdot \frac{8\,800\ \text{W}}{400\ \text{V}} = 31{,}11\ \text{A} \approx 31\ \text{A}.$$

Tehtävä 4.7.

pudotuskorkeus h = 30 m

virtausnopeus kuutiometreinä $\frac{\Delta V}{\Delta t}=750\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

veden tiheys ρ = 1 000 kg/m^3

a) Kun vesi virtaa voimalaitoksen kohdalla, painovoima tekee putoamisessa työtä. Työ kasvattaa veden liike-energiaa, eli veden nopeus kasvaa samalla kun vesi virtaa kohti alhaalla sijaitsevaa voimalan turbiinia. Toisin sanoen veden potentiaalienergiaa muuntuu veden liike-energiaksi. Kun vesi kulkee edelleen turbiinin läpi, veden liike-energiaa muuntuu turbiinin liike-energiaksi.

b) Veden virtausnopeus kilogrammoina saadaan ratkaistua, kun veden tiheys tunnetaan

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{\rho \Delta V}{\Delta t}=750\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\cdot 1\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}=750\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Vuorokaudessa vettä kulkee voimalaitoksessa

$$\Delta m=750\,000\frac{\text{kg}}{\text{s}}\cdot 3\,600\frac{\text{s}}{\text{h}}\cdot 24\,\text{h}=6{,}48\cdot 10^{10}\,\text{kg}.$$

c) Veden potentiaalienergian muutos vuorokaudessa on

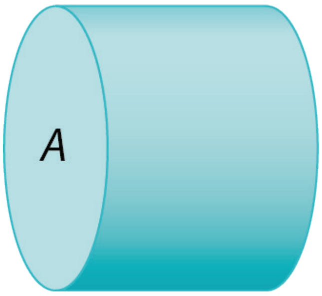
$$E_\mathrm{p} = mgh = 6{,}48 \cdot 10^{10}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 30\ \mathrm{m}$$

$$= 1{,}907\,064 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J} \approx 19\ \mathrm{TJ}.$$

Yhden vuorokauden aikana koskessa virtaavalla vedellä voisi tuottaa energiaa 19 TJ, jos vesivoimalan hyötysuhde olisi 100 %.

Tehtävä 4.8.

a) Tuulivoimalan liikkuvat roottorin lavat muodostavat ympyränmuotoisen pyyhkäisypinta-alan.



Pinta-alan A läpi ajassa Δt nopeudella v kulkeneen ilman tilavuus on $V = As = Av\Delta t$.

Läpi kulkevan ilmavirran massa $m = \rho V = \rho Av\Delta t$.
Ilmavirran liike-energian teho on

$$P = \eta \frac{E_K}{\Delta t} = \eta \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\Delta t} = \eta \frac{\frac{1}{2}\rho Av\Delta t v^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}\eta\rho A v^3 = \frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3,$$

jossa η on voimalan hyötysuhde, ρ on ilman tiheys, r on tuuliturbiinin lavan pituus ja v on tuulen nopeus. Teho siis riippuu tuulen nopeuden kolmannesta potenssista, $P \sim v^3$.

b) tuulivoimalan hyötysuhde η = 0,50

ilman tiheys ρ = 1,225 kg/m^3

lavan pituus r = 60 m

tuulen nopeus v = 15 m/s

Tuulivoimalan teho

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3 \\
&= \frac{1}{2}\cdot 0{,}50\cdot 1{,}225\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot\pi\cdot(60\,\text{m})^2\cdot\left(15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^3 \\
&= 1\,1689\,669{,}914\ \text{W} \approx 12\,\text{MW}.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 4.9.

veden tilavuus $V = 2\,000$ l

veden lämpötila alussa $T_1 = 6{,}0$ °C

tulipesän teho $P = 30$ kW

puiden lämpöarvo $H = 18$ MJ/kg

kuivan puun tiheys $\rho_{\text{puu}} = 520\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

veden ominaislämpökapasiteetti $c = 4\,190\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$

veden tiheys $\rho_{\text{vesi}} = 1{,}0$ kg/l

a) veden loppulämpötila $T_2 = 38$ °C

veden lämpötilan muutos
$\Delta T = T_2 - T_1 = 38\ °\text{C} - 6{,}0\ °\text{C} = 32\ \text{K}$

kylpytynnyrin veden lämmittämisen hyötysuhde
$\eta = 0{,}75$

Kylpytynnyrin luovuttama energia on yhtä suuri kuin veden vastaanottama energia.

$E_{\text{kylpytynnyri}} = Q_{\text{vesi}}$

$\eta Q_{\text{puu}} = Q_{\text{vesi}}$

$\eta Pt = cm\Delta T$

Lämmitysaika

$$t = \frac{cm\Delta T}{\eta P}$$

$$t = \frac{4\,190\,\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 2\,000\,\text{l} \cdot 1{,}0\,\frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 32\,\text{K}}{0{,}75 \cdot 30\,000\,\text{W}} = 11\,918{,}222\,\text{s} \approx 3\ \text{h}.$$

b) poltetun puun määrä

$$Q_{puu} = Hm$$

$$m_{puu} = \frac{Q_{puu}}{H} = \frac{Pt}{H}$$

poltetun puun tilavuus $V_{\text{puu}} = \frac{m_{\text{puu}}}{\rho_{\text{puu}}}$

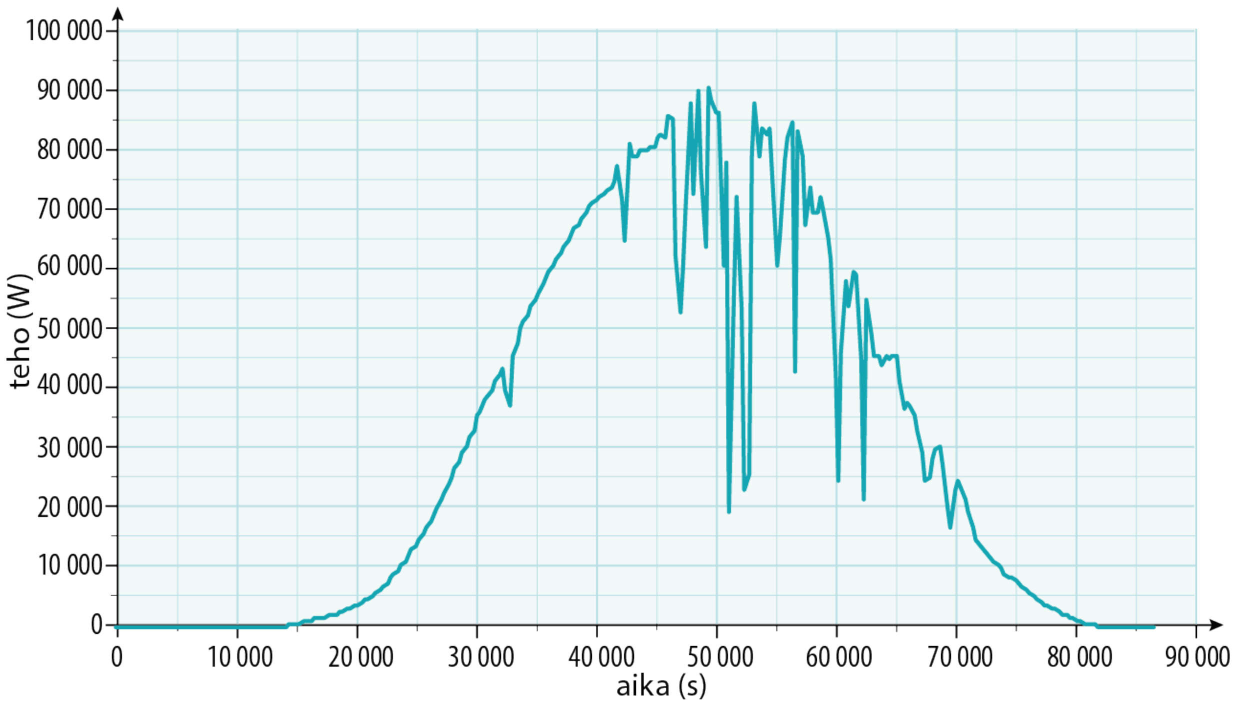
Syntyneen hiilidioksidin määrä

$$m_{CO_2} = 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} V_{\text{puu}} = 1\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{m_{\text{puu}}}{\rho_{\text{puu}}}$$

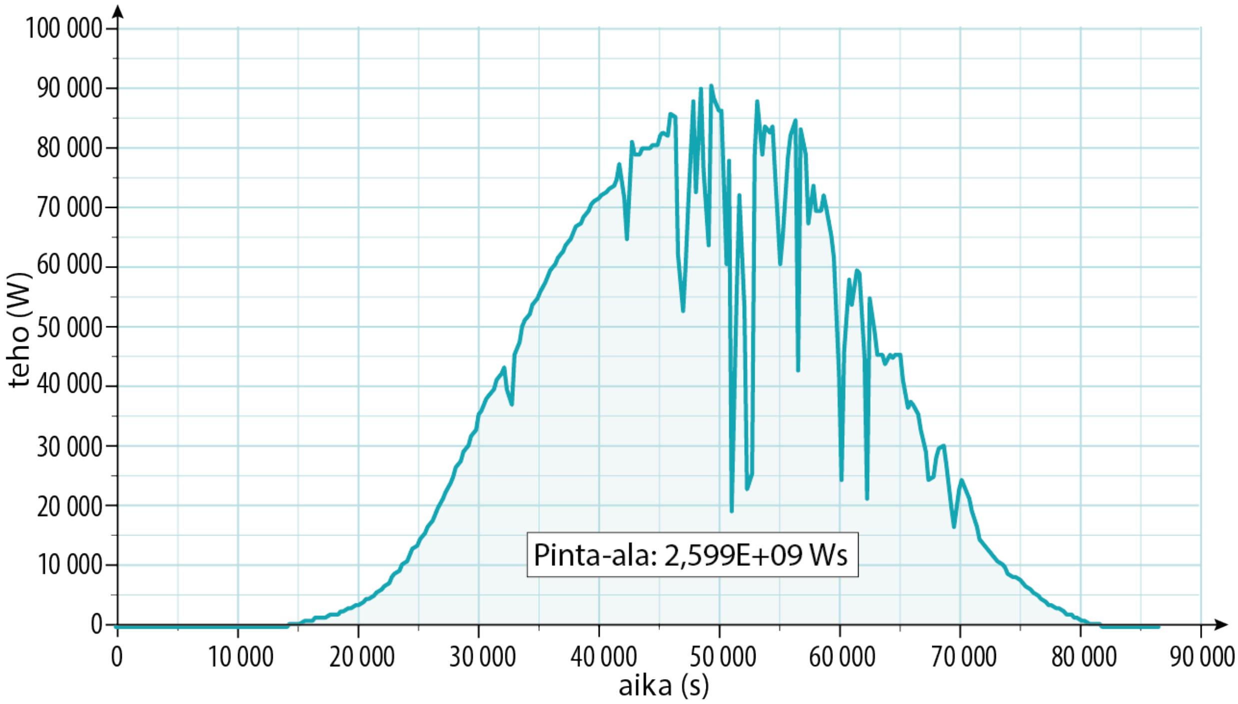
$$m_{CO_2} = 1\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{Pt}{H\rho_{\text{puu}}} = 1\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{30\,000\,\text{W} \cdot 3\,600\,\text{s}}{18 \cdot 10^6\,\frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 520\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 11{,}538\,\text{kg} \approx 12\,\text{kg}.$$

Tehtävä 4.10.

a)



b) Aurinkosähköjärjestelmän energia on $E = Pt$. Kun kuvaaja on laadittu (t, P)-koordinaatistoon, energia saadaan kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta.



Aurinkosähköjärjestelmän tuottama energia on

$E = 2{,}599 \cdot 109$ J = 721,944 kWh ≈ 720 kWh.

c) Aurinkosähköjärjestelmän teho riippuu paneeleille tulevan säteilyn määrästä. Kuvaajassa olevat kuopat aiheutuvat pilvistä. Pilvet vähentävät aurinkopaneeleille tulevan säteilyn määrää ja aurinkosähköjärjestelmän sähköteho pienenee.

Tehtävä 4.11.

a) Maapallon säteilytasapaino kuvaa Auringosta Maahan tulevan ja Maasta lähtevän säteilyn energian erotusta. Jos Maasta lähtevän säteilyn energia on pienempi kuin Maahan tulevan säteilyn energia, Maa lämpenee. Kasvihuoneilmiön voimistuminen tarkoittaa, että maapallon ilmakehä absorboi Maan emittoimaa säteilyä enemmän kuin ennen.

b) Albedo kuvaa sitä, kuinka suuren osan säteilystä pinta heijastaa takaisin. Esimerkiksi jos aineen albedo on 0,9 niin 90 % pintaan osuneesta säteilystä heijastuu takaisin.

c) Jäätiköiden sulaminen on ilmastonmuutosta vahvistava palautemekanismi. Kun lumi- tai jääpeite vähenee, Maan albedo pienenee, koska merivesi ja paljas maanpinta absorboivat säteilyä aiempaa enemmän. Tämä nostaa Maan pintakerroksen lämpötilaa, jolloin maanpinta lähettää suuremmalla teholla infrapunasäteilyä. Albedo pienenee myös siksi, että jäätiköt tummuvat sulaessaan, kun jään sisälle jääneet tuhka ja lika tulevat esiin. Kun jäätikkö sulaa, jäästä, maan pinnasta ja meristä vapautuu hiilidioksidia ja metaania. Sulaminen vapauttaa ilmakehään myös vesihöyryä. Hiilidioksidin, metaanin ja vesihöyryn määrä alailmakehässä kasvaa, mikä lisää maapallon emittoiman infrapunasäteilyn absorptiota ja alailmakehän lämpötila kasvaa entisestään.

Tehtävä 4.12.

a) Halkojen palamisessa vapautunut energia siirtyy ensin palokaasujen sisäenergiaksi. Kuuma palokaasu virtaa takan sisällä ja mm. säteilee energiaa takan materiaaliin. Osa energiasta poistuu kuljettumalla palokaasujen mukana, kun palokaasut poistuvat savupiippua pitkin ulos talosta.

b) Takan lämpökapasiteettiin vaikuttavat takan materiaalin ominaislämpökapasiteetti ja takan massa. Mitä suurempia ne ovat, sitä suurempi on takan lämpökapasiteetti.

c) halkojen massa $m = 12{,}4\ \text{kg}$

takan hyötysuhde $\eta = 0{,}68$

takan lämpötila alussa $T_1 = 21\ ^\circ\text{C}$

takan lämpötila lopussa $T_2 = 64\ ^\circ\text{C}$

halkojen lämpöarvo $H = 18{,}3\ \text{MJ/kg}$

Takan lämpötila muuttui
$\Delta T = T_2 - T_1 = 64\ ^\circ\text{C} - 21\ ^\circ\text{C} = 43\ ^\circ\text{C}$.

Puun palamisessa vapautunut takkaan siirtynyt energia on yhtä suuri kuin takan vastaanottama energia

$Q_{\text{puu, anto}} = Q_{\text{takka}}$

$Q_{\text{anto}} = C\Delta T$.

Takan hyötysuhteesta saadaan puun palamisessa takkaan siirtynyt energia

$$\eta = \frac{Q_{\text{anto}}}{Q_{\text{otto}}}$$

$Q_{\text{anto}} = \eta Q_{\text{otto}}$.

Puun palamisessa vapautuva energia $Q_{\text{otto}} = Hm$.

Takan lämpökapasiteetti voidaan ratkaista edellisten yhtälöiden perusteella

$\eta Hm = C\Delta T$

$$C = \frac{\eta Hm}{\Delta T} = \frac{0{,}68 \cdot 18{,}3 \cdot 10^{6}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 12{,}4\ \text{kg}}{43\ {}^{\circ}\text{C}} = 3{,}5885 \cdot 10^{6}\ \frac{\text{J}}{{}^{\circ}\text{C}} \approx 3{,}6\ \frac{\text{MJ}}{{}^{\circ}\text{C}}.$$

Takan lämpökapasiteetti oli 3,6 MJ/°C eli 3,6 MJ/K.

Tehtävä 4.13.

pellettipolttimen teho P_1 = 25 000 W

pellettipolttimen teho, jolla poltin ottaa energiaa sähköverkosta P_2 = 35 W

veden tilavuus V = 2 500 l

veden lämpötilan muutos ΔT = (75 − 42) °C = 33 °C

polttimen hyötysuhde η = 0,89

veden tiheys ρ = 1 000 kg/m^3

pellettien lämpöarvo H = 19,1 MJ/kg

veden ominaislämpökapasiteetti $c = 4\,190\,\frac{\text{J}}{\text{kg°C}}$

a) Energian säilymislain mukaan pellettipolttimon luovuttama energia on yhtä suuri kuin veden vastaanottama energia. Hyötysuhteesta saadaan $\eta = \frac{Q}{E}$, joten

$\eta E = Q$

$\eta P_1 t = cm\Delta T$

$$t = \frac{cm\Delta T}{\eta P_1} = \frac{c\rho V\Delta T}{\eta P_1}$$

$$= \frac{4\,190\,\frac{\text{J}}{\text{kg°C}} \cdot 1\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2{,}500\,\text{m}^3 \cdot 33\,\text{°C}}{0{,}89 \cdot 25\,000\,\text{W}}$$

$$= 15\,535{,}955\,\text{s} \approx 4{,}3\,\text{h}.$$

b) Polttimen sähköverkosta ottama energia

$E_2 = P_2 t = 35\ \text{W} \cdot 15\ 535{,}955\ \text{s} = 543\ 758{,}4\ \text{J}$
$= 0{,}15104\ \text{kWh}$
$\approx 0{,}15\ \text{kWh}.$

c) Polttimen hyötysuhde $\eta = \frac{E_\text{a}}{E_o} = \frac{Q}{E} = \frac{Q}{Hm}$.

Saadaan

$$\eta H m = Q$$
$$\eta H m = c m \Delta T.$$

Pellettejä tarvitaan

$$m_\text{p} = \frac{c m_\text{v} \Delta T}{\eta H} = \frac{c \rho V \Delta T}{\eta H} = \frac{4\,190\ \frac{\text{J}}{\text{kg°C}} \cdot 1\,000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2{,}500\ \text{m}^3 \cdot 33\ \text{°C}}{0{,}89 \cdot 19{,}1 \cdot 10^6\ \text{W}}$$
$$m_\text{p} = 20{,}335\ \text{kg} \approx 20\ \text{kg}.$$

Tehtävä 4.14.

meriveteen sitoutunut energia $E = 1{,}3 \cdot 10^{22}$ J,

merien pinta-alaa $A = 3{,}6 \cdot 10^{8}\ \mathrm{km}^2 = 3{,}6 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^2$ ja

syvyyttä h = 3 700 m. Meriveden tiheys on $\rho = 1\,030\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$,

tilavuuden lämpötilakerroin $\gamma = 1{,}37 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$ ja

ominaislämpökapasiteetti $c = 3{,}96\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\ K}} = 3\,960\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}}$.

Meriveden massa saadaan tiheyden avulla: $m = \rho V$, jossa tilavuus V voidaan arvioida valtamerten pinta-alan ja syvyyden avulla: $V = Ah$. Nämä yhdistämällä saadaan $m = \rho Ah$.

Meriin sitoutuvan lämpömäärän vaikutusta merien keskimääräiseen lämpötilaan voidaan arvioida seuraavasti:

$$Q = cm\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{Q}{cm} = \frac{Q}{c\rho Ah} = \frac{1{,}3 \cdot 10^{22}\ \mathrm{J}}{3\,960\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}} \cdot 1\,030\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^2 \cdot 3\,700\ \mathrm{m}}$$

$$= 2{,}392\,80 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K} \approx 0{,}0024\ \mathrm{K}$$

Meriveden keskimääräinen lämpötila kohoaa siten vuodessa 0,0024 kelviniä tai celsiusastetta.

Meriveden lämpeneminen aiheuttaa lämpölaajenemisen $\Delta V = \gamma V \Delta T$, jossa alkuperäinen tilavuus on $V = Ah$ ja tilavuuden muutos on $\Delta V = A\Delta h$. Pinta-ala pysyy samana, joten se supistuu lausekkeesta pois:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \gamma V \Delta T \\
\cancel{A}\Delta h &= \gamma \cancel{A} h \Delta T \\
\Delta h &= \gamma h \Delta T = 1{,}37 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\mathrm{K}} \cdot 3\,700\ \mathrm{m} \cdot 2{,}392\,80 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K} \\
&= 1{,}2129 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \approx 1{,}2\ \mathrm{mm}
\end{aligned}$$

Merenpinnan korkeus nousee 1,2 mm vuodessa.

Huom. Jos otetaan huomioon tekijät, jotka vaikuttivat lämpötilan muutokseen, saadaan

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \gamma V \Delta T \\
\cancel{A}\Delta h &= \gamma \cancel{A}\cancel{h} \frac{Q}{c\rho A\cancel{h}} \\
\Delta h &= \frac{\gamma Q}{c\rho A},
\end{aligned}$$

eli meriveden pinnannousu ei riipu merien syvyydestä. Sillä kuinka syvään kerrokseen lämpömäärä sitoutuu ei siis ole merkitys meriveden lämpölaajenemisen kannalta.

Tehtävä 4.15.

a) Vesivoimala tuottaa energiaa tuulivoimalaa tasaisemmin ja vesivoimalan energiantuotantoa voidaan säädellä patoluukkujen avulla. Tuulivoimala tuottaa sähköä vain, kun tuulee sopivasti. Molempien näiden sähköntuotantotapojen etu on se, että ne eivät aiheuta hiilidioksidipäästöjä käytön aikana.

   Tuulivoimala voidaan rakentaa paikkaan, jossa sähköä ei ole, esimerkiksi saaristoon. Vesivoimala tarvitsee aina virtaavan veden ja veden potentiaalienergian muutoksen. Siksi vesivoimala vaatii patoaltaita, jotka aiheuttavat ympäristöhaittaa yläjuoksulle. Vastaavasti alajuoksulla virtaava vesi aiheuttaa joen varsien maa-alueiden vajoamista jokiuomiin. Tuulivoimaloiden käytössä ei ole tätä ongelmaa.

b) Kun vesi putoaa, painovoima tekee työtä. Veden liike-energia ja nopeus kasvavat, kun vesi putoaa kohti alhaalla sijaitsevaa voimalan turbiinia.

Tehtävä 4.16.

pudotuskorkeus h = 6,1 m

virtausaika t = 7,5 h

virranneen veden tilavuus $V = 9{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^3$

veden tiheys $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m}^3$

a) Veden potentiaalienergian muutos 7,5 tunnin aikana on

$$\begin{aligned} E_\mathrm{p} &= mgh = \rho Vgh \\ &= 1{,}0 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^3 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 6{,}1\ \mathrm{m} \\ &= 580{,}4577 \cdot 10^9\ \mathrm{J} \approx 580\,\mathrm{GJ}. \end{aligned}$$

b) Voimalaitoksen hyötysuhde η = 0,42

Voimalaitos ottaa energiaa veden potentiaalienergiasta ja siirtää energiaa sähköverkkoon. Hyötysuhteen avulla.

$$\eta = \frac{E_{\mathrm{anto}}}{E_{\mathrm{otto}}} = \frac{E_{\mathrm{a}}}{E_{\mathrm{o}}} = \frac{P_{\mathrm{a}}}{P_{\mathrm{o}}}.$$

Antotehoksi saadaan

$$P_{\mathrm{a}} = \eta P_{\mathrm{o}}.$$

Tehon ja energian välillä on yhtälö $E = Pt$.
Vesivoimalaitoksen antoteho on

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{a}} &= \eta \frac{E_{\mathrm{o}}}{t} = \eta \frac{\rho V g h}{t} \\ &= 0{,}42 \cdot \frac{1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{m^3} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 6{,}1\,\mathrm{m}}{7{,}5 \cdot 3\,600\,\mathrm{s}} \\ &= 9{,}029 \cdot 10^6\ \mathrm{W} \approx 9{,}0\,\mathrm{MW}. \end{aligned}$$

c) Omakotitalon energian tarve E_{t} = 18 000 kWh

Voimalaitoksen tuottama energia on yhtä suuri kuin omakotitalon vastaanottama energia

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{a}} &= E_{\mathrm{t}} \\ P_{\mathrm{a}} t &= E_{\mathrm{t}}. \end{aligned}$$

Aika, joka tarvitaan omakotitalon energian tuottoon b-kohdan tehon tuloksen mukaan

$$t = \frac{E_{\mathrm{t}}}{P_{\mathrm{a}}} = \frac{18\,000\,000\,\mathrm{Wh}}{9{,}029 \cdot 10^6\ \mathrm{W}} = 1{,}9935\,\mathrm{h} \approx 2{,}0\ \mathrm{h}.$$

Tehtävä 4.17.

vesivoimalan veden pudotuskorkeus h = 8,2 m

veden virtaama $\frac{\Delta V}{\Delta t} = 460\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

tuulivoimalan teho P_t = 5,6 MW

tuulivoimalan lavan pituus r = 89 m

a) Veden tiheys ρ_v = 1 000 kg/m^3

Vettä virtaa sekunnissa

$$m = \rho_\text{v} V = 1\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 460\,\text{m}^3 = 460\,000\,\text{kg}.$$

Veden potentiaalienergian muutos padossa

$$E_\text{p} = mgh = 460\,000\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 8{,}2\text{ m} = 37\,003\,320\text{ J} = 37\text{ MJ}.$$

b) Jos kaikki veden potentiaalienergia muuntuu veden liike-energiaksi, on

$$E_\text{p} = E_\text{k}$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Veden nopeus putoamisen jälkeen

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8{,}2\,\text{m}} = 12{,}68\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 13\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) tuulivoimalan hyötysuhde η = 0,41

ilman tiheys ρ_i = 1,23 kg/m^3

Tuulivoimalan teho on $P = \frac{1}{2}\eta\rho_i \pi r^2 v^3$.

Tällöin 5,6 MW tuottoteholla pitää tuulen nopeuden olla

$$v^3 = \frac{2P}{\eta\rho_i \pi r^2}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{2P}{\eta\rho_i \pi r^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 5{,}6 \cdot 10^6 \text{ W}}{0{,}41 \cdot 1{,}23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot (89 \text{ m})^2}}$$

$$= 9{,}6279 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 9{,}6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

d) Tarkastellaan vesivoimalan tehoa tuulivoimalan tehoon nähden, jolloin saadaan tarvittavien tuulivoimaloiden lukumäärä n.

Oletetaan, että voimaloiden hyötysuhteet η ovat yhtä suuret, jolloin n kappaletta tuulivoimalan tehoa on yhtä suuri kuin vesivoimalan teho.

$$nP_t = P_v.$$

Vesivoimalan teho

$$P_\mathrm{v} = \frac{\Delta E_\mathrm{v,anto}}{\Delta t} = \frac{\eta \Delta E_\mathrm{v,otto}}{\Delta t} = \frac{\eta \Delta mgh}{\Delta t}$$
$$= \frac{\Delta V \eta \rho_\mathrm{v} gh}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}\eta \rho_\mathrm{v} gh.$$

Tuulivoimalan teho on

$$P_\mathrm{t} = \frac{1}{2}\eta \rho_\mathrm{i} \pi r^2 v^3.$$

Tarvittavien tuulivoimaloiden määrä

$$n = \frac{P_\mathrm{v}}{P_\mathrm{t}} = \frac{\frac{\Delta V}{\Delta t}\cancel{\eta}\rho_\mathrm{v} gh}{\frac{1}{2}\cancel{\eta}\rho_\mathrm{i}\pi r^2 v^3} = \frac{\frac{\Delta V}{\Delta t}\rho_\mathrm{v} gh}{\frac{1}{2}\rho_\mathrm{i}\pi r^2 v^3}$$
$$= \frac{460\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \cdot 1\,000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 8{,}2\,\mathrm{m}}{\frac{1}{2} \cdot 1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \pi \cdot (89\,\mathrm{m})^2 \left(8{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^3}$$
$$= 3{,}671\,79 \approx 3{,}7.$$

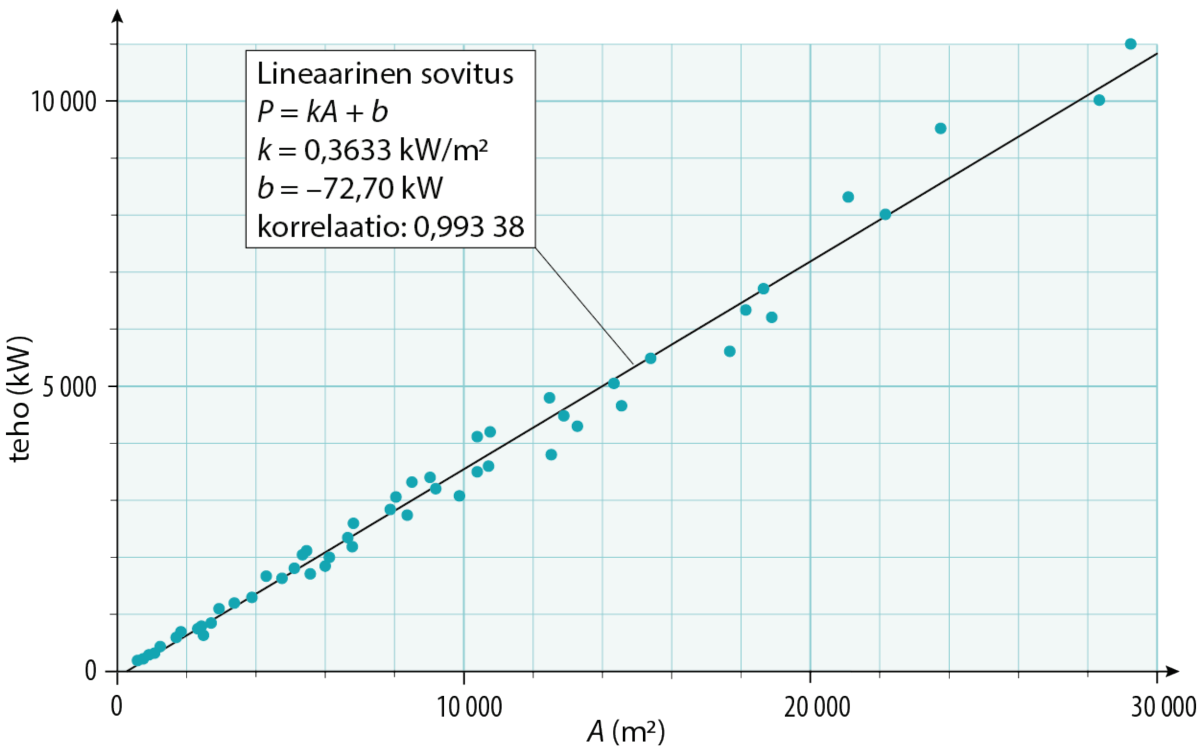
Tuulivoimaloita tarvitaan 4 kappaletta tuottamaan yhtä suuri teho.

Tehtävä 4.18.

a) Roottorin pyyhkäisypinta-ala kullekin taulukon tuulivoimalalle voidaan laskea roottorin halkaisijan *d* avulla

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Voimaloiden tehon riippuvuus pyyhkäisypinta-alasta nähdään sijoittamalla mittauspisteet (A, P)-koordinaatistoon.



Pistejoukkoon sovitetun suoran kulmakerroin kertoo tehon muutoksen pyyhkäisypinta-alan kasvaessa. Sovitesuoran kulmakerroin

$$k = \frac{\Delta P}{\Delta A} = 0{,}3633\,\frac{\text{kW}}{\text{m}^2}.$$

Tästä saadaan tehon kasvuksi

$$\Delta P = k\Delta A = 0{,}3633\,\frac{\text{kW}}{\text{m}^2} \cdot 25\,\text{m}^2 = 9{,}0825\,\text{kW} \approx 9{,}1\,\text{kW}.$$

b) Tuulivoimalan suunnittelussa ja rakentamisessa tarvittavia fysikaalisten tieteiden osa-alueita ovat esimerkiksi aalto(liike)oppi, aerodynamiikka, akustiikka, energiatekniikka, geofysiikka, lujuusoppi, lämpöoppi/termodynamiikka/termofysiikka, materiaalitiede/-tekniikka, mekaniikka, sähkötekniikka/sähköoppi/sähkömagnetismi, virtausmekaniikka, ympäristötekniikka.

Tehtävä 4.19.

a) Lämpökamera mittaa kappaleiden lähettämää infrapunasäteilyn määrää. Mitä enemmän kappale emittoi infrapunasäteilyä, sitä keltaisemmalta esine näyttää lämpökamerakuvassa. Käsi ja alumiinilevy ympäristöään lämpimämpinä säteilevät suuremmalla teholla energiaa kuin ympäristö ja siksi käsi ja alumiinilevy erottuvat ympäristöstä lämpökamerakuvassa.

b) Kun hiilidioksidilla täytetty pussi viedään alumiinilevyn päälle, havaitaan, että alumiinilevyn ja käden säteilemän infrapunasäteilyn määrä oli pienempi kuin ilman pussia tai jos tutkimus suoritettiin tyhjällä pussilla.

c) Ilmakehän hiilidioksidi absorboi sähkömagneettista säteilyä, jonka aallonpituus on infrapuna-alueella. Tällöin ilmakehän hiilidioksidi absorboi osan Auringosta tulleesta infrapunasäteilystä. Myös muut ilmakehän kaasut, kuten vesihöyry, absorboivat säteilyä. Auringosta tuleva infrapunasäteily pääosin absorboituu ilmakehässä. Hiilidioksidi ei kuitenkaan absorboi näkyvää valoa, vaan näkyvä valo saapuu maanpinnalle. Maan pinnalla osa näkyvästä valosta absorboituu Maan pintaan ja osa säteilystä heijastuu pinnasta takaisin. Maan pintakerros lämpenee absorption vuoksi, ja lämpötilansa takia Maa emittoi infrapunasäteilyä. Maanpinnasta emittoitunut infrapunasäteily absorboituu muun muassa ilmakehän hiilidioksidiin, jolloin maanpinnan läheisyydessä oleva ilmakehän osa lämpenee. Hiilidioksidi tasaa maanpinnan lähellä olevan ilmakehän lämpötilavaihteluita.

Tehtävä 4.20.

a) lämpövaraston tilavuus $V = 150\,000\ \mathrm{m^3}$

veden tiheys $\rho = 1\,000\ \mathrm{kg/m^3}$

veden ominaislämpökapasiteetti $c = 4\,190\ \mathrm{J/(kgK)}$

Lämpövarastoon varastoidaan aineiston mukaan enimmillään energiaa $Q = 9\,000\ \mathrm{MWh}$. Energia varastoituu veteen, jolloin varastoituneen energian Q ja lämpötilan muutoksen ΔT välille on voimassa yhtälö $Q = cm\Delta T$, jossa c on veden ominaislämpökapasiteetti ja m veden massa.

Massan ja tiheyden välille on voimassa $m = V\rho$. Lämpövaraston veden lämpötilan muutos on

$$\Delta T = \frac{Q}{cV\rho} = \frac{9\,000 \cdot 10^6 \cdot 3\,600\ \mathrm{Ws}}{4\,190\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}} \cdot 150\,000\ \mathrm{m^3} \cdot 1\,000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{K}}} = 51{,}55\ \mathrm{K} \approx 52\ \mathrm{K}.$$

b) Taulukkokirjan mukaan veden tiheys lämpötiloissa T_0 = 1 °C ja T_1 = 90 °C on ρ_0 = 0,9999 kg/l ja ρ_1 = 0,9653 kg/l. Vesimäärän massa ei muutu. Vesimäärän massa alkutilanteessa $m = \rho_0 V_0$, jossa V_0 on vesimäärän tilavuus alkutilanteessa. Vesimäärän muutos

$$\Delta V = V_1 - V_0 = \frac{m}{\rho_1} - \frac{m}{\rho_0} = \frac{V_0\rho_0}{\rho_1} - \frac{V_0\rho_0}{\rho_0} = V_0\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)$$

$$= 150\,000\,\mathrm{m}^3\left(\frac{0{,}9999\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}}{0{,}96534\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}} - 1\right) = 5\,370{,}1\,\mathrm{m}^3 \approx 5\,400\,\mathrm{m}^3.$$

c) Uusiutuvista energialähteistä tuulivoiman ja aurinkoenergian teho riippuu sääoloista ja vuorokaudenajasta. Fossiilisia polttoaineita käyttävät voimalaitokset eivät ole riippuvaisia säästä, ja niiden teho on hyvin ennustettavissa ja paremmin sovitettavissa energian kulutushuippuihin. Energiavarastot tasaavat uusiutuvan energian tuotantohuippuja.

d) Lämpövarastoa käytetään tasaamaan tuotanto- ja kulutushuippuja kaukolämpöverkossa, kun taas sähköakkuja käytetään samaan tarkoitukseen sähköverkoissa. Lämpövaraston energian muuttaminen sähköverkossa siirrettäväksi energiaksi ei ole kannattavaa, koska se vaatisi häviöllisen lämpövoimakoneen käyttämistä. Sähköakku reagoi nopeammin tehontarpeen muutoksiin kuin lämpövarasto ja sähkön siirtäminen varastosta pitkiä matkoja on helpompaa kuin lämmön. Sähköakun kapasiteetti on huomattavasti pienempi kuin lämpövaraston, minkä vuoksi se ei sovellu hyvin lämmitykseen käytettävän energian varastointiin.

Tehtävä 4.21.

a) maissinviljelyn keskisato on
s_m = 7 980 kg/ha = 0,7980 kg/m^2

etanolin tiheys on ρ_e = 790 kg/m^3 = 0,790 kg/l

maissista saatavan etanolin määrä ε_e = 0,417 l/kg.

etanolin lämpöarvo H_e = 26,9 MJ/kg

etanolilla toimivan polttomoottorin hyötysuhde
η_e = 0,44

Pellosta tuotetun etanolin massa pinta-alaa kohden on

$$m_\mathrm{e} = s_\mathrm{m}\varepsilon_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e} = 0{,}7980\ \mathrm{kg/m^2} \cdot 0{,}417\ \mathrm{l/kg} \cdot 0{,}790\ \mathrm{kg/l}$$
$$= 0{,}262\,885\ \mathrm{kg/m^2}.$$

Tuotetun etanolin hyödynnettävä energia pinta-alaa kohden on

$$\begin{aligned} E_\mathrm{e} &= m_\mathrm{e}H_\mathrm{e}\eta_\mathrm{e} = s_\mathrm{m}\varepsilon_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}H_\mathrm{e}\eta_\mathrm{e} \\ &= 0{,}7980\,\mathrm{kg/m^2} \cdot 0{,}417\,\mathrm{l/kg} \cdot 0{,}790\,\mathrm{kg/l} \cdot 26{,}9\,\mathrm{MJ/kg} \cdot 0{,}44 \\ &= 3\,111{,}51\,\mathrm{kJ/m^2} \end{aligned}$$

Auringon säteilyn vuosittainen kokonaisenergia pinta-alaa kohden on

$$E_\mathrm{a} = 1{,}46\ \mathrm{MWh/m^2} \cdot 3600\ \mathrm{s/h} = 5\,256\,000\ \mathrm{kJ/m^2}.$$

Energiantuotannon maksimaalinen hyötysuhde on

$$\eta = \frac{E_\mathrm{e}}{E_\mathrm{a}} = \frac{s_\mathrm{m}\varepsilon_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}H_\mathrm{e}\eta_\mathrm{e}}{E_\mathrm{a}}$$

$$= \frac{0{,}7980\,\mathrm{kg/m^2} \cdot 0{,}417\,\mathrm{l/kg} \cdot 0{,}790\,\mathrm{kg/l} \cdot 26{,}9\,\mathrm{MJ/kg} \cdot 0{,}44}{5\,256\,000\,\mathrm{kJ/m^2}}$$

$$= 0{,}000\,591\,992 \approx 5{,}9 \cdot 10^{-4}.$$

b) Etanolivalmistukseen kulunut prosessienergiaa yhtä litraa kohti E_l = 7 460 kJ/l

Tuotto kuvaa, kuinka moninkertaisesti prosessista saadaan energiaa verrattuna tarvittavaan prosessienergiaan eli tuotto on

$$y=\frac{E_\mathrm{e}-E_\mathrm{p}}{E_\mathrm{p}},$$

jossa E_e on etanolista saatava energia pinta-alaa kohti ja E_p on prosessienergia pinta-alaa kohti.

Etanolista saatava energia saadaan edellisen kohdan perusteella

$$E_\mathrm{e}=s_\mathrm{m}\varepsilon_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}H_\mathrm{e}\eta_\mathrm{e}$$

Prosessienergia pinta-alaa kohden on $E_\mathrm{p}=E_\mathrm{l}s_\mathrm{m}\varepsilon_\mathrm{e}$, jossa s_m on maissin keskisato pinta-alaa kohden ja ε_e etanolituotanto maissista.

Tuotto on

$$y=\frac{E_\mathrm{e}-E_\mathrm{p}}{E_\mathrm{p}}=\frac{E_\mathrm{e}}{E_\mathrm{p}}-1=\frac{s_\mathrm{m}\varepsilon_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}H_\mathrm{e}\eta_\mathrm{e}}{E_\mathrm{l}s_\mathrm{m}\varepsilon_\mathrm{e}}-1=\frac{\rho_\mathrm{e}H_\mathrm{e}\eta_\mathrm{e}}{E_\mathrm{l}}-1$$

$$=\frac{0{,}790\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}\cdot 26{,}9\cdot 10^6\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\cdot 0{,}44}{7\,460\cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{l}}}-1=0{,}253\,41\approx 25\,\%.$$

c) Kun biojätteistä saatu kaukolämpö lasketaan mukaan, saadaan vuosittain tuotetuksi bioenergian kokonaismääräksi pinta-alaa kohden

$E_\mathrm{b} = E_\mathrm{e} + E_\mathrm{j} = s_\mathrm{m}\varepsilon_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}H_\mathrm{e}\eta_\mathrm{e} + s_\mathrm{j}H_\mathrm{j}\eta_\mathrm{j}$,

jossa s_j = 7 500 kg/ha = 0,7500 kg/m^2 on biojätteiden keskimääräinen massa pinta-alaa kohden, H_j = 19,0 MJ/kg on jätteiden lämpöarvo ja η_j = 0,85 on kaukolämpötuotannon hyötysuhde.

Etanolin hyödynnettävä energia on sama kuin a-kohdassa.

Kokonaisbioenergiaa voidaan verrata aurinkoenergiaa, joka on 18 % auringonsäteilyn kokonaisenergiasta. Aurinkoenergian määrä suhteessa kokonaisbioenergiaan on

$$n = \frac{0{,}18E_\mathrm{a}}{E_\mathrm{e} + E_\mathrm{j}} = \frac{0{,}18E_\mathrm{a}}{s_\mathrm{m}\varepsilon_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}H_\mathrm{e}\eta_\mathrm{e} + s_\mathrm{j}H_\mathrm{j}\eta_\mathrm{j}}$$

$$= \frac{0{,}18 \cdot 5\,256\,000\,\mathrm{kJ/m^2}}{0{,}7980\,\mathrm{kg/m^2} \cdot 0{,}417\,\mathrm{l/kg} \cdot 0{,}790\,\mathrm{kg/l} \cdot 26{,}9 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg} \cdot 0{,}44 + 0{,}7500\,\mathrm{kg/m^2} \cdot 19{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg} \cdot 0{,}85}$$

$$= 62{,}1439 \approx 62.$$

Aurinkoenergian määrä on siis 62-kertainen kokonaisbioenergian määrään verrattuna.

d) auton tankissa olevan etanolin tilavuus V = 65 l

Etanoliauton tankissa olevasta etanolista saadaan energiaa

$E_{ea} = m_e H_e \eta_e = V\rho_e H_e \eta_e$, jossa ρ_e on etanolin tiheys, H_e on etanolin lämpöarvo ja η_e on etanolilla toimivan polttomoottorin hyötysuhde.

Sähköautossa hyödynnettävä energia on

$E_{sa} = m_a \omega_a \eta_s$, jossa m_a on sähköauton akun massa, ω_a on akun energiatiheys ja η_s sähkömoottorin hyötysuhde.

Akun energiatiheys ω_a = 150 Wh/kg = 540 kJ/kg.

Jos etanoli- ja sähköautojen hyödynnettävät energiat ovat yhtä suuret eli $E_{ea} = E_{sa}$, niin saadaan yhtälö

$$V\rho_e H_e \eta_e = m_a \omega_a \eta_s.$$

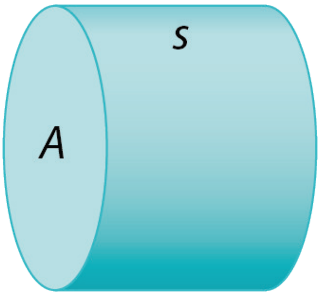
Sähköauton akun massaksi saadaan

$$m_a = \frac{V\rho_e H_e \eta_e}{\omega_a \eta_s} = \frac{65\,\text{l} \cdot 0{,}790\,\text{kg/l} \cdot 26{,}9 \cdot 10^6\ \text{J/kg} \cdot 0{,}44}{540 \cdot 10^3\ \text{J/kg} \cdot 0{,}89}$$
$$= 1\,264{,}64\,\text{kg} \approx 1\,300\,\text{kg}.$$

Tehtävä 4.22.

a) Tuulivoimalassa tuulen liike-energia muuntuu roottorin lapojen liike-energiaksi. Lavat on akseloitu generaattoriin, jolloin lapojen liikkuessa generaattori alkaa pyöriä ja tuottaa sähköverkkoon energiaa. Osa energiasta muuntuu kitkan tekemän työn sekä johtimien resistanssin vuoksi tuulimyllyn osien sisäenergiaksi.

b) Pinta-alan A läpi ajassa Δt nopeudella v kulkeneen ilman tilavuus on $V = As = Av\Delta t$.



Läpi kulkevan ilmavirran massa $m = \rho V = \rho Av\Delta t$. Ilmavirran liike-energian teho on

$$P_K = \frac{E_K}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}\rho Av\Delta t v^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho Av^3.$$

c) Bentzin lain mukaan suurin teho saavutetaan, kun $v_2 = \frac{1}{3}v_1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
P_\mathrm{B} &= \frac{1}{4}\rho A\left(v_1 + \frac{1}{3}v_1\right)\left(v_1^{\;2} - \left(\frac{1}{3}v_1\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\rho A\left(v_1 + \frac{1}{3}v_1\right)\left(v_1 + \frac{1}{3}v_1\right)\left(v_1 - \frac{1}{3}v_1\right) \\
&= \frac{1}{4}\rho A\frac{4}{3}v_1 \cdot \frac{4}{3}v_1 \cdot \frac{2}{3}v_1 = \frac{16}{27} \cdot \frac{1}{2}\rho A v_1^{\;3}.
\end{aligned}$$

Silloin

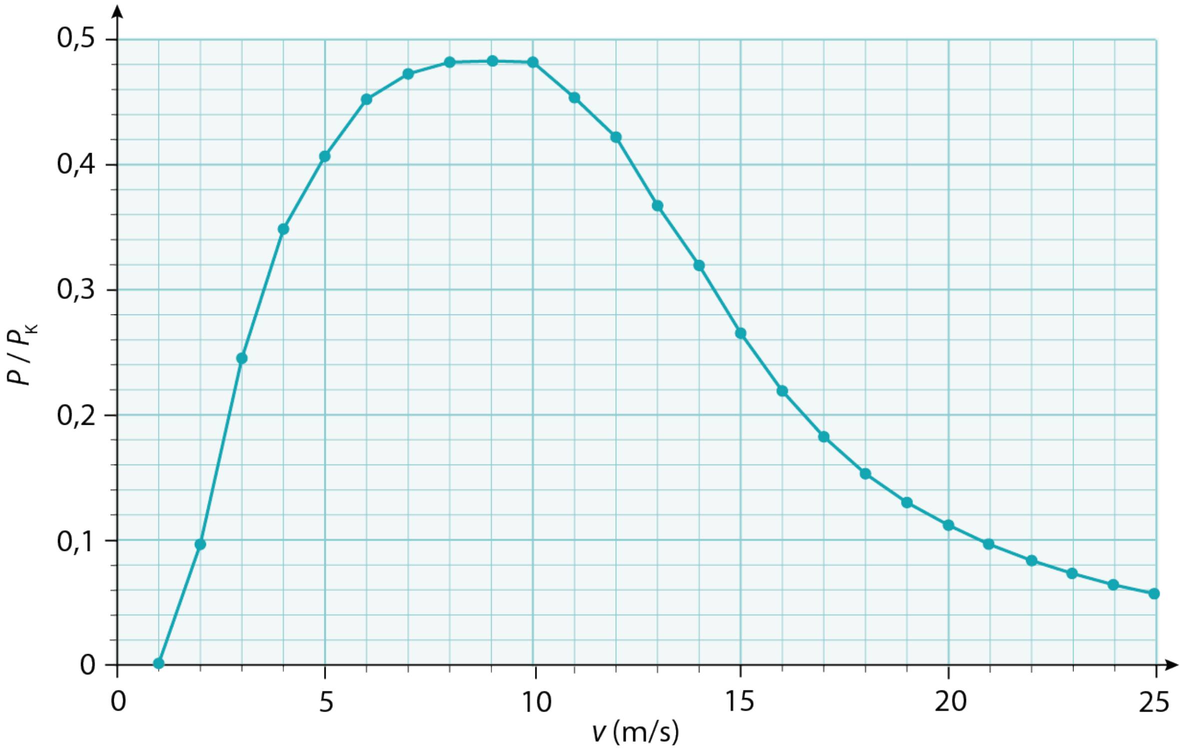
$$\frac{P_\mathrm{B}}{P_\mathrm{K}} = \frac{16}{27} = 0{,}592\,59 \approx 0{,}59.$$

d) Turbiinin pyyhkäisemä pinta-ala on

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{71}{2}\,\mathrm{m}\right)^2 = 3\,959{,}19\,\mathrm{m}^2.$$

Ilman tiheys $\rho = 1{,}29\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

Lasketaan näiden avulla ilmavirran teho $P_\mathrm{K} = \dfrac{1}{2}\rho A v^3$ eri nopeuksilla. Luetaan todellisen sähkötehon P arvot annetusta tiedostosta ja laaditaan $\left(v, \dfrac{P}{P_\mathrm{K}}\right)$-koordinaatistoon kuvaaja.



Luentaan kuvaajasta, millä tuulen nopeuksilla todellinen hyötysuhde on 0,33 tai sitä suurempi. Kun tuulen nopeus on välillä 3,5 m/s – 14,4 m/s, todellinen hyötysuhde on yhtä suuri tai parempi kuin 30 %.

Tehtävä 4.23.

a) Maapallon vesi kiertää Auringon energian vaikutuksesta siten, että tietyissä paikoissa on lähes jatkuvasti tarjolla virtaavaa vettä. Energiantuotanto vesivoimalla perustuu veden potentiaalienergian muutoksiin. Kun vesi putoaa alaspäin, jolloin veden potentiaalienergiaa muuntuu veden liike-energiaksi. Virtaavan veden liike-energiaa muuntuu turbiinin pyörimisen liike-energiaksi. Turbiini on yhdistetty generaattoriin, jossa pyörimisliikkeen energia muuntuu sähkö- ja magneettikentän energiaksi sähköverkkoon.

b) Generaattorin toiminta perustuu sähkömagneettiseen induktioon. Generaattorissa johdinsilmukka pyörii magneettikentässä tai magneetti ympärillä olevien johdinsilmukoiden suhteen. Johdinsilmukan läpäisevä magneettivuo muuttuu jaksollisesti, jolloin muuttuva magneettivuo indusoi johdinsilmukkaan sinimuotoisen vaihtojännitteen.

c) Generaattorin tuottamaa vaihtojännitettä voidaan kuvata vaihtojännitteen taajuudella f ja jännitteen huippuarvolla u_0 tai jännitteen tehollisarvolla U.

Generaattorin tuottamaan vaihtojännitteeseen vaikuttaa

käämien kierrosten lukumäärä N,

generaattorin pyörimistaajuus f,

generaattorin magneettien magneettivuon tiheys B,

käämien poikkipinta-ala A.

Induktiolain mukaisesti indusoitunut jännite riippuu magneettivuon muutosnopeudesta $e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}$.

Jaksollisesti muuttuva magneettivuo aiheuttaa jaksollisesti muuttuvan sinimuotoisen vaihtojännitteen, $u = u_0 \sin(2\pi ft)$, jossa u_0 on jännitteen huippuarvo ja f on käämin pyörimistaajuus ja samalla vaihtojännitteen taajuus. Sinimuotoisen vaihtojännitteen huippuarvo on $u_0 = NBA2\pi f$, jossa N on käämin kierrosten lukumäärä, B on magneettivuon tiheys, A on käämin silmukan pinta-ala ja f on vaihtojännitteen taajuus.

Sinimuotoisen vaihtojännitteen tehollinen arvo on $U = \frac{1}{\sqrt{2}} u_0$, jossa u_0 on vaihtojännitteen huippuarvo.

d) Infotaulun perusteella Kissakosken voimalaitoksen pudotuskorkeus h = 5 m ja vuotuinen keskivirtaus

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 25{,}7\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

Koska veden tiheys ρ = 1 000 kg/m^3, niin veden virtausnopeus kilogrammoina

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = 25{,}7\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \cdot 1\,000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 25\,700\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}.$$

Voimalaitoksen veden potentiaalienergian muutos aikayksikössä on

$$P = \frac{E_\mathrm{p}}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t}gh$$
$$= 25\,700\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{m} = 1\,260\,585\,\mathrm{W} \approx 1{,}3\,\mathrm{MW}$$

Keskimääräisen virtaaman avulla laskettu voimalaitoksen teho on 1,3 MW.

5 Liikkeen mallit

Harjoittele

Tehtävä 5.1.

Oikeat vastaukset:

a) C

b) B

c) B

d) C

e) B

f) C

g) D

h) A

i) B

Tehtävä 5.2.

tarkastelujakson kesto t = 4,0 s

a) rullalaudan nopeus $v=10{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}=\frac{10{,}8}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}=3{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Tasaisessa liikkeessä kuljettu matka on

$s=vt=3{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 4{,}0\,\text{s}=12\,\text{m}.$

b) rullalaudan nopeus alussa $v_0=10{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}=\frac{10{,}8}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}=3{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

rullalaudan nopeus lopussa $v_1=18\,\frac{\text{km}}{\text{h}}=\frac{18}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}=5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen ajassa t kulkema matka on $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$, jossa v_0 nopeus alkuhetkellä ja a kappaleen kiihtyvyys.

Kiihtyvyys saadaan nopeuden muutoksen avulla,

$a=\frac{v_1-v_0}{t}=\frac{5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}-3{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4{,}0\,\text{s}}=0{,}50\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

Rullalaudan ajassa t kulkema matka on

$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2=3{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 4{,}0\,\text{s}+\frac{1}{2}\cdot 0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(4{,}0\,\text{s})^2=16\,\text{m}.$

Tehtävä 5.3.

A5, B4, C7, D1, E2, F6

Tehtävä 5.4.

kiihdytyksen kesto t = 35 s

koneen nopeus alussa $v_0 = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

koneen nopeus lopussa $v_1 = 296\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{296}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä lentokoneen paikka x ajanhetkellä t on $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Lentokoneen nopeus kiihdytyksen jälkeen ajanhetkellä t on $v = v_0 + at$.

Lentokoneen kiihtyvyys on $a = \frac{v_1 - v_0}{t}$.

Kun koneen nopeus alkuhetkellä on v_0 = 0 m/s ja lisäksi valitaan paikka alkuhetkellä x_0 = 0 m, saadaan koneen paikka kiihdytyksen jälkeen

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{v_1 - \cancel{v_0}}{\cancel{t}}t^{\cancel{2}} = \frac{1}{2}v_1 t$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{296}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 35\,\text{s} = 1\,438{,}888\,\text{m} \approx 1{,}4\,\text{km}$$

Lentokone kulki kiihdytyksen aikana 1,4 km.

Tehtävä 5.5.

kuulan kulkema matka s = 0,200 m

kuulan nopeus 20,0 cm kohdalla v = 0,80 m/s

a) Kuulan liike on tasaisesti kiihtyvää. Kuula lähtee levosta, joten sen alkunopeus on nolla. Määritetään kuulan nopeuden yhtälöstä 20 cm:n vierimiseen kulunut aika.

$$v = \cancel{v_0} + at_1$$

$$t_1 = \frac{v}{a}.$$

Sijoitetaan aika t_1 kuljetun matkan s yhtälöön.

$$s = \cancel{v_0}t + \frac{1}{2}at_1^2$$

$$s = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}$$

Ratkaistaan kuulan kiihtyvyys.

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\left(0{,}80\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\cdot 0{,}200\,\text{m}} = 1{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) kuulan nopeus v_2 = 1,2 m/s

Kuula on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Lasketaan, kuinka kauan kestää, että kuulan nopeus on 1,2 m/s.

$$v_2 = at_2$$

$$t_2 = \frac{v_2}{a} = \frac{1{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}75\,\text{s}$$

c) vierimismatka s_3 = 2,4 m

Kuula lähtee paikaltaan ja vierii kaltevaa tasoa pitkin. Kuulan liike on tasaisesti kiihtyvää. Kuulan vierimismatkan avulla saadaan määritettyä kuulan vierimisnopeus 2,4 metrin vierimismatkan jälkeen.

$$s_3 = \cancel{v_0}t + \frac{1}{2}at_3^2$$

$$s_3 = \frac{1}{2}a\frac{v_3^2}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{v_3^2}{a}$$

$$v_3^2 = 2s_3a$$

$$v_3 = \sqrt{2s_3a} = \sqrt{2 \cdot 2{,}4\,\text{m} \cdot 1{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2{,}771\,28\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kuulan nopeuden suuruus 2,4 metrin vierimismatkan jälkeen on 2,8 m/s.

Tehtävä 5.6.

auton nopeus alussa $v_0 = \frac{39}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

auton nopeus kiihdytyksen jälkeen $v = \frac{78}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

kiihdytysaika t = 6,4 s

a) Auton keskikiihtyvyys on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{\frac{78}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{39}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{6{,}4\,\text{s}} = 1{,}6927\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Auton kulkema matka tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä on

$$\begin{aligned} s &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= \frac{39}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6{,}4\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}6927\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6{,}4\,\text{s})^2 \\ &= 103{,}9998\,\text{m} \approx 100\,\text{m}. \end{aligned}$$

Sama tulos saadaan myös sieventämällä yhtälöä niin, että päädytään keskinopeuteen.

$$\begin{aligned} s &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t + \frac{1}{2}\frac{v - v_0}{\cancel{t}}t^{\cancel{2}} \\ &= v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)t = v_0 t + \frac{1}{2}vt - \frac{1}{2}v_0 t = \frac{1}{2}v_0 t + \frac{1}{2}vt \\ &= \frac{1}{2}(v_0 + v)t = v_k t \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{78}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{39}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot 6{,}4\,\text{s} = 103{,}9998\,\text{m} \approx 100\,\text{m}. \end{aligned}$$

Tehtävä 5.7.

auton nopeus alussa v_0 = 60/3,6 m/s

auton hidastuvuus a = 6,2 m/s^2

Auton liike on tasaisesti hidastuvaa ja jarrutuksen jälkeen auton nopeus on nolla. Jarrutuksen aikana auton kulkema matka on

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}at^2.$$

Jarrutuksen jälkeen auto on paikallaan, eli v = 0, joten nopeudelle voidaan kirjoittaa

$$v = v_0 - at$$
$$0 = v_0 - at.$$

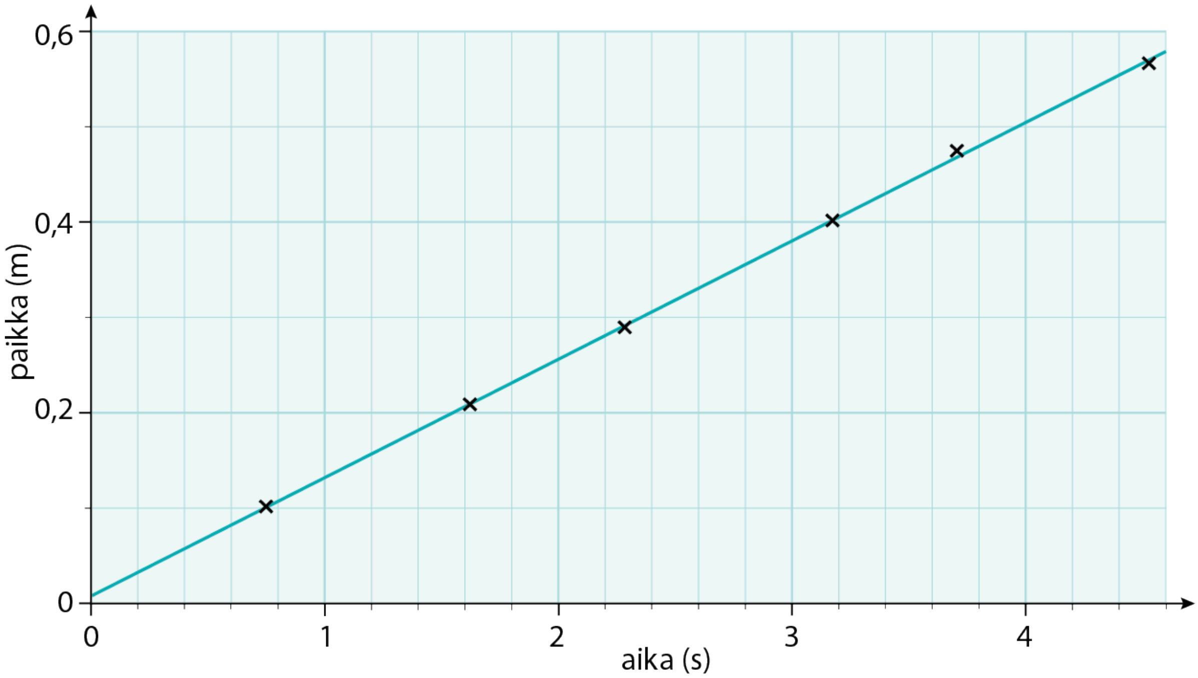
Kun ratkaistaan jarrutusaika nopeuden yhtälöstä ja sijoitetaan jarrutusaika matkan yhtälöön, saadaan jarrutusmatkaksi

$$x = v_0 \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_0}{a}\right)^2$$

$$x = \frac{{v_0}^2}{2a} = \frac{(\frac{60}{3,6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2 \cdot 6,2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 22,401\,\mathrm{m} \approx 22\,\mathrm{m}.$$

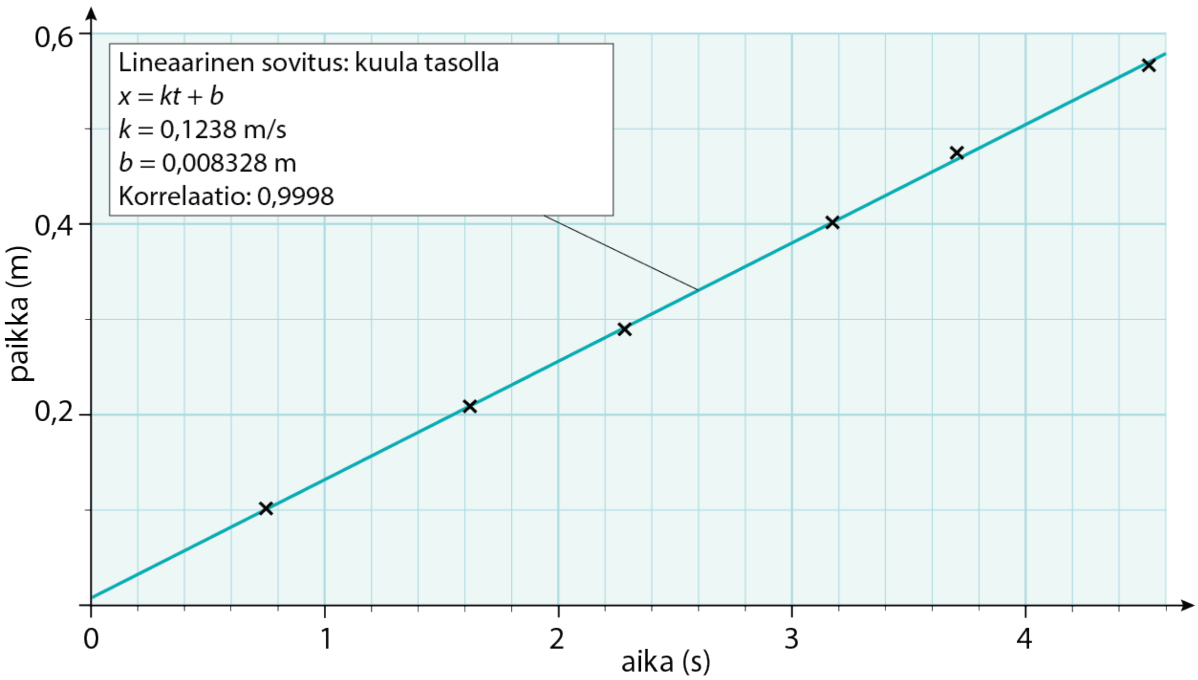
Tehtävä 5.8.

a)



b) Koska kuulan paikka muuttuu joka sekunti yhtä paljon eli (t, x)-koordinaatiston kuvaajana on nouseva suora, kuulan liike on tasaista liikettä.

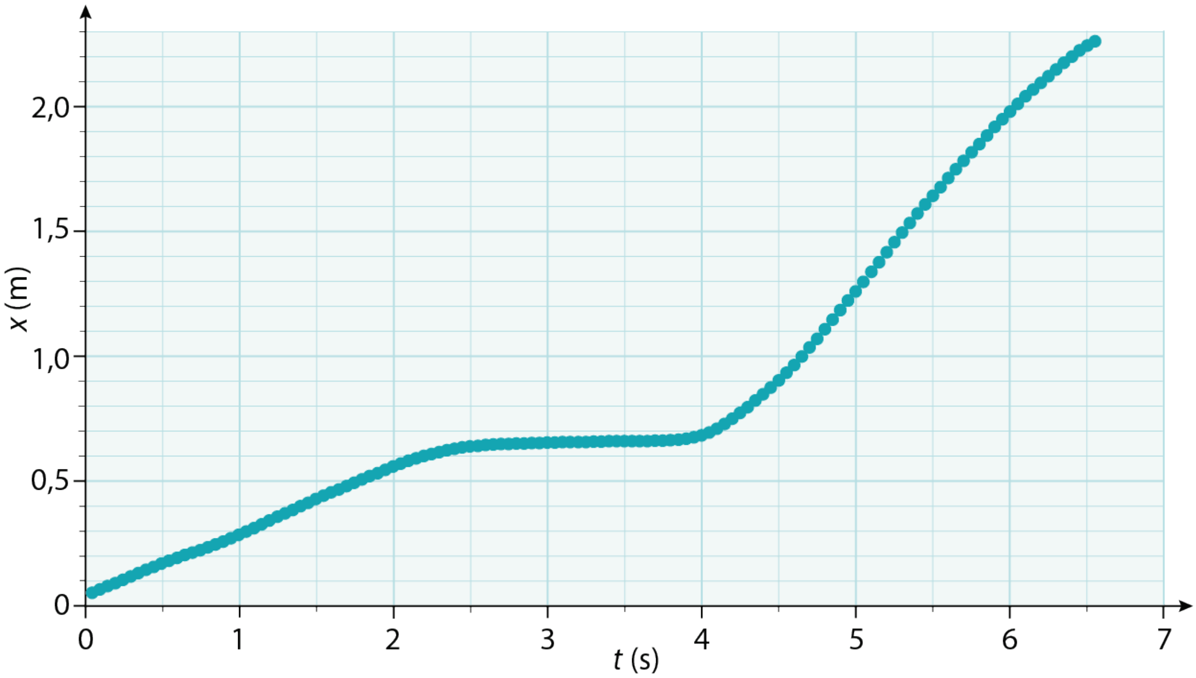
c) Kuulan nopeus saadaan (t, x)-koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Määritetään suoran fysikaalinen kulmakerroin.



Kuulan vierimisnopeus on v = 0,1238 m/s ≈ 0,12 m/s.

Tehtävä 5.9.

a)



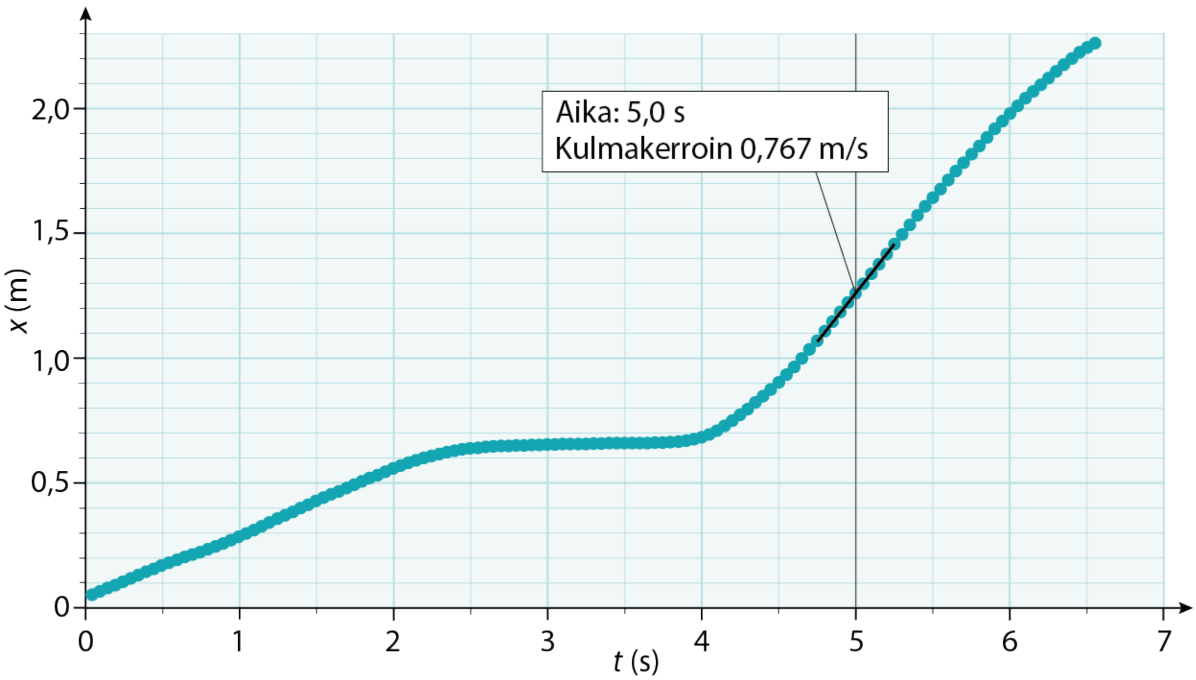
Aikavälillä 0 s…2,0 s. opettajan kävely oli tasaista liikettä, sillä (t, x)-koordinaatiston kuvaajan jyrkkyys pysyy samana.

Ajanhetkellä 2,0 s opettajan nopeus alkoi pienentyä, sillä kuvaajan jyrkkyys pienenee ajanhetkelle 2,75 s asti.

Aikavälillä 2,75 s…3,75 s opettaja oli paikoillaan. Tämän jälkeen hän lähti taas liikkeelle, ja nopeus kasvoi, sillä kuvaajan jyrkkyys lisääntyy.

Aikavälillä 4,65 s…5,25 s opettaja käveli vakionopeudella, joka oli suurempi kuin kävelynopeus mittauksen alussa. Tämän jälkeen opettajan nopeus alkoi pienentyä, sillä kuvaajan jyrkkyys pienenee.

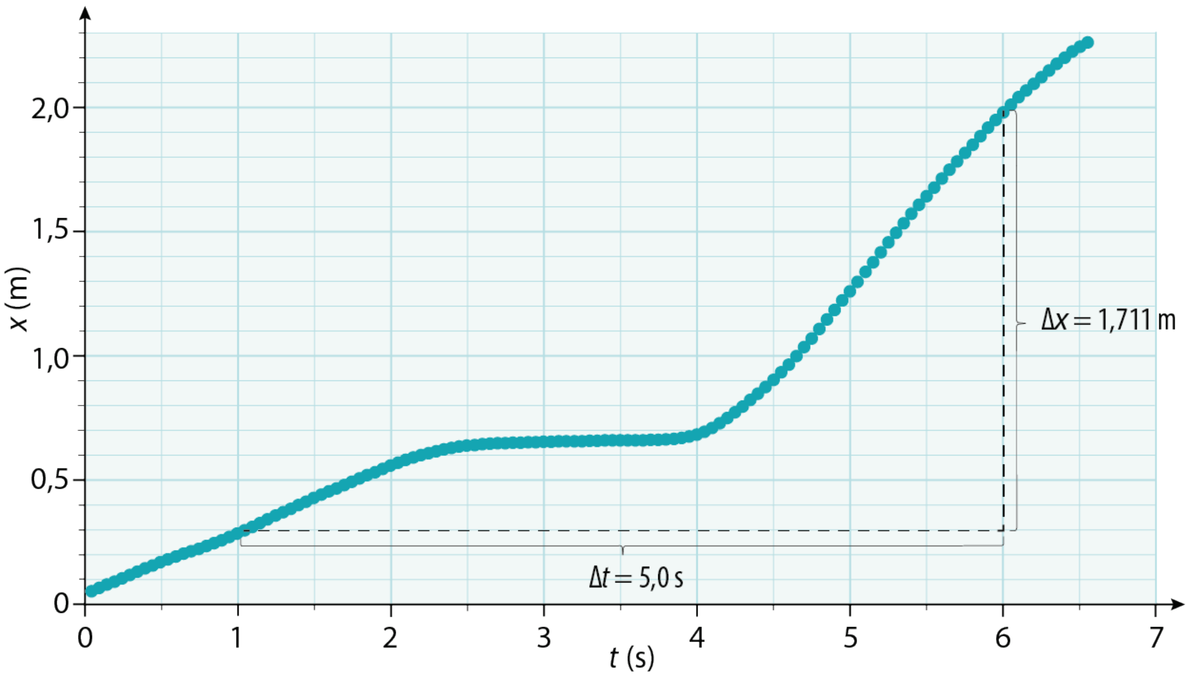
b) Opettajan hetkellinen nopeus ajanhetkellä 5,0 s saadaan (t, x)-koordinaatistoon 5,0 s:n kohdalle määritetyn tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta.



Nopeus ajanhetkellä 5,0 s on $v = 0{,}767\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}77\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

c) Opettajan keskinopeus aikavälillä 0,1 s…6,0 s on $v_k = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

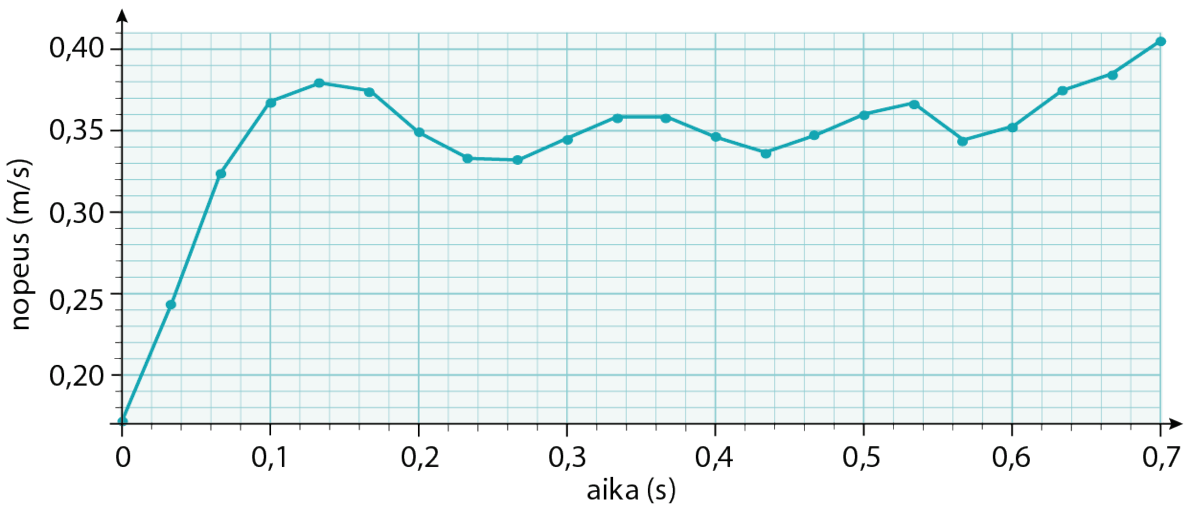
Määritetään paikan ja ajan muutokset kyseisellä aikavälillä.



Kävelyn keskinopeus $v_k = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{1{,}711\,\text{m}}{5{,}0\,\text{s}} = 0{,}3422\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}34\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

Tehtävä 5.10.

a) Laaditaan kuvaaja leluhamsterin nopeudesta ajan funktiona.



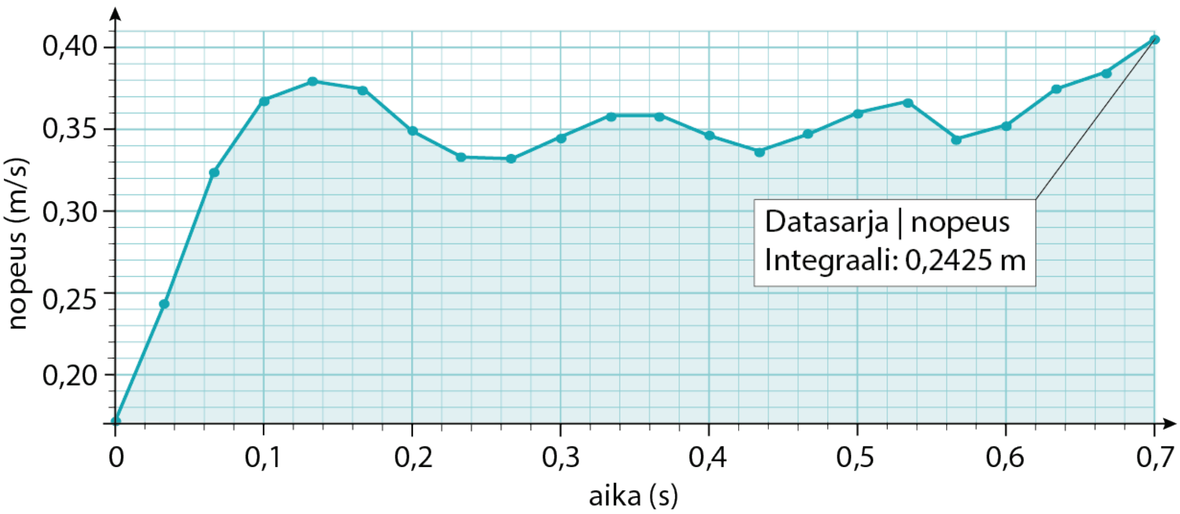
Kuvaajan perusteella aluksi leluhamsterin nopeus kasvaa 0,1 sekunnin ajan. Tämän jälkeen leluhamsteri etenee likimain tasaisesti vakionopeudella, joka on noin 0,35 m/s.

b) Leluhamsterin keskikiihtyvyys aikavälillä 0 s – 0,10 s on nopeuden kuvaajalle piirretyn sekantin fysikaalinen kulmakerroin. Aluksi, kun t_1 = 0 s, hamsterin nopeus on v_1 = 0 m/s. Ajanhetkellä t_2 = 0,10 s, hamsterin nopeus on v_2 = 0,368 m/s.

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}368\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}1\,\text{s} - 0\,\text{s}} = 3{,}68\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c) Mittauksen aikana hamsterin kulkema matka saadaan graafisella integroinnilla nopeuden kuvaajan ja aika-akselin väliin jäävän alueen fysikaalisesta pinta-alasta.

$\Delta x = 0{,}2425 \text{ m} \approx 0{,}24 \text{ m}.$



Sovella

Tehtävä 5.11.

pulkkailijan kiihtyvyys a = 1,1 m/s^2

a) laskumatka s = 12,7 m

Pulkkailija on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Pulkkailijan laskuaika ratkaistaan matkan yhtälöstä.

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12{,}7\,\text{m}}{1{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 4{,}805\,\text{s} \approx 4{,}8\,\text{s}$$

b) Pulkkailija on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Pulkkailijan nopeus on

$$v = v_0 + at = 0 + at = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{a^{\cancel{2}}\,2s}{\cancel{a}}}$$

$$= \sqrt{2sa} = \sqrt{2 \cdot 12{,}7\,\text{m} \cdot 1{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5{,}2858\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 5{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Pulkkailijan nopeus tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä on b-kohdan mukaan $v = \sqrt{2sa}.$ Tällöin pulkkailijan nopeus on suoraan verrannollinen laskumatkan neliöjuureen $v \sim \sqrt{s}.$

Tehtävä 5.12.

kuljettajan reaktioaika $t_1 = 0{,}95$ s

auton alkunopeus $v_0 = \dfrac{40}{3{,}6}\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Auton kiihtyvyys $a = -2{,}4\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a) Kuljettajan reaktioajan auto liikkuu tasaisella nopeudella matkan

$$s_1 = v_0 t_1 = \frac{40}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}95\,\text{s} = 10{,}555\,\text{m} \approx 11\,\text{m}.$$

b) Auton hidastumiseen kulunut aika t_2 saadaan auton loppunopeuden avulla, koska liike on tasaisesti kiihtyvää. Jarrutuksen jälkeen auton nopeus nolla. Tällöin $0 = v_0 + at_2$.

Jarruttamiseen kulunut aika on

$$t_2 = -\frac{v_0}{a} = -\frac{\dfrac{40}{3{,}6}\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{-2{,}4\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4{,}6296\,\text{s} \approx 4{,}6\text{ s}.$$

c) Jarrutuksen ajan auton liike on tasaisesti hidastuvaa ja se kulkee jarrutuksessa matkan s_2. Auto kulkee kuljettajan tekemän havainnon jälkeen reaktiomatkan sekä jarrutusmatkan $s = s_1 + s_2$.

Sijoitetaan yhtälöön a- ja b-kohdassa saadut ajan ja matkan yhtälöt. Auto kulkee ennen pysähdystä

$$
\begin{aligned}
s &= s_1 + s_2 = v_0 t_1 + v_0 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^{\,2} \\
&= v_0 t_1 + v_0 \left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 \\
&= v_0 t_1 - \frac{v_0^{\,2}}{a} + \frac{1}{2} \frac{v_0^{\,2}}{a} \\
&= v_0 t_1 - \frac{1}{2} \frac{v_0^{\,2}}{a} \\
&= \frac{40}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}95\,\text{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{40}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\left(-2{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 36{,}276\,\text{m} \approx 36\,\text{m}.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 5.13.

Vasemmanpuoleisessa kuvaajassa on esitetty kappaleen A paikka ajan funktiona. (t, s)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan tangentin fysikaalinen kulmakerroin on nopeus. Hetkellä t = 0 s kappale liikkuu positiiviseen suuntaan positiivisella nopeudella.

Tarkkailujakson aikana nopeus alkaa pienentyä, sillä käyrälle piirretty tangentti alkaa kääntyä vaakasuuntaiseksi ja lopulta kappale pysähtyy. Paikoillaan olo näkyy paikan kuvaajassa vaakasuorana osiona. Kuvaaja voi esittää esimerkiksi liikennevaloihin jarruttavan auton liikettä.

Oikeanpuoleisessa kuvaajassa on esitetty kappaleen B nopeus ajan funktiona. Hetkellä t = 0 s kappaleen nopeus on positiivinen, eikä nopeuden etumerkki muutu liikkeen aikana. Silloin kappale liikkuu koko ajan samaan suuntaan.

(t, v)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan tangentin fysikaalinen kulmakerroin on kappaleen kiihtyvyys. Kappaleella on alussa positiivinen kiihtyvyys eli kappaleen nopeus kasvaa. Tarkkailujakson aikana kiihtyvyys alkaa kuitenkin pienentyä, ja lopulta käyrälle piirretty tangentti on vaakasuuntainen eli kiihtyvyys on a = 0 m/s^2. Silloin kappaleen nopeus ei enää muutu ja kappale etenee vakionopeudella. Kuvaaja voi esittää esimerkiksi auton kiihdytystä taajamanopeudesta maantienopeuteen.

Tehtävä 5.14.

lentoaika t_l = 2,4 s

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

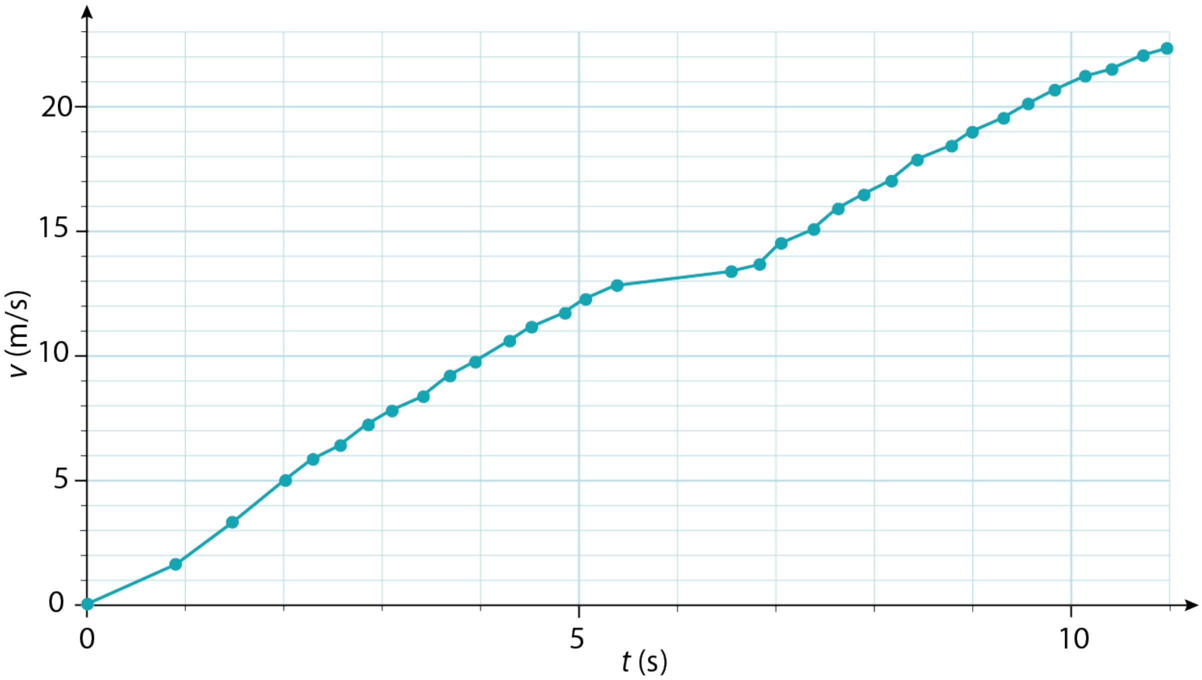
Kun ilmanvastusta ei huomioida, pallon liike on tasaisesti hidastuvaa liikettä. Kun suunta ylöspäin valitaan positiiviseksi suunnaksi, ajanhetkellä t pallon nopeus on $v = v_0 - gt$, jossa v_0 on pallon lähtönopeus ja g putoamiskiihtyvyys.

Pallon lentoajasta voidaan päätellä, että pallo oli ratansa korkeimmassa kohdassa ajanhetkellä $t = \frac{t_l}{2} = 1{,}2\,\text{s}.$ Pallon nopeus lentoradan korkeimmassa kohdassa on 0 m/s. Radan korkeimmassa kohdassa on voimassa $v_0 - gt = 0$. Pallon lähtönopeuden suuruus on

$$v_0 = gt = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}2\,\text{s} = 11{,}772\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

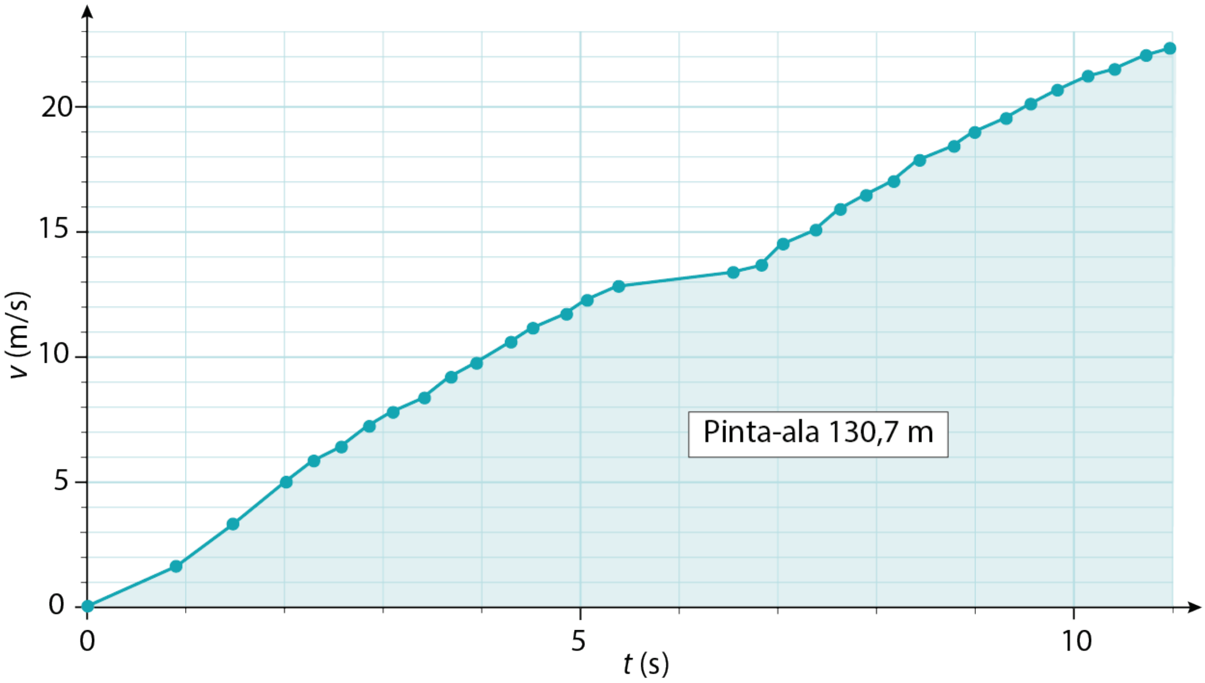
Tehtävä 5.15.

a)



b) Auton kulkema matka saadaan (t, v)-koordinaatiston ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta (graafisella integroinnilla).

Määritetään kuvaajan fysikaalinen pinta-ala.



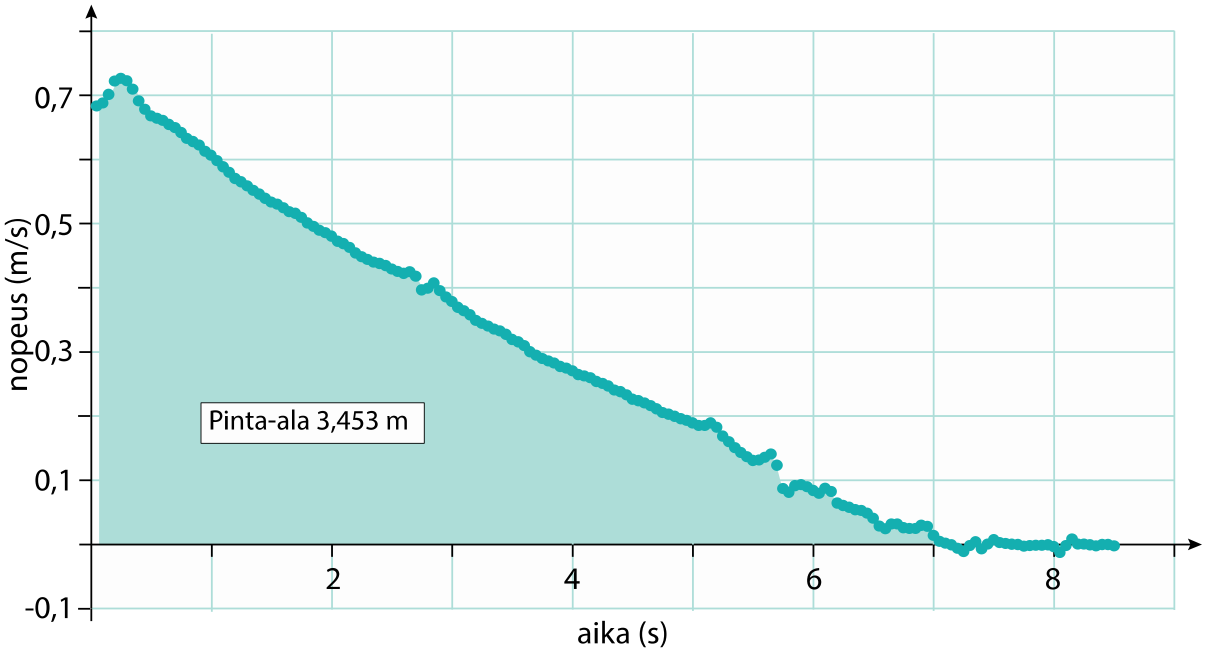
Auto kulki tutkimuksen aikana matkan
s = 130,7 m ≈ 130 m.

c) Vaihteenvaihdon jälkeinen keskimääräinen kiihtyvyys saadaan määrittämällä kuvaajasta nopeuden muutos ja siihen kulunut aika

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{22{,}22\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 13{,}33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{10{,}94\text{ s} - 6{,}51\text{ s}} = 2{,}006\,77\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehtävä 5.16.

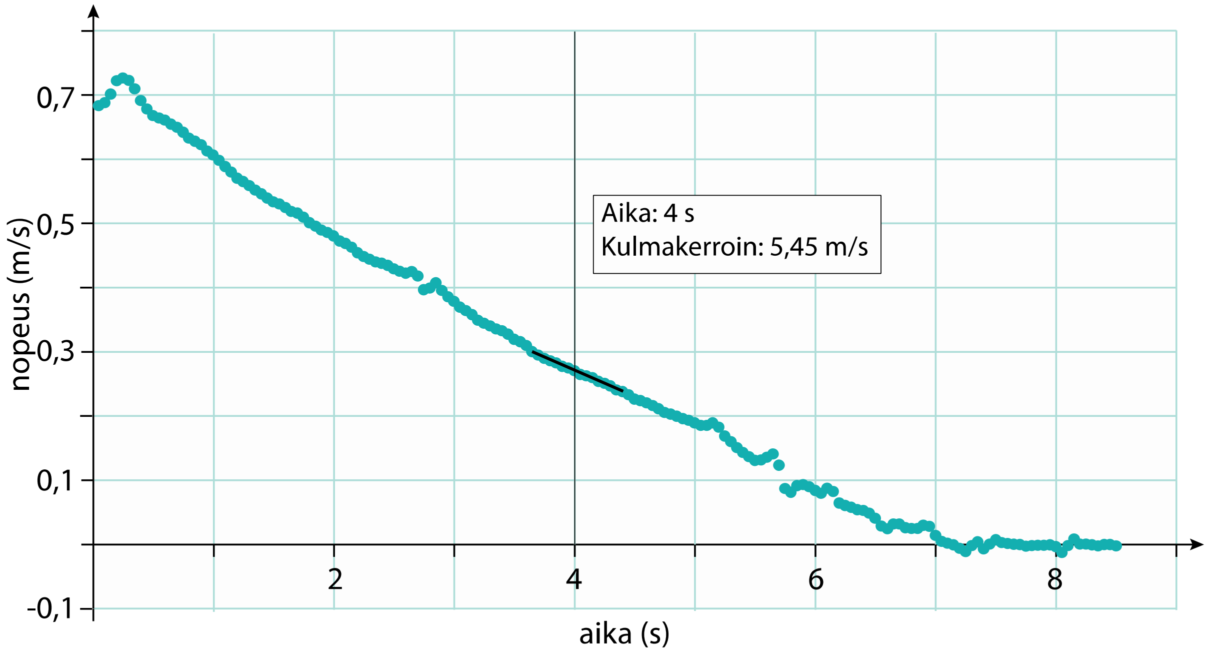
a)



Rullalaudan kulkema matka mittauksen aikana saadaan (t, v)-koordinaatiston kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään fysikaalinen pinta-ala eli kuljettu matka

s = 3,453 m ≈ 3,5 m.

b) Rullalaudan hetkellinen kiihtyvyys saadaan (t, v)-koordinaatiston ajanhetkelle 4,0 s piirretyn tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta.



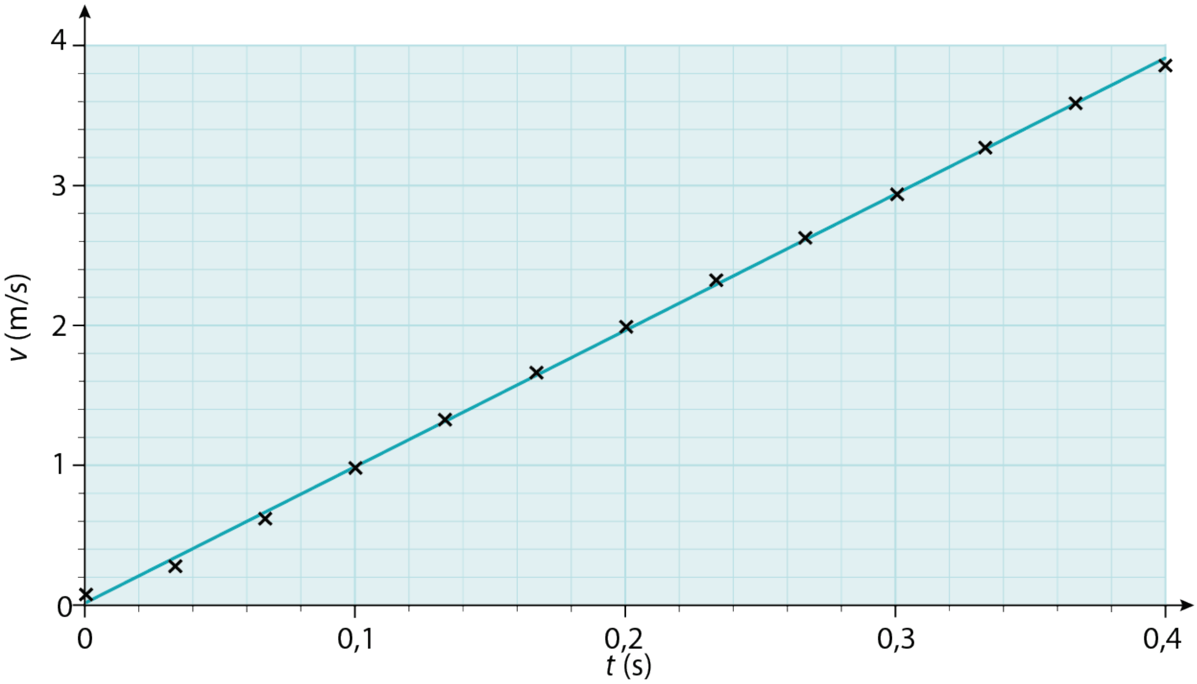
Rullalaudan hetkellisen kiihtyvyyden suuruus oli $a = 0{,}0875\ \mathrm{m/s^2} \approx 0{,}088\ \mathrm{m/s^2}$.

c) rullalaudan massa m = 8,2 kg

Rullalautaan vaikuttava kokonaisvoima saadaan Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}.$ Mitä suurempi on rullalaudan kiihtyvyys, sitä suurempi on rullalautaan kohdistuva kokonaisvoima. Hetkellinen kiihtyvyys saadaan (*t, v*)-koordinaatistoon tarkasteltavalle ajanhetkelle määritetyn tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta eli kuvaajan jyrkkyydestä. Ajanhetkellä 1,0 s kuvaaja on jyrkempi kuin ajanhetkellä 4,0 s. Näin ollen rullalaudan kiihtyvyys on suurempi ajanhetkellä 1,0 s kuin 4,0 s ja samoin rullalautaan kohdistuva kokonaisvoima on myös suurempi ajanhetkellä 1,0 s kuin 4,0 s.

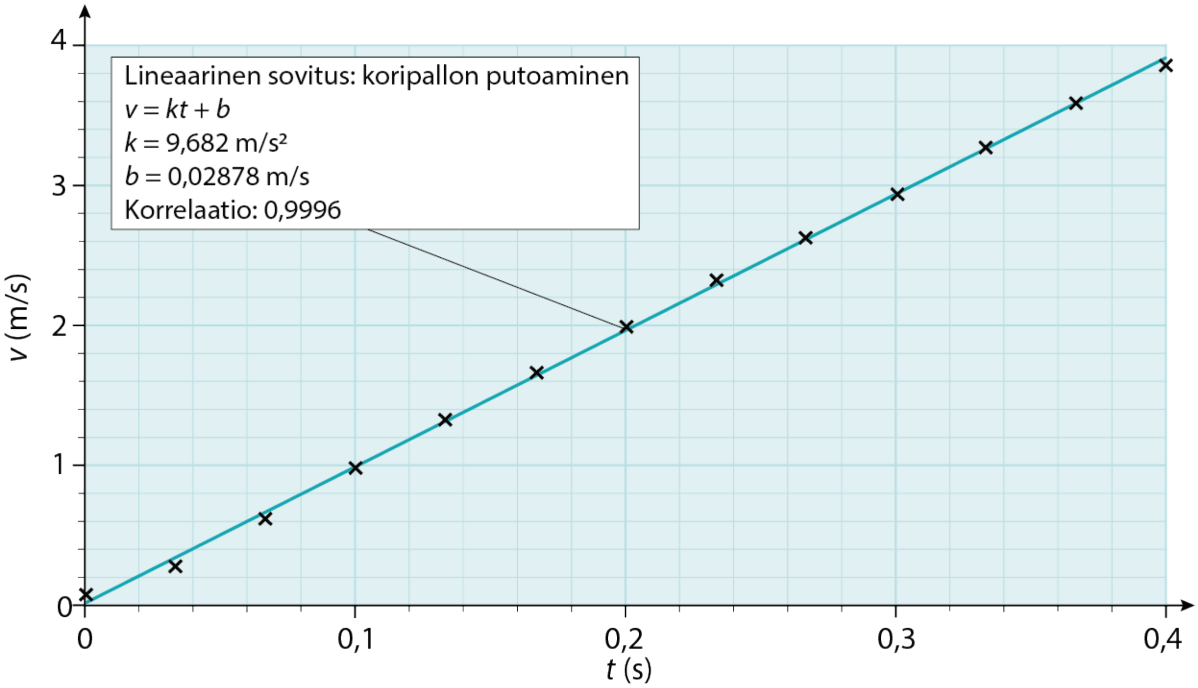
Tehtävä 5.17.

a)



Koska kuvaaja on (t, v)-koordinaatistossa nouseva suora, koripallon liike on tasaisesti kiihtyvää.

b) Koripallon kiihtyvyys saadaan määritettyä (t, v)-koordinaatistoon laaditun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta.



Koripallon putoamiskiihtyvyys kulmakertoimesta määritettynä on g = 9,682 m/s^2 ≈ 9,68 m/s^2.

c) Koripallo on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä alaspäin ja koripallon kiihtyvyys on putoamiskiihtyvyys, $a = g$. Matka ajanhetkellä t tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevalle kappaleelle on

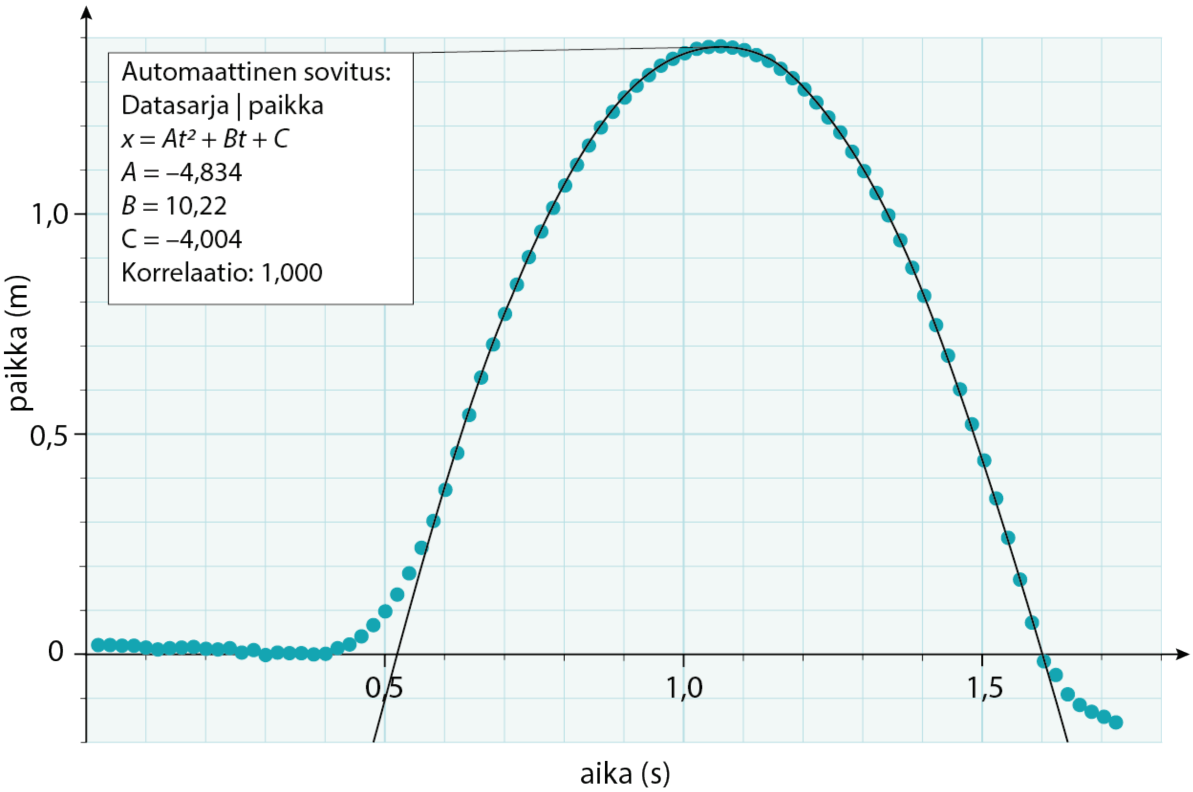
$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2.$$

Koripallon alkunopeus on nolla, joten koripallon kulkema matka on

$$s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}68\,\frac{m}{s^2} \cdot (2{,}5\,\mathrm{s})^2 = 30{,}25\,\mathrm{m} \approx 30\,\mathrm{m}.$$

Tehtävä 5.18.

a) Laaditaan kuvaaja ja lisätään mittausaineistoon toisen asteen polynomifunktio.



b) Kun koripallo heitetään ylöspäin, koripallo on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä. Tällöin koripallon paikka

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Koska koripallon paikkaa kuvaa toisen asteen polynomifunktio, jossa toisen asteen termin kerroin on negatiivinen, mittauspisteisiin voidaan sovittaa alaspäin aukeava toisen asteen polynomifunktio.

c) b-kohdan mukaan koripallon paikka on

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

a-kohdassa sovitetusta polynomifunktiosta saadaan

$$A = \frac{1}{2} g.$$

Tällöin mittauksen perusteella putoamiskiihtyvyydeksi saadaan

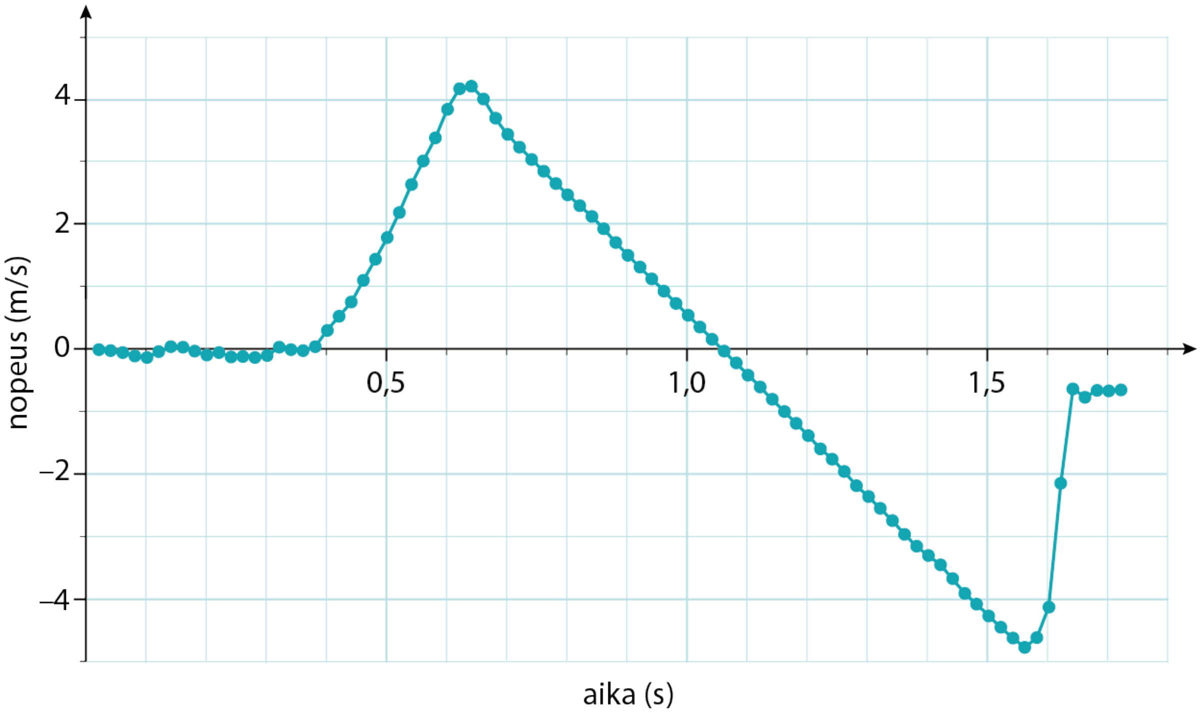
$$g = 2A = 2 \cdot 4{,}834 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 9{,}668 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 9{,}67 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Tulos on hieman pienempi kuin putoamiskiihtyvyyden kirjallisuusarvo, 9,81 m/s^2.

Esimerkiksi ilmanvastus ja käytetyn ultraäänianturin tarkkuus aiheuttavat virhettä mittaustulokseen. Ilmanvastus pienentää koripallon kiihtyvyyttä ja siten myös tulosta kirjallisuusarvoon verrattuna.

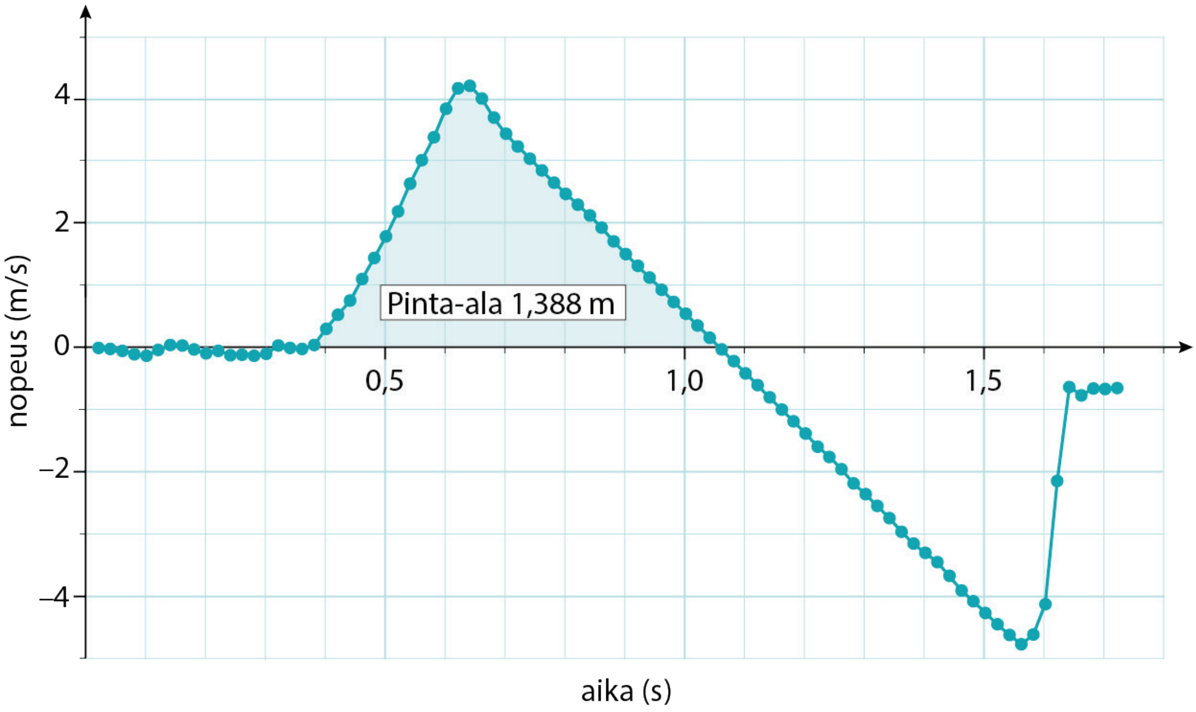
Tehtävä 5.19.

a)



b) Lakipiste tarkoittaa pallon lentoradan korkeinta kohtaa. Siinä ylöspäin liikkuvan pallon nopeus on hidastunut ja pallon nopeus on hetkellisesti nolla. Kun pallo alkaa pudota, nopeuden suunta muuttuu. Kuvaajasta voidaan lukea, että pallon nopeus on nolla ajanhetkellä
t = 1,06 s.

c) Pallon kulkema matka saadaan (t, v)-koordinaatiston ja akselin rajoittaman alueen fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään fysikaalinen pinta-ala lakikorkeuteen asti



Koripallon nousukorkeus h = 1,388 m ≈ 1,4 m.

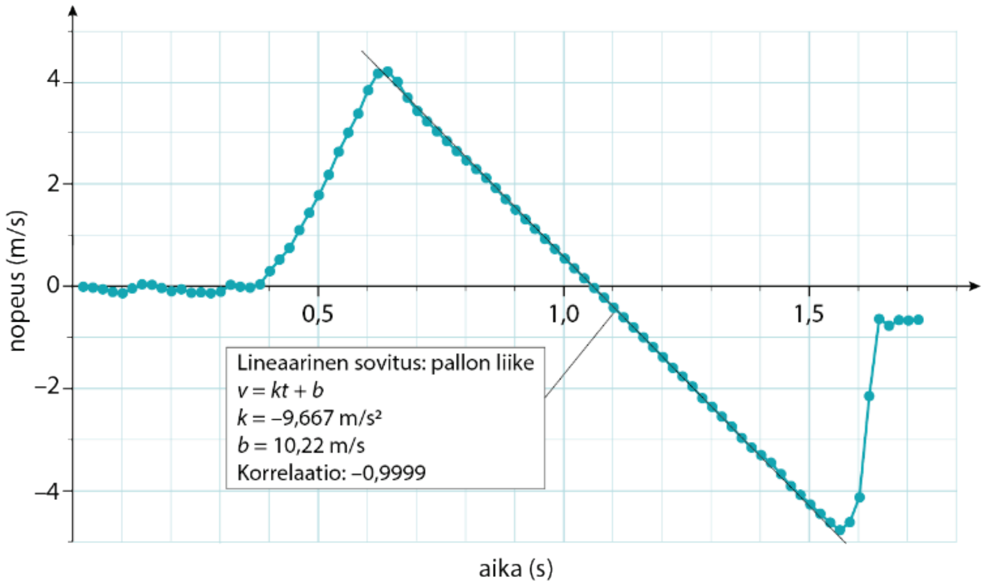
d) Kun pallo on pystysuorassa heittoliikkeessä, on pallo tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Pallon paikkaa voidaan mallintaa yhtälöllä

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

jossa v_0 on pallon alkunopeus, a on pallon kiihtyvyys ja x_0 pallon paikka ajanhetkellä t = 0 s. Alussa x_0 = 0.

Interpoloidaan kuvaajaa ja määritetään pallon alkunopeus irtoamisen jälkeen. Irtoamisen jälkeen pallo on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä, jolloin nopeus alkaa pienentyä tasaisesti. Pallo irtosi kädestä ajanhetkellä 0,64 s, jolloin interpoloimalla saadaan pallon nopeudeksi 4,2 m/s ylöspäin.

Pallon kiihtyvyys saadaan (t, v)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Koska heittoliikkeen aikana pallo on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, määritetään kiihtyvyys kuvaajan lineaariselta osalta.



Pallon kiihtyvyys on $a = -9{,}667\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Pallon paikan matemaattiseksi malliksi saadaan

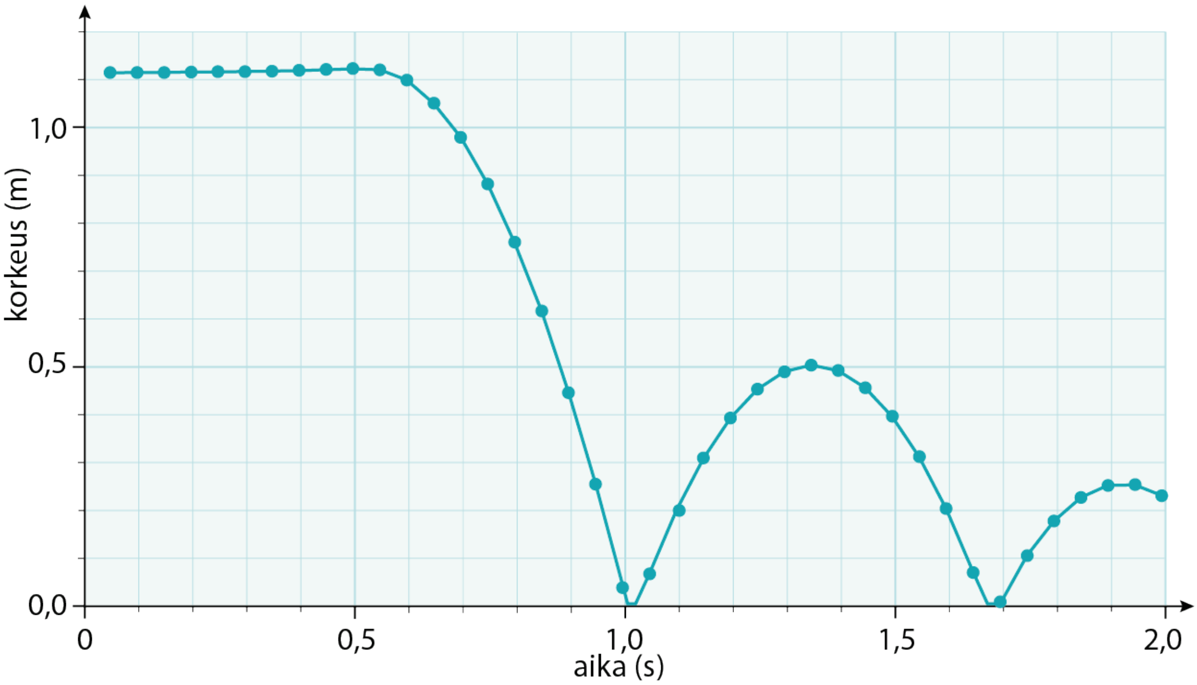
$$x(t) = 4{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}t + \frac{1}{2}\cdot\left(-9{,}667\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2$$

eli

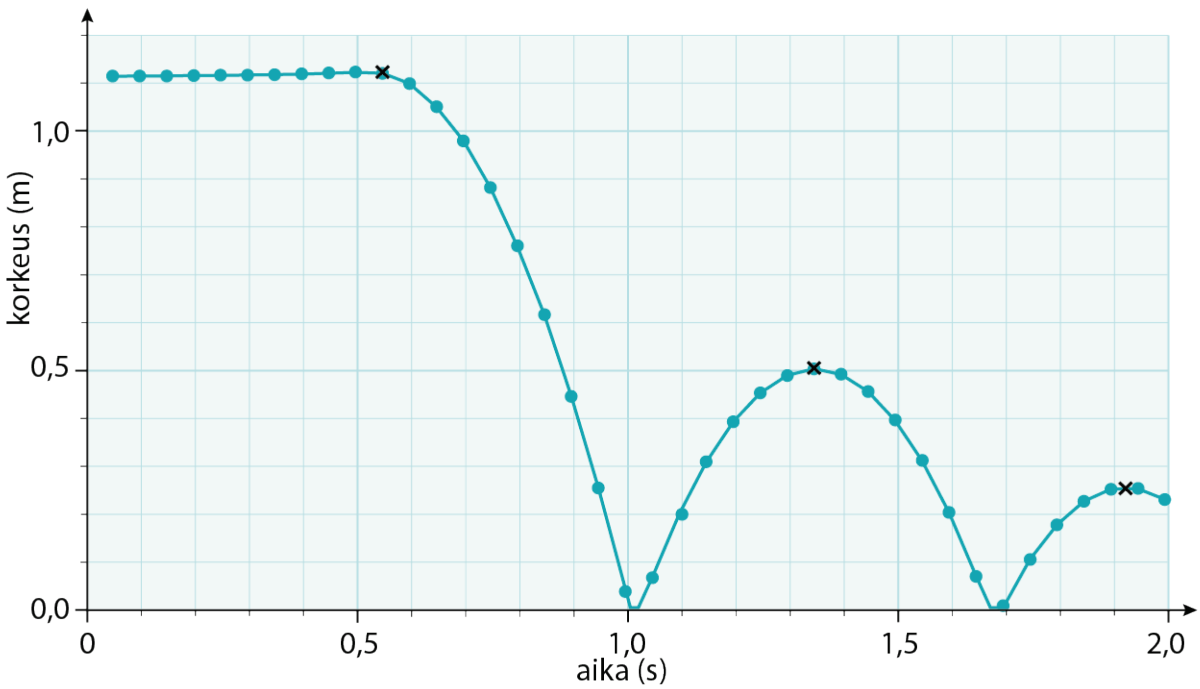
$$x(t) = 4{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}t - \frac{1}{2}\cdot 9{,}667\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2 \text{ tai } x(t) = 4{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}t - 4{,}83\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2.$$

Tehtävä 5.20.

a)



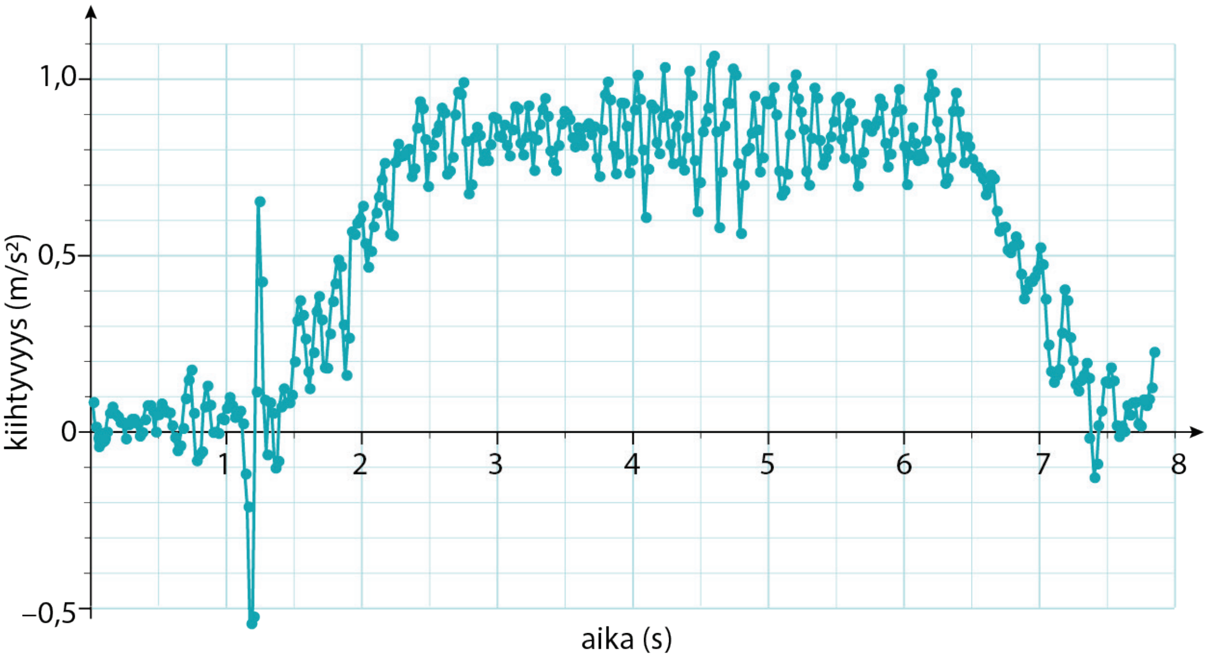
b) Pallon nopeus saadaan (t, h)-koordinaatistoon laaditulle kuvaajalle sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Pallo on paikallaan, jos fysikaalinen kulmakerroin on nolla. Merkitään kuvaajaan kohdat, joissa kuvaajalle piirretty tangentti on vaakasuorassa eli tangentin kulmakerroin on nolla. Pallo on lisäksi mittauksen alussa paikallaan ensimmäiseen merkittyyn pisteeseen asti. Nopeus on tällöin nolla.



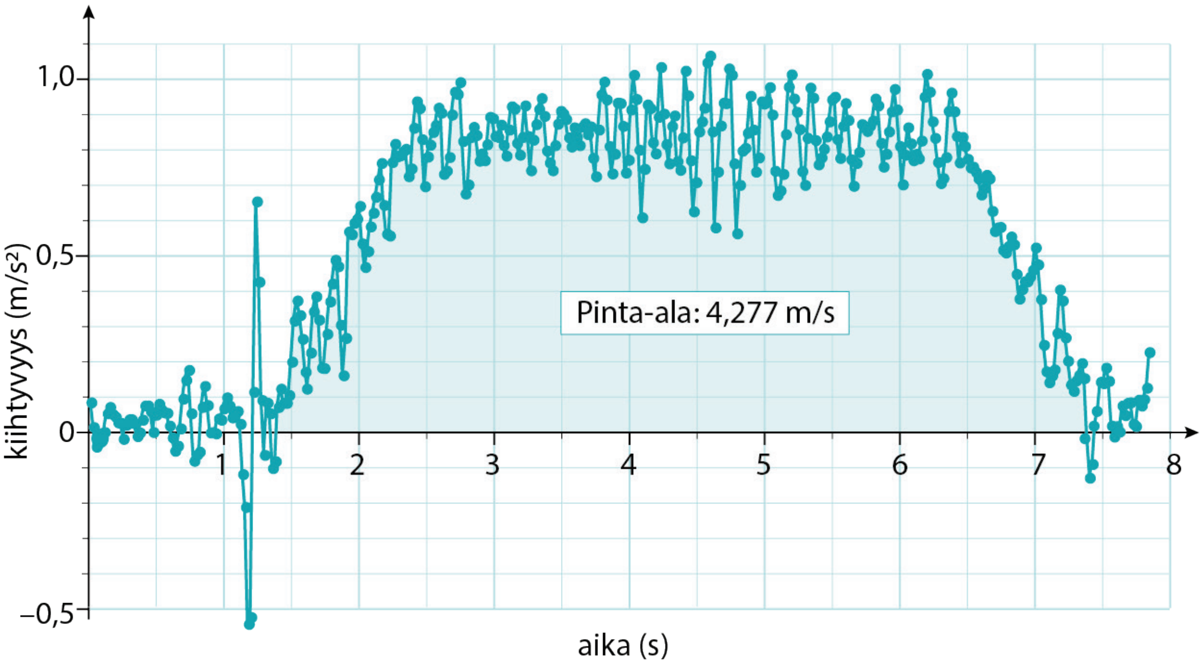
c) Pallon ensimmäinen pomppu on ajanhetken 1,0 s jälkeen, sillä tämän jälkeen nopeuden suunta muuttuu. Seuraavan kerran pallo osuu lattialle noin 1,7 sekunnin kohdalla. Määritetään korkein kohta aikaväliltä 1,0 s...1,7 s. Pallo pomppaa korkeudelle h = 0,50 m.

Tehtävä 5.21.

a)



b) Hissin nopeus saadaan (t, a)-koordinaatiston kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään fysikaalinen pinta-ala.



Hissin nopeus kiihdytyksen jälkeen $v = 4{,}277$ m/s $\approx 4{,}3$ m/s.

c) kiihdytyksen kesto $\Delta t = 5{,}96$ s

Hissin keskimääräinen kiihtyvyys on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4{,}277\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5{,}96\,\text{s}} = 0{,}7176\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0{,}72\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehtävä 5.22.

a) Super Jumbon massa m = 560 000 kg

yhden suihkumoottorin työntövoima F = 310 000 N

lentoonlähtönopeus $v = 280\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{280}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Suihkumoottorit työntävät konetta eteenpäin vakiovoimalla. Jos liikevastusvoimia ei huomioida, lentokoneen liike on tasaisesti kiihtyvää.
Newtonin II lain mukaan, suunnat huomioiden, $\sum F = ma$,
josta $a = \frac{\sum F}{m} = \frac{4F}{m}$.

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä $v = at$, joten kone kiihdyttää lentoonlähtönopeuteen ajassa $t = \frac{v}{a}$.

Kone kulkee tässä ajassa matkan

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{\frac{4F}{m}} = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{4F}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{560\,000\,\text{kg}\cdot\left(\frac{280}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{4\cdot 310\,000\,\text{N}} = 1\,365{,}99\,\text{m} \approx 1{,}4\,\text{km}$$

b) Lähtökiidon aikana koneen etenemistä hidastaa merkittävästi ilmanvastus. Lisäksi koneen renkaisiin vaikuttaa vierintävastus. Liikevastusvoimien takia kiitotien on oltava pidempi kuin mitä edellisessä kohdassa laskettiin.

Tehtävä 5.23.

veneen nopeus v = 2,8 m/s

paketin putoamismatka s = 5,1 m

Pallo on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä ja pallon kiihtyvyys on putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2.

Lasketaan pallon putoamisaika tasaisesti kiihtyvän liikkeen matkan avulla

$$s=\frac{1}{2}at^2$$

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

$$t^2=\frac{2s}{g}$$

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Vene kulkee vakionopeudella. Lasketaan, kuinka pitkän matkan vene kulkee sinä aikana, kun pallo putoaa.

$$x=vt=v\sqrt{\frac{2s}{g}}=2{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 5{,}1\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}=2{,}8551\,\mathrm{m}\approx 2{,}9\text{ m.}$$

Pallo osuu 2,9 m:n päähän veneen keulasta.

Tehtävä 5.24.

a) Kaikuluotain on laite, jonka avulla voidaan esimerkiksi määrittää vesistön syvyys tai etsiä kalaparvia. Laitteen toiminta perustuu ultraäänen lähettämiseen ja vastaanottamiseen: Kaikuluotain lähettää ultraäänipulsseja, jotka etenevät vedessä pitkittäisenä aaltoliikkeenä noin nopeudella 1 500 m/s. Osa pohjaa kohti lähetetystä ultraäänestä heijastuu esimerkiksi kalaparvesta tai pohjasta takaisin laitteeseen. Ultraäänipulssi kulkee kaikuluotaimesta kohteeseen ja takaisin kaikuluotaimeen, joten kohteen etäisyys on puolet pulssin kulkemasta matkasta. Kaikuluotain mittaa pulssin lähtöhetken ja paluuhetken välistä aikaeroa ja laskee kohteen etäisyyden tämän aikaeron perusteella.

b) Kohteen nopeus voidaan määrittää kaikuluotaimella kahdella tavalla.

Kohteen nopeus saadaan selville, kun mitataan kaikuluotaimella kohteen etäisyys kahdella eri ajanhetkellä. Näin saadaan selville, kuinka pitkän matkan kohde liikkui ajanhetkien välillä. Kohteen nopeus suhteessa kaikuluotaimeen voidaan laskea yhtälöä $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ käyttämällä.

Toinen nopeudenmääritysmenetelmä hyödyntää Dopplerin ilmiötä. Dopplerin ilmiössä on kyse siitä, että havaittavan äänen taajuus muuttuu, kun äänilähde tai havaitsija liikkuvat toistensa suhteen. Kun kaikuluotaimella tutkittava kohde liikkuu kaikuluotainta kohti tai kaikuluotaimesta poispäin, kohteen liikkeen vuoksi kaikuluotaimen signaalin taajuus muuttuu. Kun kaikuluotaimen lähettämä ääniaalto heijastuu kohteesta, kohde toimii kuin äänilähde.

Kun tutkittava kohde liikkuu kaikuluotainta kohti, heijastuneen ääniaallon taajuus on suurempi kuin kaikuluotaimen lähettämän äänen taajuus. Kun tutkittava kohde loittonee kaikuluotaimesta, heijastuneen ääniaallon taajuus on pienempi kuin kaikuluotaimen lähettämän äänen taajuus.

Kohteen ja kaikuluotaimen nopeus toistensa suhteen vaikuttaa kaikuluotaimen vastaanottamaan taajuuteen. Kaikuluotain mittaa muuttuneen taajuuden ja laskee muuttuneen taajuuden perusteella kohteen nopeuden.

Tehtävä 5.25.

Videolla oleva vasemmanpuoleinen kuula putosi suoraan alaspäin ja oikeanpuoleinen kuula liikkui vaakasuunnassa ja pystysuunnassa. Kuulat osuivat pöytään yhtä aikaa. Vasemmanpuoleinen kuula osui pöytään irtoamiskohdan alapuolella ja oikeanpuoleinen kuula osui pöytään paljon kauempana statiivista.

Kun kuula lähtivät liikkeelle, molempiin kuuliin vaikutti vain kuulien paino. Molemmat kuulat olivat tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä alaspäin. Koska kuulien kiihtyvyydet alaspäin olivat yhtä suuret ja kuulien kulkemat matkat olivat pystysuunnassa yhtä suuret, kuulat osuivat pöytään yhtä aikaa.

Oikeanpuoleisella kuulalla oli alussa vaakasuuntaista nopeutta. Vaakasuunnassa kuulaan ei vaikuttanut merkittävästi mikään voima, joten kuula eteni vaakasuunnassa vakionopeudella. Tämä vuoksi kuulan siirtyi putoamisen aikana kauemmaksi statiivista.

Tehtävä 5.26.

pallon alkunopeus v_0 = 18 m/s

pallon korkeus maanpinnasta y = 1,6 m

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Kun pallo irtosi kädestä, pallon liike vaakasuunnassa oli tasaista liikettä ja pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvää liikettä. Pystysuunnassa pallon kiihtyvyys oli putoamiskiihtyvyys.

Kun pallo eteni tasaisessa liikkeessä vaakasuunnassa, pallon paikalle vaakasuunnassa ajan suhteen oli voimassa $x = v_0t$, jossa x on pallon etäisyys heittäjästä.

Pystysuunnassa pallo oli tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Pallon nopeus pystysuunnassa heittoliikkeen alussa oli nolla, jolloin pallon paikka heittäjän käden suhteen oli

$$y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Ratkaistaan lentoaika pystysuuntaisen liikkeen yhtälöstä.

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Sijoitetaan lentoaika vaakasuuntaisen liikkeen yhtälöön, jolloin saadaan osumiskohdan etäisyys heittäjästä maanpintaa pitkin mitattuna.

$$x = v_0\sqrt{\frac{2y}{g}} = 19\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} = 10{,}8516\,\text{m} \approx 11\,\text{m}$$

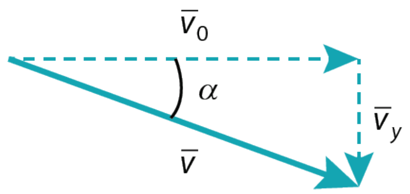
b) Pallo eteni vaakasuunnassa vakionopeudella ja pystysuunnassa pallon liike oli tasaisesti kiihtyvää. Pallon nopeus pystysuunnassa oli $v_y = gt$. Tehtävän a-kohdan perusteella pallon lentoaika oli $t=\sqrt{\frac{2y}{g}}$. Kun pallo osui maahan, pallon pystysuuntainen nopeus oli $v_y = g\sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{2gy}$.

Kun pallon osui maahan, pallon nopeus oli Pythagoraan lauseen perusteella

$$v=\sqrt{v_0{}^2+v_y{}^2}=\sqrt{v_0{}^2+2gy}$$

$$=\sqrt{\left(19\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2+2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1{,}6\,\mathrm{m}}=19{,}808\,89\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Pallon nopeuden suunnan määrittämisessä käytetään apukuvaa.



Kuvan perusteella

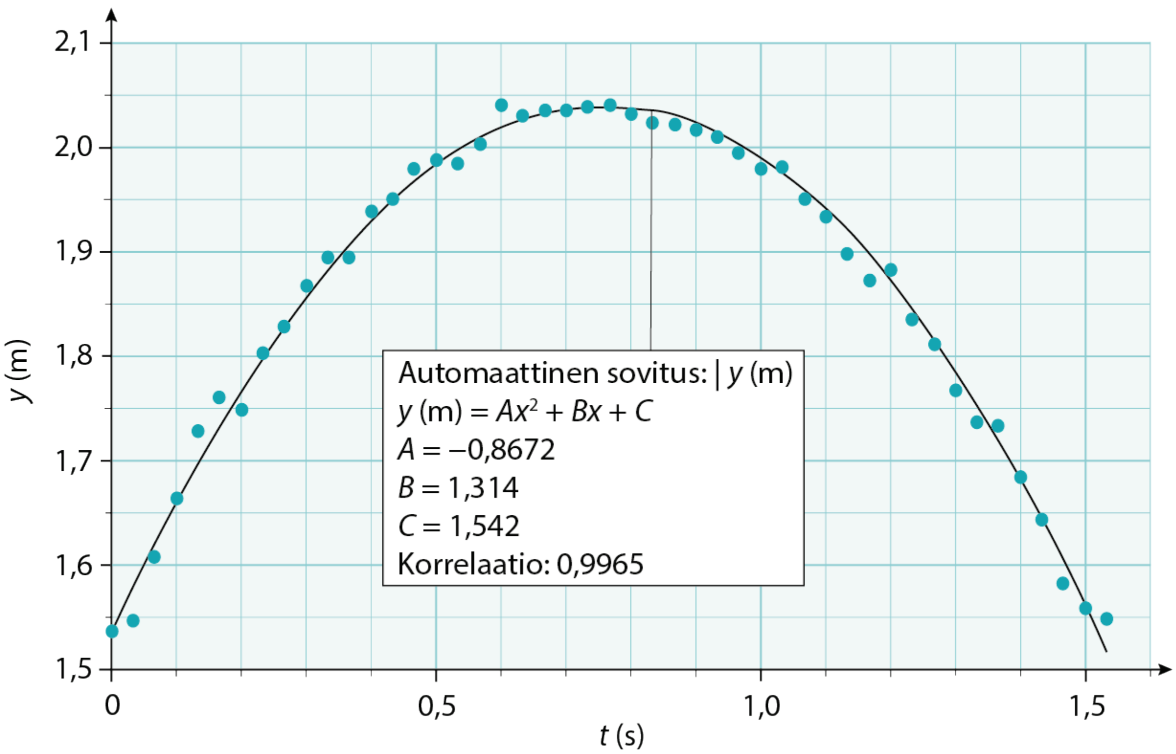
$$\tan\alpha=\frac{v_y}{v_0}=\frac{\sqrt{2gy}}{v_0}$$

$$\alpha=\arctan\frac{\sqrt{2gy}}{v_0}=\arctan\frac{\sqrt{2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1{,}6\ \mathrm{m}}}{19\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}=16{,}43°\approx 16°.$$

Syvennä

Tehtävä 5.27.

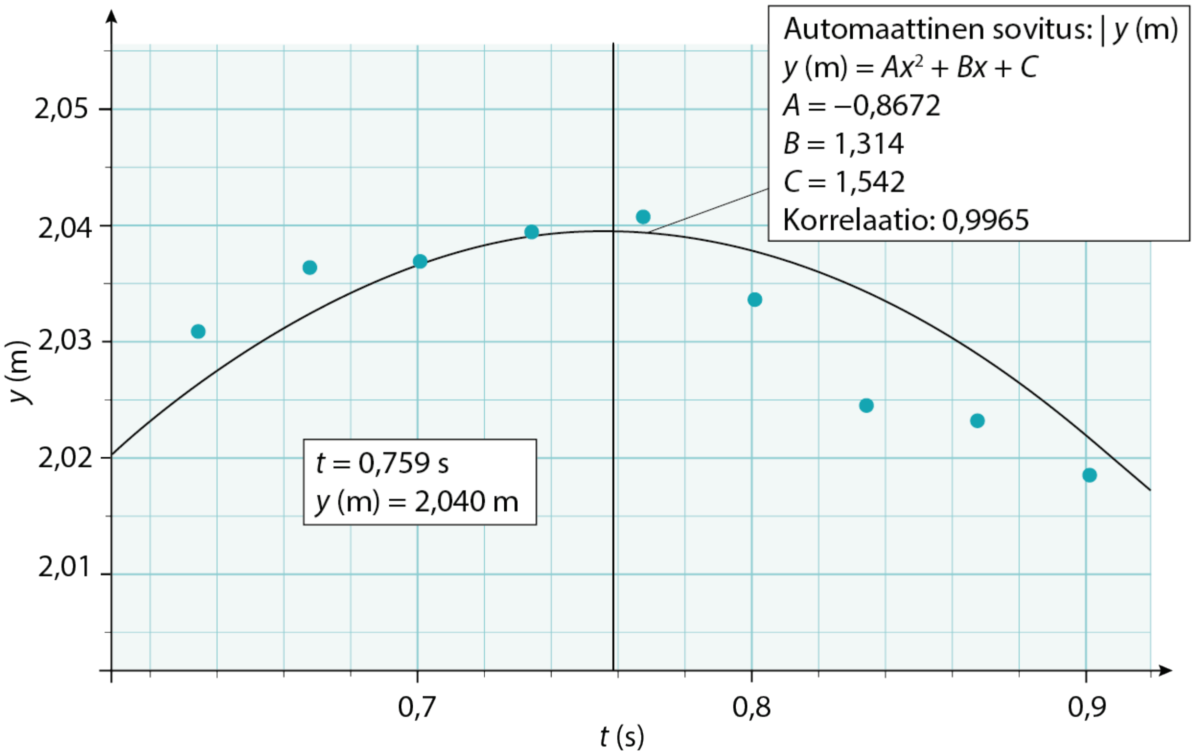
a) Hypyn aikana astronauttiin kohdistuu ainoastaan Kuun painovoima. Kuun pinnan läheisyydessä paino on vakiovoima. Vakiovoima aiheuttaa vakiokiihtyvyyden ja astronautin liike on tasaisesti kiihtyvää liikettä, jota voidaan mallintaa yhtälöllä $y = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + y_0$.



Mittausaineistoon tehdyn sovituksen perusteella astronautin liikettä mallintaa käyrä

$$y = \left(-0{,}8672\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2 + \left(1{,}314\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t + 1{,}542\,\text{m}.$$

b) Kuvaajan korkein kohta eli paraabelin huippu on kohdassa $t \approx 0{,}76$ s.



c) Sovitteen $y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0$ toisen asteen termin kertoimesta voidaan ratkaista kiihtyvyys.

$$\frac{1}{2}a = -0{,}8672\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = 2 \cdot \left(-0{,}8672\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = -1{,}7344\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx -1{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Negatiivinen etumerkki johtuu suuntasopimuksesta, positiivinen suunta oli valittu ylöspäin. Sovitteen perusteella putoamiskiihtyvyys Kuun pinnalla on $1{,}7\ \text{m/s}^2$.

Tehtävä 5.28.

auton nopeus alussa v_0 = 95 km/h

auton ja hirven välinen etäisyys s_h = 83 m

reaktioaika t = 1,0 s

a) Auto kulkee reaktioaikana vakionopeudella v_0 = 95 km/h. Tasaisessa liikkeessä olevan auto kulkee reaktioaikana

$$x_0 = v_0 t = \frac{95}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}0\,\mathrm{s} = 26{,}388\,89\,\mathrm{m} \approx 26\,\mathrm{m}.$$

b) Kyseessä on tasaisesti hidastuva liike. Jotta auto ei törmää hirveen, auton nopeuden pitää pienentyä nollaan v = 0 m/s ennen kuin auto on kulkenut 83 m. Kun auto on pysähtynyt 0 = $v_0 - at$. Auton jarrutusaika on $t=\frac{v_0}{a}$.

Oletetaan, että auton liike jarrutuksen aikana on tasaisesti hidastuvaa, jolloin auton kulkemalle matkalle jarrutuksen aikana on voimassa $x=v_0t-\frac{1}{2}at^2$.

Sijoitetaan matkan yhtälöön jarrutusajan yhtälö ja ratkaistaan, kuinka pitkän matkan auto kulkee jarrutuksen aikana.

$$x=v_0\frac{v_0}{a}-\frac{1}{2}a\left(\frac{v_0}{a}\right)^2=\frac{v_0^{\ 2}}{a}-\frac{1}{2}\frac{v_0^{\ 2}}{a}=\frac{1}{2}\frac{v_0^{\ 2}}{a}=\frac{v_0^{\ 2}}{2a}=\frac{\left(\frac{95}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\cdot 7{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}=44{,}639\,\text{m}\approx 45\,\text{m}$$

Pysähtymismatka on reaktiomatkan (eli a-kohdan tuloksen) ja jarrutusmatkan summa eli

$$s=v_0t+\frac{v_0^{\ 2}}{2a}=\frac{95}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 1{,}0\,\text{s}+\frac{\left(\frac{95}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\cdot 7{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}=71{,}028\,\text{m}\approx 71\,\text{m}.$$

Koska auton pysähtymismatka on pienempi kuin auton ja hirven välinen etäisyys, niin auto pysähtyy ennen kohtaamista eikä törmäystä tapahdu.

c) auton hidastuvuus märällä asfaltilla a_2 = 5,9 m/s^2

Hyödynnetään b-kohdassa johdettua jarrutusmatkan yhtälöä ja lasketaan, kuinka pitkä jarrutusmatka on märällä asfaltilla.

$$x_{02} = \frac{v_0^{\ 2}}{2a_2} = \frac{\left(\frac{95}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 5{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 59{,}01\,\text{m}$$

Pysähtymismatka

s_2 = 26,388 89 m + 59,01 m = 85,403 m. Auto törmää kohteeseen, koska pysähtymismatka on pidempi kuin auton ja hirven välinen etäisyys havaintohetkellä. Lasketaan, kuinka suuri auton nopeus on törmäämishetkellä.

Jarrutusmatka ennen kohdetta

x_2 = 83 m − 26,388 89 m = 56,6111 m.

Selvitetään, kuinka pitkässä ajassa auto etenee hidastuvassa liikkeessä matkan x_2.

$$x_2 = v_0 t - \frac{1}{2}a_2 t^2$$

$$\frac{1}{2}a_2 t^2 - v_0 t + x_2 = 0.$$

Saadaan toisen asteen yhtälö, joka voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla tai laskimella.

Sijoitetaan arvot edellä olevaan yhtälöön ja ratkaistaan toisen asteen yhtälöstä aika *t* laskimella.

$$\frac{1}{2}\cdot 5{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2-\left(\frac{95}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\cdot t+56{,}611\,11\,\text{m}=0$$

$$t_1=3{,}5700\,\text{s tai } t_2=5{,}3753\,\text{s}$$

Toisen asteen yhtälöstä saadaan kaksi ratkaisua. Ajoista pienempi kuvaa hetkeä, jolla auto törmää hirveen. Ajoista suurempi kuvaa tilannetta, jossa auto ajaisi hirven ohi, pysähtyisi ja palaisi takaisin hirven luo yhtä suurella, mutta vastakkaissuuntaisella nopeudella.

Lasketaan nopeus, jolla auto törmää hirveen

$$v=v_0-a_2t_1=\frac{95}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}-5{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 3{,}57\,\text{s}=6{,}3969\,\text{s}\approx 23\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

6 Voima ja momentti

Harjoittele

Tehtävä 6.1.

Oikeat vastaukset:

a) A

b) B

c) B

d) C

e) A

f) D

g) D

h) D

i) A

j) B

k) B

l) C

m) B

n) A

Tehtävä 6.2.

a) D. Kun veturi liikkuu vakionopeudella, veturiin kohdistuvien voimien summa on nolla ja veturin liikeyhtälö on Newtonin II lain mukaisesti $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

b) D. Vaunun ja veturin vuorovaikutuksessa kumpaankin kappaleeseen kohdistuu Newtonin III lain mukaisesti yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset voimat. Nämä voimat ovat toistensa vastavoimia.

c) D. Kun veturia vedetään vakiovoimalla ja vastusvoimat oletetaan pieniksi, liikkeen suunnassa kappaleeseen vaikuttaa vakiovoima. Newtonin II lain mukaisesti $\sum \overline{F} = m\overline{a}$, ja vakiovoima aiheuttaa vakiokiihtyvyyden.

Tehtävä 6.3.

sähköauton alkunopeus v_0 = 0 km/h

sähköauton loppunopeus v = 48 km/h

kiihdytyksen aikana kuljettu matka s = 41 m

sähköauton massa m = 1 680 kg

a) Sähköauto on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Auton kiihtyvyys voidaan laskea matkan yhtälöstä

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = \frac{1}{2}at^2.$$

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen nopeuden avulla saadaan kiihdytykseen kulunut aika, kun kappale lähtee paikoiltaan ja kappaleen alkunopeus on nolla.

$$v = at$$

$$t = \frac{v}{a}.$$

Tällöin matkan kaavasta saadaan kiihtyvyys

$$x = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\cancel{a}\frac{v^2}{a^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}$$

$$a = \frac{v^2}{2x} = \frac{\left(\frac{48-0}{3,6}\,\text{m/s}\right)^2}{2\cdot 41\,\text{m}} = 2,168\,\text{m/s}^2 \approx 2,2\,\text{m/s}^2$$

b) Autoa kiihdyttävän kokonaisvoiman suuruus saadaan sijoittamalla kiihtyvyyden yhtälö Newtonin II lain mukaiseen yhtälöön.

$$\sum F = ma = m\frac{v^2}{2s} = 1\,680\,\text{kg}\cdot\frac{\left(\frac{48-0}{3,6}\,\text{m/s}\right)^2}{2\cdot 41\,\text{m}} = 3\,642{,}276\,\text{N} \approx 3\,600\,\text{N}$$

Kokonaisvoiman yhtälöstä $\sum F = m\frac{v^2}{2s}$ nähdään, että kokonaisvoima on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön, eli $\sum F \sim v^2$.

c) Kun auto on vaakasuoralla tiellä, tienpinta kohdistaa autoon tukivoiman, jonka suuruus on $N = G = mg$. Auto on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, joten kun huomioidaan voimien suunnat, Newtonin II lain mukaan

$F_\mu = ma.$

Kitka $F_\mu = \mu N = \mu mg$.

Ratkaistaan yhtälöstä auton renkaan ja tienpinnan välinen kitkakerroin.

$\mu mg = ma$

$$\mu = \frac{a}{g} = \frac{v^2}{2sg} = \frac{\left(\frac{48}{3,6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\cdot 41\,\text{m}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2} = 0{,}221 \approx 0{,}22$$

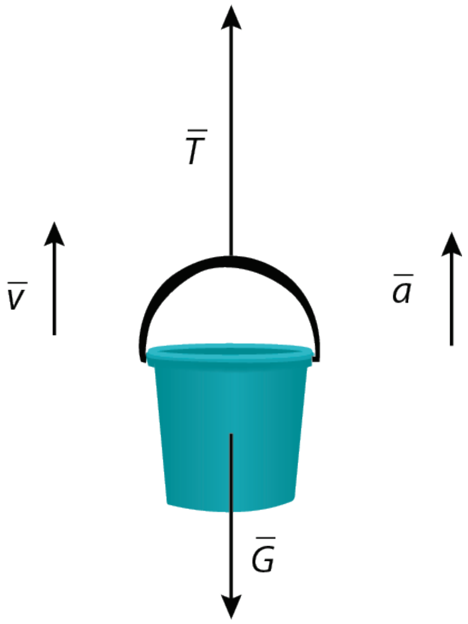
Tehtävä 6.4

narun jännitysvoima $T = 92$ N

ämpärin kiihtyvyys $a = 0{,}54\ \mathrm{m/s^2}$

putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

a)



$\overline{G}$ = ämpärin paino

$\overline{T}$ = narun jännitysvoima

b) Ämpäri on kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaisesti $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$. Valitaan suunta ylöspäin positiiviseksi ja ratkaistaan ämpärin massa.

$$T - G = ma$$

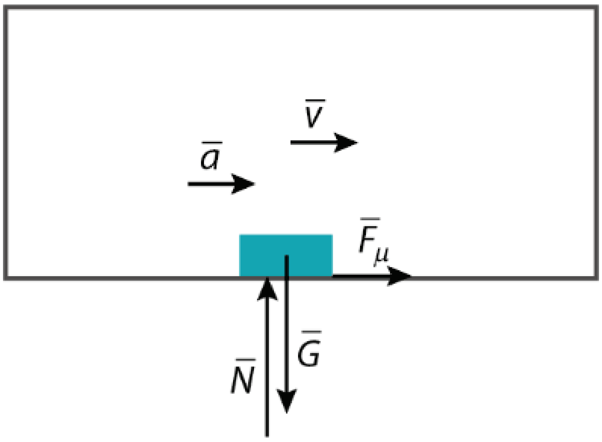
$$T = mg + ma$$

$$T = m(g + a)$$

$$m = \frac{T}{g + a} = \frac{92\,\text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2 + 0{,}54\,\text{m/s}^2} = 8{,}888\,\text{kg} \approx 8{,}9\,\text{kg}$$

Tehtävä 6.5

a)



$\overline{F}_\mu$ = lepokitka

$\overline{N}$ = peräkärryn lattian tukivoima

$\overline{G}$ = kappaleen paino

b) laatikon massa m = 8,9 kg

auton ja peräkärryn kiihtyvyys a = 1,8 m/s^2

Laatikko on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaisesti $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Valitaan suunta oikealle positiiviseksi. Laatikon ja peräkärryn lattian välinen lepokitka

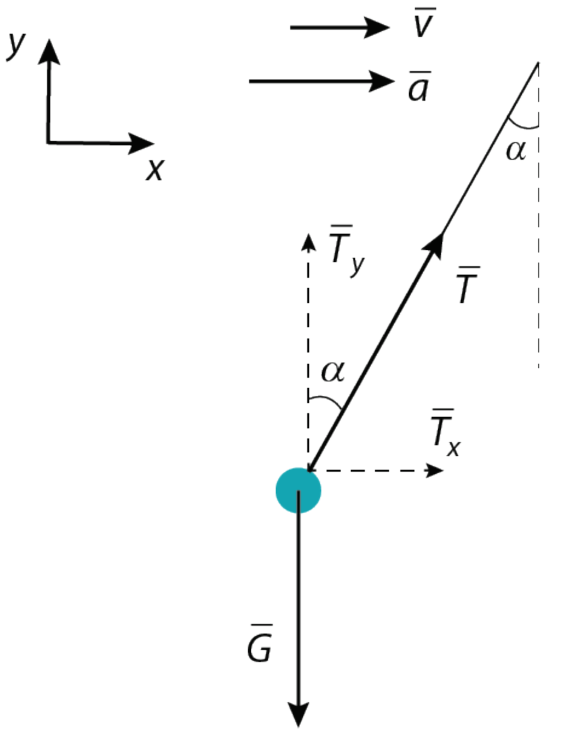
$$F_\mu = ma = 8{,}9\,\text{kg} \cdot 1{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 16{,}02\,\text{N} \approx 16\,\text{N}.$$

c) Jos laatikko pysyy peräkärryyn nähden paikallaan, niin myös laatikon kiihtyvyys kasvaa. Laatikkoa kiihdyttävä voima on lepokitka. Jos kiihtyvyys on suurempi niin myös lepokitkan on oltava suurempi.

Tehtävä 6.6.

Laaditaan avainnipun voimakuvio.

$\alpha = 15°$



$\bar{T}$ = langan jännitysvoima

$\bar{G}$ = paino

Avainnippu on kiihtyvässä liikkeessä. Avainnipun liikeyhtälö on Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = m\bar{a}$.

Kun suunnat oikealle ja ylös valitaan positiivisiksi, saadaan

x-suunta: $T_x = ma$

y-suunta: $T_y - G = 0$ eli $T_y = mg$

Kuvan perusteella $\frac{T_x}{T_y} = \tan\alpha$ eli

$$\tan\alpha = \frac{\cancel{m}a}{\cancel{m}g} = \frac{a}{g}.$$

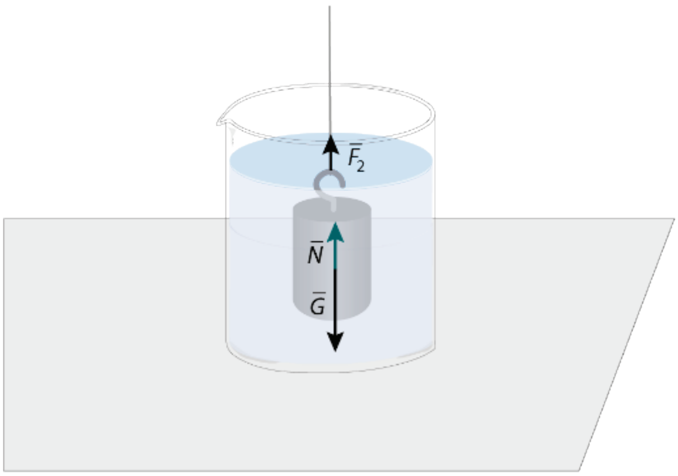
Koska avainnippu liikkuu junan mukana, avainnipun kiihtyvyys on yhtä suuri kuin junan kiihtyvyys.

$$a = g\tan\alpha = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \tan 15^\circ = 2{,}6286\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehtävä 6.7.

a) Kun punnus roikkuu narun varassa voima-anturissa paikallaan, Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}.$ Silloin punnuksen paino yhtä suuri kuin voima-anturin lukema eli $F_1 = G = 1{,}56$ N.

Punnus upotetaan nesteeseen, jolloin punnukseen kohdistuvat voimat ovat punnuksen paino, noste ja narun punnukseen kohdistama voima. Laaditaan voimakuvio.



$\overline{G}$ = punnuksen paino

$\overline{N}$ = punnukseen kohdistuva noste

$\overline{F}_2$ = narun punnukseen kohdistama voima

Punnus on paikallaan nesteessä, jolloin Newtonin II lain mukaan jälleen $\sum \overline{F} = \overline{0}.$ Kun positiivinen suunta valitaan ylöspäin, saadaan

$$F_2 + N - G = 0.$$

Nesteen punnukseen aiheuttama noste on

$$N = G - F_2$$
$$N = F_1 - F_2 = 1{,}56\,\text{N} - 1{,}30\,\text{N} = 0{,}26\,\text{N}.$$

b) Kun punnus upotettiin nesteeseen, punnuksen tilavuus on yhtä suuri kuin nesteen tilavuuden muutos. Kun punnus on ilmassa, on nesteen tilavuus 48,5 ml. Kun punnus on upotettuna nesteeseen, on nesteen tilavuus 71 ml.

Punnuksen tilavuus on V = 71 ml − 48,5 ml = 22,5 ml.

Punnuksen massa saadaan punnuksen painosta.

$$G = F_1 = mg$$
$$m = \frac{F_1}{g}$$

Punnuksen tiheys

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{F_1}{g}}{V} = \frac{F_1}{gV}$$
$$= \frac{1{,}56\,\text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 22{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^3} = 7\,067{,}62\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 7\,100\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

c) Nesteen tiheys saadaan nosteen avulla.

$$N = \rho_{\text{neste}} V g$$

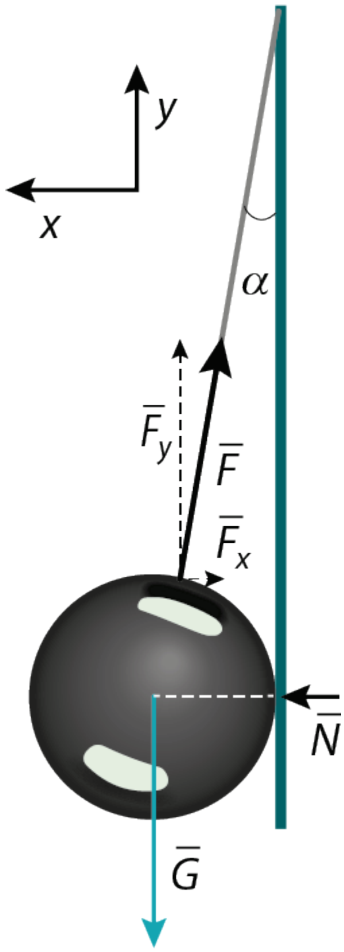
$$\rho_{\text{neste}} = \frac{N}{gV} = \frac{0{,}26\,\text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 22{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^3} = 1\,177{,}94\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 1\,200\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Tehtävä 6.8.

kuntopallon massa m = 8,0 kg

narun pituus l =0,72 m

kuntopallon säde r = 0,15 m



a)

$\overline{G}$ = kuntopallon paino

$\overline{N}$ = seinän kuntopalloon kohdistama voima

$\overline{F}$ = narun jännitysvoima

b) Kuntopallo on paikallaan, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}.$ ja

x-suunnassa: $N - F_x = 0$

y-suunnassa: $F_y - G = 0.$

Esitetään narun jännitysvoima kulman avulla

x-suunnassa: $N = F\sin\alpha$

y-suunnassa: $mg = F\cos\alpha.$

Narun ja pystysuunnan välinen kulma on

$$\sin\alpha = \frac{r}{l+r} = \frac{0{,}15\,\text{m}}{0{,}72\,\text{m} + 0{,}15\,\text{m}}$$
$$\alpha = 9{,}928^\circ.$$

Ratkaistaan y-suunnan yhtälöstä narun jännitysvoima $F = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, ja sijoitetaan se x-suunnan yhtälöön.

Seinän tukivoimaksi saadaan

$$N = F\sin\alpha = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha = mg\tan\alpha$$
$$= 8{,}0\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \tan 9{,}928^\circ$$
$$= 13{,}7365\,\text{N} \approx 14\text{ N}.$$

Tehtävä 6.9.

paketin massa $m = 4{,}1$ kg

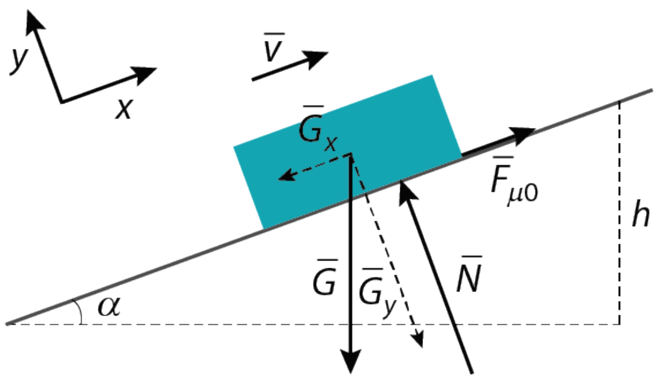
paketin korkeus maan tasalta $h = 1{,}6$ m

liukuhihnan kulma vaakatasoon nähden $\alpha = 23°$

paketin nopeus $v = 0{,}54$ m/s

putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81$ m/s^2

a)



$\overline{G}$ = laatikon paino

$\overline{N}$ = liukuhihnan laatikkoon kohdistama tukivoima

$\overline{F}_{\mu 0}$ = liukuhihnan ja laatikon välinen lepokitka

b) Paketin kulkema matka x maan pinnalta korkeudelle h = 1,6 m saadaan ratkaistua trigonometrian avulla

$$\sin\alpha = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1{,}6\,\text{m}}{\sin 23^{o}} = 4{,}0949\,\text{m}.$$

Liukuhihnan nopeus v = 0,54 m/s. Paketti on tasaisessa liikkeessä. Paketin kulkemaan matkaan kuluu aikaa

$$t = \frac{x}{v} = \frac{\frac{h}{\sin\alpha}}{v} = \frac{h}{v\sin\alpha} = \frac{1{,}6\,\text{m}}{0{,}54\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\sin 23^\circ} = 7{,}5831\,\text{s} \approx 7{,}6\,\text{s}.$$

c) Jotta paketti liikkuu tasaisella nopeudella hihnalla, Newtonin II lain mukaan pakettiin vaikuttavien voimien summa on nolla. Tarkastellaan pakettiin vaikuttavia voimia liukuhihnan suunnassa *x*.

$$
\begin{aligned}
F_{\mu 0} - G_x &= 0 \\
F_{\mu 0} &= G_x \\
&= \sin\alpha \cdot G = mg\sin\alpha \\
&= 4{,}1\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 23^\circ = 15{,}715\,597\,\text{N}
\end{aligned}
$$

Pakettiin vaikuttava kitka $F_{\mu 0}$ on tukivoiman N ja lepokitkakertoimen μ tulo eli $F_{\mu 0} = \mu_0 N$. Tukivoiman suuruus N on sama kuin painon y-komponentti G_y. Näiden avulla saadaan ratkaistua lepokitkakerroin.

$$
\begin{aligned}
\mu_0 &= \frac{F_{\mu 0}}{N} = \frac{F_{\mu 0}}{G_y} = \frac{\cancel{mg}\sin\alpha}{\cancel{mg}\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \\
&= \tan 23^\circ = 0{,}424475 \approx 0{,}42.
\end{aligned}
$$

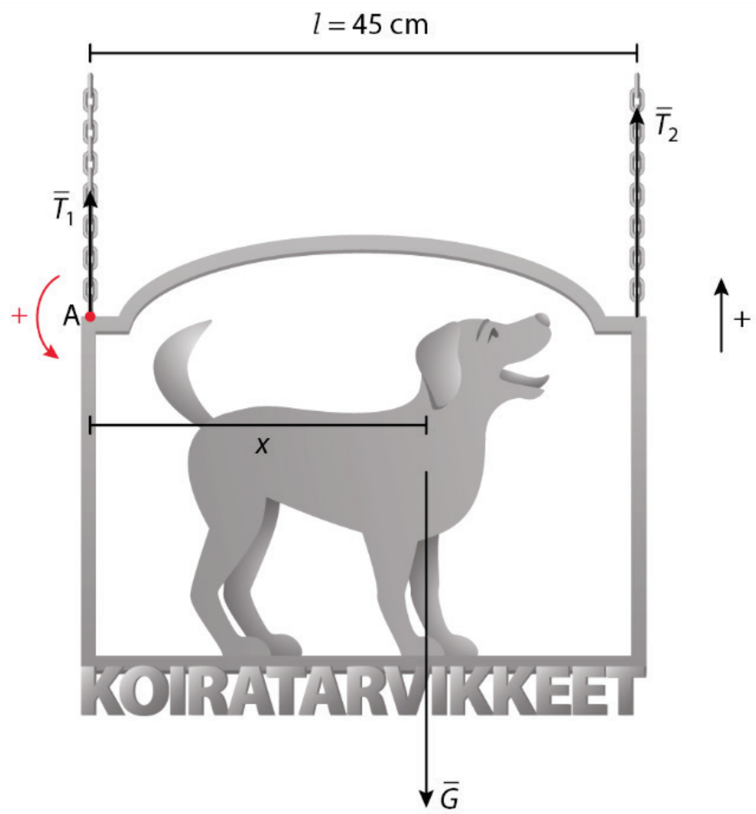
Tehtävä 6.10.

ketjujen jännitysvoimat T_1 = 3,5 N ja T_2 = 5,8 N

ketjujen välimatka l = 45 cm = 0,45 m

Merkitään kyltin massa m ja painopisteen vaakasuuntaista etäisyyttä vasemmanpuoleisesta ripustuspisteestä x.

Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



$\overline{T}_1$ ja $\overline{T}_2$ = ketjujen jännitysvoimat

$\overline{G}$ = kyltin paino

Kyltti on tasapainossa etenemisen ja pyörimisen suhteen. Kyltin tasapainoehdot ovat etenemisen suhteen $\sum \overline{F} = \overline{0}$ ja pyörimisen suhteen $\sum M_A = 0$.

Kun huomioidaan suuntasopimus, saadaan etenemisen tasapainoehdosta $T_1 + T_2 - G = 0$. Ratkaistaan tästä kyltin massa.

$$T_1 + T_2 = G$$
$$T_1 + T_2 = mg$$
$$m = \frac{T_1 + T_2}{g} = \frac{3{,}5\,\mathrm{N} + 5{,}8\,\mathrm{N}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}948\,01\,\mathrm{kg} \approx 0{,}95\,\mathrm{kg}$$

Tutkitaan kylttiin vaikuttavia momentteja pisteen A suhteen. Valitaan positiiviseksi kiertymissuunnaksi suunta vastapäivään. Pyörimisen tasapainoehdosta saadaan $-Gx + T_2l = 0$. Lisäksi $G = T_1 + T_2$, joten

$$Gx = T_2 l$$
$$(T_1 + T_2)x = T_2 l$$
$$x = \frac{T_2 l}{T_1 + T_2} = \frac{5{,}8\,\mathrm{N} \cdot 0{,}45\,\mathrm{m}}{3{,}5\,\mathrm{N} + 5{,}8\,\mathrm{N}} = 0{,}280\,65\,\mathrm{m} \approx 0{,}28\,\mathrm{m}.$$

Kyltin massa on 0,95 kg ja painopisteen vaakasuuntainen etäisyys kyltin vasemman reunan ripustuskohdasta on 0,28 m.

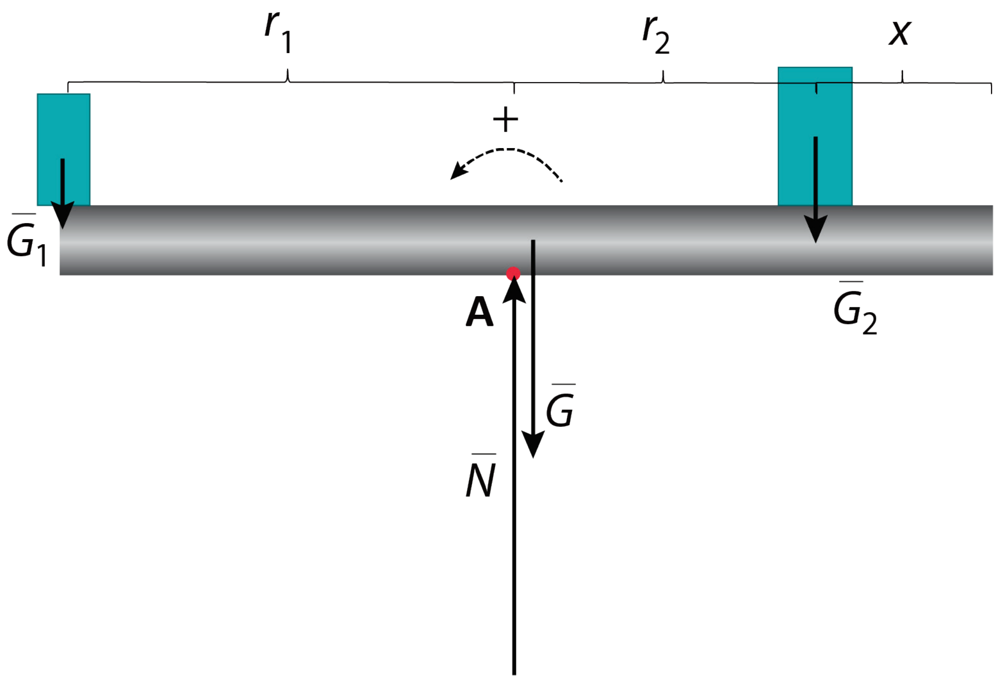
Tehtävä 6.11.

punnuksen 1 massa m_1 = 1,4 kg

rautatangon pituus l = 0,86 m

punnuksen 2 etäisyys rautatangon päästä x = 0,18 m

a)



$\overline{G}_1$ = punnuksen 1 paino

$\overline{G}_2$ = punnuksen 2 paino

$\overline{G}$ = rautatangon paino

$\overline{N}$ = tankoa kannatteleva tukivoima

b) Valitaan kiertoakseliksi piste, josta rautatanko on tuettu. Merkitään kiertoakselia kirjaimella A.

Punnuksen 1 etäisyys rautatangon keskipisteestä $r_1 = \frac{l}{2}$.

Punnuksen 2 etäisyys rautatangon keskipisteestä

$r_2 = \frac{l}{2} - x$.

Systeemi on tasapainossa pyörimisen suhteen. Tarkastellaan momenttiehtoa kiertoakselin A suhteen.

$$\begin{aligned} \sum M_\text{A} &= 0 \\ G_1 r_1 - G_2 r_2 &= 0 \\ m_1 g r_1 - m_2 g r_2 &= 0 \end{aligned}$$

Lisättävän punnuksen massa on

$$m_1 \cancel{g} r_1 = m_2 \cancel{g} r_2$$

$$m_2 = \frac{m_1 r_1}{r_2} = \frac{m_1 \frac{l}{2}}{\frac{l}{2} - x} = \frac{1{,}4\,\text{kg} \cdot \frac{0{,}86\,\text{m}}{2}}{\frac{0{,}86\,\text{m}}{2} - 0{,}18\,\text{m}} = 2{,}408\,\text{kg} \approx 2{,}4\,\text{kg}.$$

c) Systeemi on tasapainossa etenemisen suhteen, jolloin $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Otetaan voimien suunnat huomioon ja tarkastellaan voimien suuruuksia tasapainoehdon ja

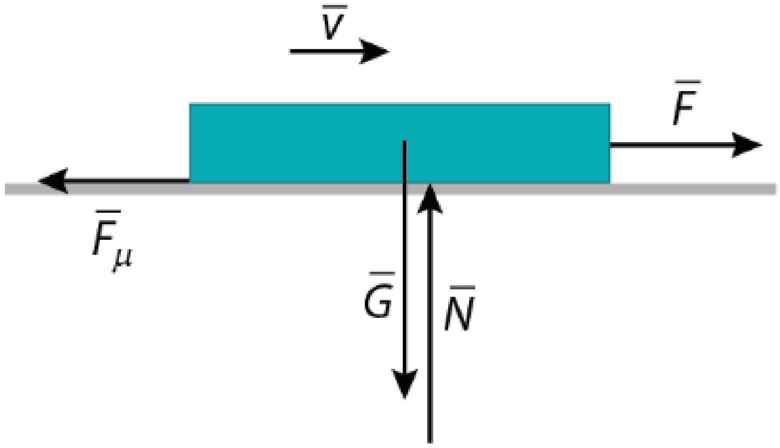
b-kohdan tuloksen mukaan. Lasketaan tankoa tukevan voiman *N* suuruus.

$$N - G - G_1 - G_2 = 0$$

$$\begin{aligned} N &= mg + m_1 g + m_2 g \\ N &= g(m + m_1 + m_2) \\ &= 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot (21\,\text{kg} + 1{,}4\,\text{kg} + 2{,}408\,\text{kg}) \\ &= 243{,}366\,\text{N} \approx 240\,\text{N}. \end{aligned}$$

Tehtävä 6.12.

a)



$\overline{G}$ = punnuslaatikon paino

$\overline{F}$ = voima, jolla punnuslaatikkoa vedetään

$\overline{F_\mu}$ = punnuslaatikon ja pöydän välinen liukukitka

$\overline{N}$ = pöydän pinnan punnuslaatikkoon kohdistama tukivoima

b) Tarkastellaan vakionopeudella liukuvaa punnuslaatikkoa Newtonin II lain mukaan, jolloin $\sum \overline{F} = \overline{0}.$ Sovitaan suunnat ja muodostetaan liikeyhtälöt vaakasuunnassa ja pystysuunnassa.

vaakasuunta: $F - F_{\mu} = 0$

pystysuunta: $N - G = 0$.

Kitkalle $F_{\mu} = \mu N$. Saadaan voimille

vaakasuunta: $F = \mu N$

pystysuunta: $N = mg.$

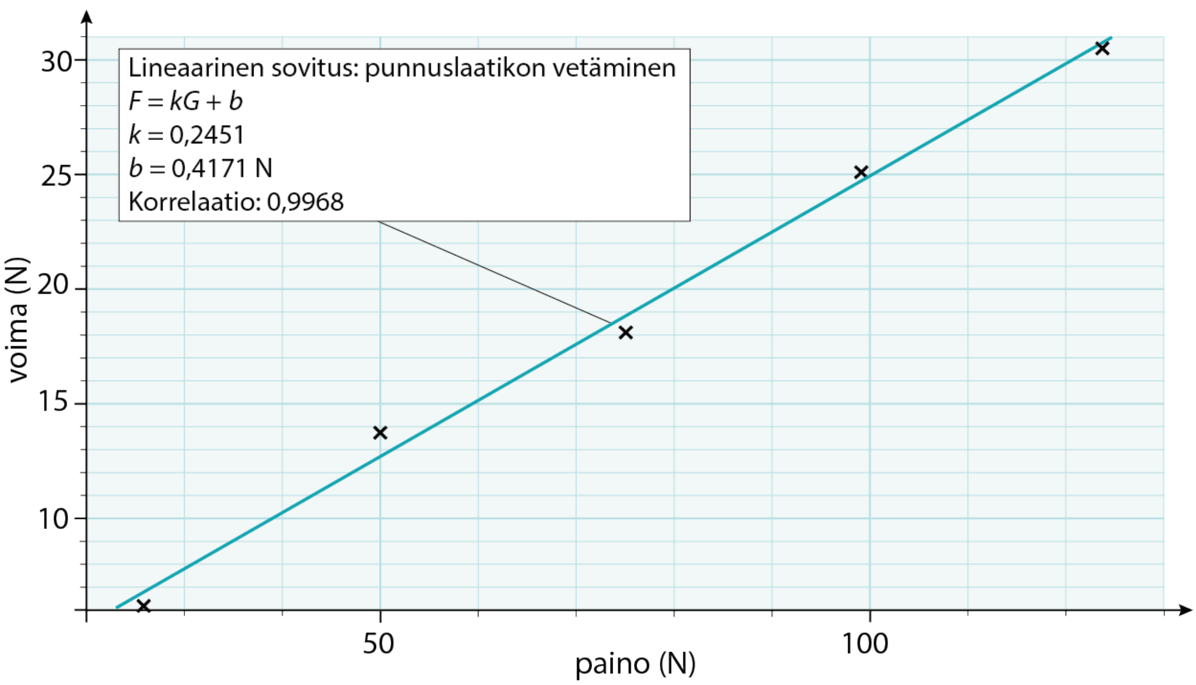
Vetävän voiman ja massan välille saadaan

$F = \mu mg$.

Voima-anturin lukeman F ja painon mg välillä on lineaarinen riippuvuus. Tällöin kitkakerroin saadaan (mg, F)-kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta.

Lasketaan uusi sarake $G = mg$, tehdään kuvaaja ja sovitetaan mittauspisteisiin suora. Määritetään suoran fysikaalinen kulmakerroin.

Massa (kg)	Voima (N)	Paino (N)
2,65	6,2	25,997
5,1	13,8	50,031
7,65	18,1	75,047
10,1	25,1	99,081
12,6	30,5	123,606



Punnuslaatikon pohjan ja pöydän pinnan välinen liukukitkakerroin on kuvaajan kulmakerroin $\mu = 0{,}2451 \approx 0{,}25$.

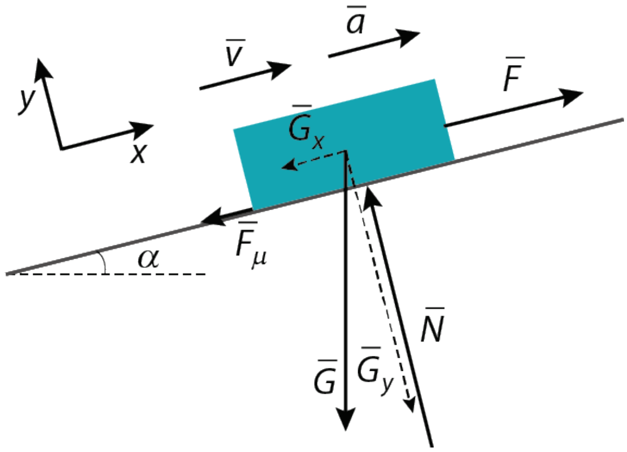
c) punnuslaatikon kiihtyvyys $a = 1{,}4\ \text{m/s}^2$

punnuslaatikon massa $m = 2{,}65$ kg

tason kaltevuuskulma $\alpha = 25°$

Pöydän pinnan ja punnuslaatikon pohjan välinen kitkakerroin on b-kohdan mukaan $\mu = 0{,}2451$

Laaditaan punnuslaatikon voimakuvio.



$\bar{G}$ = punnuslaatikon paino

$\bar{F}$ = punnuslaatikon vetämiseen tarvittava voima

$\bar{F}_\mu$ = punnuslaatikon ja pöydän välinen kitka

$\bar{N}$ = pöydän pinnan punnuslaatikkoon kohdistama tukivoima

Tarkastellaan punnuslaatikon liikettä tason suunnassa ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Tason suunnassa laatikko on kiihtyvässä liikkeessä ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa laatikko on paikallaan. Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioiden

tason suunnassa: $F - F_\mu - G_\mathrm{x} = ma$

tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa: $N - G_\mathrm{y} = 0$.

Kitka $F_\mu = \mu N$. Esitetään painon komponentit

$F = \mu N + G\sin\alpha + ma$

$N = G\cos\alpha$

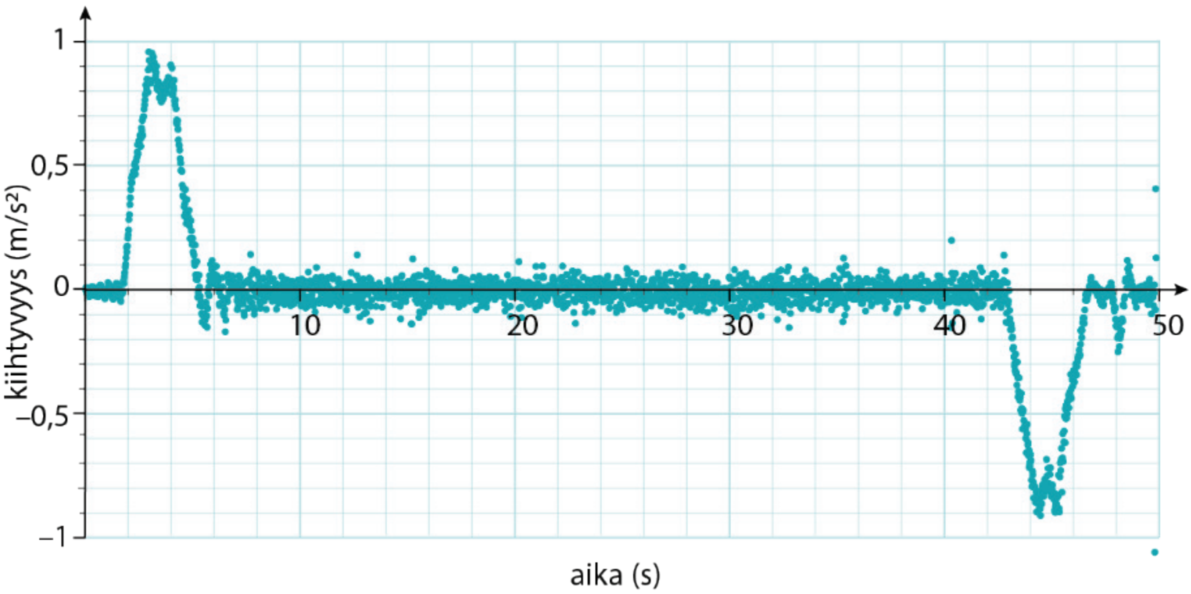
Sijoitetaan tukivoima N ja $G = mg$ ylempään yhtälöön, jolloin saadaan

$F = \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha + ma$
$F = m(\mu g\cos\alpha + g\sin\alpha + a)$.

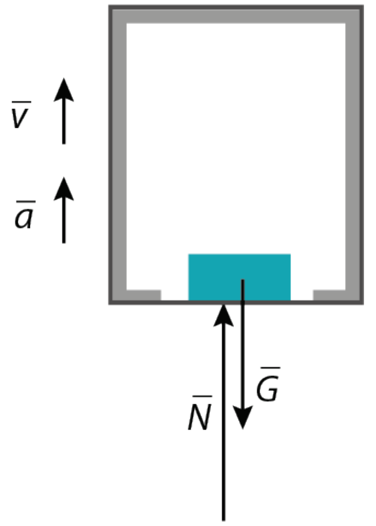
$$F = 2{,}65\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}2451\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\cos 25^\circ + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin 25^\circ + 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$$
$$= 20{,}471\,\mathrm{N} \approx 20\,\mathrm{N}.$$

Tehtävä 6.13.

a)



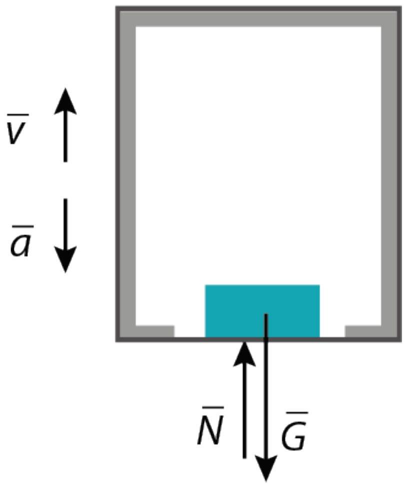
b) Ajanhetkellä 3,7 s hissi on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä ylöspäin, sillä hissin kiihtyvyys on suurempi kuin nolla.



$\overline{N}$ = hissin lattian tukivoima

$\overline{G}$ = paino

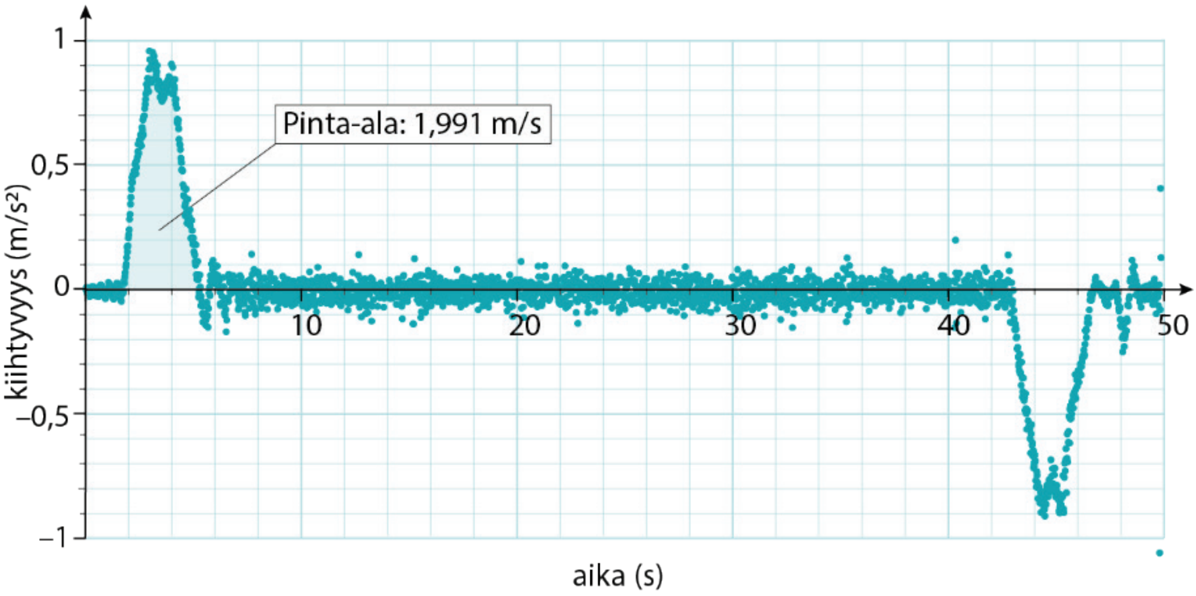
Ajanhetkellä 44,7 s hissin kiihtyvyys on pienempi kuin nolla, joten hissi on hidastuvassa liikkeessä.



$\bar{N}$ = hissin lattian tukivoima

$\bar{G}$ = paino

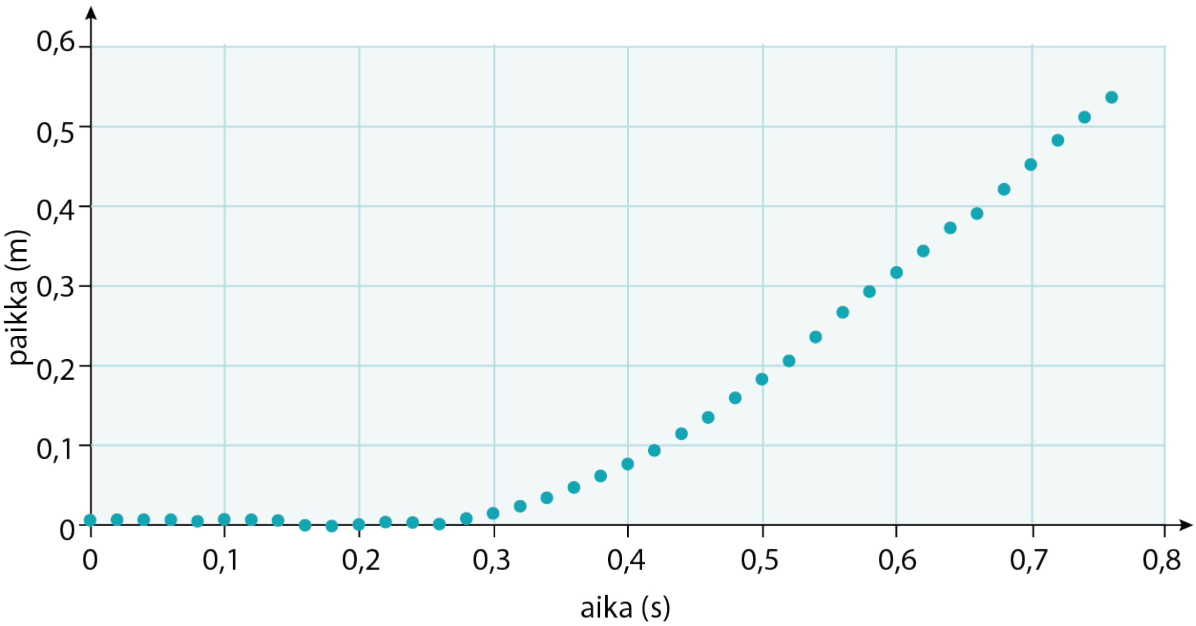
c) Hissi on tasaisessa liikkeessä liikkeelle lähdön jälkeen, kun hissin kiihtyvyys on nolla. Hissi on tasaisessa liikkeessä ajanhetkellä 5,3 s – 43 s. Hissin nopeus saadaan (t, a)-koordinaatiston kuvaajan ja aika-akselin rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta.



Hissin nopeus on v = 1,991 m/s ≈ 2,0 m/s.

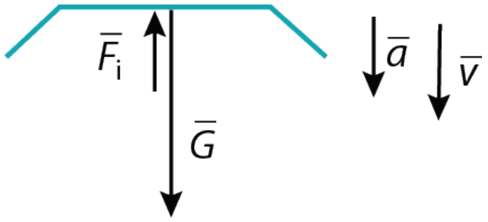
Tehtävä 6.14.

a)



(t, s)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan jyrkkyys kuvaa kappaleen nopeutta. Ajanhetkelle 0,26 s asti vuoka oli paikallaan. Tämän jälkeen kuvaajan jyrkkyys alkoi muuttua eli vuoan liike oli kiihtyvää. Ajanhetken 0,47 s jälkeen kuvaajan jyrkkyys pysyy samana. Tämän jälkeen vuoka oli tasaisessa liikkeessä.

b) Ajanhetkellä 0,4 s muffinivuoka oli kiihtyvässä liikkeessä.

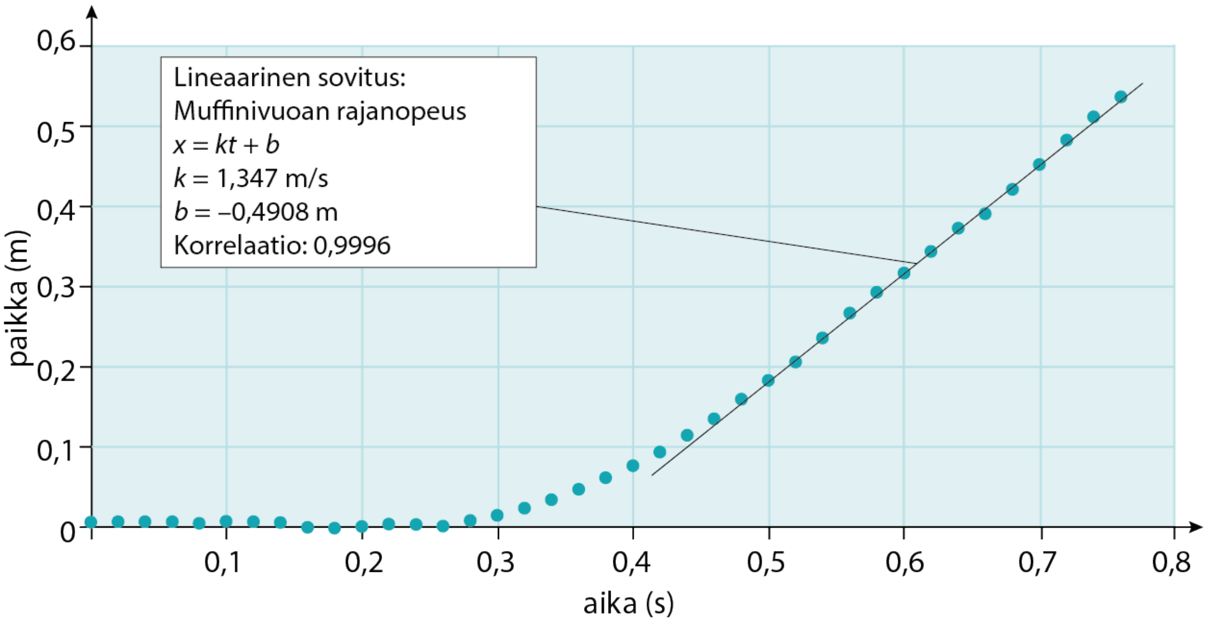


$\overline{G}$ = muffinivuoan paino

$\overline{F}_i$ = ilmanvastus

c) Kun vuoka putoaa ilmassa vuokaan vaikuttaa paino ja ilmanvastus. Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Kun vuoka putoaa rajanopeudellaan, ilmanvastus ja paino yhtä suuret, joten vuoan kiihtyvyys on nolla.

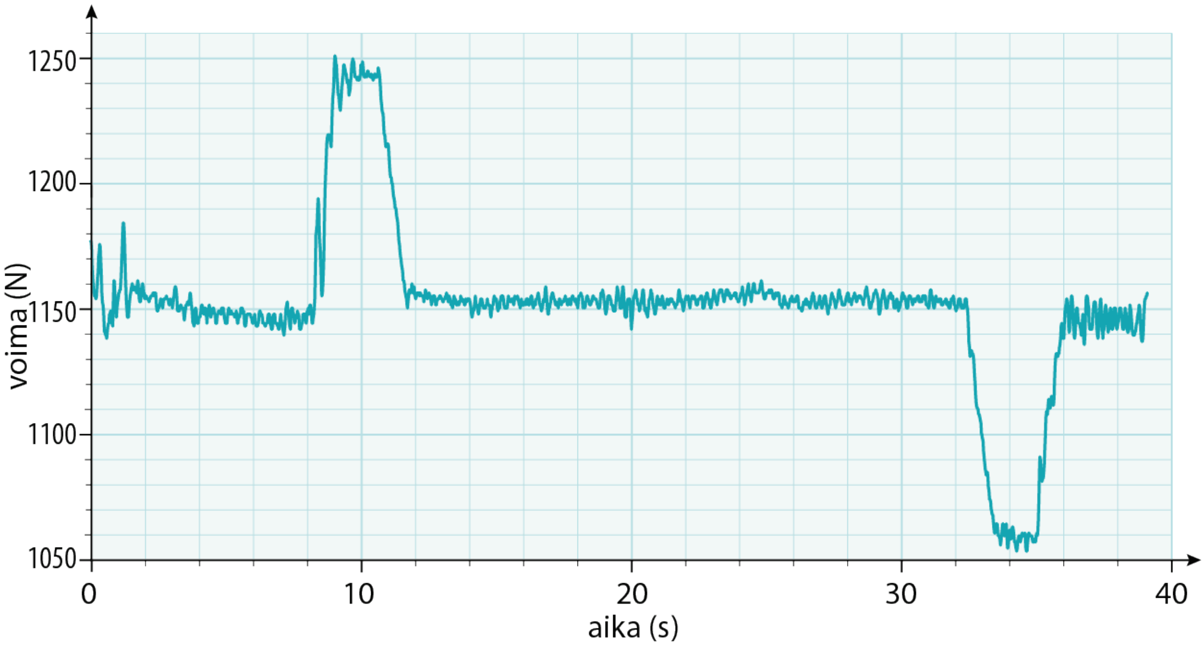
Määritetään rajanopeus kuvaajan fysikaalisen kulmakertoimen avulla kohdasta, jossa kuvaajan jyrkkyys ei enää muutu.



Rajanopeudeksi saadaan v = 1,347 m/s ≈ 1,3 m/s.

Tehtävä 6.15.

a) Esitetään voima-anturin lukema ajan suhteen.



Opiskelijan vaikuttavat voimat ovat voimalevyn häneen kohdistama tukivoima $\overline{N}$ ja opiskelijan paino $\overline{G}$. Kun hissi on paikallaan, opiskelijan Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Paino on yhtä suuri kuin tukivoima, joten voimalevy näyttää opiskelijan painoa. Kuvaajan perusteella opiskelijan paino G = 1 150 N.

Opiskelija massa on silloin

$$G = mg$$

$$m = \frac{G}{g} = \frac{1\,150\,\text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2} = 117{,}23\,\text{kg} \approx 120\,\text{kg}.$$

b) Kun hissi lähtee liikkeelle, on opiskelija hetken aikaa kiihtyvässä liikkeessä. Opiskelijan liikeyhtälö on $\sum\overline{F} = m\overline{a}$.
Kiihtyvän liikkeen aiheuttaa Newtonin II lain mukainen kokonaisvoima, joka on tilanteessa painon ja tukivoiman summa.

Mittausaineistosta nähdään, että voima-anturin lukema muuttuu ensimmäisen kerran aikavälillä 9,0 s – 10,6 s. Tuolloin voima-anturin lukema kasvaa, eli $N > G$.

Opiskelija saa kiihtyvyyden tukivoiman suuntaan, eli ylöspäin. Hissi lähtee siis liikkeelle ylöspäin.

c) Hissi on kiihtyvässä liikkeessä, kun $\sum\overline{F} \neq \overline{0}$ eli $N \neq G$.
Mittauksen perusteella tukivoima on suurempi kuin paino aikavälillä 9,0 s – 10,6 s ja pienempi kuin paino aikavälillä 33,4 s – 34,9 s. Koska tukivoima on aikaväleillä likipitäen vakio, on hissin liike tasaisesti kiihtyvää.

Aikavälillä 9,0 s – 10,6 s hissi lähtee liikkeelle ja aikavälillä 33,4 s – 34,9 s hissi pysähtyy.

Hissi on tasaisessa liikkeessä, kun $\sum\overline{F} = \overline{0}$. eli $N = G$.
Voimalevyn lukema on sama kuin paino aikavälillä 11,7 s – 32,3 s. Hissi on silloin tasaisessa liikkeessä.

d) Hissin kiihdyttäessä ylöspäin tukivoima on suurimmillaan N = 1 244 N.

Opiskelijan ja hissin suurin kiihtyvyys saadaan opiskelijan Newtonin II lain mukaisesta liikeyhtälöstä $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Kun suunta ylöspäin valitaan positiiviseksi, saadaan

$$N - G = ma.$$

Suurin kiihtyvyys on

$$a = \frac{N-G}{m} = \frac{N-G}{\frac{G}{g}} = \frac{(N-G)g}{G}$$

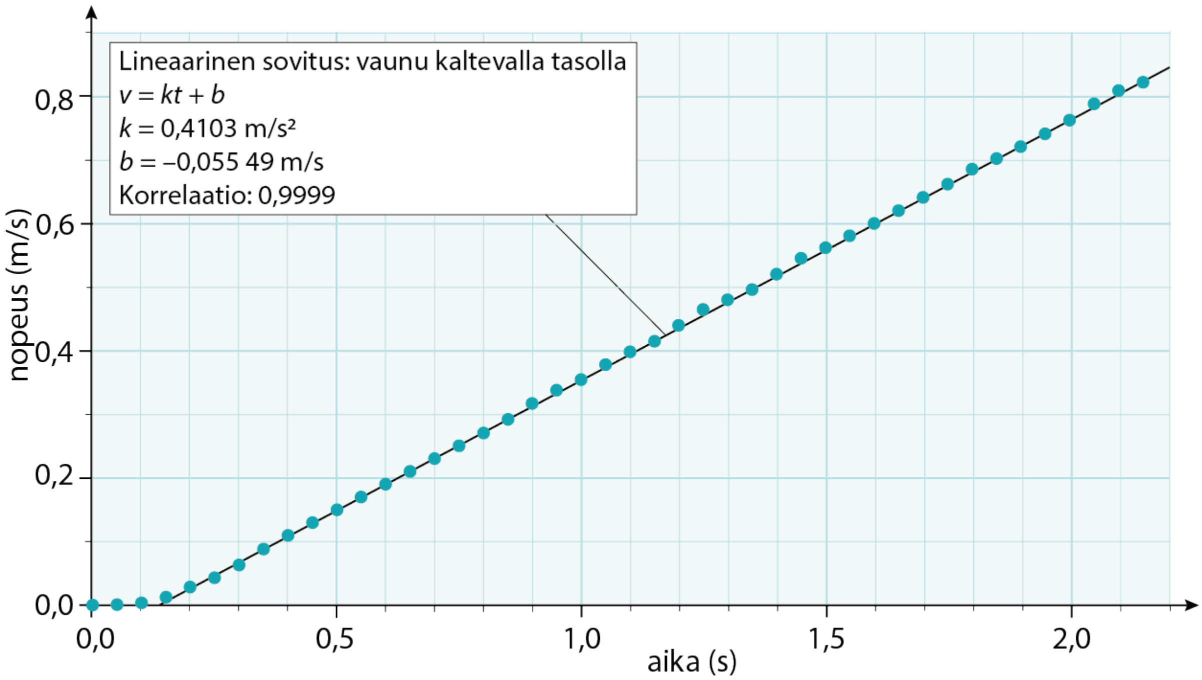
$$= \frac{(1\,244\,\text{N} - 1\,150\,\text{N}) \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{1\,150\,\text{N}} = 0{,}801\,86\,\text{m/s}^2 \approx 0{,}80\,\text{m/s}^2.$$

Tehtävä 6.16.

kitkattoman radan kaltevuuskulma vaakatasoon nähden α

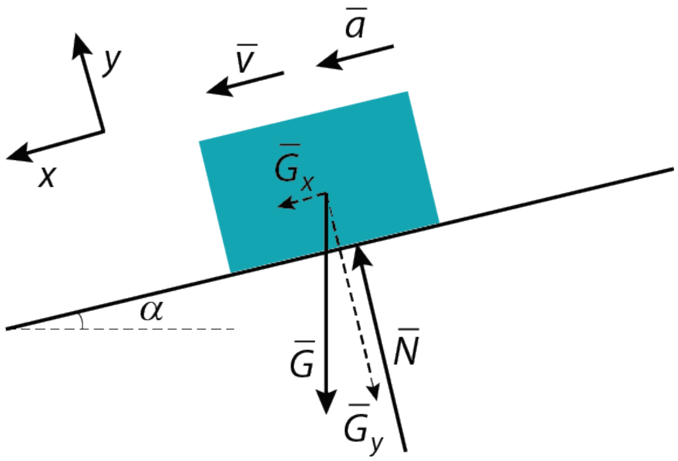
putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

a) Vaunun kiihtyvyys on (t, v)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin.



Vaunun kiihtyvyys on $a = 0{,}4103\ \text{m/s}^2 \approx 0{,}41\ \text{m/s}^2$.

b) Laaditaan voimakuvio.



$\bar{G}$ = vaunun paino

$\bar{N}$ = radan vaunuun kohdistama tukivoima

Kuvaajan perusteella vaunu on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = m\bar{a}$.

Suunnat huomioiden tason suunnassa

$$\begin{aligned} G_x &= ma \\ \cancel{m}g\sin\alpha &= \cancel{m}a \\ g\sin\alpha &= a. \end{aligned}$$

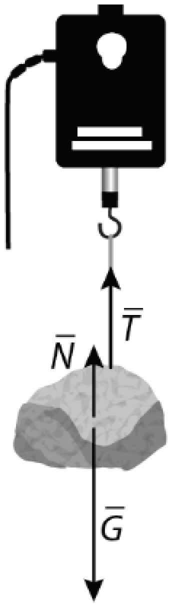
Radan ja vaakasuoran välinen kulma on

$$\sin\alpha = \frac{a}{g} = \frac{0{,}410\,\text{m/s}^2}{9{,}81\,\text{m/s}^2}$$
$$\alpha = 2{,}395^\circ \approx 2{,}4^\circ.$$

c) Edellisen kohdan mukaan vaunun kiihtyvyys on $a = g \sin\alpha$. Mitä suurempi on kulma α, sitä suurempi on $\sin\alpha$ ja sitä suurempi on kiihtyvyys. Kun kiihtyvyys kasvaa on, kasvaa kuvaajan jyrkkyys.

Tehtävä 6.17.

a)



$\overline{T}$ = narun jännitysvoima

$\overline{N}$ = noste

$\overline{G}$ = kappaleen paino

b) kiven tiheys ρ_k = 2 760 kg/m^3

asetonin tiheys ρ_a = 790 kg/m^3

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Voima-anturin lukema, kun kivi on ilmassa T_1 = 31,3 N.

Kivi on paikallaan asetonissa, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Kun kivi on ilmassa, kiven paino on yhtä suuri kuin narun jännitysvoima,

$$T_1 = G = mg = \rho_k g V.$$

Tällöin kiven tilavuus on

$$V = \frac{T_1}{\rho_k g}.$$

Kun kivi on asetonissa paikallaan, Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Kun huomioidaan voimien suunnat, saadaan $G - N - T_2 = 0$.

Voima-anturin lukemaksi saadaan

$$T_2 = G - N$$
$$T_2 = G - \rho_a g V.$$

Sijoitetaan aiemmin saatu paino ja tilavuus tilanteesta, kun kivi oli ilmassa. Saadaan voima-anturin lukemaksi

$$T_2 = T_1 - \rho_\mathrm{a}\cancel{g}\frac{T_1}{\rho_\mathrm{k}\cancel{g}} = T_1 \cdot \left(1 - \frac{\rho_\mathrm{a}}{\rho_\mathrm{k}}\right)$$

$$= 31{,}3\,\mathrm{N} \cdot \left(1 - \frac{790\,\mathrm{kg/m^3}}{2\,760\,\mathrm{kg/m^3}}\right) = 22{,}340\,94\,\mathrm{N} \approx 22{,}3\,\mathrm{N}.$$

c) Koska vesi on asetonia tiheämpää, vesi aiheuttaa kiveen asetonia suuremman nosteen. Niinpä voima-anturin lukema on vedessä pienempi, sillä voima-anturin ei tarvitse kohdistaa kiveen yhtä suurta ylöspäin olevaa voimaa kuin asetonissa.

Tehtävä 6.18.

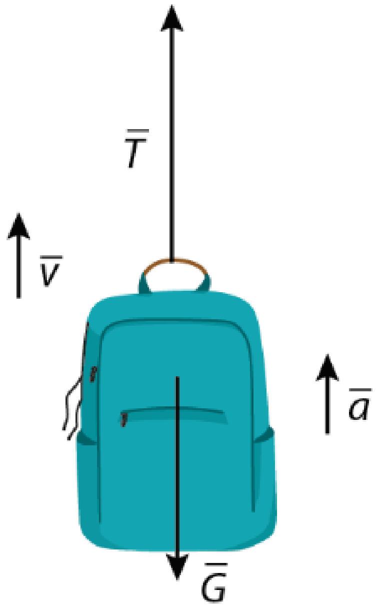
a) repun massa $m_r = 5{,}03$ kg

vaa'an lukema $m_v = 5{,}31$ kg

kiihdytysaika $t = 11$ s

loppunopeus $v = 6{,}0$ m/s

putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81$ m/s^2



$\overline{G}$ = kappaleen paino

$\overline{T}$ = koukun tukivoima

b) Hissi on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaisesti $\sum \overline{F} = m_{\text{r}}\overline{a}$. Vaaka näyttää lukemaa $T = m_{\text{v}}g$.

Kun suunta ylöspäin valitaan positiiviseksi suunnaksi, saadaan

$$
\begin{aligned}
T - G &= ma \\
T &= G + m_{\text{r}}a \\
T &= m_{\text{r}}g + m_{\text{r}}a \\
m_{\text{v}}g &= m_{\text{r}}g + m_{\text{r}}a \\
m_{\text{r}}a &= m_{\text{v}}g - m_{\text{r}}g \\
m_{\text{r}}a &= (m_{\text{v}} - m_{\text{r}})g
\end{aligned}
$$

$$a = \frac{(m_{\text{v}} - m_{\text{r}})g}{m_{\text{r}}} = \frac{(5{,}31\,\text{kg} - 5{,}03\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{5{,}03\ \text{kg}} = 0{,}546\,08\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Hissin loppunopeus voidaan laskea tasaisesti kiihtyvän liikkeen mallin avulla yhtälöstä

$$v = at$$

$$v = \frac{(m_{\text{v}} - m_{\text{r}})g}{m_{\text{r}}} \cdot t = \frac{(5{,}31\,\text{kg} - 5{,}03\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{5{,}03\ \text{kg}} \cdot 11\,\text{s} = 6{,}0069\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 6{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Kun hissi liikkuu vakionopeudella, sen kiihtyvyys on nolla. Repun Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on silloin $\sum \overline{F} = \overline{0}$, ja vaa'an tukivoima on yhtä suuri kuin painovoima. Vaaka näyttää samaa lukemaa kuin repun ollessa levossa. Vaaka näyttää lukemaa m_{r} = 5,03 kg ≈ 5,0 kg.

Tehtävä 6.19.

pallon ja varusteiden massa m_p = 540 kg

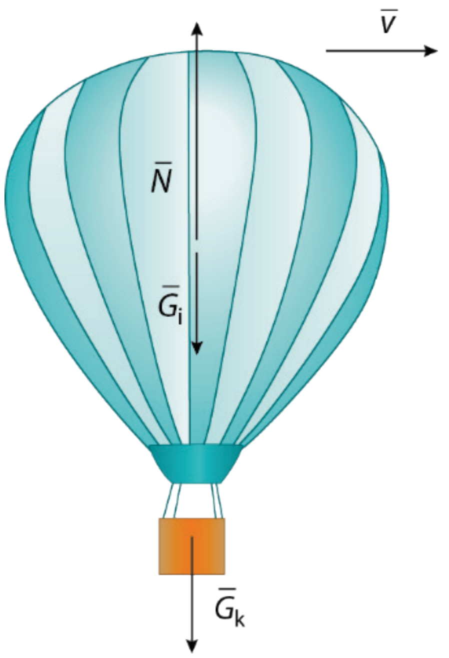
kuumailmapallon tilavuus V = 4 250 m^3

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

ilman tiheys ρ_i = 1,17 kg/m^3

kuuman ilman tiheys ρ_k = 0,92 kg/m^3

a)



$\overline{N}$ = noste

$\overline{G}_i$ = ilman paino

$\overline{G}_k$ = pallon ja varusteiden paino

Kuumailmapallo tasaisessa liikkeessä, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Kun suunta ylöspäin valitaan positiiviseksi, saadaan kuumailmapallon liikeyhtälöksi

$N - G_\mathrm{i} - G_\mathrm{k} = 0.$

Kuumailmapallon, varusteiden ja kuorman kokonaismassaksi saadaan

$$\begin{aligned}
G_\mathrm{k} &= N - G_i \\
m\cancel{g} &= \rho_\mathrm{i}\cancel{g}V - \rho_\mathrm{k}V\cancel{g} \\
m &= (\rho_\mathrm{i} - \rho_\mathrm{k})V \\
m &= (1{,}17\,\mathrm{kg/m^3} - 0{,}92\,\mathrm{kg/m^3}) \cdot 4\,250\ \mathrm{m^3} = 1\,062{,}5\,\mathrm{kg}.
\end{aligned}$$

Koska pallon, varusteiden ja kuorman massa on m = 1 062,5 kg on suurin mahdollinen kuorma
$m_\mathrm{k} = m - m_\mathrm{p}$ = 1 062,5 kg − 540 kg = 522,5 kg ≈ 520 kg

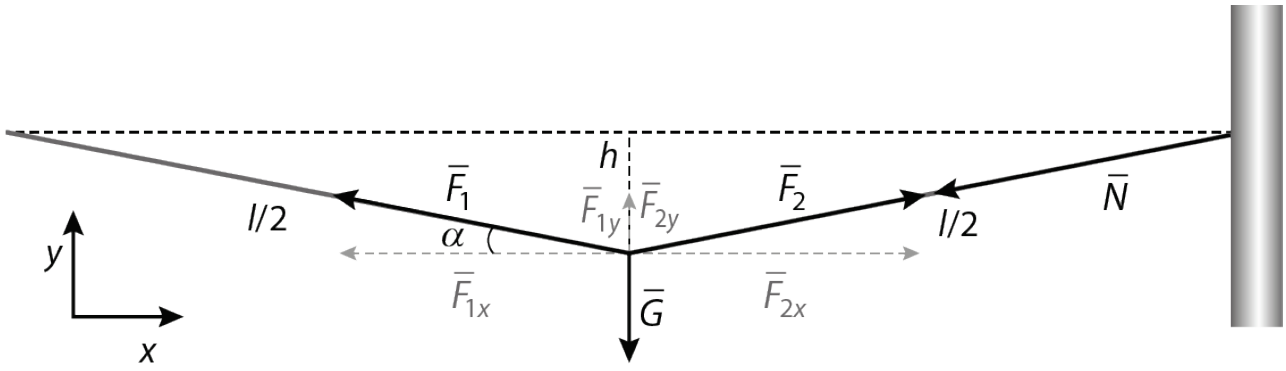
Tehtävä 6.20.

vaijerin muutos vaakasuuntaan nähden h = 0,112 m

vaijerin pituus l = 9,4 m

trapetsitaiteilijan massa m = 52 kg

a) Piirretään tilanteesta voimakuvio.



$\overline{G}$ = trapetsitaiteilijan paino eli voima, jolla vaijeria painetaan alaspäin

$\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ = vaijerissa vaikuttavat jännitysvoimat

$\overline{N}$ = voima, jolla vaijeri vetää tolppaa

Trapetsitaiteilija on paikallaan, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Voimat

x-suunnassa: $-F_{1x} + F_{2x} = 0$

y-suunnassa: $F_{1y} + F_{2y} - G = 0$.

Esitetään voimien komponentit kulman avulla

x-suunnassa: $F_1 \cos\alpha = F_2 \cos\alpha$

y-suunnassa: $F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha = mg.$

Ylemmän x-suunnan yhtälön perusteella vaijerissa vaikuttavat voimat ovat yhtä suuret, joten merkitään $F_1 = F_2 = F$.

Kulmasta vaakatasoon nähden saadaan $\sin\alpha = \frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{2h}{l}$.

Ratkaistaan alemman y-suunnan yhtälön avulla vaijerissa vaikuttava voima.

Vaijerissa vaikuttava voima on

$$
\begin{aligned}
F\sin\alpha + F\sin\alpha &= mg \\
2F\sin\alpha &= mg \\
F &= \frac{mg}{2\sin\alpha} = \frac{mg}{2\cdot\frac{2h}{l}} = \frac{mgl}{4h} \\
&= \frac{52\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 9{,}4\,\text{m}}{4\cdot 0{,}112\,\text{m}} \\
&= 10\,703{,}4107\,\text{N} \approx 11\,\text{kN}.
\end{aligned}
$$

b) Palkki vaikuttaa Newtonin III lain mukaan vaijeriin yhtä suurella voimalla kuin vaijeri palkkiin. Palkkiin vaikuttava voima on yhtä suuri kuin vaijerissa vaikuttava voima, mutta vastakkaissuuntainen. Voiman suuruus on $N = F = 11$ kN.

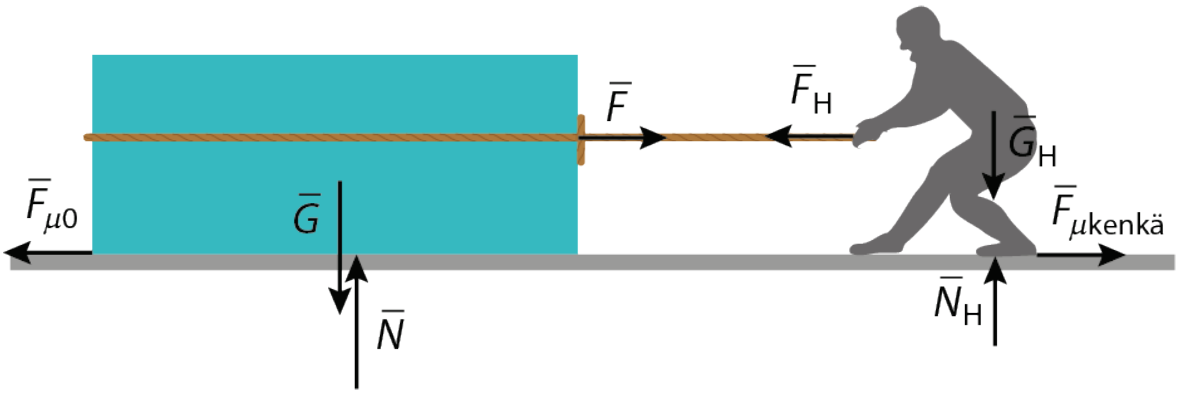
Tehtävä 6.21.

ihmisen massa m_{ihminen} = 85 kg

laatikon massa m_{laatikko} = 120 kg

a) Lepokitkakerroin μ_0 = 0,50

Hahmotellaan tilanteen voimakuviota.



$\overline{G}$ = laatikon paino

$\overline{N}$ = pinnan tukivoima

$\overline{F}_{\mu 0}$ = laatikon ja alustan lepokitka

$\overline{F}$ = voima, jolla ihminen vetää laatikkoa

$\overline{G}_{\text{H}}$ = ihmisen paino

$\overline{N}_{\text{H}}$ = pinnan tukivoima

$\overline{F}_{\mu\text{kenkä}}$ = kengän ja alustan lepokitka

$\overline{F}_{\text{H}}$ = voima, jolla laatikko vetää ihmistä

Kun systeemi on paikallaan tai juuri lähdössä liikkeelle, ovat kummankin kappaleen Newtonin II lain mukaiset liikeyhtälöt $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Silloin laatikkoa vedettäessä kaikki vaakasuuntaiset voimat ovat yhtä suuria.

Laatikkoon kohdistuvan vetävän voiman ja siten myös laatikkoon kohdistuvan lepokitkan suuruus riippuu vetävän ihmisen kengän ja alustan välisestä lepokitkasta. Koska laatikon massa on suurempi kuin vetäjän, laatikko ei lähde liikkeelle, kun sekä laatikon että kenkien lepokitkakertoimet ovat samat.

Määritetään suurin voima, jolla ihminen pystyy vetämään laatikkoa vaakasuoraan niin, että kengät eivät liu'u. Tämä voima on samansuuruinen kuin laatikkoon kohdistuva lepokitka, kun laatikko pysyy paikallaan. Laatikkoon kohdistuva lepokitka on suurimmillaan

$$F_{\mu 0} = \mu_0 N = \mu_0 m_{\text{ihminen}} g = 0{,}50 \cdot 85\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 416{,}925\,\text{N} \approx 420\,\text{N}.$$

b) Määritetään uusi lepokitkakerroin kenkien ja pinnan välille $\mu_{\text{kenkä}}$, joka vastaa laatikkoon kohdistuvaa suurinta kitkaa $F_{\mu 0}$.

$$F_{\mu\text{kenkä}} = F_{\mu 0}$$

$$\mu_{\text{kenkä}} m_{\text{ihminen}} \cancel{g} = \mu_0 m_{\text{laatikko}} \cancel{g}$$

$$\mu_{\text{kenkä}} = \frac{\mu_0 m_{\text{laatikko}}}{m_{\text{ihminen}}} = \frac{0{,}50 \cdot 120\,\text{kg}}{85\,\text{kg}} = 0{,}7059 \approx 0{,}71.$$

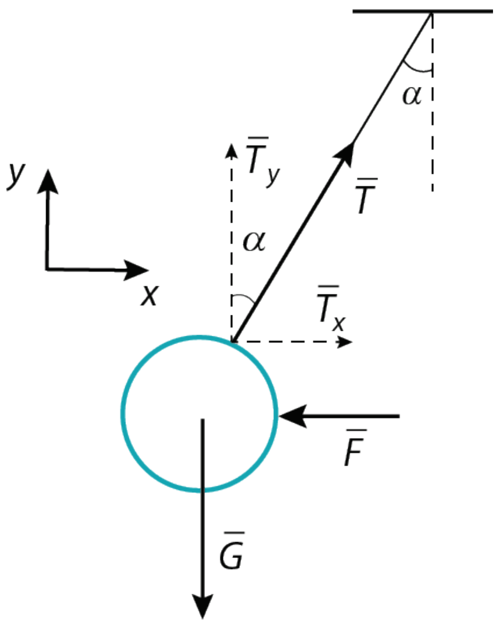
Tehtävä 6.22.

punnukseen kohdistettava voima F = 4,1 N

punnuksen massa m = 0,86 kg

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Laaditaan punnuksen voimakuvio



$\overline{G}$ = punnuksen paino

$\overline{F}$ = käden punnukseen kohdistama voima

$\overline{T}$ =langan jännitysvoima

a) Kun punnus oli paikallaan, Newtonin II lain mukaan punnukseen vaikuttava kokonaisvoima oli nolla. Sovitaan suunnat ja tarkastellaan voimien suuruuksia vaaka- ja pystysuunnassa

x-suunta: $T_x - F = 0$

y-suunta: $T_y - G = 0$.

Punnuksen paino $G = mg$. Esitetään langan jännitysvoimien komponentit langan jännitysvoiman avulla $T_x = T\sin\alpha$ ja $T_y = T\cos\alpha$. Saadaan $T\sin\alpha = F$ ja $T\cos\alpha = mg$. Ratkaistaan langan jännitysvoima

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Sijoitetaan jännitysvoima vaakasuuntaisen voiman yhtälöön ja saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha &= F \\
mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= F \\
mg\tan\alpha &= F \\
\tan\alpha &= \frac{F}{mg}.
\end{aligned}$$

Lanka muodosti pystysuunnan kanssa kulman

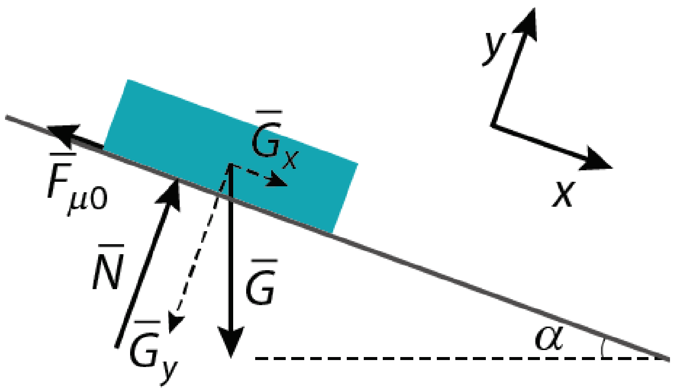
$$\alpha = \arctan\left(\frac{F}{mg}\right) = \arctan\left(\frac{4{,}1\,\mathrm{N}}{0{,}86\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\right) = 25{,}9187^\circ \approx 26^\circ.$$

b) Edellisen kohdan mukaan langan jännitysvoimalla oli voimassa

$T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$. Mitä suurempi oli kulma α, sitä pienemmäksi tulee termi $\cos\alpha$. Mitä pienempi oli termi $\cos\alpha$, sitä suuremmaksi tuli langan jännitysvoima. Langan jännitysvoima kasvoi, kun kulma α kasvoi.

Tehtävä 6.23.

a) Laaditaan kirjan voimakuvio.



$\overline{G}$ = kirjan paino

$\overline{F}_{\mu 0}$ = kirjan ja tason välinen lepokitka

$\overline{N}$ = tason pinnan kirjaan kohdistama tukivoima

Tarkastellaan lepokitkan suurinta arvoa eli hetkeä, jolloin kirja juuri ja juuri pysyi paikallaan. Videota nähdään, että tämä hetki on silloin, kun tason ja vaakasuunnan välinen kulma α = 10°.

Newtonin II lain mukaan paikallaan olevalle kirjalle pätee $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Kun voimien suunnat huomioidaan, saadaan *x*- ja *y*-suunnissa

$$\begin{aligned} G_x - F_{\mu 0} &= 0 \\ N - G_y &= 0. \end{aligned}$$

Esitetään painon komponentit ja lepokitkalle $F_{\mu 0} = \mu_0 N$

$$\begin{aligned} G\sin\alpha &= \mu_0 N \\ N &= G\cos\alpha. \end{aligned}$$

Sijoitetaan alempi yhtälö ylempään ja ratkaistaan lepokitkakertoimen arvo.

$$\begin{aligned} mg\sin\alpha &= \mu_0 mg\cos\alpha \\ \mu_0 &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan 10^\circ = 0{,}1763 \approx 0{,}18. \end{aligned}$$

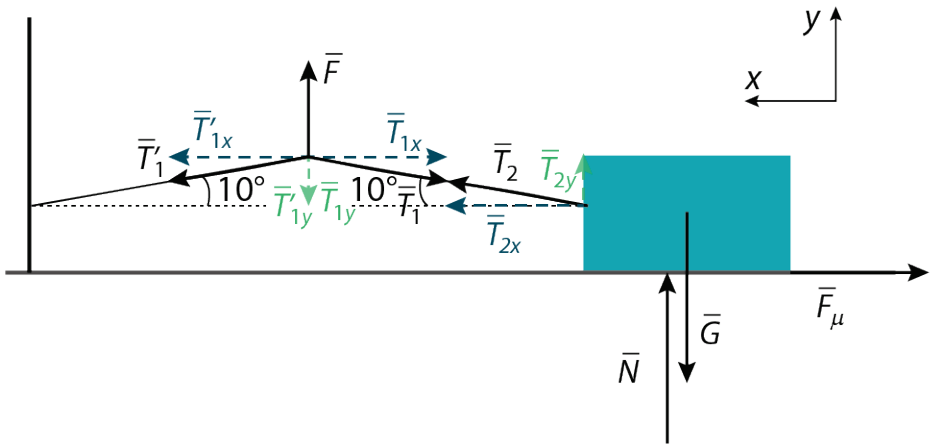
b) Mittauksen mittausvirheitä tulee palikan liikkeelle lähdön hetken määrittämisessä. Liikkeelle lähdön hetki vaikuttaa kulman määrityksen arvoon. Kulman määrityksessä syntyy myös kulmaviivaimen asteikon lukemisesta aiheutuvaa virhettä.

Tehtävä 6.24.

vaijeriin kohdistettu voima F = 360 N

vaijerin ja vaakatason välinen kulma α = 10°

Laaditaan laatikon voimakuvio sekä voimakuvio vaijerin kohdasta, johon voima $\overline{F}$ kohdistetaan.



$\overline{F}$ = vaijeriin kohdistettu voima

$\overline{T}_1$ =vaijerin jännitysvoima

$\overline{G}$ = laatikon paino

$\overline{T}_2$ = vaijerin laatikkoon kohdistama voima

$\overline{F}_{\mu 0}$ = laatikon ja pinnan välinen lepokitka

$\overline{N}$ = pinnan laatikkoon kohdistama tukivoima

Laatikko ja vaijeri pysyvät paikoillaan, jolloin Newtonin II lain mukaan sekä laatikkoon että vaijeriin kohdistuva kokonaisvoima ovat nollia. Sovitaan suunnat ja saadaan laatikkoon kohdistuneille voimien suuruuksille

x-suunnassa: $T_{2x} - F_{\mu 0} = 0$

y-suunnassa: $N - G = 0$

Vaijeriin kohdistuville voimille

x-suunnassa: $T'_{1x} - T_{1x} = 0$

y-suunnassa: $F - T'_{1y} - T_{1y} = 0$.

Newtonin II lain perusteella $T_1 = T_2 = T$. Tarkastellaan laatikon x-suunnan ja vaijerin y-suunnan yhtälöitä, jolloin

$T_{2x} = F_{\mu 0}$ ja $F = 2T_{1y} = 2T_{2y}$. Voidaan kirjoittaa $T_{2x} = T\cos\alpha$ ja $T_{2y} = T\sin\alpha$. Ratkaistaan vaijerin jännitysvoima T

$$F = 2T\sin\alpha$$

$$T = \frac{F}{2\sin\alpha}.$$

Sijoitetaan saatu jännitysvoima lepokitkan yhtälöön ja ratkaistaan lepokitka.

$$F_{\mu 0} = T\cos\alpha = \frac{F}{2\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{F}{2\tan\alpha} = \frac{380\,\text{N}}{2\cdot\tan 10^\circ} = 1\,077{,}54\,\text{N} \approx 1{,}1\,\text{kN}.$$

Tehtävä 6.25.

laatikon massa m = 425 kg

lastaussillan kaltevuuskulma α = 35°

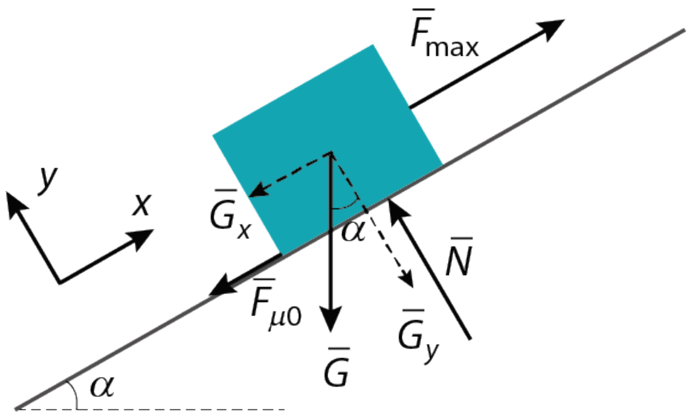
laatikon ja sillan välinen lepokitkakerroin μ_0 = 0,52

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Tarkastellaan lepokitkan suurinta arvoa molemmissa tapauksissa.

Laatikko on levossa, joten Newtonin II lain mukaan laatikkoon kohdistuvien voimien summa on nolla $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Tarkastellaan tilannetta, jossa kysytty voima on suurin mahdollinen, eli laatikko ei lähde liukumaan lastaussiltaa pitkin ylöspäin. Laaditaan laatikkoon vaikuttava voimakuvio.



$\overline{G}$ = laatikon paino

$\overline{N}$ = sillan laatikkoon kohdistama tukivoima

$\overline{F}_{\mu 0}$ = sillan ja laatikon välinen lepokitka

$\overline{F}_{\text{max}}$ = laatikkoon kohdistettu voima

Tarkastellaan laatikkoon vaikuttavien voimien suuruuksia tason suunnassa

$F_{\text{max}} - G_{\text{x}} - F_{\mu 0} = 0.$

Tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa vaikuttavien voimien summa on nolla, jolloin

$N - G_{\text{y}} = 0.$

Kitkalle on voimassa $F_{\mu 0} = \mu_0 N$. Painon komponenteille on voimassa

$G_{\text{x}} = G\sin\alpha$ ja $G_{\text{y}} = G\cos\alpha$. Painolle on voimassa $G = mg$.

Tällöin

$$\begin{cases} F_{\max} = G\sin\alpha + \mu_0 N \\ N = G\cos\alpha. \end{cases}$$

Laatikkoon kohdistettu suurin voima

$$F_{\max} = G\sin\alpha + \mu_0 G\cos\alpha = mg(\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha)$$
$$= 425\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (\sin 35^\circ + \cos 35^\circ) = 4\,167{,}31\,\text{N} \approx 4\,200\,\text{N}.$$

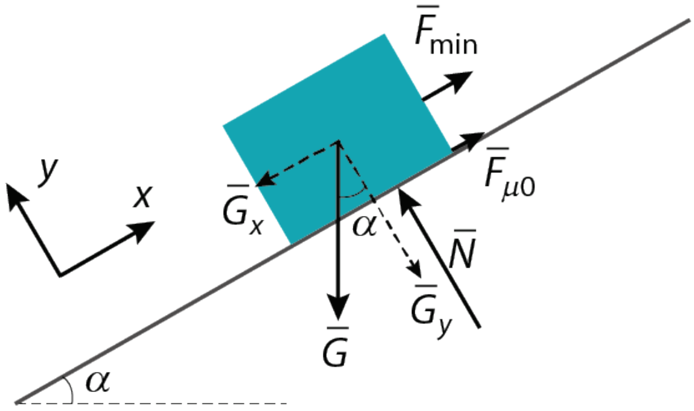
Tutkitaan, onko suurin lepokitkan arvo pienempi kuin painon tason suuntainen komponentti.

$F_{\mu 0} = \mu_0 N = \mu_0 mg$
$\cos\alpha = 0{,}52 \cdot 425\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot \cos 35° = 1\,775{,}9298\text{ N}.$

Painon tason suuntainen komponentti.

$G_x = mg\sin\alpha = 425\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot \sin 35° = 2\,391{,}38\text{ N}.$

Koska lepokitkan suurin arvo on pienempi kuin painon tason suuntainen komponentti, pienimmän voiman tapauksessa laatikkoon pitää kohdistaa voima tason suunnassa ylöspäin, jolloin kitka on myös tason suunnassa ylöspäin. Laaditaan voimakuvio.



$\overline{G}$ = laatikon paino

$\overline{N}$ = sillan laatikkoon kohdistama tukivoima

$\overline{F}_{\mu 0}$ = sillan ja laatikon välinen lepokitka

$\overline{F}_{\text{min}}$ = laatikkoon kohdistettu voima

Tarkastellaan laatikkoon vaikuttavien voimien suuruuksia tason suunnassa

$F_{\text{max}} - G_{\text{x}} + F_{\mu 0} = 0.$

Saadaan laatikkoon kohdistetuksi pienimmäksi voimaksi

$$\begin{aligned} F_{\text{max}} &= mg(\sin\alpha - \mu_0 \cos\alpha) \\ &= 425\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (\sin 35° - 0{,}52 \cdot \cos 35°) = 615{,}45\ \text{N} \approx 620\,\text{N}. \end{aligned}$$

Tehtävä 6.26.

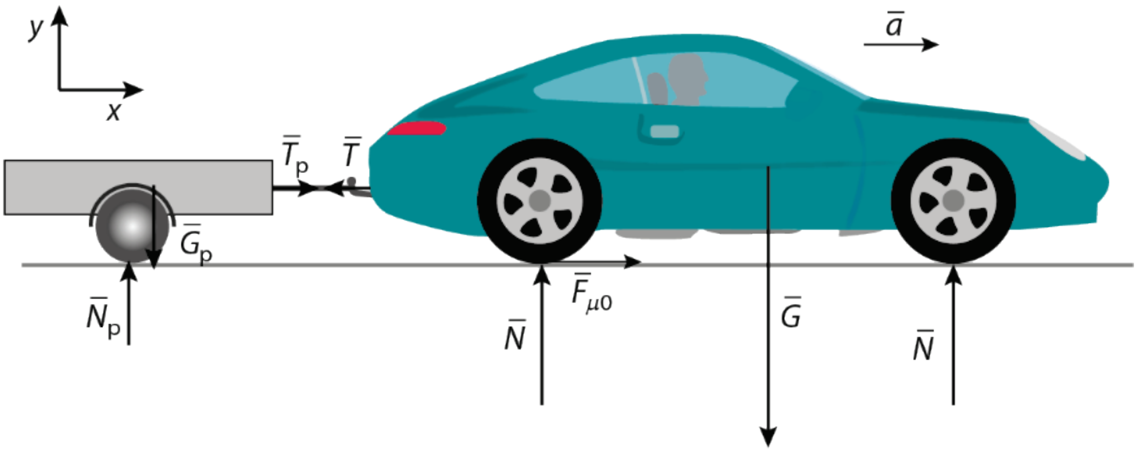
a) auton massa m_{auto} = 1 340 kg

peräkärryn massa $m_{kärry}$ = 420 kg

auton kiihtyvyys a = 0,47 m/s^2

autoa kiihdyttävä lepokitkavoima $F_{\mu 0}$

peräkärryn aisaan kohdistava voima T



$\bar{G}$ = auton paino

$\bar{N}$ = pinnan tukivoima autoon

$\bar{F}_{\mu 0}$ = lepokitka

$\bar{T}$ = voima, jolla peräkärryn aisa vetää autoa

$\bar{G}_p$ = peräkärryn paino

$\bar{N}_p$ = pinnan tukivoima peräkärryyn

$\bar{T}_p$ = voima, jolla auto vetää peräkärryä

b) Autoa ja peräkärryä kiihdyttää auton renkaiden ja pinnan välinen lepokitka, $F_{\mu 0}$. Riippuen siitä onko auto nelivetoinen vai ei, lepokitka jakaantuu neljälle tai kahdelle renkaalle, mutta kitkan kokonaissuuruus on $F_{\mu 0}$. Newtonin II lain mukaan autoa ja peräkärryä kiihdyttää voima vaakasuunnassa $\sum F = (m_{\text{auto}} + m_{\text{kärry}})a$.

Koska vierimiskitka ja ilmanvastus ovat hyvin pieniä, x-suuntainen liikeyhtälö on

$$F_{\mu 0} = (m_{\text{auto}} + m_{\text{kärry}})a = (1340\,\text{kg} + 420\,\text{kg}) \cdot 0{,}47\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 827{,}2\,\text{N} \approx 830\,\text{N}.$$

c) Peräkärry on kiihtyvässä liikkeessä. Peräkärry aiheuttaa aisaan voiman, jonka suuruus on sama kuin voiman suuruus T, jolla auto vetää kärryä. Newtonin II lain mukaan

$$T = m_{\text{kärry}}a = 420\,\text{kg} \cdot 0{,}47\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 197{,}4\,\text{N} \approx 200\,\text{N}.$$

Tehtävä 6.27.

peräkärryn massa m_1 = 210 kg

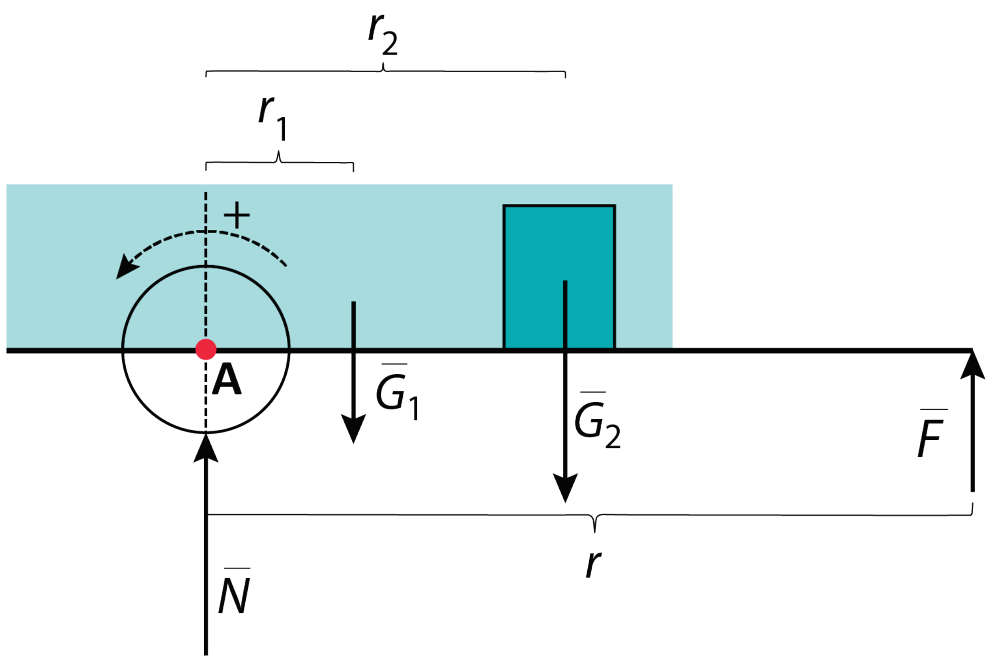
kiven massa m_2 = 260 kg

akselin etäisyys auton peräkoukusta r = 2,9 m

peräkärryn painopisteen etäisyys akselista r_1 = 0,60 m

aisan koukkuun kohdistama kuorma m = 75 kg

Peräkärry on tasapainossa etenemisen ja pyörimisen suhteen.



$\overline{G}_1$ = peräkärryn paino

$\overline{G}_2$ = kiven paino

$\overline{F}$ = aisan tukivoima

$\overline{N}$ = tukivoima, jonka tienpinta kohdistaa peräkärryn renkaisiin

Tarkastellaan voimien aiheuttamaa momenttia peräkärryn akselin suhteen. Kun peräkärry on tasapainossa pyörimisen suhteen, on voimassa

$$\begin{aligned} \sum M_{\mathrm{A}} &= 0 \\ Fr - G_1 r_1 - G_2 r_2 &= 0 \\ Fr - m_1 g r_1 - m_2 g r_2 &= 0. \end{aligned}$$

Koska aisan koukkuun kohdistama kuorma voi olla maksimissaan 75 kg, on koukun tukivoima *F* = *mg*. Ratkaistaan kiven etäisyys tilanteessa, jossa aisan koukkuun kohdistama kuorma on 75 kg.

$$m\cancel{g}r - m_1\cancel{g}r_1 - m_2\cancel{g}r_2 = 0$$

$$r_2 = \frac{mr - m_1 r_1}{m_2} = \frac{75\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}9\,\mathrm{m} - 210\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}60\,\mathrm{m}}{260\,\mathrm{kg}} = 0{,}3519\,\mathrm{m} \approx 35\ \mathrm{cm}.$$

Kivi voidaan siis asettaa enintään 35 cm etäisyydelle peräkärryn akselista.

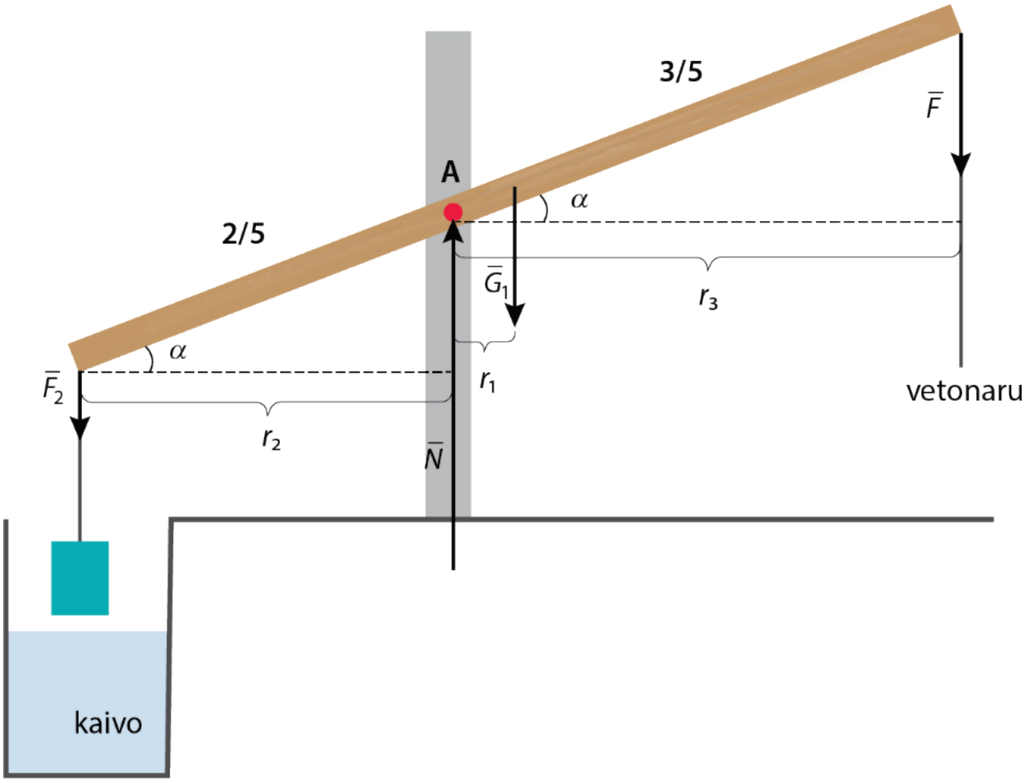
Tehtävä 6.28.

kaivon varren pituus $L = 8{,}4$ m

kaivon varren massa $m_1 = 32$ kg

ämpärin ja veden massa $m_2 = 12{,}4$ kg

a) Laaditaan vinttikaivon varteen kohdistuvien voimien voimakuvio



$\bar{G}_1$ = vinttikaivon varren paino

$\bar{F}_2$ = narun jännitysvoima

$\bar{F}$ = vetonarun jännitysvoima

$\bar{N}$ = vinttikaivon varteen kohdistama tukivoima

b) Vinttikaivon varsi on etenemisen ja pyörimisen suhteen tasapainossa. Tarkastellaan varren pyörimisen tasapainoa tukipisteen A suhteen, jolloin

$\sum M_{\mathrm{A}} = 0.$

Määritetään voimien kohtisuorat etäisyydet pisteestä A.

$r_1 = \frac{0,5}{5}L\cos\alpha = 0,1L\cos\alpha$, , $r_2 = \frac{2}{5}L\cos\alpha$ ja $r_3 = \frac{3}{5}L\cos\alpha$

Momenttiehdoksi saadaan momentin suunnat huomioituina

$F_2 r_2 - G_1 r_1 - F r_3 = 0.$

Narun jännitysvoiman suuruus $F_2 = G_2$. Painolle on voimassa $G = mg$. Narusta pitää vetää voimalla

$$m_2 g \cdot \frac{2}{5}\cancel{L}\cos\alpha - m_1 g \cdot 0,1\cancel{L}\cos\alpha = F\frac{3}{5}\cancel{L}\cos\alpha$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}m_2 g - \frac{1}{10}m_1 g\right) = \left(\frac{2}{3}m_2 - \frac{1}{6}m_1\right)g \\ &= \left(\frac{2}{3}\cdot 12,4\,\mathrm{kg} - \frac{1}{6}\cdot 32\,\mathrm{kg}\right)\cdot 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 28,776\,\mathrm{N} \approx 29\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

c) Kun ämpäriä nostetaan vakionopeudella ylöspäin, jokaisella tarkasteluhetkellä vinttikaivon varsi on tasapainossa pyörimisen ja etenemisen suhteen eli $\sum M_\mathrm{A} = 0$.

Vinttikaivon varren kulma vaakasuuntaan nähden on α. b)-kohdan mukaan naruun vaikuttavaksi voimaksi saadaan

$$m_2 g \cdot \frac{2}{5}\cancel{l}\cos\alpha - m_1 g \cdot 0{,}1\cancel{l}\cos\alpha = F\frac{3}{5}\cancel{l}\cos\alpha$$

$$F = \frac{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}m_2 g - \frac{1}{10}m_1 g\right) = \left(\frac{2}{3}m_2 - \frac{1}{6}m_1\right)g.$$

Nostokulma ei vaikuta yhtälön mukaan voimaan, joten voiman suuruus pysyy koko noston ajan yhtä suurena.

Tehtävä 6.29.

Koska kupari on alumiinia tiheämpää, kuparipallon paino on suurempi kuin alumiinipallon paino. Kun tanko on paikallaan narun varassa vaakatasossa, tanko on tasapainossa etenemisen ja pyörimisen suhteen. Kuparipalloon kiinnitetty naru aiheuttaa rautatankoon yhtä suuren momentin kuin alumiinipalloon kiinnitetty naru.

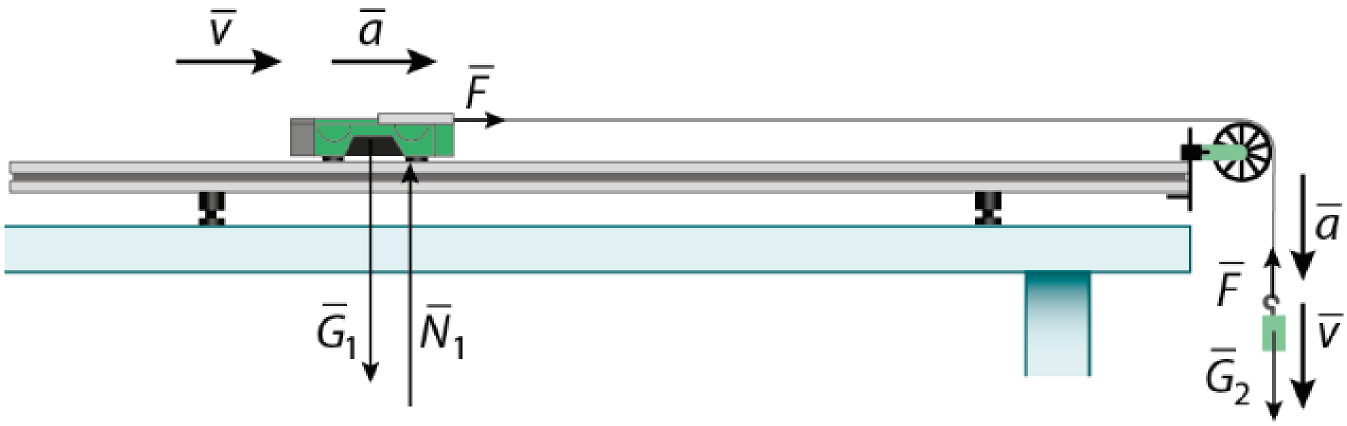
Kun pallot lasketaan veteen, palloihin kohdistuu yhtä suuret nosteet ylöspäin, sillä pallojen tilavuudet ovat yhtä suuret. Tällöin palloihin kiinnitettyihin naruihin kohdistuu yhtä suuret voimat ylöspäin, ja molempien palloihin kiinnitettyjen lankojen jännitysvoimat pienenevät yhtä paljon. Koska alumiinipallo on kiinnitetty kauemmaksi statiiviin kiinnitetyn narun kiinnityskohdasta, alumiinipalloon kiinnitetty naru aiheuttaa rautatankoon pienemmän momentin kuin kuparipalloon kiinnitetty naru. Tällöin tanko kääntyy vinoon siten, että kuparipallon on alempana kuin alumiinipallo.

Tehtävä 6.30.

vaunun massa $m_1 = 0{,}455$ kg

punnuksen massa $m_2 = 0{,}0042$ kg

a)



$\overline{G}_1$ = vaunun paino

$\overline{N}_1$ = radan vaunuun kohdistama tukivoima

$\overline{G}_2$ = punnuksen paino

$\overline{F}$ = langan jännitysvoima

b) Tarkastellaan vaunuun ja punnukseen vaikuttavia voimia ja kirjoitetaan vaunulle ja punnukselle Newtonin II lain mukaiset liikeyhtälöt suunnat huomioiden. Koska vaunu ja punnus on kytketty langalla toisiinsa, niillä on sama kiihtyvyys.

Valitaan vaunun kohdalla positiiviset suunnat ylös ja oikealle. Vaunun liikeyhtälöt vaaka- ja pysty suunnassa

$$F = m_1 a$$
$$N_1 - G_1 = 0.$$

Punnuksen kohdalla valitaan positiivinen suunta alaspäin. Punnuksen liikeyhtälö on silloin

$$G_2 - F = m_2 a.$$

Sijoitetaan vaunuun vaikuttavan voiman *F* lauseke punnuksen liikeyhtälöön,

$$m_2 g - m_1 a = m_2 a$$
$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}0042\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}455\,\text{kg} + 0{,}0042\,\text{kg}} = 0{,}0897\,\text{m/s}^2 \approx 0{,}090\,\text{m/s}^2.$$

c) Langan jännitysvoima b-kohdan mukaan

$$F = m_1 a = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}455\,\text{kg} \cdot 0{,}0042\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}455\,\text{kg} + 0{,}0042\,\text{kg}} = 0{,}040\,825\,\text{N} \approx 41\,\text{mN}.$$

d) Punnuksen putoamismatka *s* = 0,58 m

Punnus ja vaunu ovat tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jolloin kuljetulle matkalle ja loppunopeudelle on voimassa

$$s = \frac{1}{2}at^2$$
$$v = at.$$

Ratkaistaan matkan yhtälöstä aika ja saadaan loppunopeudeksi

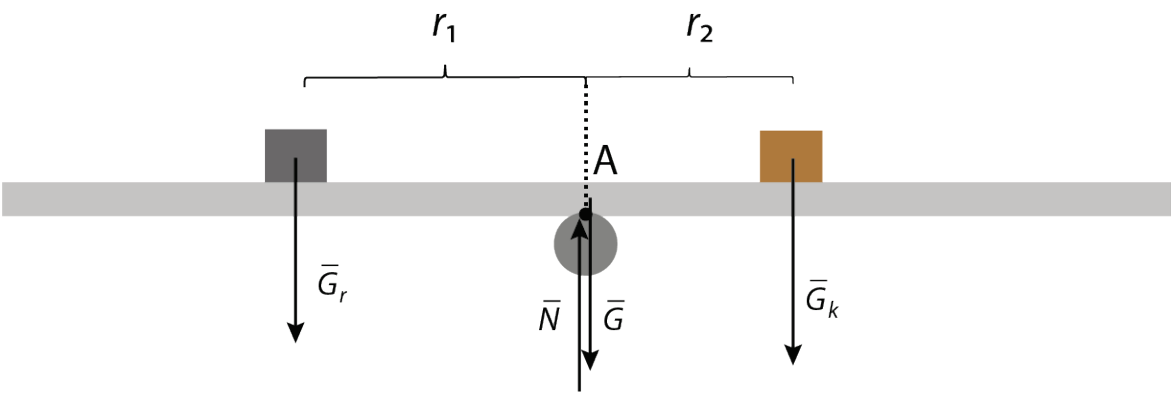
$$v = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2sa} = \sqrt{\frac{2sm_2 g}{m_1 + m_2}}$$
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}58\,\text{m} \cdot 0{,}0042\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}455\,\text{kg} + 0{,}0042\,\text{kg}}} = 0{,}3226\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}32\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehtävä 6.31.

a) Tutkimuksen päävaiheet:

Asetetaan kynä pöydälle. Asetetaan kynän päälle alumiinitanko siten, että alumiinitangon keskikohta on kynän kohdalla, jolloin alumiinitanko asettuu vaakasuorasti tasapainoon kynän päälle. Asetetaan rautapunnus tietylle etäisyydelle alumiinitangon päälle tietylle etäisyydelle kynästä. Asetetaan kuparipunnus alumiinitangon päälle kynän eri puolelle kuin rautapunnus. Painetaan kädellä alumiinitanko vaakasuoraan ja liikutetaan kuparipunnus kohtaan, jossa alumiinitanko pysyy vaakasuorassa ilman, että tankoa painetaan kädellä. Määritetään rautapunnuksen ja kuparipunnuksen paikat kynään nähden. Toistetaan mittaus rautapunnuksen ja kuparipunnuksen kuudella eri etäisyydellä.

Kun alumiinitangon päälle on asetettu rautapunnus ja kuparipunnus, tanko on tasapainossa pyörimisen ja etenemisen suhteen. Laaditaan alumiinitangon voimakuvio.



$\overline{G}$ = alumiinitangon paino

$\overline{G}_r$ = rautapunnuksen paino

$\overline{G}_k$ = kuparipunnuksen paino

$\overline{N}$ = kynän tankoon kohdistava tukivoima

Merkitään rautapunnuksen etäisyyttä kynästä kirjaintunnuksella r_1 ja kuparipunnuksen etäisyyttä kynästä kirjaintunnuksella r_2. Momenttiehto pisteen A suhteen, kun alumiinitanko on tasapainossa pyörimisen suhteen, on

$G_r r_1 - G_k r_2 = 0.$

Painolle on voimassa $G = mg$, jolloin momenttiehdosta saadaan

$$m_r \cancel{g} r_1 = m_k \cancel{g} r_2$$
$$m_r r_1 = m_k r_2.$$

Tutkimuksessa mitattiin punnusten etäisyyksiä. Edellisen yhtälön mukaan punnusten etäisyydet ovat suoraan verrannolliset, sillä

$$r_2 = \frac{m_\mathrm{r}}{m_\mathrm{k}} r_1.$$

Kun mittaustulokset esitetään (r_1, r_2)-koordinaatistossa, mittauspisteisiin sovitetuksi kuvaajaksi saadaan nouseva suora, jonka fysikaalinen kulmakerroin on massojen suhde $\frac{m_\mathrm{r}}{m_\mathrm{k}}$. Kuparipunnuksen massa tunnetaan, jolloin rautapunnuksen massa on $m_\mathrm{r} = km_\mathrm{k}$.

b) Mittauksessa virhettä tulee, kun määritetään kupari- ja rautapunnuksen etäisyyttä kynästä. Rullamitan tarkkuus on 1 mm. Mitä kauempana kynästä punnukset ovat, sitä pienemmäksi tulee etäisyyden mittauksen virhe.

Mittausvirhettä voidaan pienentää esimerkiksi piirtämällä aluksi kynällä tarkka keskikohta alumiinitangolle sekä punnuksille. Tällöin saadaan tarkemmin määritettyä kupari- ja rautapunnuksen etäisyydet kynästä.

Tehtävä 6.32.

Työssä punnus ripustetaan voima-anturiin ja upotetaan sitten anturin varassa ensin veteen ja sitten etanoliin. Tarvittavat välineet: etanolia, vettä, kaksi lasia, punnus ja voima-anturi.

Työvaiheet:

Ensin mitataan punnukseen vaikuttava painovoima asettamalla punnus roikkumaan voima-anturiin. Seuraavaksi punnus upotetaan veteen voima-anturin varassa ja luetaan voima-anturin lukema. Veden aiheuttama noste on painon ja voima-anturin lukeman erotus. Toistetaan koe upottamalla punnus seuraavaksi etanoliin. Etanolin aiheuttama noste saadaan painon ja voima-anturin lukeman erotuksena. Nosteen arvoja vertaamalla saadaan selville, kumpi nesteistä aiheuttaa punnukseen suuremman nosteen.

Virheet: Virhettä voivat aiheuttaa esimerkiksi voima-anturin mittaustarkkuus tai väärä kalibrointi. Punnuksen on upottava molempiin nesteisiin samalla tavalla. Jos osa punnuksesta jää nesteen pinnalle tai jos punnus osuu astian pohjaan, mittaustuloksiin aiheutuu virhettä.

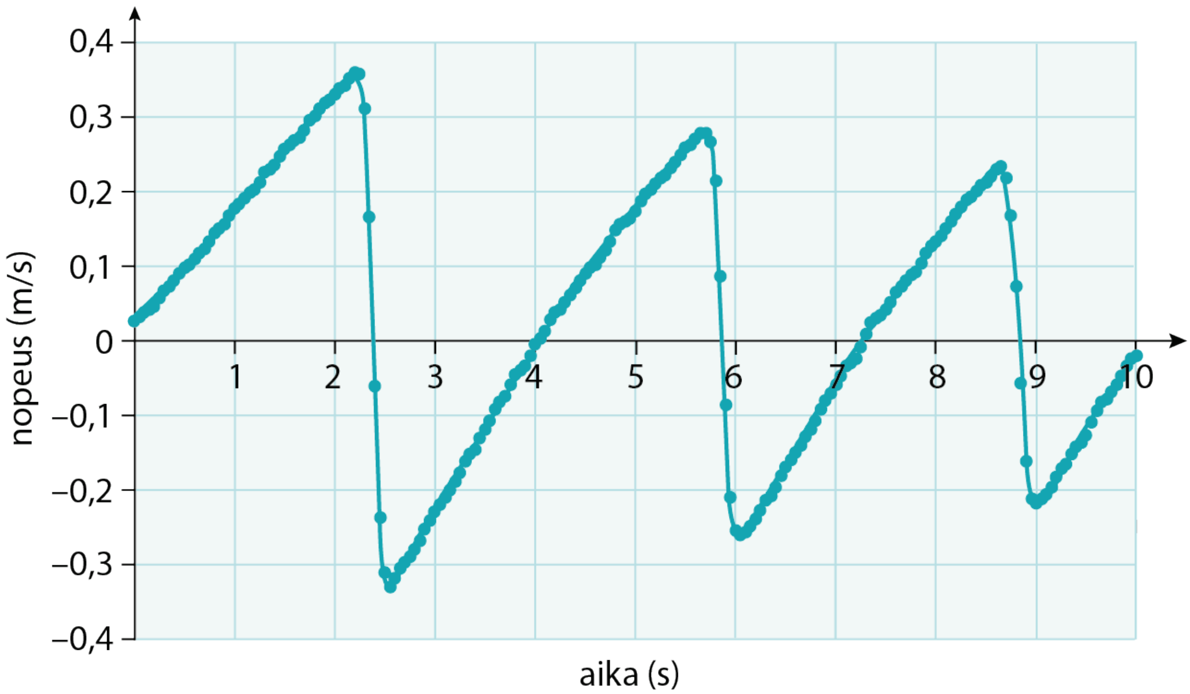
Tehtävä 6.33.

a) Kun vene laitetaan veteen, vene uppoaa veteen, kunnes veneen paino on yhtä suuri kuin veden veneeseen kohdistama noste. Arkhimedeen lain mukaan veden veneeseen kohdistama noste on yhtä suuri kuin veneen syrjäyttämän veden paino. Vene syrjäyttää vettä uppoamansa tilavuuden verran, jolloin vedenpinta nousee.

b) Kun punnus laitetaan veneeseen, vene uppoaa, kunnes veneen ja punnuksen yhteinen paino on yhtä suuri kuin veden veneeseen kohdistama noste. Arkhimedeen lain mukaan veden veneeseen kohdistama noste on yhtä suuri kuin veneen syrjäyttämän veden paino. Kun punnus upotetaan veteen, punnus syrjäyttää vettä vain tilavuutensa verran. Koska veden veneeseen ja punnukseen kohdistaman nosteen syrjäyttämän vesimäärän tilavuus on suurempi kuin punnuksen tilavuus, vedenpinta nousee enemmän silloin, kun punnus laitetaan veneeseen.

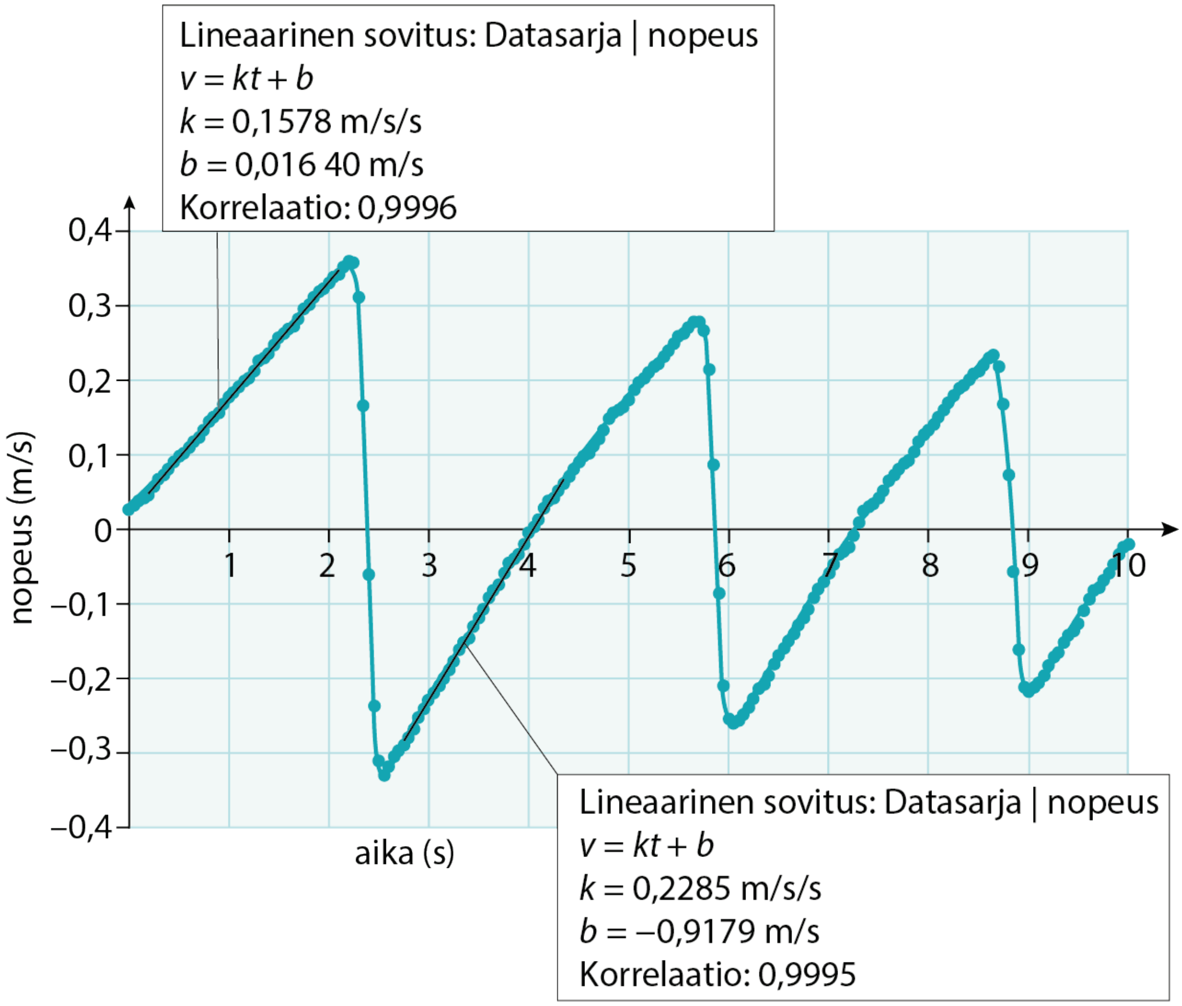
Tehtävä 6.34.

a) Laaditaan vaunun nopeuden kuvaaja.



Kun vaunu osuu magneettipuskuriin, vaunun kiihtyvyys on hetkellisesti suuri puskurin kohdistaessa voiman vaunuun. Liikkeen suunta muuttuu positiivisesta negatiiviseen, joten nopeuden etumerkki muuttuu myös positiivisesta negatiiviseksi. Näiden perusteella voidaan päätellä, että vaunu törmää puskuriin ajanhetkillä t_1 = 2,4 s, t_2 = 5,9 s ja t_1 = 8,8 s

b) Vaunun kiihtyvyys saadaan nopeuden kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Sovitetaan suorat kohtiin, joissa vaunu liikkuu ensimmäisen kerran alaspäin ja sen jälkeen ylöspäin.



Kun vaunu ensimmäisen kerran liikkuu alaspäin, kiihtyvyys eli nopeuden kuvaajan fysikaalinen on a_1 = 0,1578 m/s^2 ≈ 0,16 m/s^2.

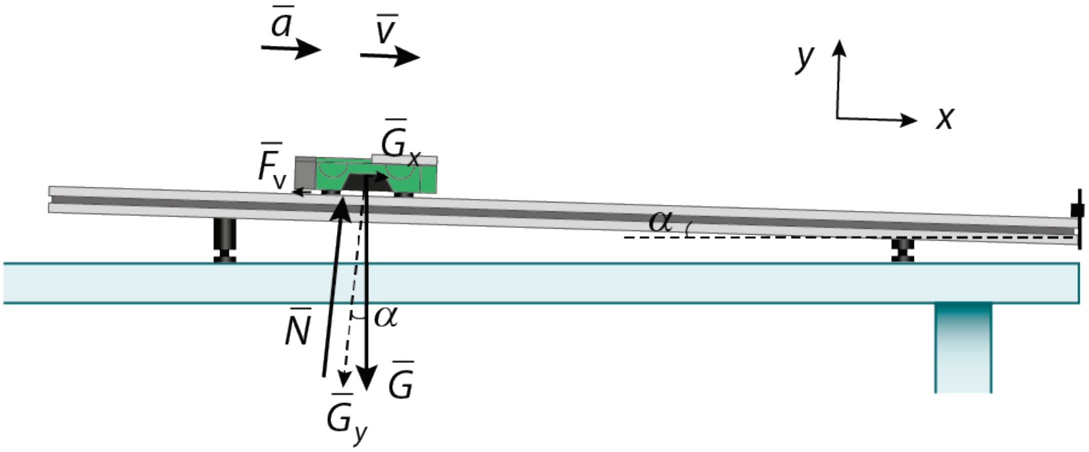
Kun vaunu ensimmäisen kerran liikkuu ylöspäin, kiihtyvyys eli nopeuden kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin on a_2 = 0,2285 m/s^2 ≈ 0,23 m/s^2.

c) vaunun massa $m = 0{,}827$ kg

vaunun kiihtyvyys alaspäin $a_1 = 0{,}1578$ m/s^2

vaunun kiihtyvyys ylöspäin $a_2 = 0{,}2285$ m/s^2

1) Vaunun voimakuvio, kun vaunu liikkuu radalla alaspäin



$\bar{G}$ = vaunun paino

$\bar{N}$ = radan tukivoima

$\bar{F}_v$ = liikettä vastustavat voimat (mm. vierimisvastuksen ja ilmanvastuksen summa)

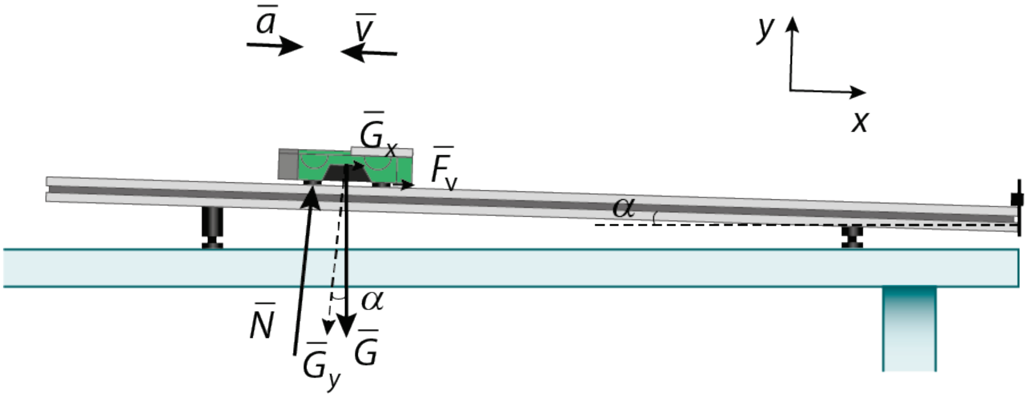
Merkitään vaunun kiihtyvyyttä alaspäin kirjaintunnuksella a_1. Vaunun liikeyhtälö on Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = m\bar{a}_1$.

Kun huomioidaan suunnat, saadaan

x-suunta: $G_x - F_v = ma_1$ eli $mg \sin \alpha - F_v = ma_1$

y-suunta: $N - G_y = 0$ eli $N = mg \cos \alpha$

2) Vaunun voimakuvio, kun vaunu liikkuu radalla ylöspäin



$\bar{G}$ = vaunun paino

$\bar{N}$ = radan tukivoima

$\bar{F}_v$ = liikettä vastustavat voimat (mm. vierimisvastuksen ja ilmanvastuksen summa)

Merkitään vaunun kiihtyvyyttä alaspäin a_2. Vaunun liikeyhtälö on Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = m\bar{a}_2$.

Kun huomioidaan suunnat, saadaan

x-suunta: $G_x + F_v = ma_2$ eli $mg \sin \alpha + F_v = ma_2$

y-suunta: $N - G_y = 0$ eli $N = mg \cos \alpha$

Vaunun liikeyhtälöstä x-suunnassa saadaan

$mg \sin \alpha = ma_1 + F_v$ ja $mg \sin \alpha = ma_2 - F_v$.

Yhdistetään nämä ja ratkaistaan liikettä vastustavien voimien suuruus.

$$ma_1 + F_\mathrm{v} = ma_2 - F_\mathrm{v}$$
$$2F_\mathrm{v} = ma_2 - ma_1 \,'$$
$$F_\mathrm{v} = \frac{m(a_2 - a_1)}{2}$$
$$= \frac{0{,}827\,\mathrm{kg} \cdot \left(0{,}2285\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 0{,}1578\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{2} = 0{,}029\,23\,\mathrm{N} \approx 29\ \mathrm{mN}$$

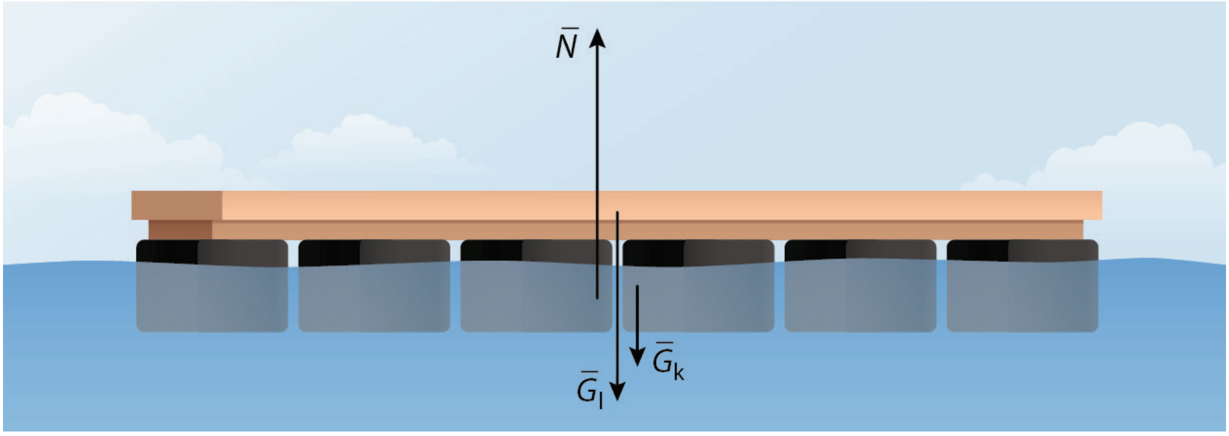
Tämän perusteella radan kallistuskulmaksi saadaan

$$mg\sin\alpha - F_\mathrm{v} = ma_1$$
$$\sin\alpha = \frac{ma_1 + F_\mathrm{v}}{mg}$$
$$\sin\alpha = \frac{ma_1 + \frac{m(a_2 - a_1)}{2}}{mg}$$
$$\sin\alpha = \frac{\cancel{m}a_1 + \frac{1}{2}\cancel{m}a_2 - \frac{1}{2}\cancel{m}a_1}{\cancel{m}g}$$
$$\sin\alpha = \frac{a_1 + a_2}{2g}$$
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a_1 + a_2}{2g}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{0{,}1578\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 0{,}2285\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\right) = 1{,}128^\circ \approx 1{,}1^\circ.$$

Vaunuun kohdistuvien liikettä vastustavien voimien suuruus oli 29 mN ja radan kallistuskulma oli 1,1°.

Tehtävä 6.35.

a)



$\bar{N}$ = noste

$\bar{G}_k$ = kellukeponttonien paino

$\bar{G}_l$ = laiturin paino

b) laiturin kannen massa m_l = 255 kg

yhden kellukkeen massa m_k = 10 kg

yhden kellukkeen koko 50 cm × 50 cm × 1,0 m

veden tiheys ρ_v = 1 000 kg/m^3

Laituri on paikallaan veden pinnalla, joten Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}.$ Valitaan positiivinen suunta ylöspäin, jolloin voidaan kirjoittaa

$$N - G_k - G_l = 0.$$

Merkitään kellukkeiden veden alla olevaa tilavuutta tunnuksella V_v. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} N &= G_k + G_l \\ \rho_v \cancel{g} V_v &= m_k \cancel{g} + m_l \cancel{g} \\ V_v &= \frac{m_k + m_l}{\rho_v}. \end{aligned}$$

Kellukkeen veden pinnan alla oleva tilavuus on $V_v = Ah$, jossa A on kellukkeiden pohjien yhteispinta-ala ja h on pinnan alla olevan kellukkeen osan korkeus.

Kuuden kellukkeen pohjien pinta-alat ovat yhteensä $A = 6 \cdot 0{,}5\text{ m} \cdot 1{,}0\text{ m} = 3{,}0\text{ m}^2$.

Pinnan alla olevan kellukkeen osan korkeus on

$$Ah = \frac{m_\mathrm{k} + m_l}{\rho_v}$$

$$h = \frac{m_\mathrm{k} + m_\mathrm{l}}{A\rho_v} = \frac{6 \cdot 10\,\mathrm{kg} + 255\,\mathrm{kg}}{3{,}0\,\mathrm{m}^2 \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m}^3} = 0{,}105\,\mathrm{m}.$$

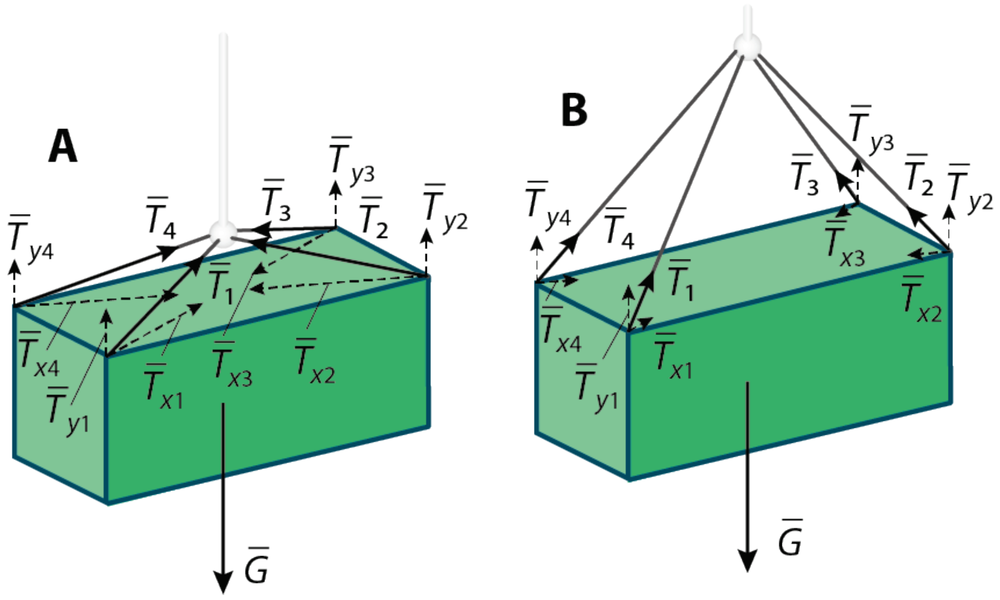
Laiturin kannen ja vedenpinnan väliin jää siis

$x = 0{,}5\ \mathrm{m} - 0{,}105\ \mathrm{m} = 0{,}395\ \mathrm{m} \approx 40\ \mathrm{cm}.$

Tehtävä 6.36.

Kun kontti on paikallaan, sen Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Laaditaan konttien voimakuviot. Jaetaan vaijerien jännitysvoimat vaaka- ja pystysuuntaisiin komponentteihin.



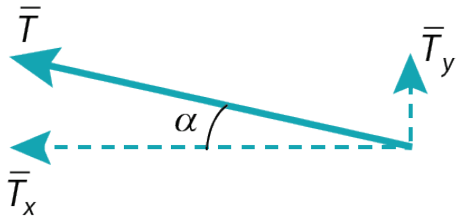
$\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}_3$, ja $\overline{T}_4$ = vaijerien jännitysvoimat

$\overline{G}$ = kontin paino

Oletetaan, että paino jakautuu tasaisesti eri vaijereille, jolloin vaijerien jännitysvoimat kummassakin tapauksessa ovat keskenään yhtä suuret, merkitään $T = T_1 = T_2 = T_3 = T_4$. Silloin jokaisen jännitysvoiman pystykomponentti on myös yhtä suuri, merkitään $T_y = T_{1y} = T_{2y} = T_{3y} = T_{4y}$.

Valitaan suunta ylöspäin positiiviseksi, jolloin $4T_y - G = 0$ eli
$T_y = \frac{1}{4}G$.

Merkitään vaijerin ja kontin katon välistä kulmaa α. Silloin
$\sin\alpha = \frac{T_y}{T}$ eli $T = \frac{T_y}{\sin\alpha} = \frac{G}{4\sin\alpha}$.



Tapauksessa 1 kulma α on pienempi kuin tapauksessa 2. Silloin myös sinin arvo on pienempi tapauksessa 1. Koska $T \sim \frac{1}{\sin\alpha}$, on vaijerin jännitysvoima suurempi, kun kulma α on pienempi eli tapauksessa 1. Saman voidaan havaita myös voimakuviosta.

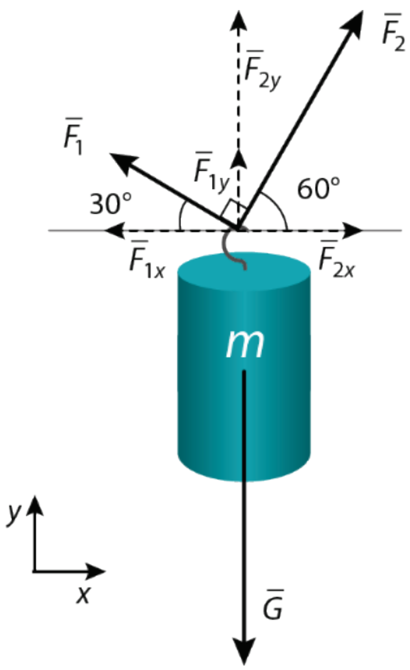
Tehtävä 6.37.

punnuksen massa m = 500 g = 0,500 kg.

kulmat α = 30° ja β = 60°.

Punnukseen vaikuttavat sen paino $\overline{G}$ sekä lankojen jännitysvoimat $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$. Jousivaa'at näyttävät lankojen jännitysvoimien suuruudet.

Piirretään punnuksen voimakuvio ja merkitään siihen langan jännitysvoiman x- ja y-suuntaiset komponentit.



$\overline{G}$ = punnuksen paino

$\overline{F}_1$ = langan jännitysvoima vasemmalle

$\overline{F}_2$ = langan jännitysvoima oikealle

Tehdään suuntasopimus, jossa suunnat oikealle ja ylös valitaan positiivisiksi suunniksi.

Kuvan perusteella voiman komponentit ovat:

$F_{1x} = F_1 \cos\alpha$

$F_{2x} = F_2 \cos\beta$

$F_{1y} = F_1 \sin\alpha$

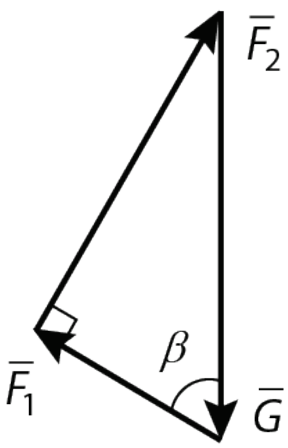
$F_{2y} = F_2 \sin\beta$

Koska punnus on paikallaan, siihen vaikuttava kokonaisvoima on nolla. Punnuksen Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Silloin vaakasuunnassa $F_{1x} = F_{2x}$ ja pystysuunnassa $F_{1y} + F_{2y} = G$

TAPA 1:

Punnukseen vaikuttavien voimien summa on nollavektori:



Voimien muodostamasta kolmiosta saadaan

$\frac{F_1}{G} = \cos\beta$ eli

$F_1 = G\cos\beta = mg\cos\beta$

$= 0{,}500\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 60^\circ = 2{,}4525\,\text{N} \approx 2{,}5\,\text{N}$

ja

$\frac{F_2}{G} = \sin\beta$ eli

$F_2 = G\sin\beta = mg\sin\beta$

$= 0{,}500\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 60^\circ = 4{,}2479\,\text{N} \approx 4{,}2\,\text{N}.$

Vasemmanpuoleisen jousivaa’an lukema on 2,5 N ja oikeanpuoleisen 4,2 N.

TAPA 2:

Kirjoitetaan liikeyhtälöt *x*- ja *y*-suunnissa

$F_{2x} - F_{1x} = 0$

$F_{2y} + F_{1y} - G = 0$

Vaaka- eli *x*-suunnassa

$$F_{2x} = F_{1x}$$
$$F_2 \cos\beta = F_1 \cos\alpha$$
$$F_2 = \frac{F_1 \cos\alpha}{\cos\beta}$$

Pysty- eli *y*-suunnassa

$$F_{2y} + F_{1y} = G$$
$$F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta = G$$

Sijoitetaan pystysuunnan yhtälöön vaakasuunnan yhtälöstä ratkaistu voima F_2, ja sijoitetaan siihen annetut arvot.

$$F_1 \sin\alpha + \frac{F_1 \cos\alpha}{\cos\beta} \sin\beta = G$$
$$F_1 (\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \sin\beta) = G$$

Vasemmanpuoleisen jousivaa'an lukema on

$$F_1 = \frac{G}{\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta} = \frac{0{,}500\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\sin 30^\circ + \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}\sin 60^\circ} = 2{,}4525\,\text{N} \approx 2{,}5\,\text{N}.$$

Oikeanpuoleisen jousivaa'an lukema on

$$F_2 = \frac{F_1 \cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{2{,}4525\,\text{N} \cdot \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 4{,}2479\,\text{N} \approx 4{,}2\,\text{N}.$$

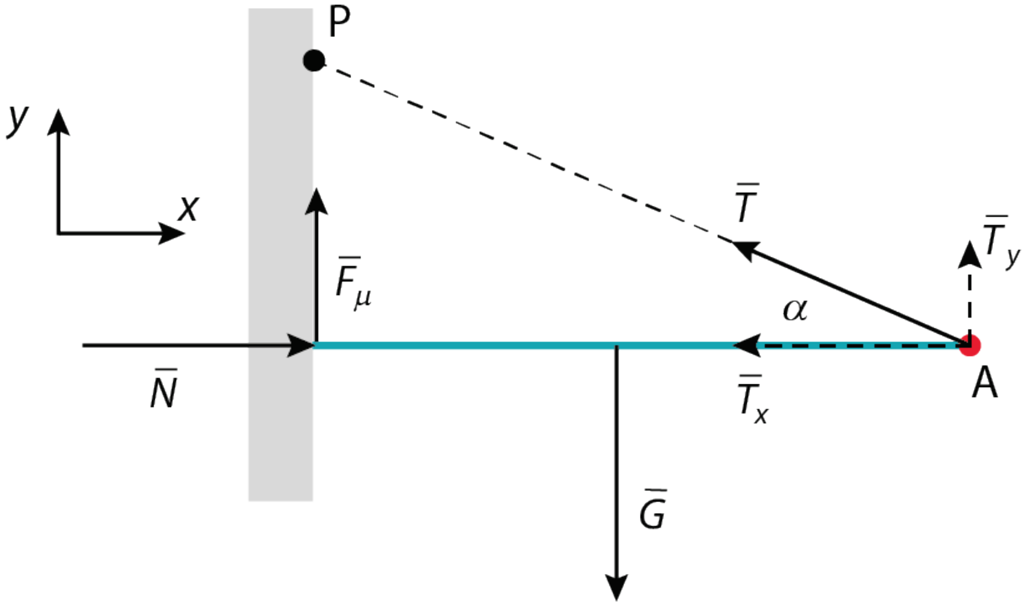
Tehtävä 6.38.

a) sauvan massa $m = 7{,}9$ kg

sauvan pituus $L = 1{,}9$ m

seinän ja sauvan välinen lepokitkakerroin $\mu_0 = 0{,}76$

Laaditaan sauvan voimakuvio.



$\overline{G}$ = sauvan paino

$\overline{T}$ = köyden jännitysvoima

$\overline{N}$ = seinän sauvaan kohdistama tukivoima

$\overline{F}_\mu$ = seinän ja sauvan välinen lepokitka

Sauva on tasapainossa etenemisen ja pyörimisen suhteen, joten $\sum \overline{F} = \overline{0}$ ja $\sum M_A = 0$.

Tällöin voimien suunnat huomioituna on voimassa vaaka- ja pystysuunnassa

x-suunta: $N - T_{\mathrm{x}} = 0$ ja

y-suunta: $T_{\mathrm{y}} + F_{\mu} - G = 0$.

Tarkastellaan pyörimisen tasapainoa pisteen A suhteen. Kun valitaan momentin suunta myötäpäivään positiiviseksi, saadaan momenttien tasapainosta

$F_{\mu}L - G\frac{L}{2} = 0$, josta saadaan kitkaksi $F_{\mu} = \frac{G}{2}$.

Rajatapauksessa sauva pysyy juuri ja juuri paikallaan, jolloin sauvan ja seinän välinen lepokitka on suurimmillaan. Kitkalle on voimassa $F_{\mu 0} = \mu_0 N$, jossa $\mu_0 = 0{,}76$. Seinän tukivoima suurimman kulman tapauksessa on

$$N = \frac{F_{\mu 0}}{\mu_0}.$$

Esitetään langan jännitysvoimat suurimman kulman α_{r} avulla.

$T_x = T\cos\alpha_{\mathrm{r}}$ ja

$T_y = T\sin\alpha_{\mathrm{r}}$.

Sijoitetaan edelliset *x*- ja *y*-suuntien liikeyhtälöihin.

x-suunta: $T\cos\alpha_{\mathrm{r}} = N$

y-suunta: $T\sin\alpha_{\mathrm{r}} = G - F_{\mu}$

ja edelleen

x-suunta: $T\cos\alpha_{\mathrm{r}} = \dfrac{F_{\mu 0}}{\mu_0} = \dfrac{\frac{G}{2}}{\mu_0} = \dfrac{G}{2\mu_0}$

y-suunta: $T\sin\alpha_{\mathrm{r}} = G - \dfrac{G}{2} = \dfrac{G}{2}$

Jaetaan *y*-suunnan yhtälö *x*-suunnan yhtälöllä, jolloin saadaan

$$\tan\alpha_{\mathrm{r}} = \frac{\frac{G}{2}}{\frac{G}{2\mu_0}} = \mu_0.$$

Ratkaistaan suurin kulma, jossa köysi voi olla

$$\alpha_{\mathrm{r}} = \arctan(\mu_0) = \arctan(0{,}76) = 37{,}2348 \approx 37^\circ.$$

Sauva pysyy paikallaan, kun kulman arvo on välillä $0° < \alpha < 37°$.

b) langan ja sauvan välinen kulma α = 25°

sauvan massa m = 7,9 kg

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Tarkasteltava kulma on pienempi kuin edellisessä kohdassa määritetty suurin kulma. Edellisen kohdan perusteella saadaan sauvaan kohdistuvat voimat.

Paino $G = mg$ = 7,9 kg · 9,81 m/s^2 = 77,499 N ≈ 78 N.

Kitka

$$F_\mu = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{7{,}9\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} = 38{,}7495\,\text{N} \approx 38\,\text{N}.$$

Köyden jännitysvoima

$$T = \frac{G - \mu_0 N}{\sin\alpha} = \frac{mg - F_\mu}{\sin\alpha} = \frac{mg - \frac{mg}{2}}{\sin\alpha} = \frac{mg}{2\sin\alpha} = \frac{7{,}9\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot \sin 25^\circ} = 91{,}689\,\text{N} \approx 92\,\text{N}.$$

Seinän sauvaan kohdistama tukivoima

$$N = T\cos\alpha = \frac{mg}{2\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{mg}{2\tan\alpha} = \frac{7{,}9\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot \tan 25^\circ} = 83{,}098\,57\,\text{N} \approx 83\,\text{N}.$$

Tehtävä 6.39.

laatikon massa $m = 120$ kg

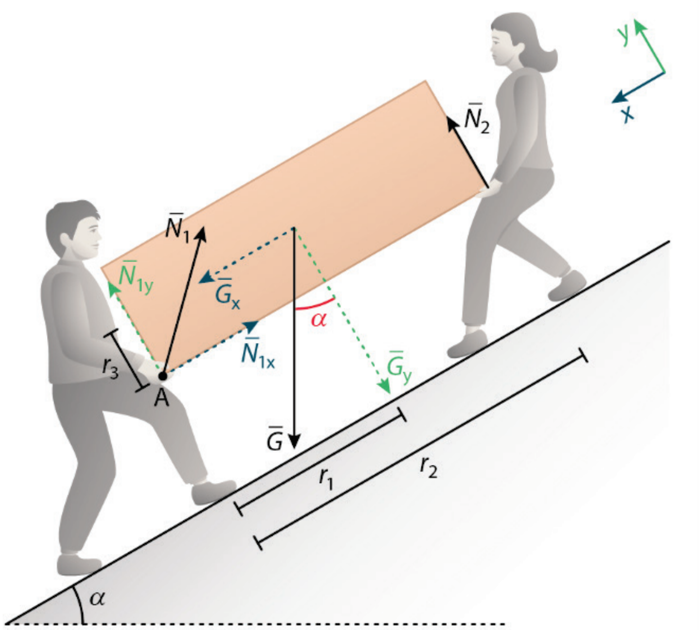
laatikon pituus $L = 1{,}80$ m

laatikon korkeus $h = 0{,}60$ m

tason kaltevuuskulma $\alpha = 30°$

putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

Laaditaan laatikon voimakuvio.



$\overline{G}$ = laatikon paino

$\overline{N}_1$ = tukivoima, jonka alempi lukiolainen kohdistaa laatikon pohjaan

$\overline{N}_2$ = tukivoima, jonka ylempi lukiolainen kohdistaa laatikon pohjaan

Laatikko on tasapainossa pyörimisen suhteen. Laatikkoon kohdistuvien momenttien summa on nolla. Tarkastellaan pyörimistä pisteen A suhteen. Valitaan suunta vastapäivään positiiviseksi.

$$\Sigma M_{\mathrm{A}} = 0$$

$$N_2 r_2 + G_x r_3 - G_y r_1 = 0$$

Laatikon paino on $G = mg$. Painon komponentit ovat $G_x = G\sin\alpha$ ja $G_y = G\cos\alpha$.

Etäisyydet ovat $r_1 = \frac{L}{2}$, $r_2 = L$ ja $r_3 = \frac{h}{2}$.

Tästä saadaan $N_2 L + G_x \frac{h}{2} - G_y \frac{L}{2} = 0$.

Ylemmän lukiolaisen laatikkoon kohdistama voima on

$$N_2 = \frac{mg\cos\alpha \frac{L}{2} - mg\sin\alpha \frac{h}{2}}{L}$$

$$= \frac{120\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\cos 30^\circ\cdot\frac{1{,}80\,\mathrm{m}}{2} - 120\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin 30^\circ\cdot\frac{0{,}60\,\mathrm{m}}{2}}{1{,}80\,\mathrm{m}}$$

$$= 411{,}64\,\mathrm{N} \approx 410\,\mathrm{N}.$$

Laatikkoa siirretään vakionopeudella tasoa ylöspäin, jolloin Newtonin II lain mukaan laatikkoon vaikuttava kokonaisvoima on nolla.

Valitaan positiiviset suunnat tason suunnassa ylöspäin ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa ylöspäin, tason suunnassa laatikolle on voimassa $N_{1x} - G_x = 0$.

Tällöin $N_{1x} = mg\sin\alpha = 120\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 30° = 588{,}6\,\text{N} \approx 590\,\text{N}.$

Tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa $N_{1y} - G_y + N_2 = 0$.

Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
N_{1y} &= mg\cos\alpha - \frac{mg\cos\alpha\frac{L}{2} - mg\sin\alpha\frac{h}{2}}{L} \\
&= mg\left(\cos\alpha - \frac{\cos\alpha\frac{L}{2} - \sin\alpha\frac{h}{2}}{L}\right) \\
&= 120\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\cos 30° - \frac{\cos 30° \cdot \frac{1{,}80\,\text{m}}{2} - \sin 30° \cdot \frac{0{,}60\,\text{m}}{2}}{1{,}80\,\text{m}}\right) \\
&= 607{,}842\,5526\,\text{N} \approx 610\,\text{N}.
\end{aligned}$$

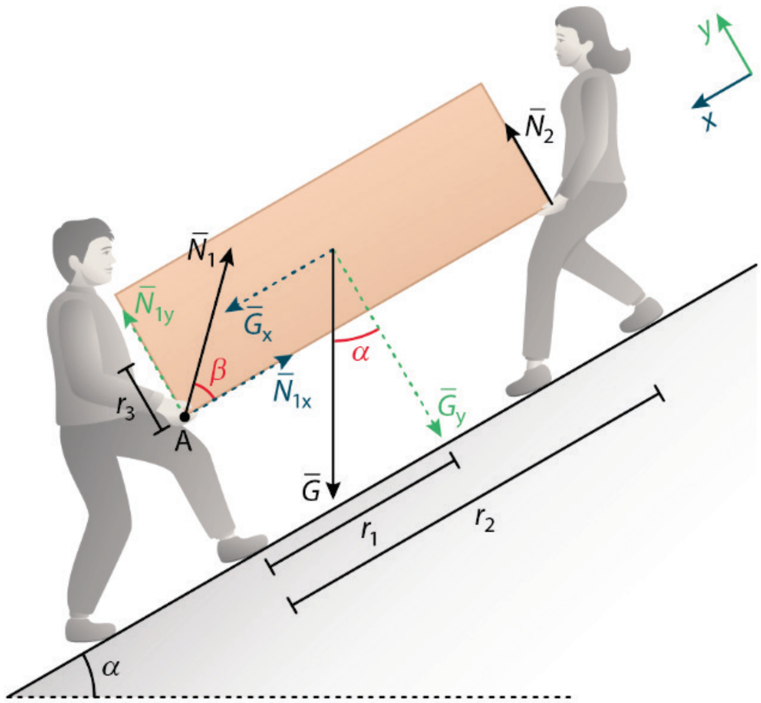
Alemman lukiolaisen laatikkoon kohdistama kokonaisvoima saadaan voimien N_{1x} ja N_{1y} vektorisummana, jolloin Pythagoraan lauseen mukaan

$$N_1 = \sqrt{{N_{1x}}^2 + {N_{1y}}^2} = \sqrt{(588{,}6\,\text{N})^2 + (607{,}842\,5526\,\text{N})^2} = 846{,}122\,\text{N} \approx 850\,\text{N}.$$

Selvitetään voiman suunta laatikon pohjaan nähden.

$$\tan\beta = \frac{N_{1y}}{N_{1x}} \text{ eli } \beta = \tan^{-1}\left(\frac{N_{1y}}{N_{1x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{607{,}842\,5526\,\text{N}}{588{,}6\,\text{N}}\right) = 45{,}921° \approx 46°$$

Voima N_1 on silloin kulmassa
$\alpha + \beta = 30° + 45{,}921° = 75{,}921° \approx 76°$ vaakasuuntaan nähden.



Ylempi kantaja kohdistaa laatikkoon 410 N:n suuruisen voiman. Tämän voiman suunta on kohtisuorassa laatikon pohjaa vastaan.

Alempi kantaja kohdistaa laatikkoon 850 N:n suuruisen voiman. Voima on 46°:n kulmassa laatikon pohjaan nähden ja siten 76°:n kulmassa vaakasuuntaan nähden.

Tehtävä 6.40.

keihään lähtönopeus v_0 = 33 m/s

keihään lähtökulma $\theta = 45°$

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

keihään massa m = 0,8 kg

keihään poikkipinta-ala A = 10 cm^2 = 10 · 10^{-4} m^2

ilman tiheys on 1,225 kg/m^3

a) Kun vastusvoimia ei huomioida, heiton pituudeksi saadaan

$$x = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = \frac{\left(33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ)}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 111{,}009\,17\,\text{m} \approx 110\,\text{m}.$$

Heiton pituus on 110 m, kun vastusvoimia ei huomioida.

b) Mallissa lähtökulma esiintyy vain sinilausekkeessa. Heiton pituuden maksimi saavutetaan, kun sin(2θ) saa maksimiarvonsa.

sin(2θ) = 1, kun 2θ = 90°, joten heiton pituuden maksi saavutetaan heittokulmassa $\theta = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$

c) Virtaviivaisen kappaleen ilmanvastuskerroin on taulukon mukaan C_d = 0,04. Keihään rajanopeudeksi saadaan

$$v_\mathrm{t}=\sqrt{\frac{2mg}{\rho C_\mathrm{d}A}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}8\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1{,}225\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 0{,}04\cdot 10\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}}=565{,}974\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 600\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

d) Rajanopeus ratkaistiin edellä v_t = 565,974 m/s. Lähtönopeuden vaakasuora komponentti on $v_{0x}=33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\sin 45^\circ=23{,}33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kun ilmanvastus huomioidaan, keihään vaakasuoranopeus v_x ajanhetkellä t = 4,7 s

$$v_x=\frac{v_\mathrm{t}^2v_{0x}}{v_\mathrm{t}^2+gv_{0x}t}=\frac{\left(565{,}974\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\cdot 23{,}33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\left(565{,}974\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2+9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 23{,}33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 4{,}7\,\mathrm{s}}=23{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen kulkema matka voidaan laskea keskinopeuden avulla.

Heiton pituudeksi arvioidaan

$$x=v_\mathrm{k}t=\frac{v_0+v_x}{2}t=\frac{23{,}33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}+23{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2}\cdot 4{,}7\mathrm{s}=109{,}46\,\mathrm{m}\approx 109\,\mathrm{m}.$$

Tehtävä 6.41

a) Hämähäkin seitti rakentuu fibroosiproteiinista, ja lanka syntyy hämähäkin kehruurauhasissa.

b) Hämähäkin seitti on kestävää ja se kestää hyvin venytystä. Hämähäkin seitin kaltaisesta materiaalista voitaisiin valmistaa esimerkiksi erittäin kestäviä köysiä, luodinkestäviä vaatteita, kilpa-autoja tai keinotekoisia ihmisten jänteitä.

c) Langan myötöjännitysraja σ = 1 GPa

Langan halkaisija $d = 1 \cdot 10^{-6}$ m

Myötöjännitysraja on suurin venytys, joka lankaan voidaan kohdistaa niin, että lanka palautuu alkuperäiseen muotoonsa. Venytys määritellään voiman ja pinta-alan suhteena

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$F = \sigma A = \sigma \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 1 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}}{2}\right)^2 = 7{,}854 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N} \approx 0{,}8\,\mathrm{mN}.$$

7 Mekaaninen energia ja liikemäärä

Harjoittele

Tehtävä 7.1.

Oikeat vastaukset:

a) B

b) B

c) C

d) C

e) D

f) D

g) C

h) C

i) D

j) B

k) C

l) B

Tehtävä 7.2.

vesisuihkun korkeus h = 140 m

Ei huomioida ilmanvastustusta tai muita tilanteessa vaikuttavia vastusvoimia.
Oletetaan, että vesisuihkun mekaaninen energia säilyy. Suihkun alimmassa kohdassa veden potentiaalienergia on nolla. Suihkun korkeimmassa kohdassa veden nopeus ja siten liike-energia on nolla. Vesisuihkun liike-energia muuntuu silloin täydellisesti vesisuihkun potentiaalienergiaksi.

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{p}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gh$$

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 140\,\mathrm{m}} = 52{,}41\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 52\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Vesisuihkun nopeus on 52 m/s eli noin 190 km/h. Ilmanvastuksen vuoksi veden täytyy kulkea saatua tulosta suuremmalla nopeudella.

Tehtävä 7.3.

a) kappaleen massa m = 5,0 kg

Vaakasuunnassa kappaleeseen ei vaikuta muita voimia, kuin liikkeen suuntainen työntävä voima, jonka suuruus on esitetty kuvaajassa. Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Työntävä voima aiheuttaa kappaleen kiihtyvyyden, ja kiihtyvyys on suurimmillaan, kun työntävä voima saa suurimman arvonsa.

Välillä 1,5 m − 2,0 m työntävän voiman saa suurimman arvonsa, F = 20 N.

Kiihtyvyys on tuolloin $a = \frac{F}{m} = \frac{20\,\text{N}}{5{,}0\,\text{kg}} = 4{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

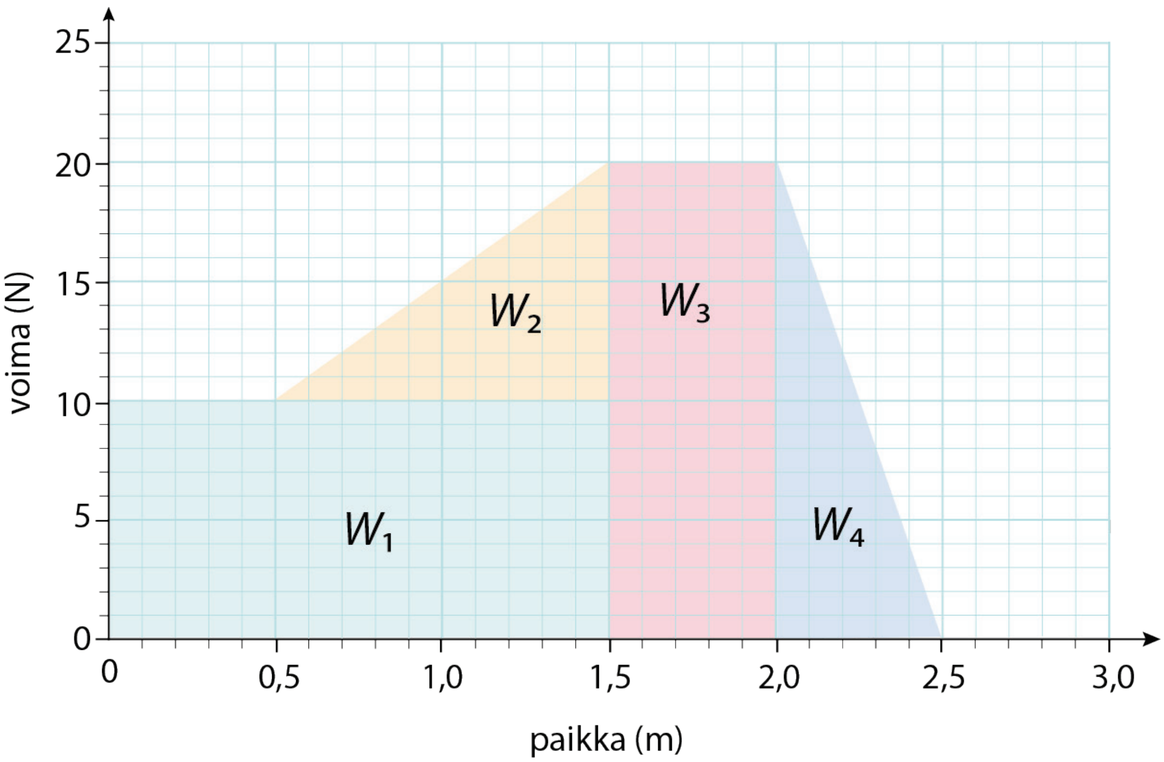
b) kappaleen massa m = 5,0 kg

alkunopeus v_0 = 2,0 m/s

Työntävän voiman tekemä työ kasvattaa kappaleen liike-energiaa.

Työntävän voiman välillä 0 m – 2,5 m tekemä työ W saadaan kuvaajasta fysikaalisena pinta-alana,

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$
$$= 10\,\mathrm{N}\cdot 1{,}5\,\mathrm{m} + \frac{10\,\mathrm{N}\cdot 1{,}0\,\mathrm{m}}{2} + 20\,\mathrm{N}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m} + \frac{20\,\mathrm{N}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}}{2} = 35\,\mathrm{J}.$$



Työperiaatteen mukaan $W = \Delta E_{\mathrm{k}}$. Ratkaistaan tästä kappaleen nopeus 2,5 m:n kohdalla.

$$W = E_{\mathrm{kl}} - E_{\mathrm{ka}}$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = W + \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} \quad \Bigg\| \cdot \frac{2}{m}$$

$$v^2 = \frac{2W}{m} + v_0^{\ 2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m} + v_0^{\ 2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 36\,\mathrm{J}}{5{,}0\,\mathrm{kg}} + \left(2{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 4{,}2895\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 4{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Tehtävä 7.4.

rullaluistelijan alkunopeus v_1 = 0,35 m/s

rullaluistelijan nopeus mäen alaosassa v_2 = 6,2 m/s

mäen korkeus h = 3,1 m

rullaluistelijan massa m = 72 kg

Tarkastellaan tilannetta mekaniikan energiaperiaatteella. Oletetaan, että rullaluistelija ei potki laskun aikana lisävauhtia. Sovitaan potentiaalienergian nollatasoksi mäen alaosa. Tällöin

$$E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{p1}} - W = E_{\mathrm{k2}} + \cancel{E_{\mathrm{p2}}}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - W = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Vastusvoimien tekemä työ on

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 72\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}35\,\mathrm{m/s})^2 + 72\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 3{,}1\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}\cdot 72\,\mathrm{kg}\cdot(6{,}2\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 810{,}162\,\mathrm{J} \approx 810\,\mathrm{J}.\end{aligned}$$

Tehtävä 7.5.

nostomatka s = 2,8 m

säkin massa m_1 = 25 kg

lavan massa m_2 = 2,9 kg

säkin nopeus v = 0,32 m/s

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Kun säkki liikkuu vakionopeudella, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Köydestä on tällöin vedettävä voimalla

$$F = G_1 + G_2 = m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2)g$$
$$= (25\,\text{kg} + 2{,}9\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 273{,}699\,\text{N} \approx 270\,\text{N}.$$

b) Säkin nostamisessa tehdään painovoimaa vastaan työtä. Säkin nostamisessa tehty työ on

$$W = G_1 s + G_2 s = m_1 gs + m_2 gs = (m_1 + m_2)gs$$
$$= (25\,\text{kg} + 2{,}9\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 2{,}8\,\text{m} = 766{,}3572\,\text{J} \approx 770\,\text{J}.$$

c) Säkkiä nostetaan teholla

$$P = Fv = (m_1 + m_2)gv$$
$$= (25\,\text{kg} + 2{,}9\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}32\,\text{m/s} = 87{,}58\,\text{W} \approx 88\,\text{W}.$$

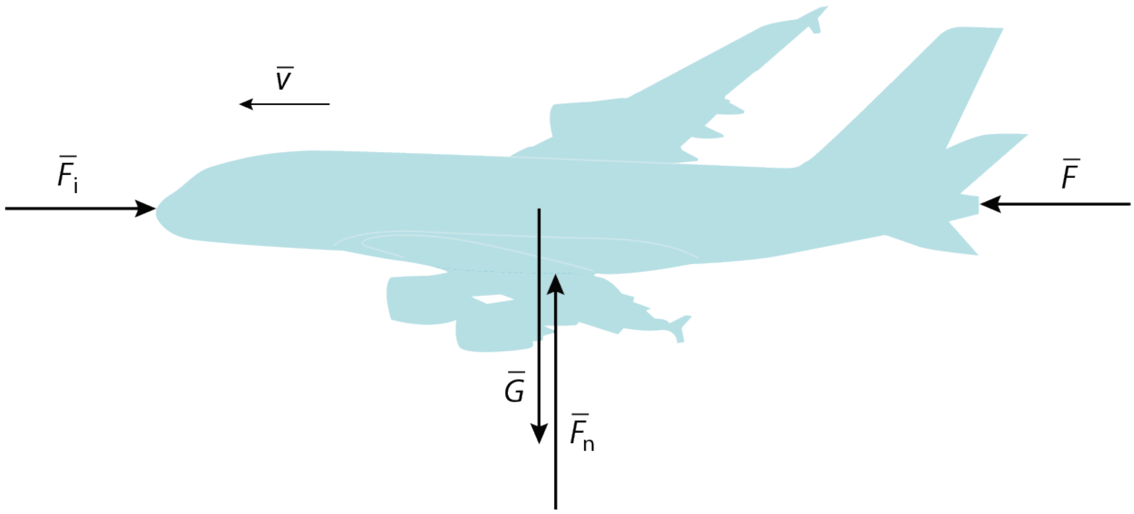
Tehtävä 7.6.

suihkukoneen nopeus v = 1 400 km/h

suihkukoneen massa m = 8 500 kg

työntövoiman teho P = 21 MW

Laaditaan suihkukoneen voimakuvio.



$\overline{G}$ = suihkukoneen paino

$\overline{F}_n$ = liikkuvasta ilmavirrasta aiheutuva voima

$\overline{F}$ = suihkumoottorien aiheuttama konetta työntävä voima

$\overline{F}_i$ = ilmanvastus

Koska kone etenee vakionopeudella, koneen kiihtyvyys on nolla. Suihkukoneen Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Valitaan positiiviset suunnat kuvassa vasemmalle ja ylös.

x-suunnassa: $F - F_i = 0$ eli $F = F_i$

y-suunnassa: $F_n - G = 0$ eli $F_n = G$

Suihkukoneen paino on
$G = mg = 8\,500 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 83\,385 \text{ N} \approx 83 \text{ kN}$.

Liikkuvasta ilmavirrasta aiheutuva konetta nostava voima on yhtä suuri kuin paino, $F_n \approx 83$ kN.

Kun vakiovoima F työntää kappaletta niin, että se liikkuu vakionopeudella v, voiman teho on $P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv$.

Tästä saadaan suihkumoottorien aiheuttama konetta työntävä voima, $F = \frac{P}{v} = \frac{21 \cdot 10^6 \text{ W}}{\frac{1\,400}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 54\,000 \text{ N} = 54 \text{ kN}$.

Ilmanvastus on yhtä suuri kuin konetta eteenpäin työntävä voima, $F_i = 54$ kN.

Voimien suuruudet ovat siis $G = F_n \approx 83$ kN ja $F = F_i = 54$ kN.

Tehtävä 7.7.

a) matkustajalaivan massa m = 63 000 t = 63 · 10^6 kg

matkustajalaivan nopeus
v = 21 kn = 21 · 0,5144 m/s = 10,8024 m/s

Matkustajalaivan liikemäärä on

$$p = mv = 63 \cdot 10^6\ \text{kg} \cdot 10{,}8024\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6{,}805\,512 \cdot 10^8\ \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \approx 6{,}8 \cdot 10^8\ \frac{\text{kgm}}{\text{s}}.$$

b) Liikettä vastustavien voimien suuruus
F = 2,4 MN = 2,4 · 10^6 N

Matkustajalaiva pysähtyy, joten matkustajalaivan liikemäärän muutos on $\Delta p = -6{,}805\,512 \cdot 10^8\ \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$.

Impulssiperiaatteen mukaan

$$\begin{aligned} \overline{I} &= \Delta\overline{p} \\ \overline{F}\Delta t &= \Delta\overline{p} \end{aligned}$$

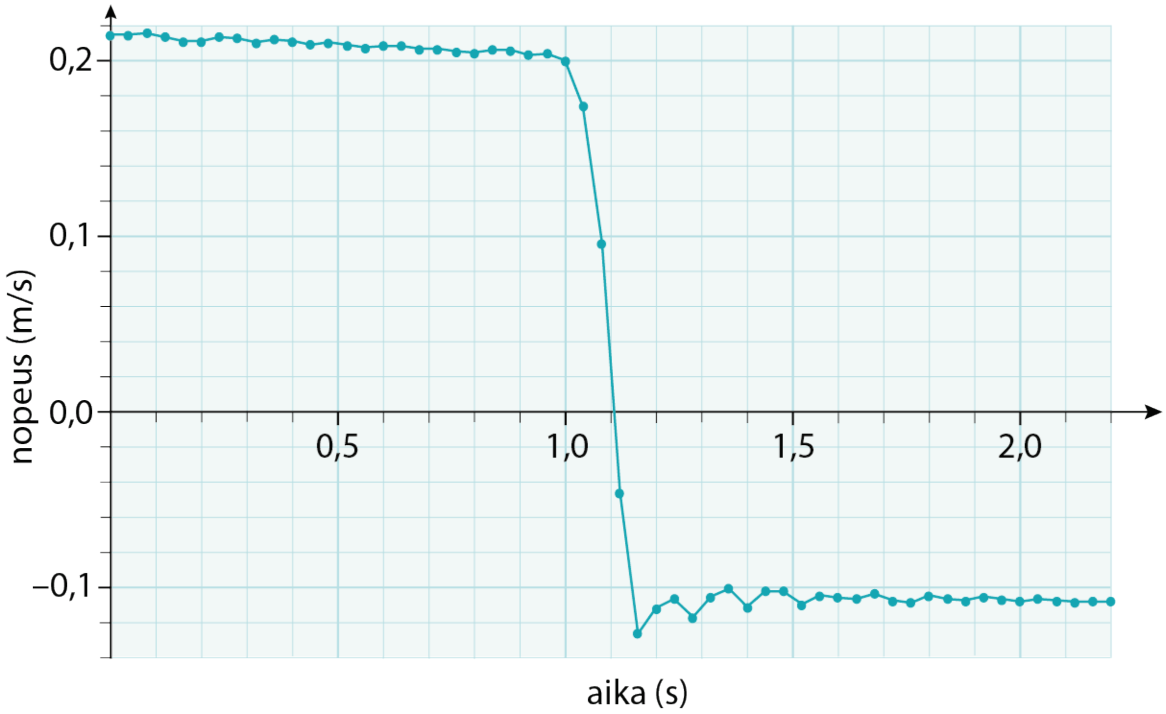
Kun valitaan laivan liikkeen suunta positiiviseksi, saadaan a-kohdan tulosta käyttämällä

$$-F\Delta t = \Delta p$$

$$\Delta t = \frac{\Delta p}{-F} = \frac{-6{,}805\,512 \cdot 10^8\ \frac{\text{kgm}}{\text{s}}}{-2{,}4 \cdot 10^6\ \text{N}} = 283{,}563\ \text{s} = 4\ \text{min}\ 43{,}565\ \text{s} \approx 4\ \text{min}\ 40\ \text{s}.$$

Tehtävä 7.8.

a) Laaditaan mittausaineiston perusteella kuvaaja vaunun liikkeestä.



b) Kuvaajan perusteella vaunun nopeudessa tapahtuu iso muutos aikavälillä 1,00 s – 1,16 s. Tämä on aikaväli, jossa vaunu törmää esteeseen. Törmäyksen kesto on Δt = 1,16 s − 1,00 s = 0,16 s.

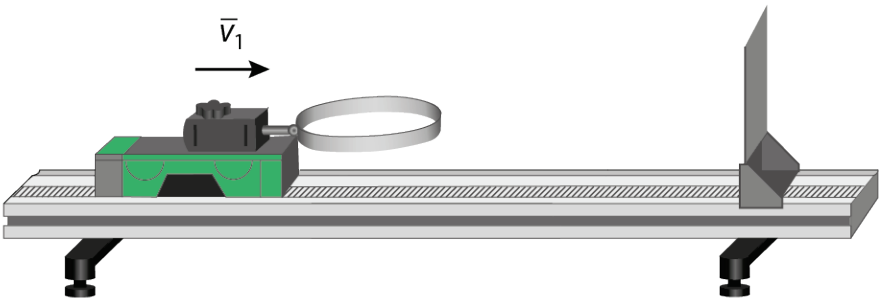
c) vaunun massa m = 385 g = 0,385 kg

törmäyksen kesto Δt = 0,16 s.

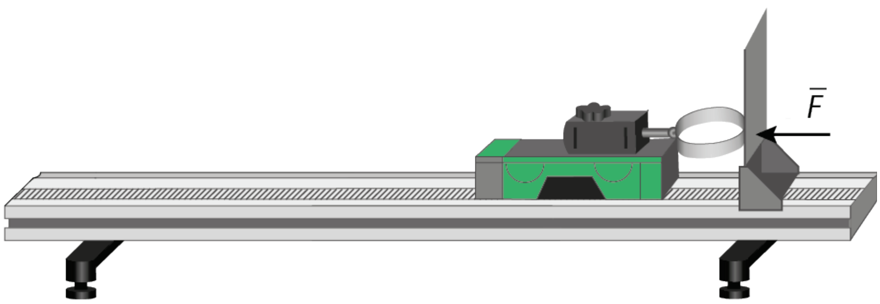
Kuvaajan perusteella vaunun nopeuden suunta muuttuu tilanteessa, sillä nopeuden etumerkki muuttuu. Kun suuntia ei huomioida, vaunun nopeuden suuruus ennen törmäystä on kuvaajan perusteella v_1 = 0,20 m/s ja törmäyksen jälkeen v_2 = 0,11 m/s.

Törmäyksessä vaunuun kohdistuvan voiman impulssi muuttaa vaunun liikemäärää. Vaunu osuu esteeseen nopeudella $\bar{v}_1$. Este kohdistaa vaunuun voiman $\bar{F}$ ja aiheuttaa siten impulssin $\bar{I}$. Tämän jälkeen vaunu liikkuu vastakkaiseen suuntaan nopeudella $\bar{v}_2$.

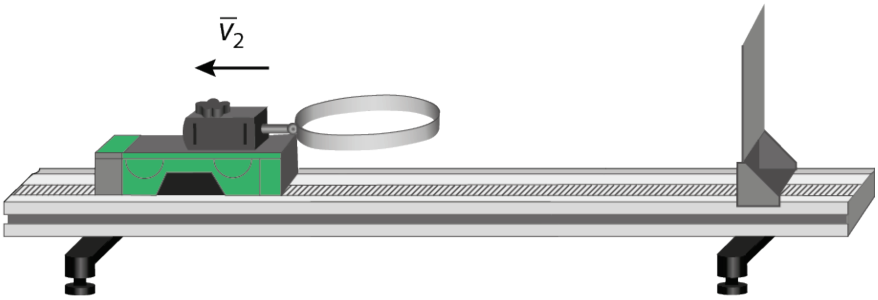
ennen törmäystä



törmäyksen aikana



törmäyksen jälkeen



Impulssiperiaatteen mukaan voiman impulssi on yhtä suuri kuin vaunun liikemäärän muutos

$$\bar{I} = \Delta \bar{p}$$

$$\bar{I} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1$$

$$\bar{F}\Delta t = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1.$$

Kun suunta vasemmalle valitaan positiiviseksi, saadaan

$$F\Delta t = mv_2 - m(-v_1)$$
$$F\Delta t = mv_2 + mv_1.$$

Ratkaistaan tästä vaunuun vaikuttanut keskimääräinen voima.

$$F = \frac{mv_1 + mv_2}{\Delta t} = \frac{m(v_1 + v_2)}{\Delta t}$$

$$= \frac{0{,}385\,\text{kg} \cdot \left(0{,}20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 0{,}11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{0{,}16\,\text{s}} = 0{,}7459\,\text{N} \approx 0{,}75\,\text{N}$$

Vaunuun kohdistuva keskimääräinen voima on 0,75 N.

Tehtävä 7.9.

a) skeittaajan massa m_1 = 64 kg

skeittaajan nopeus v_1 = 3,0 m/s

rullalaudan massa m_2 = 3,5 kg

skeittaajan ja rullalaudan nopeus lopuksi u

Oletetaan, että skeittaajan ja rullalaudan muodostamaan systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia, jolloin tilannetta voidaan mallintaa kimmottomana törmäyksenä, jossa liikemäärä säilyy.

Alkutilanteessa rullalaudan liikemäärä on nolla, sillä rullalauta on alussa paikallaan. Alussa skeittaajalla on liikemäärä, $p_{\text{alussa}} = m_1 v_1$.

Törmäyksen jälkeen rullalauta ja skeittaaja liikkuvat yhdessä, ja niillä on yhteinen liikemäärä, $p_{\text{lopussa}} = (m_1 + m_2)u$.

Liikemäärän säilymislain mukaan $\overline{p}_{\text{alussa}} = \overline{p}_{\text{lopussa}}$.

Kun skeittaajan ja rullalaudan etenemissuunta valitaan positiiviseksi suunnaksi, saadaan

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$$

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{64\,\text{kg} \cdot 3{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{64\,\text{kg} + 3{,}5\,\text{kg}} = 2{,}8444\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Skeittaaja ja rullalauta etenevät lopuksi nopeudella 2,8 m/s.

b) Skeittaajan ja rullalaudan mekaaninen energia koostuu liike-energiasta ja potentiaalienergiasta. Oletetaan, että skeittaajan painopiste on suunnilleen samalla korkeudella rullalaudan päällä kuin juostessakin, jolloin potentiaalienergiassa ei tapahdu merkittävää muutosta.

Systeemin liike-energia ennen skeittaajan hyppyä rullalaudan päälle on $E_{\text{alussa}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 64\,\text{kg} \cdot \left(3{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 288\,\text{J}$

ja hypyn jälkeen

$$E_{\text{lopussa}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1 v_1)^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}\frac{m_1^2 v_1^2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(64\,\text{kg} \cdot 3{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{64\,\text{kg} + 3{,}5\,\text{kg}} = 273{,}0667\,\text{J} \approx 273\,\text{J}$$

Tilanteessa mekaanisen energian muutos on siten
$\Delta E = E_{\text{lopussa}} - E_{\text{alussa}} = 273{,}0667\text{ J} - 288\text{ J} = -14{,}9333\text{ J}$
$\approx -15\text{ J}.$

Vuorovaikutustilanne voidaan tulkita kimmottomaksi törmäykseksi, jossa vuorovaikuttavat kappaleet jatkavat liikettä yhdessä kohtaamisen jälkeen. Kimmottomassa törmäyksessä mekaaninen energia ei säily. Vuorovaikutustilanteessa skeittaajan kenkien ja rullalaudan välillä vaikuttaa kitka, joka työntää rullalaudan liikkeelle. Kitkan tekemä työ siirtää energiaa pois systeemistä, ja systeemin mekaaninen energia pienenee 15 joulella.

Tehtävä 7.10.

vaunun A nopeuden suuruus ennen törmäystä
v_1 = 0,65 m/s

vaunun B nopeuden suuruus törmäystä v_2 = 0,22 m/s

vaunun A nopeuden suuruus törmäyksen jälkeen
u_1 = 0,32 m/s

vaunun B nopeuden suuruus törmäyksen jälkeen
u_2 = 0,28 m/s

vaunun A massa m_1 = 0,482 kg

Tarkastellaan tilannetta törmäyksenä, jossa liikemäärä säilyy. Sovitaan vaunun A alussa oleva liikesuunta positiiviseksi. Saadaan

$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1u_1 + m_2u_2$

Ratkaistaan vainun B massa

$$m_2(v_2 + u_2) = m_1(v_1 + u_1)$$

$$m_2 = \frac{m_1(v_1 + u_1)}{v_2 + u_2} = \frac{0{,}482\,\text{kg} \cdot \left(0{,}65\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 0{,}32\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{0{,}22\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 0{,}28\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} 0{,}935\,08\,\text{kg} \approx 935\,\text{g}.$$

Tehtävä 7.11.

pojan massa m_1 = 29 kg

pojan nopeus v = 5,0 m/s

patjan massa m_2 = 21 kg

pojan ja patjan nopeus heti hypyn jälkeen u

liukumatka s = 1,3 m

Patja pysähtyy liu'ussa, koska kitka tekee työtä ja pienentää pojan ja patjan liike-energiaa. Työperiaatteen mukaisesti $W_\mu = \Delta E_k$.

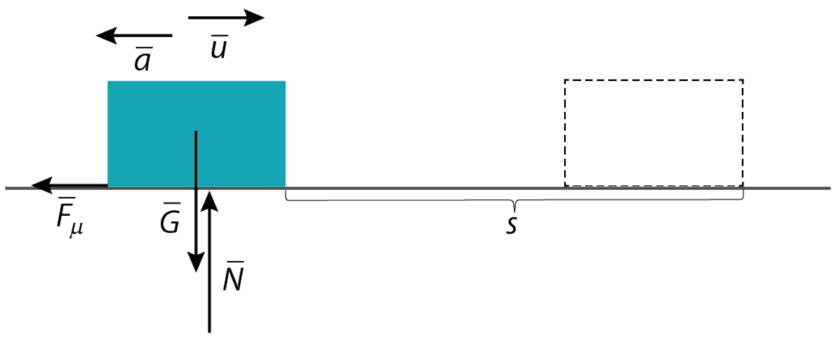
Selvitetään pojan ja patjan liike-energia aivan liu'un alussa. Pojan hyppy patjan päälle on kimmoton törmäys, jossa liikemäärä säilyy, $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$.

Valitaan positiivinen suunta kuvassa oikealle.

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$$

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{29\,\text{kg} \cdot 5{,}0\,\text{m/s}}{29\,\text{kg} + 21\,\text{kg}} = 2{,}90\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Liu'un aikana kitkan tekemä työ pienentää patjan ja pojan liike-energiaa. Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



$\bar{G}$ = patjan ja pojan paino

$\bar{N}$ = lattian tukivoima

$\bar{F}_\mu$ = liukukitka

Vaakasuoralla alustalla $N = G$ eli $N = (m_1 + m_2)g$ ja liukukitkalle voidaan kirjoittaa $F_\mu = \mu N$.

Työperiaatteen mukaan kitkan tekemä työ liukumatkalla on pojan ja patjan liike-energian muutoksen suuruinen eli $W_\mu = \Delta E_k$

$$-F_\mu s = 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$$

$$\mu N s = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$$

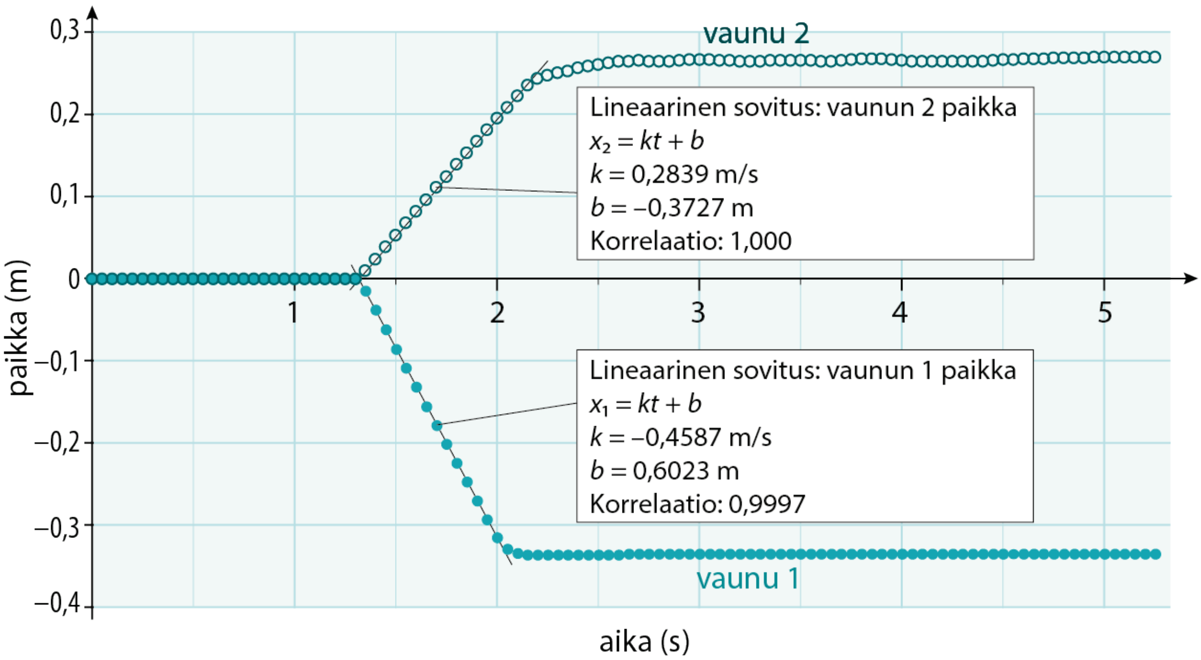
$$\mu \cancel{(m_1 + m_2)} gs = \frac{1}{2}\cancel{(m_1 + m_2)}u^2$$

$$\mu gs = \frac{1}{2}u^2$$

$$\mu = \frac{u^2}{2gs} = \frac{\left(2{,}90\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}3\,\text{m}} = 0{,}329\,76 \approx 0{,}33$$

Tehtävä 7.12.

a)



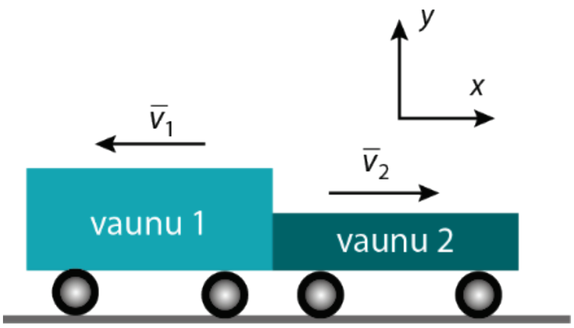
Vaunun 1 nopeus on $v_1 = -0{,}4587\ \text{m/s} \approx -0{,}46\ \text{m/s}$.

Vaunun 2 nopeus on $v_2 = 0{,}2839\ \text{m/s} \approx 0{,}28\ \text{m/s}$.

Vaunut liikkuvat vastakkaisiin suuntiin, mikä näkyy nopeuden etumerkeissä.

b) Vaunun 1 massa m1 = 567 g

Vaunuradalla ulkoiset voimat ovat häviävän pienet. Tilanteessa liikemäärä säilyy, $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$. Alussa vaunut olivat paikoillaan, jolloin vaunujen liikemäärien summa on nolla. Lopussa vaunut kulkevat eri suuntiin. Liikemäärien summa on edelleen nolla. Sovitaan vaunun 2 nopeus positiiviseksi.



Liikemäärän säilymislain mukaan

$$0 = -p_1 + p_2$$
$$0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Vaunujen nopeudet saadaan a-kohdan mukaan. Käytetään arvoja ilman suuntia ilmaisevia etumerkkejä, sillä suunnat on huomioitu jo liikemäärissä. Vaunun 2 massa on

$$m_2 = \frac{m_1 v_1}{v_2} = \frac{567\,\text{g} \cdot 0{,}4587\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}2839\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 916{,}107\,\text{g} \approx 916\,\text{g}.$$

c) Tarkastellaan tilannetta mekaniikan energiaperiaatteella. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi vaunun taso. Näin ollen potentiaalienergia ei tilanteessa muutu lainkaan.

$$E_{\text{ka1}} + E_{\text{ka2}} + W = E_{\text{kl1}} + E_{\text{kl2}}.$$

Koska vaunut ovat alussa paikoillaan, $E_{\text{ka1}} = 0$ ja $E_{\text{ka2}} = 0$.

Jousen aiheuttaman voiman tekemäksi työksi saadaan

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (0{,}567\,\text{kg} \cdot \left(0{,}4587\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 0{,}916\,107\,\text{kg} \cdot \left(0{,}2839\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2) \\ &= 0{,}096\,568\,76\,\text{J} \approx 96{,}6\,\text{mJ}. \end{aligned}$$

Tehtävä 7.13.

Törmäys 1

Vaunujen massat ovat yhtä suuret. Kun liikkuva vaunu törmää saman massaiseen paikalla olevaan vaunuun ja ne jatkavat yhdessä törmäyksen jälkeen, vaunujen nopeus törmäyksen jälkeen on pienempi kuin ennen törmäystä.

Törmäys 2

Tilanne on sama kuin törmäyksessä 1, mutta vaunun 2 massa on suurempi. Tällöin vaunut liikkuvat törmäyksen jälkeen vielä pienemmällä nopeudella kuin törmäyksen 1 jälkeen.

Törmäys 3

Tilanteessa vaunut jatkavat erillään törmäyksen jälkeen. Jos saman massainen vaunu törmää paikalla olevaan saman massaiseen vaunuun, aluksi liikkuva vaunu jää paikoilleen ja aluksi paikallaan oleva vaunu lähtee samalla nopeudella kuin siihen törmännyt vaunu.

Törmäys 4

Kun saman massaiset vaunut törmäävät toisiinsa eri nopeuksilla, törmäyksen jälkeen vaunujen nopeudet ovat toistensa nopeuden suuruiset. Vaunut lähtevät törmäyksen jälkeen vastakkaiseen suuntaan, mistä ne tulivat ennen törmäystä.

Törmäys 5

Kun pienempi massainen vaunu törmää paikallaan olevaan suurempi massaiseen vaunuun, suurempi massainen vaunu lähtee alkuperäisen vaunun suuntaan pienemmällä nopeudella kuin siihen törmännyt vaunu. Alun perin liikkeessä olevan vaunun nopeuden suunta muuttuu päinvastaiseksi ja nopeus pienenee.

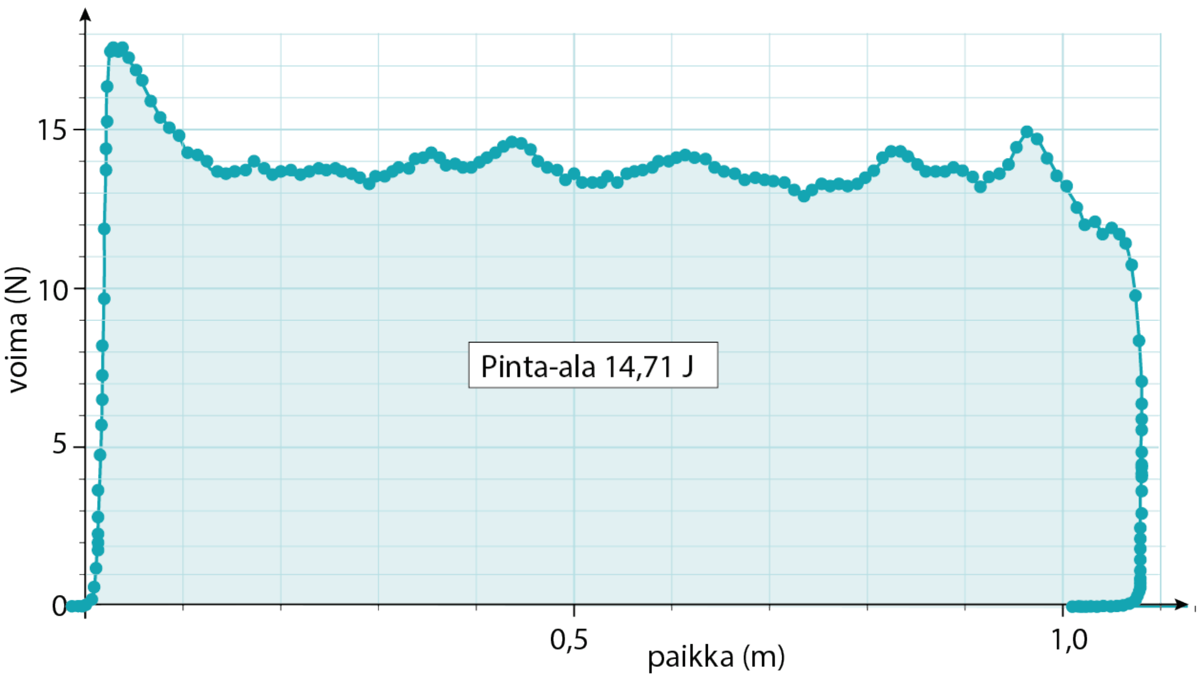
Törmäys 6

Kun suurempi massainen vaunu törmää paikallaan olevaan pienempi massaiseen vaunuun, molemmat vaunut liikkuvat samaan suuntaan kuin aluksi liikkuva suurempi massainen vaunu. Pienempi massaisen vaunun nopeus törmäyksen jälkeen on suurempi ja suurempi massaisen vaunun pienempi, kuin ennen törmäystä liikkuvan suurempi massaisen vaunun nopeus.

Tehtävä 7.14.

a) Voiman tekemä työ saadaan, kun määritetään (x, F)-koordinaatistossa olevan kuvaajan ja akselin rajoittaman alueen fysikaalinen pinta-ala.

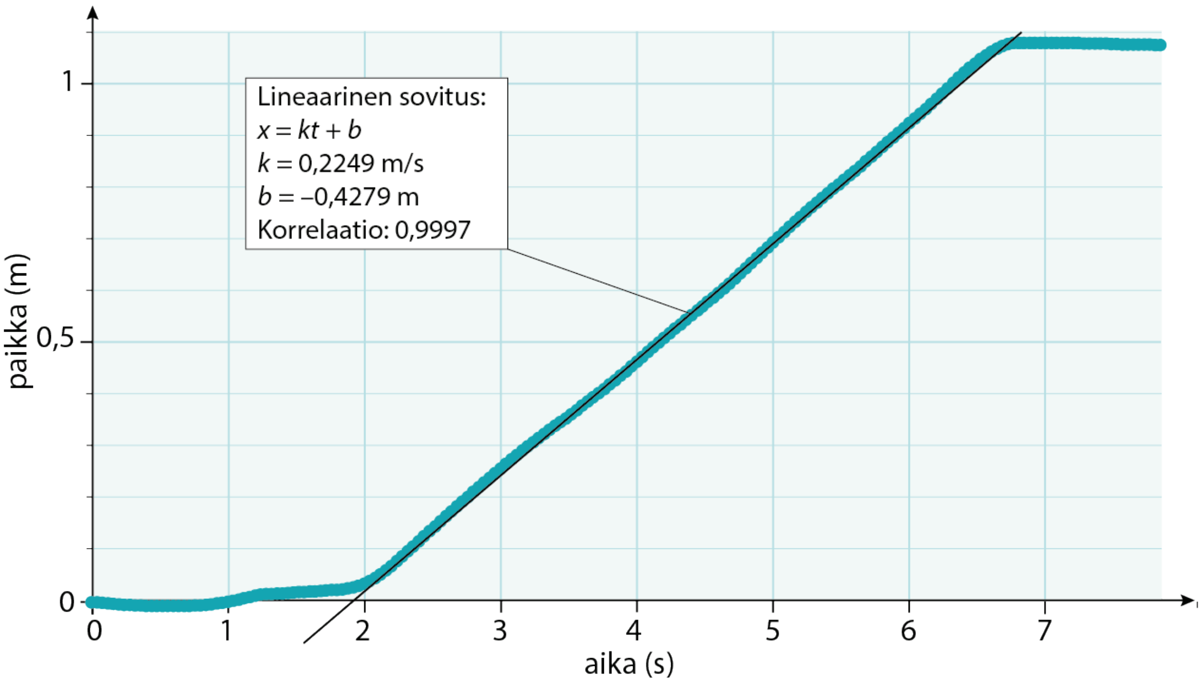
Esitetään voima-anturin kappaleeseen kohdistama voima paikan suhteen eli kuvataan mittaustulokset (x, F)-koordinaatistossa. Määritetään kuvaajan ja akselin rajaaman alueen fysikaalinen pinta-ala.



Voiman tekemä työ W = 14,71 J ≈ 15 J.

b) Kappaleen liikuttelemiseen tarvittava teho saadaan yhtälöllä $P = Fv$.

Laaditaan mittaustuloksista kuvaaja (t, x)-koordinaatistoon. Kappale liikkuu vakionopeudella, kun kuvaaja on nouseva suora. Tutkitaan, millä aikavälillä kappale liikkui vakionopeudella ja määritetään sitten kappaleen nopeus (t, x)-koordinaatistossa kulkevan suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta.



Kappaleen nopeus on $v = 0{,}2249$ m/s.

Määritetään (x, F)-koordinaatistoon laaditusta kuvaajasta voimien keskiarvo tasaisen liikkeen ajalta. Voiman keskiarvo eli vetovoima tasaisen liikkeen aikana on keskimäärin $F = 13{,}81$ N.

TAI

Valitaan (x, F)-koordinaatistoon laaditusta kuvaajasta voiman tasaisen liikkeen ajalta. Voiman arvo vetovoima tasaisen liikkeen aikana on F = 13,81 N.

Vetämiseen tarvittava teho

$P = Fv = 13{,}81\ \text{N} \cdot 0{,}2249\ \text{m/s} = 3{,}105869\ \text{W} \approx 3{,}1\ \text{W}.$

c) Jos kappaletta olisi vedetty kallistettua pöytää pitkin ylöspäin, työ olisi ollut suurempi kuin vaakasuoran pöydän tapauksessa.

Vetämiseen olisi tarvittu enemmän voimaa, sillä kappaleeseen olisi tällöin kohdistunut kitkan lisäksi myös kappaleen paino

Koska matka olisi ollut yhtä pitkä sekä vaakasuoralla että kallistetulla pöydällä, myös vetävän voiman tekemä työ $W = F\Delta x$ olisi ollut myös suurempi.

Tehtävä 7.15.

vetokulma α = 40°

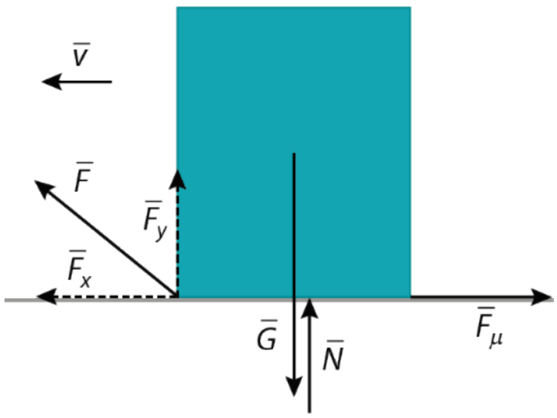
kaapin massa m = 120 kg

maton ja lattian välinen kitkakerroin μ = 0,18

kaappia siirretty matka s = 2,4 m

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Esitetään kaappiin vaikuttavat voimat



$\overline{G}$ = kaapin paino

$\overline{N}$ = lattian tukivoima

$\overline{F}_\mu$ = liukukitka

$\overline{F}$ = vetävä voima

Kun kaappi liikkuu vakionopeudella, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}.$ Liikeyhtälöt vaaka- ja pystysuunnassa

$$F_x - F_\mu = 0$$

$$N + F_y - G = 0.$$

Kun esitetään voiman F komponentit kulman α avulla ja kirjoitetaan kitkalle $F_\mu = \mu N$, saadaan

$$F\cos\alpha = \mu N$$
$$N = G - F\sin\alpha.$$

Sijoitetaan alempi yhtälö ylempään ja ratkaistaan F.

$$F\cos\alpha = \mu(mg - F\sin\alpha)$$
$$F\cos\alpha = \mu mg - \mu F\sin\alpha$$
$$F\cos\alpha + \mu F\sin\alpha = \mu mg$$
$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Tällöin kitka on

$$F_\mu = F\cos\alpha = \frac{\mu mg\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$
$$= \frac{0{,}18 \cdot 120\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ + 0{,}18 \cdot \sin 40^\circ}$$
$$= 184{,}09\,\text{N} \approx 180\,\text{N}.$$

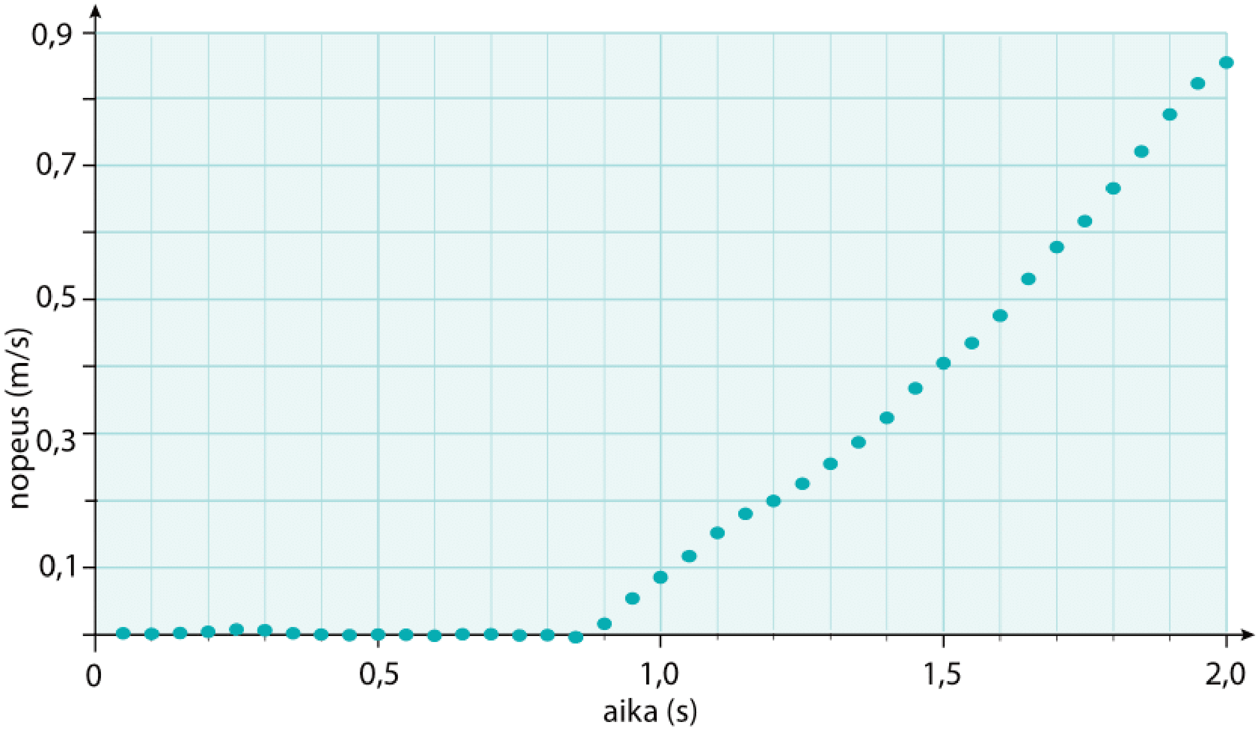
b) Kun kaappia siirretään matka s vakionopeudella, on kaapin siirtämisen suunnassa tehty työ yhtä suuri kuin kitkan tekemä työ.

$$W = F_x s = F_\mu s = \frac{\mu mg\cos\alpha s}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$
$$= \frac{0{,}18 \cdot 120\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 40^\circ \cdot 2{,}4\,\text{m}}{\cos 40^\circ + 0{,}18 \cdot \sin 40^\circ}$$
$$= 441{,}8\,\text{J} \approx 440\,\text{J}.$$

c) Elimistön elintoiminnot tarvitsevat myös energiaa, jolloin elintoimintoihin ja siirtämiseen tarvitaan enemmän energiaa kuin vain siirtämiseen tarvittavaan työhön.

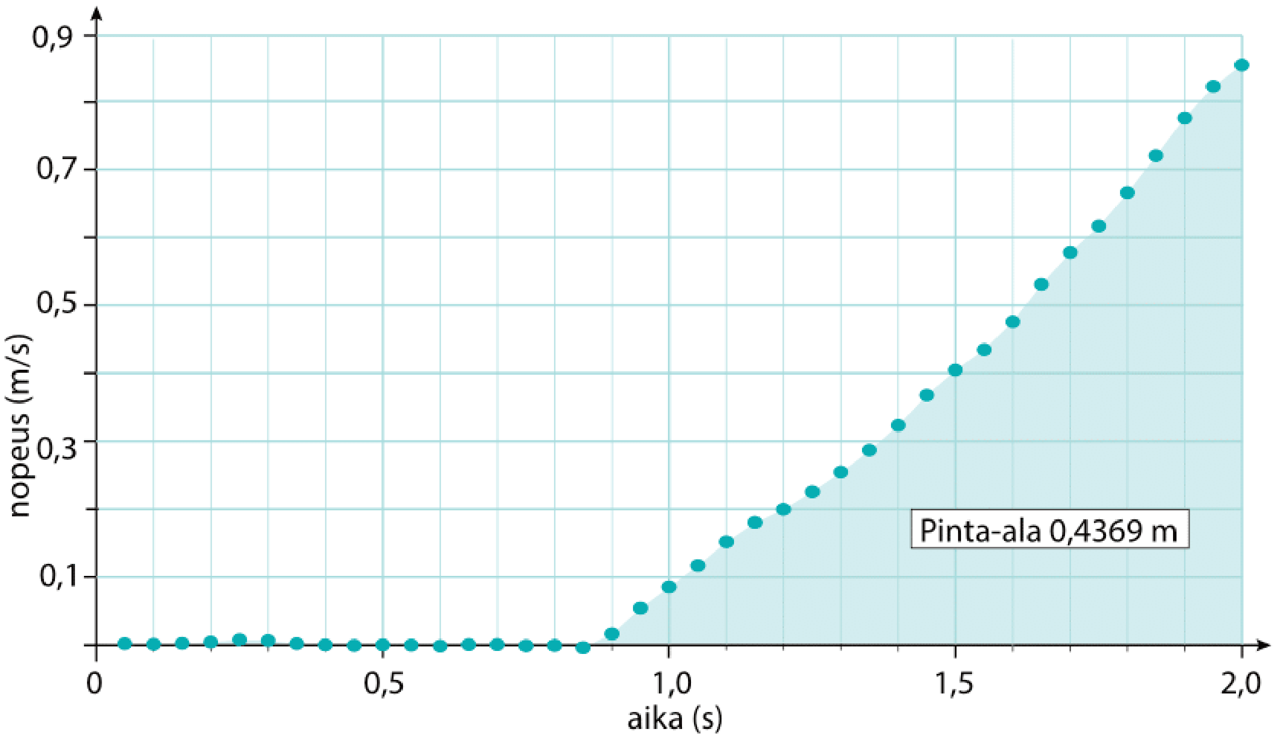
Tehtävä 7.16.

a) Esitetään paperipakkauksen nopeus eri ajanhetkillä.



Kuvaajan perusteella paperipakkaus on paikallaan 0,85 s asti, sillä pakkauksen paikka ei muutu. Tämän jälkeen nopeus alkoi kasvaa tasaisesti, joten pakkaus on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä.

b) Paperipakkauksen kulkema matka mittauksen aikana saadaan (*t, v*)-koordinaatiston kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään pinta-ala



Paperipakkaus kulki matkan s = 0,4369 m ≈ 44 cm.

c) Kuvaajasta voidaan määrittää, että paperipakkauksen nopeus mittauksen lopussa oli 0,85 m/s. Tarkastellaan mekaniikan energiaperiaatteella pakkaukseen liittyviä energioita. Liu'un alussa pakkaus on paikallaan, jolloin pakkauksen liike-energia on nolla. Valitaan pakkauksen potentiaalienergian nollatasoksi kohta, missä pakkaus on liukumisen jälkeen. Merkitään pakkauksen korkeutta potentiaalienergian nollatasoon *h*:lla. Tällöin

$$E_{p,1} - W = E_{k,2}$$

$$mgh - Fs = \frac{1}{2}mv^2.$$

Pakkauksen korkeuden muutos saadaan trigonometrian avulla $h = s\sin\alpha$.

Vastusvoimat keskimäärin liu'un aikana on

$$F = \frac{mgs\sin\alpha - \frac{1}{2}mv^2}{s}$$

$$= \frac{2{,}468\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}4369\,\text{m} \cdot \sin 25^\circ - \frac{1}{2} \cdot 2{,}468\,\text{kg} \cdot (0{,}85\,\text{m/s})^2}{0{,}4369\,\text{m}}$$

$$= 8{,}1913\,\text{N} \approx 8{,}2\,\text{N}.$$

Tehtävä 7.17.

pyöräilijän nopeus mäen päällä $v_1 = 18\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{18}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

mäen korkeus *h* = 12 m

pyöräilijän nopeus mäen alla $v_2 = 28{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{28{,}4}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

pyöräilijän massa *m* = 81 kg

putoamiskiihtyvyys *g* = 9,81 m/s^2

mäen pituus *s* = 78 m

a) Valitaan mäen alaosa potentiaalienergian nollatasoksi. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$E_{\text{k1}} + E_{\text{p1}} - W = E_{\text{k2}} + E_{\text{p2}}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - W = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Vastusvoimien tekemä työ

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\cdot 81\,\text{kg}\cdot\left(\frac{18}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 81\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 12\,\text{m} - \frac{1}{2}\cdot 81\,\text{kg}\cdot\left(\frac{28{,}4}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \\
&= 8\,027{,}32\,\text{J} \approx 8{,}0\,\text{kJ}.
\end{aligned}$$

b) Vastusvoimien suuruus saadaan työn avulla ja a-kohdan tuloksen mukaan

$$W = Fs$$

$$F = \frac{W}{s} = \frac{8\,027{,}32\ \text{J}}{78\ \text{m}} = 102{,}91\ \text{N} \approx 100\ \text{N}.$$

c) Valitaan mäen alaosa potentiaalienergian nollatasoksi, jolloin potentiaalienergia lopussa on nolla. Tarkastellaan tilannetta mekaniikan energiaperiaatteella ja määritetään pyöräilijän loppunopeus

$$E_{\text{k1}} + E_{\text{p1}} - W = E_{\text{k2}} + E_{\text{p2}}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - W$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh - \frac{2Fs}{m}$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh - \frac{2Fs}{m}}.$$

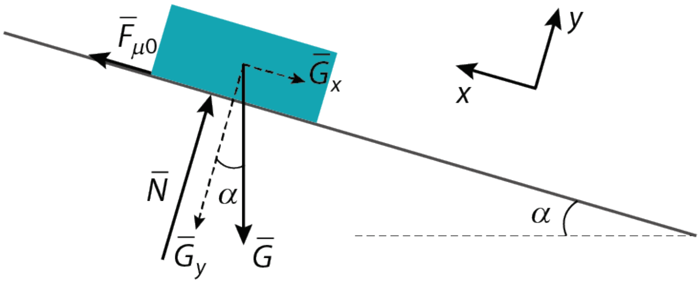
Loppunopeuteen siis vaikuttaa alkunopeus, mäen korkeus, mäen pituus ja vastusvoimien suuruus. Mitä jyrkempi mäki aluksi on, sitä suuremman nopeuden pyöräilijä saa mäen alkuosassa. Vastusvoimista ilmanvastus muuttuu, kun mäen jyrkkyys muuttuu. Mitä suurempi pyöräilijän nopeus on, sitä suurempi on ilmanvastus. Mitä jyrkempi on mäki, sitä suurempi on koko matkan aikana vaikuttava ilmanvastus ja ilmanvastuksen tekemä työ. Loppunopeus on siis pienempi, jos mäki on aluksi jyrkempi.

Tehtävä 7.18.

katon kaltevuuskulma α = 25°

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Laaditaan paakun voimakuvio.



$\overline{G}$ = lumipaakun paino

$\overline{N}$ = katon paakkuun aiheuttama tukivoima

$\overline{F}_{\mu 0}$ = lumipaakun ja katon välinen lepokitka

Tarkastellaan lepokitkan suurinta arvoa, kun lumipaakku pysyy paikoillaan. Newtonin II lain mukaan paikallaan olevaan lumipaakkuun vaikuttava kokonaisvoima on nolla. Valitaan suunnat ja lumipaakulle on voimassa katon suunnassa $F_{\mu 0} - G_x = 0$ ja kattoa vastaan kohtisuorassa suunnassa $N - G_x = 0$. Painolle on voimassa $G = mg$ ja lepokitkalle $F_{\mu 0} = \mu_0 N$. Painon komponentit $G_x = G\sin\alpha$ ja $G_y = G\cos\alpha$. Yhdistetään edellä olevat yhtälöt ja ratkaistaan lepokitkakerroin.

$$\mu_0 \cancel{mg} \cos\alpha = \cancel{mg} \sin\alpha$$

$$\mu_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan(25°) = 0,4663 \approx 0,47.$$

b) paakun ja katon välinen liukukitkakerroin μ = 0,08

paakun liukuma matka s = 4,0 m

Tarkastellaan lumipaakun liukumista katolla mekaniikan energiaperiaatteella.

$E_{ka} + E_{pa} - W = E_{kl} + E_{pl}$. Valitaan lumipaakun potentiaalienergia nollataso kohdaksi, kun paakku on liukunut 4,0 m. Paakun potentiaalienergia lopussa on nolla eli $E_{pl} = 0$. Paakku lähti paikoiltaan liikkeelle, jolloin paakun liike-energia alussa on nolla eli $E_{ka} = 0$. Liukukitkan tekemä työn suuruus on $W = F_\mu s$. Saadaan mekaniikan energiaperiaatteella

$$mgh - F_\mu s = \frac{1}{2}mv^2.$$

Edellisen kohdan mukaan lumipaakkuun kohdistuvalle kitkalle on voimassa $F_\mu = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Paakun korkeuden muutos 4,0 metrin liu'un aikana on $h = s\sin\alpha$. Sijoitetaan edellä olevat yhtälöt mekaniikan energiaperiaatteeseen ja saadaan

$$\cancel{m}gs\sin\alpha - \mu\cancel{m}g\cos\alpha s = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$
$$v^2 = 2gs(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Ratkaistaan lumipaakun nopeus liu'un jälkeen

$$v = \sqrt{2gs(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$
$$= \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 4{,}0\,\text{m}\cdot(\sin 25^\circ - 0{,}08\cdot\cos 25^\circ)} = 5{,}2418\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 5{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehtävä 7.19.

pulkan nopeus v = 0,65 m/s

kaltevan tason kulma α = 11°

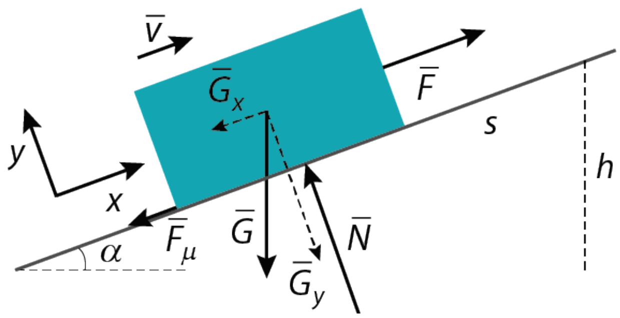
pulkkailijan massa m = 15 kg

liukukitkakerroin μ = 0,056

mäen korkeus h = 3,5 m

a) Piirretään tilanteesta voimakuvio.

$\overline{G}$ = kappaleen paino



$\overline{F}$ = narun kappaleeseen kohdistama voima

$\overline{F}_\mu$ = pulkan ja mäen välinen liukukitka

Kun pulkkailijaa vedetään vakionopeudella, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Kun huomioidaan suunnat, saadaan

x-suunnassa: $F - G_x - F_\mu = 0$

y-suunnassa: $N - G_y = 0$.

Esitetään voimien komponentin kulmien avulla ja tarkastellaan vetävää voimaa.

x-suunnassa: $F = G\sin\alpha + F_\mu$

y-suunnassa: $N = G\cos\alpha$.

Kitkalle $F_\mu = \mu N$ ja $G = mg$. Sijoitetaan alempi yhtälö ylempään, jolloin vetäväksi voimaksi saadaan

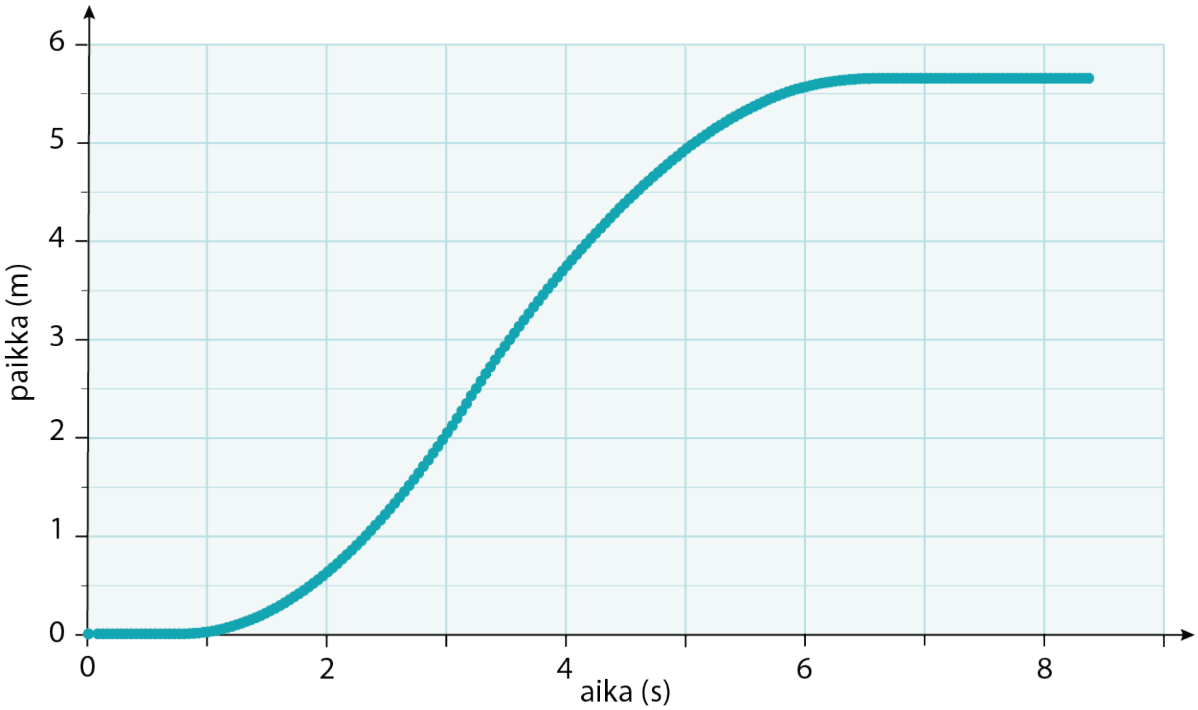
$$\begin{aligned} F &= G\sin\alpha + \mu G\cos\alpha \\ &= mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha \\ &= mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \\ &= 15\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot(\sin 11^\circ + 0{,}056\cdot\cos 11^\circ) \\ &= 36{,}1665\,\text{N} \approx 36\,\text{N}. \end{aligned}$$

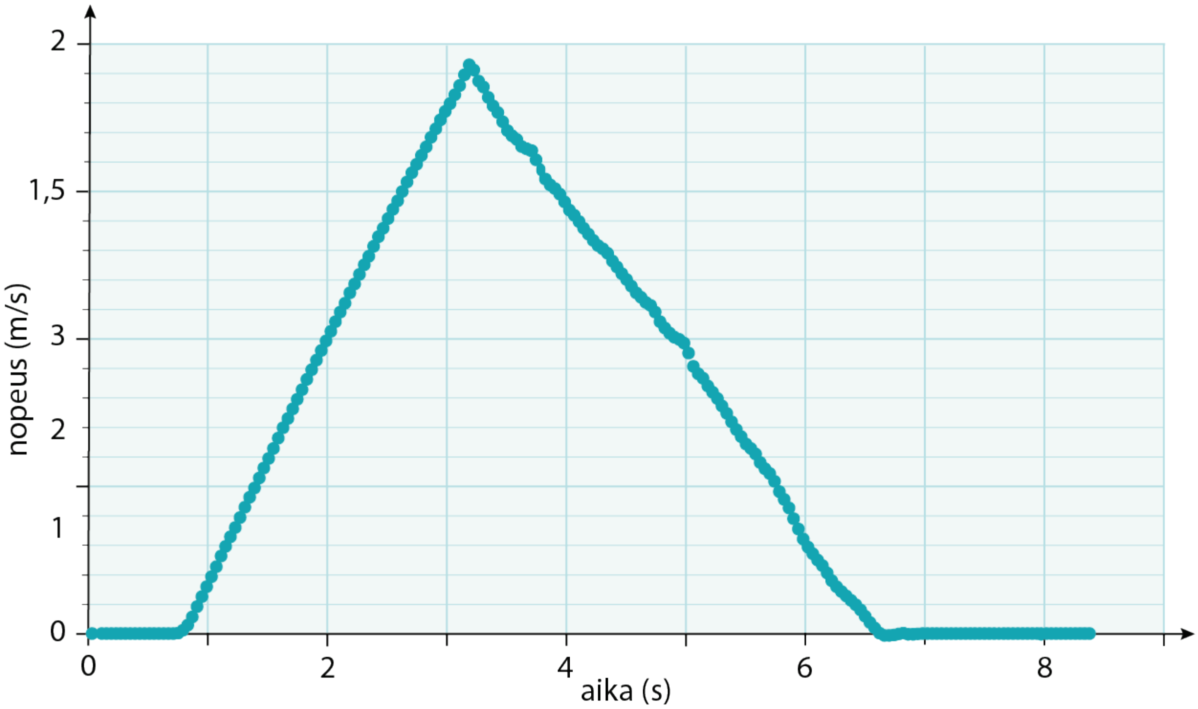
b) Vetävän voiman tekemä työ on

$$\begin{aligned} W &= Fs = F\frac{h}{\sin\alpha} \\ &= \frac{mgh(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\sin\alpha} \\ &= \frac{15\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 3{,}5\,\text{m}\cdot(\sin 11^\circ + 0{,}056\cdot\cos 11^\circ)}{\sin 11^\circ} \\ &= 663{,}4011\,\text{J} \approx 660\,\text{J}. \end{aligned}$$

Tehtävä 7.20.

a)





Vaunu lähtee liikkeelle ajanhetkellä 0,75 s. Vaunun nopeus kasvoi ajanhetkelle 3,2 s asti, jonka jälkeen nopeus alkoi pienentyä. Vaunu pysähtyy 6,6 s kohdalla.

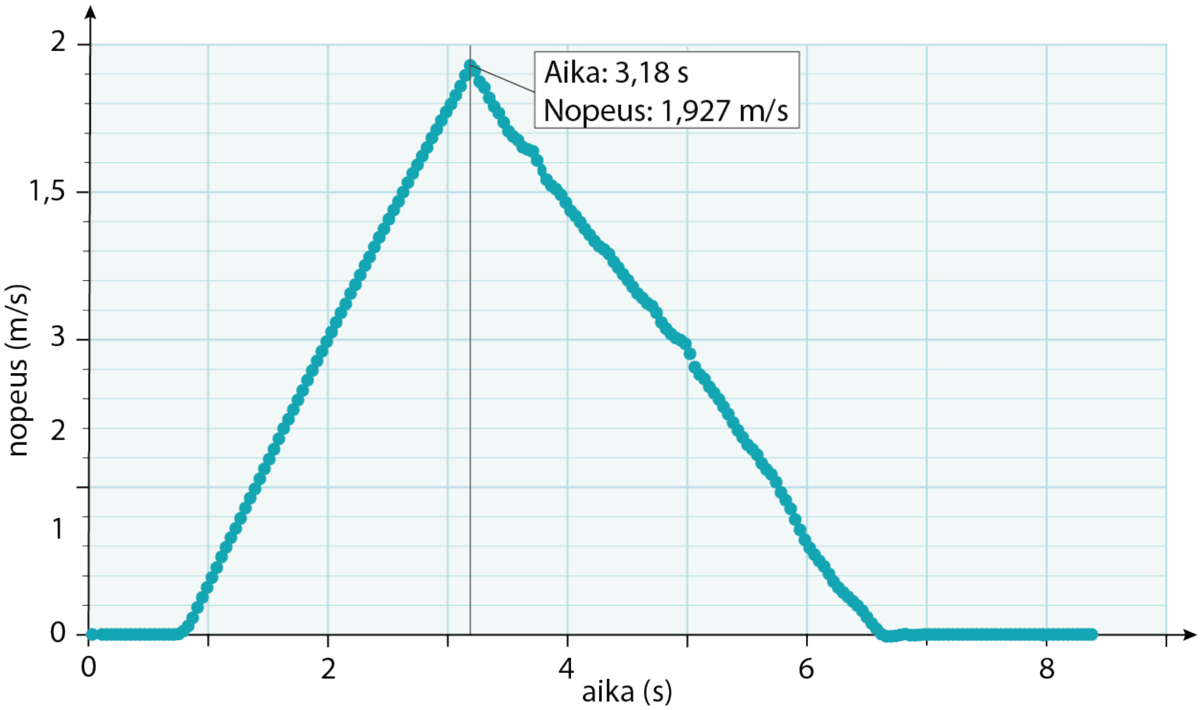
Painovoiman kaltevan tason suuntainen komponentti aiheutti vaunulle kiihtyvyyden, joten vaunun nopeus kasvoi siihen asti, kun vaunu oli kaltevalla tasolla. Tämän jälkeen vaunuun vaikutti liikkeen suunnassa vain liikkeelle vastakkaisia voimia, jotka pienensivät vaunun nopeutta. Siten vaunu saapuu lattialle ajanhetkellä 3,2 s.

b) vaunun massa m = 1,315 kg

kaltevan tason korkeus h = 20,4 cm = 0,204 m

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Määritetään vaunun nopeus kaltevan tason lopussa.



Nopeus tason lopussa on v_2 = 1,927 m/s.

Valitaan mäen alaosa potentiaalienergian nollatasoksi.
Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$E_{k1} + E_{p1} - W = E_{k2} + E_{p2}$$

$$mgh - W = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Vastusvoimien tekemä työ

$$W = mgh - \frac{1}{2}mv_2^2$$
$$= 1{,}315\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}204\,\text{m} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}315\,\text{kg} \cdot \left(1{,}927\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$
$$= 0{,}1901\,\text{J} \approx 190\,\text{mJ}.$$

c) Kun vaunu liikkuu vaakasuoraan, mekaniikan energiaperiaatteen mukaan vaunun potentiaalienergia ei muutu. Lopuksi vaunu jää paikalleen.

$$E_{\text{k1}} + E_{\text{p1}} - W = E_{\text{k2}} + E_{\text{p2}}$$
$$\frac{1}{2}mv^2 - W = 0.$$

Vaunu liikkui lattialla aikavälillä 3,2 s – 6,6 s kuvaajan perusteella matkan *s* = 3,298 m.

Vastusvoimien suuruus

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2$$
$$F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{1{,}315\,\text{kg} \cdot (1{,}927\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 3{,}298\,\text{m}}$$
$$= 0{,}740\,30\,\text{N} \approx 740\,\text{mN}.$$

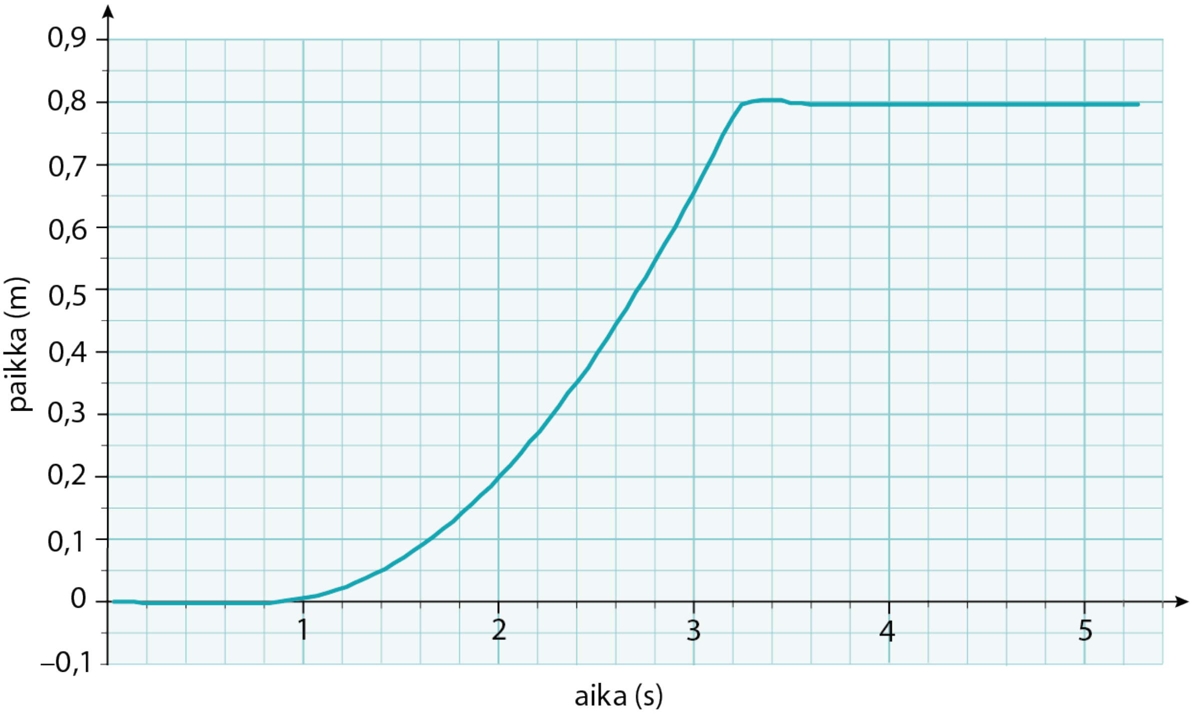
Tehtävä 7.21.

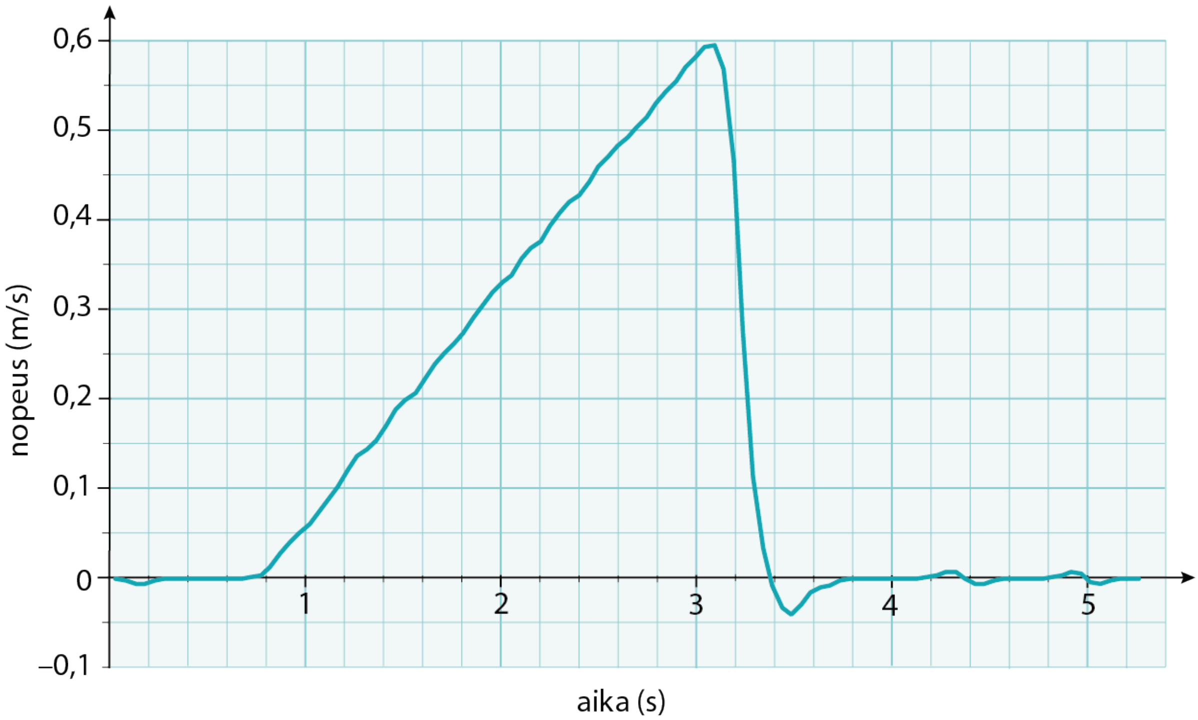
kaltevan tason kulma vaakatasoon nähden α = 3,4°

vaunun massa m = 638 g

a) Videon perusteella puhaltimen läpi virtaa ilmaa kohti paperia eli kaltevan tason suunnassa alaspäin. Puhallin tekee työtä puhaltimen läpi liikkuvalle ilmamassalle ja kasvattaa virtaavan ilman liike-energiaa. Puhallin aiheuttaa tällöin voiman ilman molekyyleihin kaltevan tason suunnassa alaspäin. Voiman ja vastavoiman lain mukaan ilman molekyylit kohdistavat puhaltimeen yhtä suuren mutta vastakkaissuuntaisen voiman. Tämä voima vastustaa vaunun liikettä kaltevaa tasoa alas.

b) Esitetään vainun paikka ja nopeus eri ajanhetkillä.





Tarkastellaan vaunun liikettä mekaniikan energiaperiaatteen avulla. Mittausaineiston perusteella vaunu lähti paikaltaan, joten vaunun alkunopeus oli nolla ja myös vaunun liike-energia oli nolla. Asetetaan vaunun potentiaalienergian nollataso kohtaan, jossa kuvaajan perusteella vaunun liike pysähtyi. Tällöin mekaniikan energiaperiaatteen mukaan on voimassa

$E_{pa} - W = E_{kl}$.

Mittausaineiston perusteella vaunu liikkui kaltevaa taso pitkin 77,4 cm ennen kuin vaunu otettiin kiinni. Tämä näkyi kuvaajassa ajanhetkellä, jolloin vaunun nopeus alkoi äkillisesti pienentyä. Vaunun nopeus saadaan paikan kuvaajaan sovitetun tangenttisuoran fysikaalisesta kulmakertoimesta kohdassa, jossa vaunun paikka oli 77,4 cm. Vaunun nopeus oli tällöin 0,60 m/s. Vaunun korkeus alussa potentiaalienergian nollatasoon nähden oli 4,59 cm. Vastusvoimien tekemä työ saadaan yhtälöllä $W = Fs$, jossa F on vastusvoimien suuruus ja s on vaunun kulkema matka. Vastusvoimien suuruus oli

$$mgs\sin\alpha - Fs = \frac{1}{2}mv^2$$

$$F = \frac{mgs\sin\alpha - \frac{1}{2}mv^2}{s}$$

$$= \frac{0{,}638\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}774\,\text{m}\cdot\sin 3{,}4^\circ - \frac{1}{2}\cdot 0{,}638\,\text{kg}\cdot\left(0{,}60\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0{,}774\,\text{m}} = 0{,}2228\,\text{N} \approx 0{,}22\,\text{N}.$$

Tehtävä 7.22.

a) Newtonin II laki ilmenee mittauksessa siinä, että kappaleiden nopeudet muuttuvat ja kappaleet ovat tällöin kiihtyvässä liikkeessä voiman vaikutuksesta.

Newtonin III laki ilmenee törmäyshetkellä, jolloin vaunut aiheuttavat joka hetki toisiinsa yhtä suuret, mutta vastakkaissuuntaiset voimat.

Newtonin I laki ilmenee ennen törmäystä ja törmäyksien jälkeen, sillä tällöin kappaleet etenevät vakionopeuksilla, kun niihin ei vaikuta liikkeen suunnassa voimia.

b) Nopeuden kuvaajan perusteella vaunuun 1 vaikuttava impulssi on I_1 = 0,3098 Ns ja vaunuun 2 vaikuttava impulssi I_2 = 0,3005 Ns. Vaunun 1 nopeuden muutos nopeuden kuvaajan perusteella on

$\Delta v_1 = 0{,}04\,\text{m/s} - (-0{,}36\,\text{m/s}) = 0{,}40\,\text{m/s}.$

Vaunun 2 nopeuden muutos $\Delta v_2 = (0{,}67 + 0{,}39)\,\text{m/s} = 1{,}06\,\text{m/s}.$

Tarkastellaan törmäyksiä impulssiperiaatteella

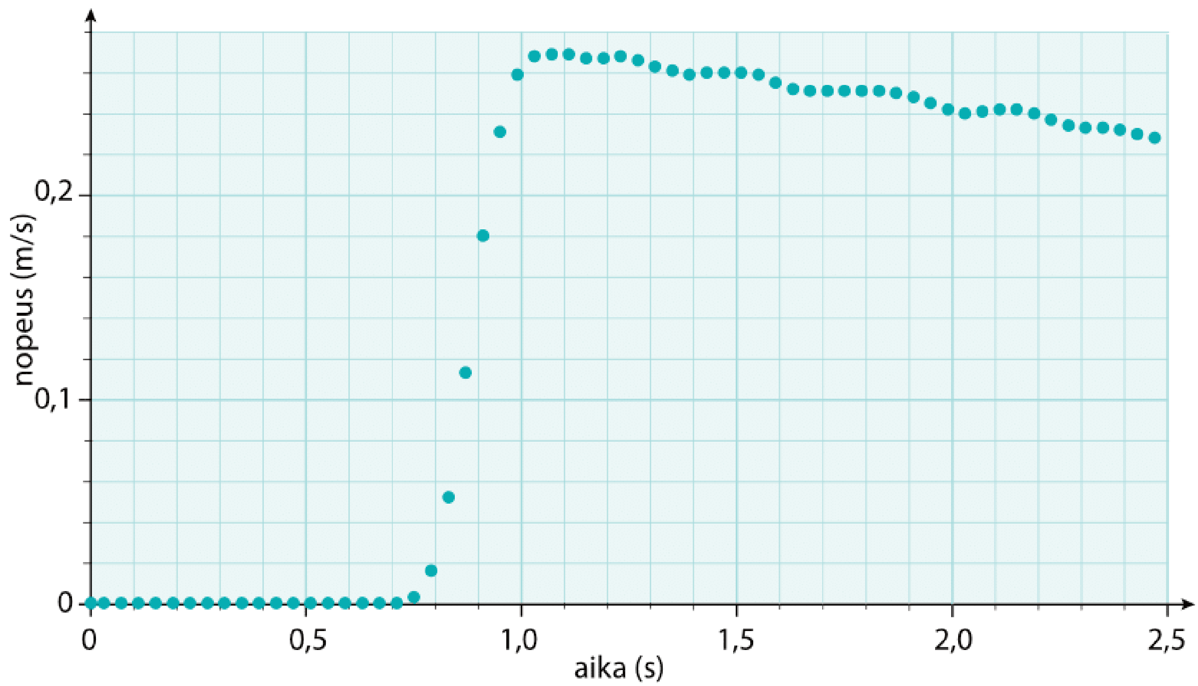
$I_1 = m_1 \Delta v_1$ ja
$I_2 = m_2 \Delta v_2.$

Vaunujen massat ovat

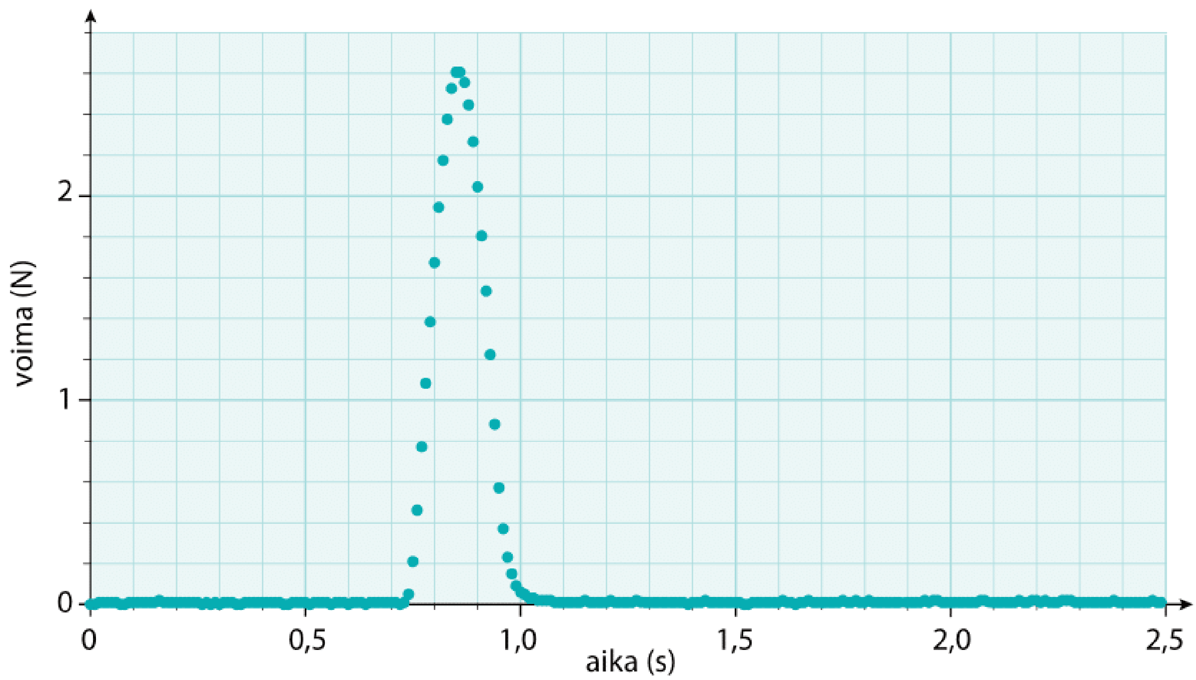
$$m_1 = \frac{I_1}{\Delta v_1} = \frac{0{,}3098\,\text{Ns}}{0{,}40\,\text{m/s}} = 0{,}7745\,\text{g} \approx 770\,\text{g}$$
$$m_2 = \frac{I_2}{\Delta v_2} = \frac{0{,}3005\,\text{Ns}}{1{,}06\,\text{m/s}} = 0{,}283\,\text{g} \approx 280\,\text{g}.$$

Tehtävä 7.23.

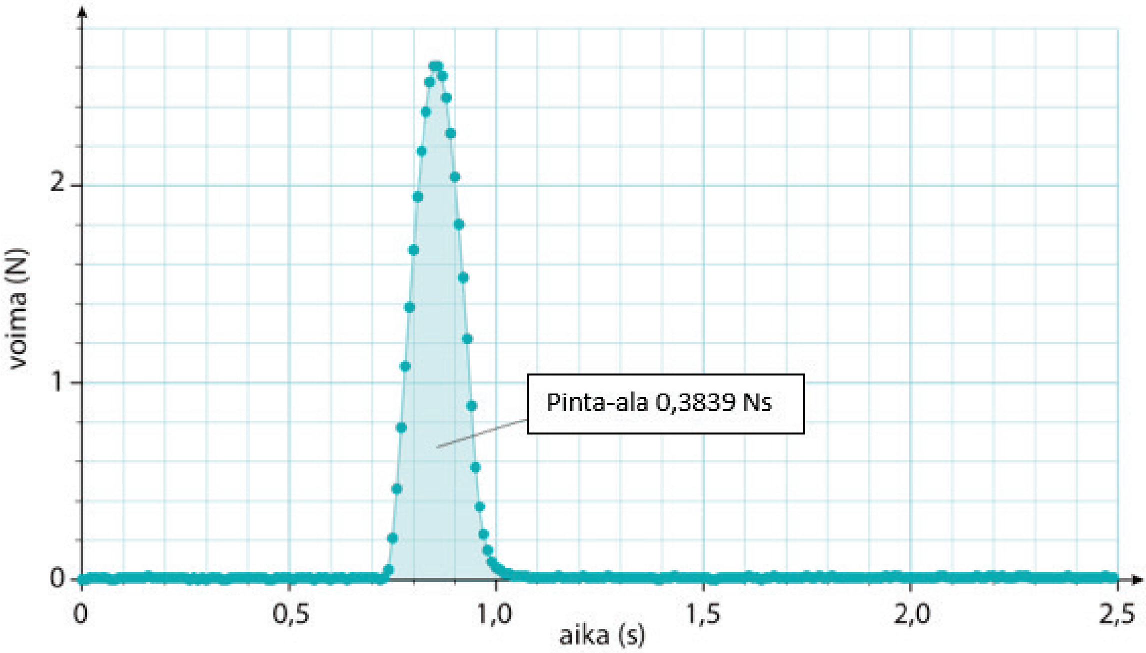
a) Esitetään mittaustulokset (t, v)-koordinaatistossa.



Esitetään mittaustulokset (t, F)-koordinaatistossa.



b) Käden tukivoiman vaunuun kohdistama impulssi saadaan (t, F)-koordinaatiston kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään pinta-ala.



Käden vaunuun kohdistama impulssi on
$I = 0{,}3839 \text{ Ns} \approx 0{,}38 \text{ Ns}$.

c) Kun kädellä lyötiin vaunua, aiheutti käden tukivoima vaunuun impulssin, jolloin vaunun liikemäärä muuttui ja samalla myös vaunun nopeus muuttui. (*t, v*)-koordinaatiston kuvaajan perusteella vaunun nopeus lyönnin jälkeen on v = 0,268 m/s.

Impulssiperiaatteen mukaan impulssi aiheuttaa liikemäärän muutoksen. Vaunu oli alussa paikallaan, jolloin alussa vaunun liikemäärä oli nolla.

$$I = \Delta p$$

$$I = mv.$$

Impulssi saadaan b)-kohdan mukaan, jolloin vaunun massa on

$$m = \frac{I}{v} = \frac{0{,}3839\,\mathrm{Ns}}{0{,}268\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1{,}432\,\mathrm{kg} \approx 1{,}43\,\mathrm{kg}.$$

Tehtävä 7.24.

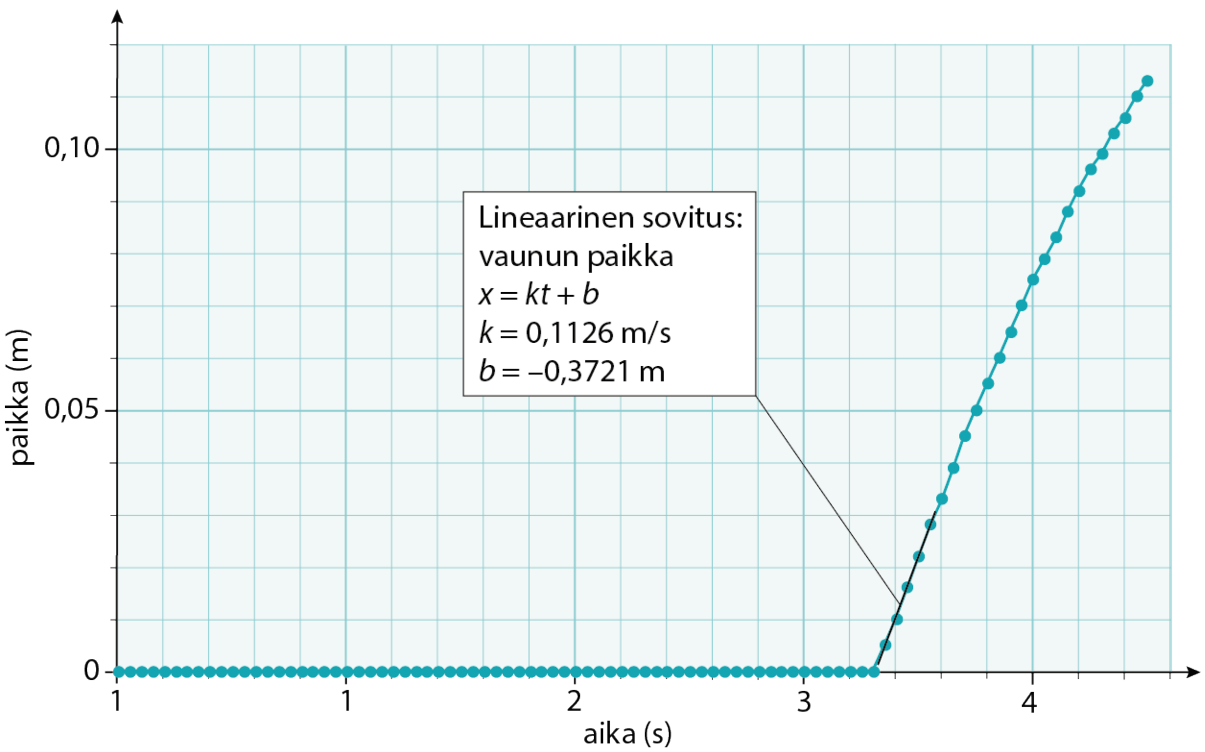
kuminuolen massa $m_1 = 3{,}1$ g

vaunun massa $m_2 = 417{,}7$ g

Tarkastellaan kuminuolen ja vaunun törmäystä, jolloin liikemäärä säilyy. Kuminuolen liikemäärä alussa on yhtä suuri kuin kuminuolen ja vaunun liikemäärä törmäyksen jälkeen. Tällöin

$m_1 v = (m_1 + m_2)u$.

Määritetään vaunun ja kuminuolen yhteinen nopeus u törmäyksen jälkeen paikan kuvaajalle törmäyshetken jälkeen laaditun tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta.



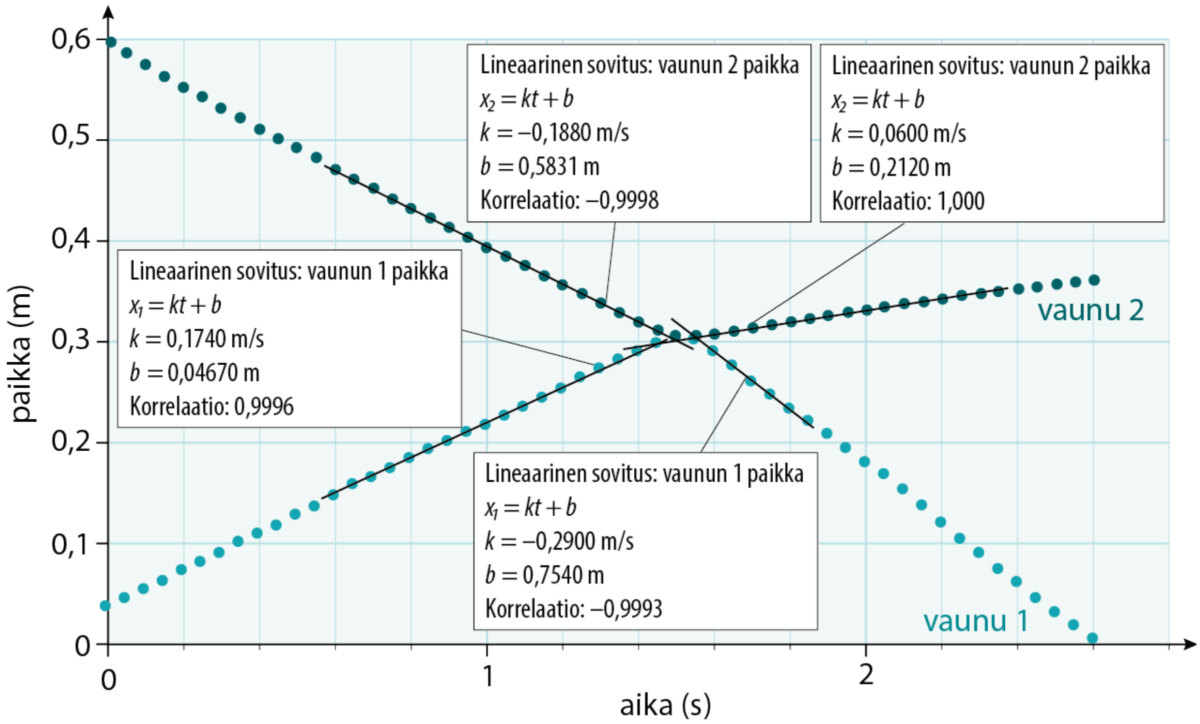
Vaunun ja nuolen yhteinen nopeus heti törmäyksen jälkeen on u = 0,1126 m/s.

Ratkaistaan kuminuolen nopeus

$$v = \frac{(m_1 + m_2)u}{m_1} = \frac{(0{,}4177\,\text{kg} + 0{,}0031\,\text{kg}) \cdot 0{,}1126\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}0031\,\text{kg}} = 15{,}2845\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehtävä 7.25.

a) Nopeus saadaan (t, x)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Määritetään vaunujen nopeudet ennen ja jälkeen törmäyksen.



Vaunun 1 nopeus ennen törmäystä $v_1 = 0{,}174$ m/s

Vaunun 2 nopeus ennen törmäystä $v_2 = -0{,}188$ m/s

Vaunun 1 nopeus törmäyksen jälkeen $u_1 = -0{,}290$ m/s

Vaunun 2 nopeus törmäyksen jälkeen $u_2 = 0{,}060$ m/s

b) Vaunun 1 massa m_1 = 0,606 kg

Vaunun 2 massa m_2 = 1,126 kg

Kimmoisassa törmäyksessä liikemäärä ja liike-energia säilyvät. Siten ennusteen mukaan vaunujen kokonaisliikemäärä ja kokonaisliike-energia ovat samat ennen ja jälkeen törmäyksen.

Määritetään liikemäärien ja liike-energioiden summat ennen ja jälkeen törmäyksen. Liikemäärien summa ennen törmäystä, kun vaunun 1 suunta on positiivinen

$$\begin{aligned}\Sigma p_{\mathrm{a}} &= m_1 v_1 - m_2 v_2\\ &= 0{,}606\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}174\,\mathrm{m/s} - 1{,}126\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}188\,\mathrm{m/s}\\ &= -0{,}106\,244\,\mathrm{kgm/s} \approx -0{,}11\,\mathrm{kgm/s}.\end{aligned}$$

Liikemäärä törmäyksen jälkeen edellinen suunta huomioiden

$$\begin{aligned}\Sigma p_{\mathrm{l}} &= -m_1 u_1 + m_2 u_2\\ &= -0{,}606\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}290\,\mathrm{m/s} - 1{,}126\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}060\,\mathrm{m/s}\\ &= -0{,}108\,18\,\mathrm{kgm/s} \approx -0{,}11\,\mathrm{kgm/s}.\end{aligned}$$

Liike-energia ennen törmäystä

$$\begin{aligned}\Delta E_{k,\mathrm{a}} &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\\ &= \frac{1}{2}\cdot 0{,}606\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}174\,\mathrm{m/s})^2 + \frac{1}{2}\cdot 1{,}126\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}180\,\mathrm{m/s})^2\\ &= 0{,}0274\,148\,\mathrm{J} \approx 27{,}4\,\mathrm{mJ}.\end{aligned}$$

Liike-energia törmäyksen jälkeen

$$\begin{aligned}\Delta E_{k,\mathrm{l}} &= \frac{1}{2}m_1u_1^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2u_2^{\ 2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 0{,}606\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}290\,\mathrm{m/s})^2 + \frac{1}{2}\cdot 1{,}126\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}060\,\mathrm{m/s})^2\\ &= 0{,}0275\,091\,\mathrm{J} \approx 27{,}5\,\mathrm{mJ}.\end{aligned}$$

Mittaustarkkuuden rajoissa liikemäärät ja liike-energiat ovat ennusteen mukaiset eli vaunujen liikemäärät ja liike-energiat säilyvät törmäyksessä.

Tehtävä 7.26.

korkeuden muutos h = 0,136 m

luodin massa m_1 = 0,91 g

luodin massa m_2 = 105,2 g

a) Luodin ja puupalikan potentiaalienergian muutos

$$\begin{aligned} E_p &= (m_1 + m_2)gh \\ &= (0{,}91 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} + 105{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}136\,\text{m} \\ &= 0{,}141\,5677\ \text{J} \approx 140\,\text{mJ}. \end{aligned}$$

b) Mekaanisen energian säilymislain mukaan, kun lähtökorkeus asetetaan potentiaalienergian nollatasoksi ja korkeimmassa kohdassa liike-energia on nolla

$$\begin{aligned} E_k &= E_p \\ \frac{1}{2}mv^2 &= mgh \\ \frac{1}{2}v^2 &= gh. \end{aligned}$$

Palikan nopeus heti osuman jälkeen

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}136\,\text{m}} = 1{,}6334\,\text{m/s} \approx 1{,}6\,\text{m/s}.$$

c) Tarkastellaan luodin törmäystä palikkaan liikemäärän säilymislailla. Aluksi palikka on paikoillaan. Luodin sekä palikan ja luodin nopeudet ennen ja jälkeen törmäyksen ovat samat. Liikemäärä säilyy

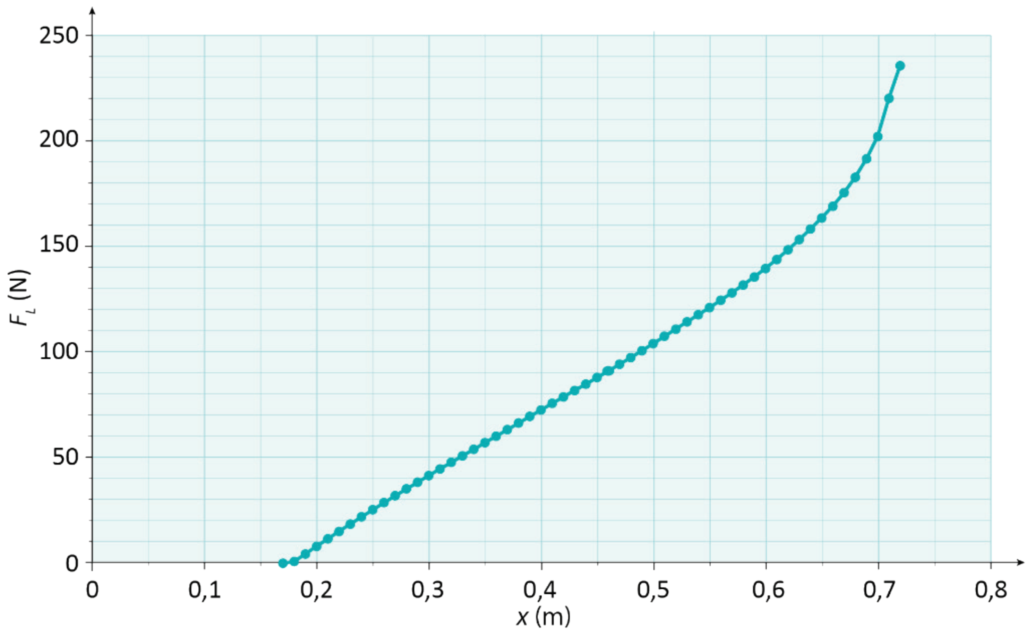
$$p_{\text{luoti}} = p_{\text{luoti ja palikka}}$$
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2.$$

Luodin nopeus ennen törmäystä b-kohdan tuloksen mukaan

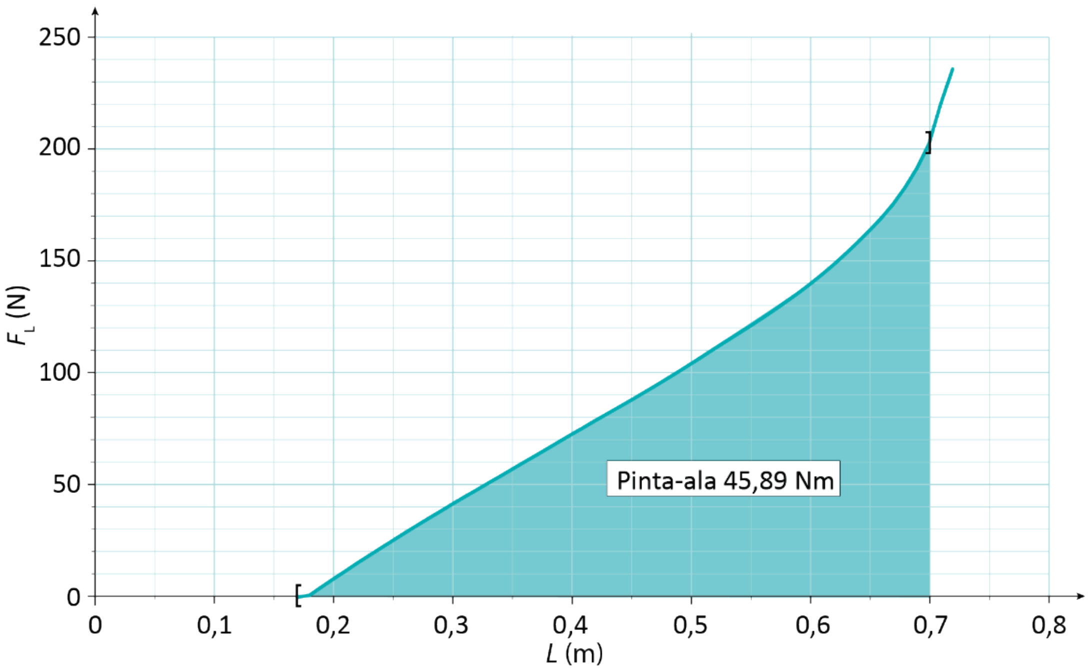
$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) v_2}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2)\sqrt{2gh}}{m_1}$$
$$= \frac{(0{,}91\,\text{g} + 105{,}2\,\text{g})}{0{,}91\,\text{g}} \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}136\,\text{m}} = 190{,}47\,\text{m/s} \approx 190\,\text{m/s}.$$

Tehtävä 7.27.

a) Esitetään voima vetopituuden funktiona.



Työ määritetään kuvaajan ja vaaka-akselin rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta.



Kun jousi venytettiin 0,70 m vetopituuteen asti, teki voima työn 45,89 Nm ≈ 46 J.

b) voiman tekemä työ jousen jännityksessä W = 45,89 J

nuolen massa
$m = 490 \cdot 64{,}798\,91 \cdot 10^{-6}\ \text{kg} = 31{,}751\,47 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}$

Nuoli saa suurimman mahdollisen nopeutensa silloin, kun jouseen tehdään työtä ja jousen potentiaalienergia suurenee ja kun varastoitunut potentiaalienergia muuntuu kokonaisuudessaan nuolen liike-energiaksi. Tällöin nuolen liike-energian muutos on yhtä suuri kuin jousen tekemä työ. Työperiaatteen mukaisesti $\Delta E_\text{k} = W$.

Koska alussa nuolen nopeus on nolla, myös sen liike-energia on nolla. Liike-energian muutos on yhtä suuri kuin nuolen liike-energia lopussa. Ratkaistaan liike-energian yhtälöstä $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2$ nuolen nopeus

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45{,}89\ \text{J}}{31{,}751\,47 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}} = 53{,}764\,07\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 54\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehtävä 7.28.

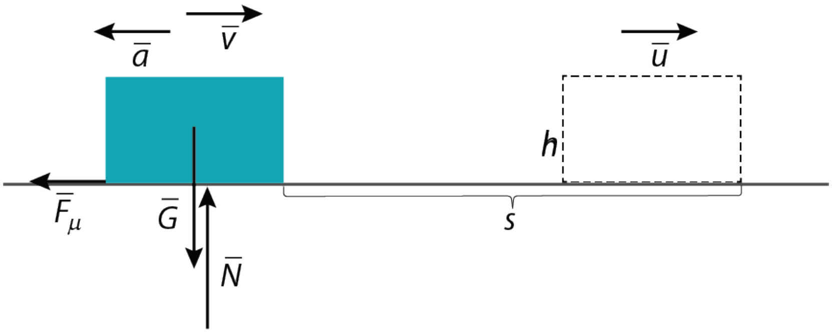
auton nopeus $v = 65\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{65}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

renkaiden ja tien välinen kitkakerroin oli μ = 0,60

auton massa tyhjänä $m_{\text{tyhjä}}$ = 1 250 kg

auton massa täyteen lastattuna $m_{\text{täysi}}$ = 1 870 kg.

a) Laaditaan auton voimakuvio, kun oletetaan, että ilmanvastusta ei ole.



$\bar{G}$ = auton paino

$\bar{N}$ = tienpinnan tukivoima

$\bar{F}_\mu$ = liukukitka

Kitkan tekemä työ muuttaa auton liike-energiaa, ja lopussa auton liike-energia on nolla. Liukukitkalle voidaan kirjoittaa $F_\mu = \mu N = \mu mg$, sillä tie on vaakasuora, ja $N = G$. Jarrutusmatka saadaan työperiaatteella.

$$W_{\mu} = \Delta E_{\mathrm{k}}$$

$$-F_{\mu}\Delta s = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

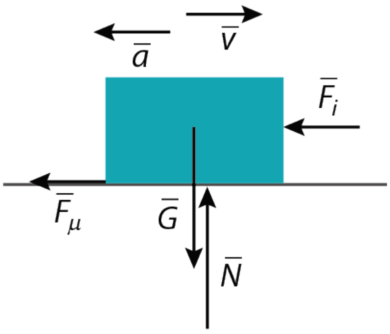
$$\mu N\Delta s = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\mu \cancel{m} g\Delta s = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$\Delta s = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{\left(\frac{65}{3{,}6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 0{,}60\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 27{,}693\ \mathrm{m} \approx 28\ \mathrm{m}$$

Jarrutusmatkan kaavasta supistuu massa pois, joten matka ei riipu auton massasta, vaan on molemmille autoille sama.

b) Laaditaan auton voimakuvio, kun ilmanvastus huomioidaan:



$\bar{G}$ = auton paino

$\bar{N}$ = tienpinnan tukivoima

$\bar{F}_\mu$ = liukukitka

$\bar{F}_{\mathrm{i}}$ = ilmanvastus

Selvitetään jälleen jarrutusmatka työperiaatteella. Nyt liukukitkan ja ilmanvastuksen tekemä työ muuttaa auton liike-energiaa.

$$W_\mu + W_{\mathrm{i}} = \Delta E_{\mathrm{k}}$$

$$-F_\mu \Delta s - W_{\mathrm{i}} = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$-\mu N \Delta s - W_{\mathrm{i}} = -\frac{1}{2}mv^2$$

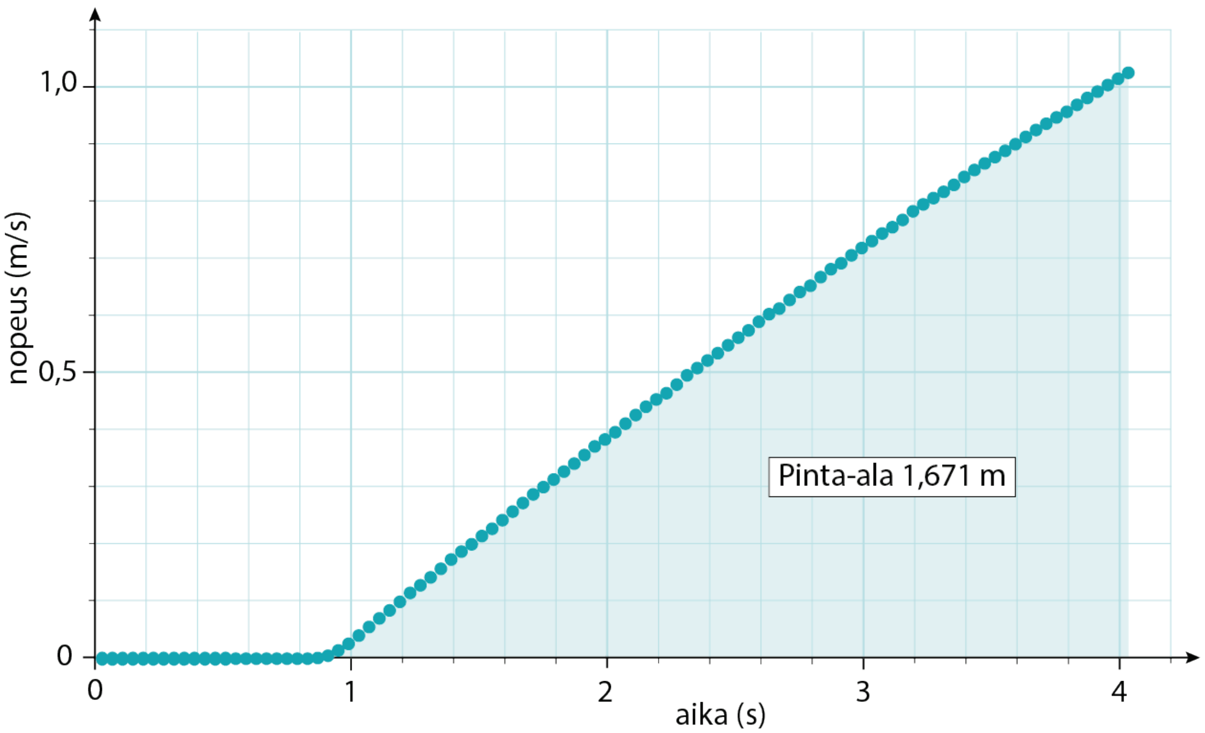
$$\mu mg \Delta s = \frac{1}{2}mv^2 - W_{\mathrm{i}}$$

$$\Delta s = \frac{\cancel{m}v^2}{2\mu \cancel{m}g} - \frac{W_{\mathrm{i}}}{\mu mg} = \frac{v^2}{2\mu g} - \frac{W_{\mathrm{i}}}{\mu mg}$$

Jarrutusmatkan kaavassa viimeinen termi on sitä pienempi, mitä suurempi massa on. Näin jarrutusmatka kasvaa massan kasvaessa. Jarrutusmatka on pidempi täyteen lastatulle autolle.

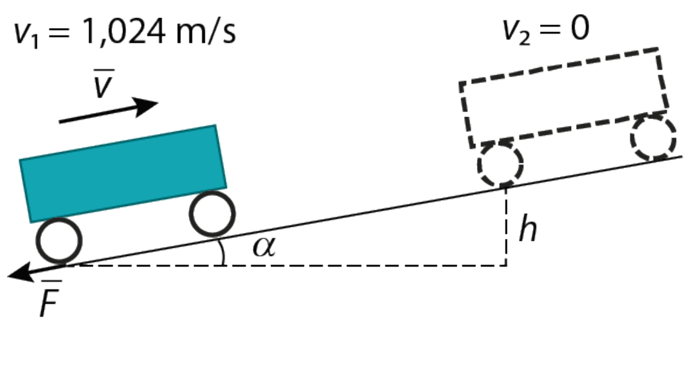
Tehtävä 7.29.

a)



Vaunun kulkema matka saadaan (t, v)-koordinaatiston ja aika-akselinrajoittaman alueen fysikaalisena pinta-alana.

Määritetään pinta-ala s = 1,671 m ≈ 1,67 m.



b) vaunun massa m = 1,315 kg

vaunun lähtökorkeus h = 8,4 cm

Tarkastellaan vaunua mekaniikan energiaperiaatteella. Sovitaan vaunun potentiaalienergian nollatasoksi kaltevan tason alapää. Paikaltaan lähtevän vaunun potentiaalienergia muuntuu vastusvoimien tekemäksi työksi ja vaunun liike-energiaksi

$$\cancel{E_{ka}} + E_{pa} + W = E_{kl} + \cancel{E_{pl}}$$
$$E_{pa} + W = E_{kl}$$
$$mgh + (-Fs) = \frac{1}{2}mv^2.$$

Vaunun kulkema matka on a-kohdan mukaan s = 1,671 m ja vaunun nopeus tason alaosassa saadaan kuvaajasta, v = 1,024 m/s.

Vaunun liikettä vastustavan keskimääräisen voiman suuruus on

$$Fs = mgh - \frac{1}{2}mv^2$$
$$F = \frac{mgh - \frac{1}{2}mv^2}{s}$$
$$= \frac{1{,}315\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}084\,\text{m} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}315\,\text{kg} \cdot \left(1{,}024\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1{,}671\,\text{m}}$$
$$= 0{,}235\,89\,\text{N} \approx 0{,}24\,\text{N}.$$

c) Tason kaltevuuskulma α = 4,5°

Tarkastellaan vaunua mekaniikan energiaperiaatteella. Vaunun liikettä vastustavan voimien tekemä työ muuttaa vaunun liike-energiaa. Osa liike-energiasta muuntuu myös vaunun potentiaalienergiaksi,

$$E_{ka} + W = E_{\mathrm{pl}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-Fs) = mgh$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - Fs = mgh.$$

Vaunun korkeus voidaan esittää vaunun kulkeman matkan avulla $h = s \cdot \sin\alpha$.

Mekaniikan energiaperiaate saadaan nyt muotoon

$$\frac{1}{2}mv^2 - Fs = mgs\sin\alpha.$$

Vaunun liikettä vastustava voima ja nopeus saadaan tehtävien aiemmista kohdista. Vaunun ylämäkeen kulkema matka on

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs\sin\alpha + Fs$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = s(mg\sin\alpha + F)$$

$$s = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg\sin\alpha + F} = \frac{mv^2}{2(mg\sin\alpha + F)}$$

$$= \frac{1{,}315\,\text{kg} \cdot (1{,}024\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2(1{,}315\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 4{,}5^\circ + 0{,}235\,89\,\text{N})}$$

$$= 0{,}552\,\text{m} \approx 55\ \text{cm}.$$

Tehtävä 7.30.

a) Tarkastellaan punnuksen putoamista mekaanisen energian säilymislailla. Oletetaan, että punnus putosi vapaasti ilmassa. Punnus lähti aluksi paikaltaan, jolloin punnuksen nopeus ja liike-energia alussa olivat nollat. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi taso, joka on putoamismatkan verran pudotuskohtaa alempana. Mekaanisen energian säilymislain mukaan

$$E_{p,\mathrm{a}} = E_{k,\mathrm{l}}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Yhtälön perusteella punnuksen nopeus v on suoraan verrannollinen putoamismatkan h neliöjuureen eli

$v \sim \sqrt{h}$.

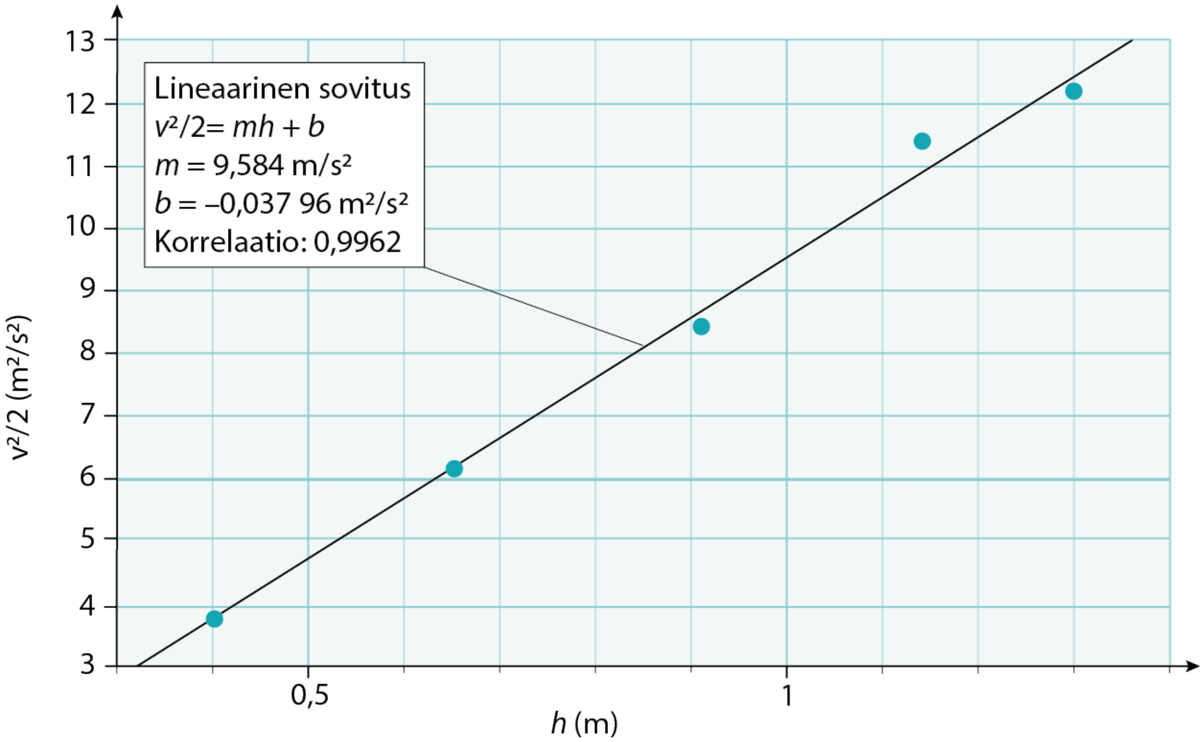
b) Edellisen kohdan perusteella punnuksen nopeuden ja putoamismatkan välillä on voimassa

$$\frac{1}{2}v^2 = gh.$$

Lasketaan uusi sarake $\frac{1}{2}v^2$.

h **(m)**	***v*** **(m/s)**	***v***^{2}**/2 (m^2/s^2)**
0,40	2,76	3,809
0,65	3,52	6,195
0,91	4,11	8,446
1,14	4,77	11,376
1,30	4,93	12,152

Putoamiskiihtyvyys saadaan (h, $v^2/2$)-koordinaatiston mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Laaditaan kuvaaja ja määritetään sovitesuoran fysikaalinen kulmakerroin.



Putoamiskiihtyvyys g = 9,584 m/s^2 ≈ 9,58 m/s^2.

c) Mittauksessa mitattiin punnuksen putoamismatkaa ja nopeutta. Mittauksen virhe siis aiheutuu putoamismatkan ja punnuksen nopeuden mittaamisessa. Lisäksi punnus osui aina joissakin kohdissa putken reunaan, jolloin punnus ei ollut vapaassa putoamisliikkeessä. Mittauksen virhettä voidaan pienentää mittaamalla useita kertoja aina samalta putoamiskorkeudelta ja ottamalla näistä tuloksista keskiarvo. Mittaus on kuitenkin toistettava kokeen tavoin eri putoamiskorkeudelta. Putoamiskiihtyvyyden arvo on teoreettista arvoa pienempi. Tulos osittain selittyy sillä, että punnus osuu aina välillä putkeen, jolloin punnus ei putoa vapaasti.

Tehtävä 7.31.

a) Työn päävaiheet:

Merkitetään lattialle teipinpalalla kohta, jossa liukumaan lähtenyt kirja irtoaa kädestä. Otetaan sekuntikello toiseen käteen ja asetetaan kirja. Työnnetään kirja liukumaan lattiaa pitkin ja lopetetaan työntö teipin kohdalla. Kun kirja irotaa kädestä, käynnistetään sekuntikello. Pysäytetään sekuntikellon samalla hetkellä kuin kirja pysähtyy. Mitataan kirjan liukuma matka metrimitalla. Toistetaan työ liu'uttamalla kirjaa eri lähtönopeuksilla. Mitataan kullakin kerralla liukumatka ja -aika.

Kun kirja liukuu lattiaa pitkin, lattian ja kirjan välinen liukukitka tekee työtä ja muuttaa liike-energiaa. Tällöin työenergiaperiaatteella kitkan tekemä työ on yhtä suuri kuin kirjan liike-energian muutos $W = \Delta E_\mathrm{k}$. Liu'un lopussa kirjan nopeus on nolla, jolloin myös kirjan liike-energia on lopussa nolla. Tällöin kitkan tekemä työn on yhtä suuri kuin kirjan liike-energia kädestä irtoamisen jälkeen.

$$F_\mu s = \frac{1}{2} m v_0{}^2,$$

jossa F_μ on lattian ja kirjan välinen liukukitka, s on liukumatka, m on kirjan massa ja v_0 kirjan nopeus, kun kirja irtoaa kädestä.

Kun kirja liukuu lattiaa pitkin, kirja on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä. Liukumatkan jälkeen kirjan nopeus on nolla, jolloin $0 = v_0 - at$. Kirjan kiihtyvyys on tällöin

$$a = \frac{v_0}{t}.$$

Kirjan liukumatkalla tasaisesti hidastuvassa liikkeessä on voimassa

$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$. Sijoitetaan kiihtyvyys ja saadaan kirjan alkunopeus

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}\frac{v_0}{t}t^2 = \frac{v_0 t}{2}$$

$$v_0 = \frac{2s}{t}.$$

Liukukitkalle on voimassa $F_\mu = \mu N$, jossa μ on lattian ja kirjan välinen liukukitkakerroin. Lattian tukivoimalle vaakasuoralla pinnalla on voimassa $N = G = mg$. Sijoitetaan edelliset yhtälöt työenergiaperiaatteesta saatuun lausekkeeseen

$$\mu \cancel{m} gs = \frac{1}{2}\cancel{m}\left(\frac{2s}{t}\right)^2$$

$$\mu gs = \frac{1}{2}\frac{4s^2}{t^2}$$

$$\mu g = \frac{2s}{t^2}$$

$$2s = \mu g t^2.$$

Koska liukumatka on suoraan verrannollinen liukuajan neliöön, laaditaan mittauksista (gt^2, $2s$)-koordinaatistoon kuvaaja ja sovitetaan mittauspisteisiin suora. Sovitesuoran fysikaalinen kulmakerroin on kirjan ja lattian välinen liukukitkakerroin.

b) Mittauksen mittausvirhettä syntyy liukumatkan ja liukuajan määrittämisessä. Mitä pidempi kirjan liuku on, sitä pienempi on kirjan liukuajan ja liukumatkan mittauksessa tapahtunut mittausvirhe. Kirja pitää liu’uttaa mahdollisimman suoraviivaisesti.

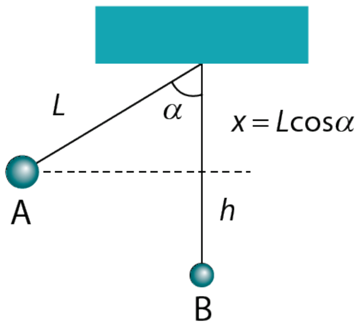
Tehtävä 7.32.

pallon A massa m_A = 175 g

pallon B massa m_B = 35 g

Ennen törmäystä:

Merkitään ripustuslangan pituutta L. Kun pallo poikkeutetaan kulmaan α, se nousee $h = L - x = L - L\cos\alpha = L(1 - \cos\alpha)$ korkeammalla kuin pallon radan alin kohta.



Oletetaan, että ilmanvastus on tilanteessa merkityksetön. Kun pallo nostetaan korkeudelle h ja päästetään heilahtamaan ilman alkunopeutta, pallon mekaaninen energia säilyy. Mekaanisen energian säilymislain avulla pallon A nopeudeksi ennen törmäystä saadaan

$$\cancel{m_A} gh = \frac{1}{2}\cancel{m_A} v_A^2$$

$$gL(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}v_A^2$$

$$v_A^2 = 2gL(1-\cos\alpha)$$

$$v_A = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}.$$

Törmäyksen jälkeen:

Myös törmäyksen jälkeen voidaan olettaa pallojen mekaanisen energian säilyvän.

Koska pallo A heilahtaa 38°:een kulmaan, se nousee korkeudelle $L(1 - \cos\beta)$, jossa $\beta = 38°$. Mekaanisen energian säilymislaista saadaan pallon A nopeudelle törmäyksen jälkeen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cancel{m_A}u_{\mathrm{A}}^2 &= \cancel{m_A}gL(1-\cos\beta) \\
\frac{1}{2}u_{\mathrm{A}}^2 &= gL(1-\cos\beta) \\
u_{\mathrm{A}}^2 &= 2gL(1-\cos\beta) \\
u_{\mathrm{A}} &= \sqrt{2gL(1-\cos\beta)}.
\end{aligned}$$

Koska pallo B heilahtaa 90°:een kulmaan, se nousee korkeudelle L. Mekaanisen energian säilymislaista saadaan pallon B nopeudelle törmäyksen jälkeen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cancel{m_B}u_{\mathrm{B}}^2 &= \cancel{m_B}gL \\
\frac{1}{2}u_{\mathrm{B}}^2 &= gL \\
u_{\mathrm{B}} &= \sqrt{2gL}.
\end{aligned}$$

Törmäyksessä:

Pallojen törmäyksessä liikemäärä säilyy, joten $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$. Pallot liikkuvat tilanteessa oikealle, joten valitaan suunta oikealle positiiviseksi. Kun huomioidaan suunnat, saadaan $m_A v_A = m_A u_A + m_B u_B$. Sijoitetaan tähän edellä määritetyt pallojen nopeudet.

$$m_A\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)} = m_A\sqrt{2gL(1-\cos\beta)} + m_B\sqrt{2gL} \quad \|:\sqrt{2gL}$$

$$m_A\sqrt{(1-\cos\alpha)} = m_A\sqrt{(1-\cos\beta)} + m_B \quad \|:m_A$$

$$\sqrt{(1-\cos\alpha)} = \sqrt{(1-\cos\beta)} + \frac{m_B}{m_A} \quad \|(\ )^2$$

$$1-\cos\alpha = \left(\sqrt{(1-\cos\beta)} + \frac{m_B}{m_A}\right)^2$$

$$\cos\alpha = 1-\left(\sqrt{(1-\cos\beta)} + \frac{m_B}{m_A}\right)^2$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(1-\left(\sqrt{(1-\cos\beta)} + \frac{m_B}{m_A}\right)^2\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(1-\left(\sqrt{(1-\cos 38^\circ)} + \frac{35\,\text{g}}{175\,\text{g}}\right)^2\right) = 55{,}678^\circ \approx 56^\circ$$

Kulman α suuruus on 56°.

8 Jaksollinen liike

Harjoittele

Tehtävä 8.1.

Oikeat vastaukset:

a) A

b) B

c) C

d) B

e) A

f) B

g) A

h) A

i) C

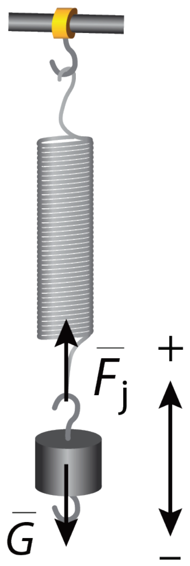
j) C

k) C

Tehtävä 8.2.

ripustettava massa $m_1 = 0{,}370$ kg

jousen venymä punnuksella $x_1 = 0{,}014$ m



$\overline{F}_j$ = jousivoima

$\overline{G}$ = punnuksen paino

a) jousen venymä hauen tapauksessa x_2 = 0,068 m

Määritetään ensin jousen jousivakio. Kun jouseen ripustetaan punnus, jousi asettuu tasapainotilaan ja Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Kun otetaan suuntasopimus huomioon, niin

$$\begin{aligned} F_\mathrm{j} - G_1 &= 0 \\ kx_1 &= m_1 g. \end{aligned}$$

Jousen jousivakioksi saadaan

$$k = \frac{m_1 g}{x_1} \left(= \frac{0{,}370\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}014\,\mathrm{m}} = 259{,}264\,\mathrm{N/m}\right).$$

Kun jouseen ripustettiin hauki, jousi ja hauki asettuivat tasapainoon. Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituna

$$\begin{aligned} F_\mathrm{j} - G_2 &= 0 \\ kx_2 &= m_2 g. \end{aligned}$$

Hauen massa on

$$m_2 = \frac{kx_2}{g} = \frac{m_1 g x_2}{x_1 g} = \frac{m_1 x_2}{x_1} = \frac{0{,}370\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}068\,\mathrm{m}}{0{,}014\,\mathrm{m}} = 1{,}797\,\mathrm{kg} \approx 1{,}8\,\mathrm{kg}.$$

b) ahvenen massa m = 100 g

Lasketaan jousen venymä tasapainotilanteessa. Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituna

$$F_\mathrm{j} - G = 0$$
$$kx = mg$$
$$x = \frac{mg}{k} = \frac{0{,}100\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{259{,}264\,\mathrm{N/m}} = 0{,}00\,378\,\mathrm{m} \approx 3{,}8\,\mathrm{mm}.$$

c) jousen pituuden muutos venytyksessä x_2 = 0,027 m

Lasketaan venymän avulla jousen potentiaalienergia

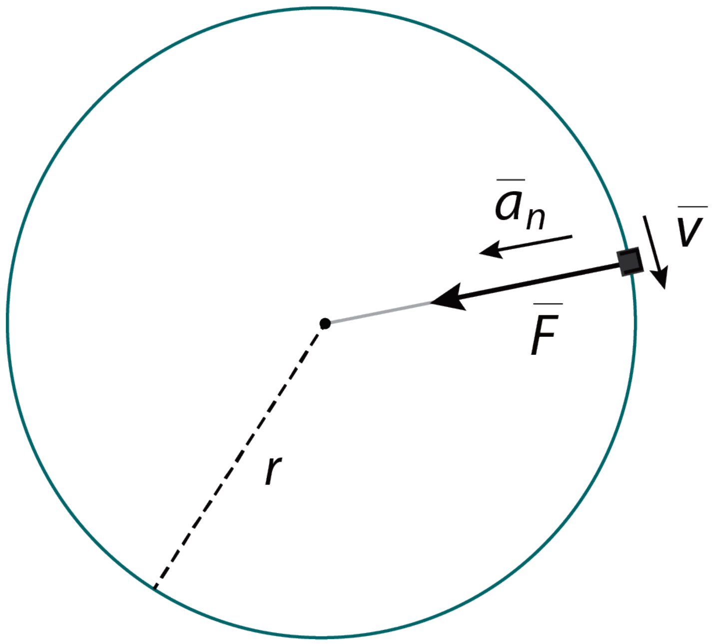
$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx_2^2$$
$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 g}{x_1}x_2^2 = \frac{1}{2}\frac{0{,}370\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}014\,\mathrm{m}}\left(0{,}027\mathrm{m}\right)^2$$
$$E_\mathrm{p} = 0{,}009\,450\,1832\,\mathrm{J} \approx 9{,}45\,\mathrm{mJ}.$$

Tehtävä 8.3.

ympyräradan säde r = 18 m

haluttu kiihtyvyys a_n = 7,8 g

Kyseessä on tasainen ympyräliike. Piirretään voimakuvio.



$\overline{F}$ = voima, joka pitää kosmonautin radalla

Tasaisessa ympyräliikkeessä kosmonauttiin aiheutuu voima $\overline{F}$, joka pitää kosmonautin ympyräradalla. Newtonin II lain mukaisesti säteen suunnassa suunnat huomioituina

$$F = ma_n = m\frac{v^2}{r}$$

Haluttu normaalikiihtyvyyden arvo on 7,8 kertaa putoamiskiihtyvyys. Ratkaistaan normaalikiihtyvyyden yhtälöstä ratanopeus.

$$
\begin{aligned}
a_\mathrm{n} &= \frac{v^2}{r} \\
v &= \sqrt{a_\mathrm{n} r} \\
&= \sqrt{7{,}8 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 18\,\mathrm{m}} \\
&= 37{,}112\,\mathrm{m/s} \approx 37\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 8.4.

a) Avaruusaseman pyöriminen aiheuttaa astronautteihin tukivoiman, joka pitää astronautit ympyränmuotoisella radalla. Newtonin II mukaan säteen suunnassa tukivoima aiheuttaa normaalikiihtyvyyden $N = ma_n$.

Jotta saavutetaan painovoiman vaikutusta vastaavat olosuhteet, kappaleisiin kohdistuvan tukivoiman N tulee olla yhtä suuri kuin Maassa. Tukivoiman N suuruus on siis yhtä suuri kuin Maassa vallitseva painovoima G, saadaan kiihtyvyydeksi

$$G = m\frac{v^2}{r}$$

$$\cancel{m}g = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

$$g = \frac{v^2}{r}$$

Astronautti etenee tasaisessa ympyräliikkeessä nopeudella v, jolloin astronautin kulkema matka on $s = vt$. Yhden kierroksen aikana astronautin kulkema matka on $s = 2\pi r$ ja kierrosaika on T. Ratkaistaan kiihtyvyyden yhtälöstä nopeus ja sijoitetaan kierrostaajuus yhtälöön.

$$s = vt \quad \Bigg\| \; v = \sqrt{gr}$$

$$2\pi r = \sqrt{gr}T$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{gr}}{2\pi r}$$

$$n = \frac{\sqrt{\frac{g}{r}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{37\,\mathrm{m}}}}{2\pi} = 0{,}081\,95\ 1/\mathrm{s} \approx 4{,}92 \text{ rpm.}$$

b) Kirjoitetaan astronauttiin vaikuttavan tukivoiman suuruus.

$$N = ma_n$$

$$N = m\frac{v^2}{r}.$$

a-kohdan mukaan nopeus $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$.

Tukivoimaksi saadaan

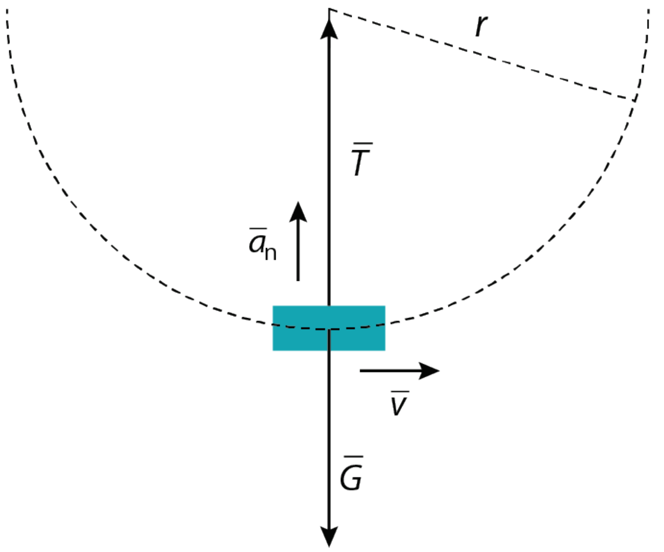
$$N = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}.$$

Tukivoiman suuruus on sitä suurempi, mitä suurempi säde on. Tukivoima on siis sitä pienempi, mitä lähemmäksi avaruusaseman keskustaa astronautti liikkuu.

Tehtävä 8.5.

pyykkinarun ”murtolujuus” m_{max} = 65 kg

Keinujaan vaikuttavat voimat ovat paino ja narujen jännitysvoimat. Laaditaan keinujan voimakuvio.



$\overline{G}$ = keinun ja keinujan yhteinen paino

$\overline{T}$ = narun jännitysvoima

Keinujan liike on ympyräliikettä, jossa keinun Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Ylimmässä asennossa, jos keinuja heilahtaa suurimmillaan 90°:n kulmaan pystysuunnasta, narujen jännitysvoima on nolla. Narujen jännitysvoima on suurimmillaan heilahduksen alimmassa kohdassa, jossa keinujan ratanopeus ja normaalikiihtyvyys ovat suurimmillaan.

Valitaan suunta ylöspäin positiiviseksi ja kirjoitetaan keinujan liikeyhtälö heilahduksen alimmassa kohdassa.

$$2T - G = ma_{\mathrm{n}}$$
$$2T - mg = m\frac{v^2}{r}$$
$$T = \frac{1}{2}\left(mg + m\frac{v^2}{r}\right)$$

Kun oletetaan vastusvoimien tekemä työ tilanteessa hyvin pieneksi, keinujan mekaaninen energia säilyy. Valitaan heilahdusliikkeen alin kohta potentiaalienergian nollatasoksi. Ylimmässä kohdassa keinujalla on vain potentiaalienergiaa, $E_{\mathrm{p}} = mgh$. Alimmassa kohdassa keinujan potentiaalienergia on nolla, ja keinujalla on vain liike-energiaa, $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2$. Mekaanisen energian säilymisestä saadaan

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gh$$
$$v^2 = 2gh = 2gr.$$

Narujen jännitysvoimaksi saadaan alimmassa kohdassa

$$T = \frac{1}{2}\left(mg + m\frac{v^2}{r}\right) = \frac{1}{2}\left(mg + m\frac{2g\cancel{r}}{\cancel{r}}\right) = \frac{1}{2}(mg + 2mg) = \frac{3}{2}mg.$$

Tarkastellaan narun suurinta kuormaa, jolloin
$T = G_{\max} = m_{\max}g.$

Tällöin massa saa olla suurimmillaan

$$m_{\text{max}}g = \frac{3}{2}mg$$

$$m = \frac{2}{3}m_{\text{max}} = \frac{2}{3} \cdot 65\,\text{kg} = 43{,}333\,\text{kg} \approx 43\,\text{kg}.$$

Keinujan ja keinun suurin sallittu yhteismassa on 43 kg.

Tehtävä 8.6.

Maan massa $M = 5{,}9723 \cdot 10^{24}$ kg

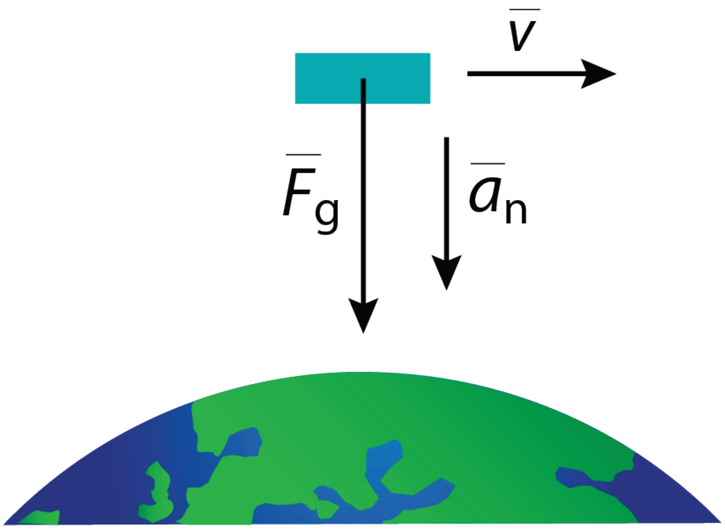
satelliitin korkeus Maan pinnasta $h = 250\,000$ m

Maan säde $R = 6\,371\,000$ m

satelliitin kiertoradan säde
$r = 250\,000 \text{ m} + 6\,371\,000 \text{ m} = 6\,621\,000 \text{ m}$

gravitaatiovakio $\gamma = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$

a) Satelliittiin vaikuttavat voimat



F_g = gravitaatiovoima

b) Satelliitti pysyy ympyräradallaan gravitaatiovoiman $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$ vaikutuksesta. Lasketaan satelliitin nopeus.

Newtonin II lain mukaan

$$F = ma_\mathrm{n}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 5{,}9723 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{6\,621\,000\ \mathrm{m}}} = 7\,759{,}109\ \mathrm{m/s} \approx 7760\ \mathrm{m/s}.$$

c) Satelliitin nopeuden suuruus pysyy vakiona eli $s = vt$.

Kiertoaika Maan ympäri $t = \frac{s}{v}$.

Yhteen kierrokseen kulunut aika.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 6\,628\,137\ \mathrm{m}}{7\,759{,}109 \mathrm{m/s}} = 5\,367{,}344\ \mathrm{s} \approx 5\,370\ \mathrm{s} = 89{,}5\ \mathrm{min}.$$

d) Määritetään kierrosajalle yhtälö.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{\gamma M}{r}}} = \frac{\sqrt{(2\pi r)^2}}{\sqrt{\frac{\gamma M}{r}}} = \sqrt{\frac{(2\pi r)^2}{\frac{\gamma M}{r}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^2}{\frac{\gamma M}{r}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}}.$$

Yhtälöstä huomataan, että jos satelliitti kiertää kauempana Maasta eli jos satelliitin radan säde suurenee, kierrosaika eli jaksonaika kasvaa.

Tehtävä 8.7.

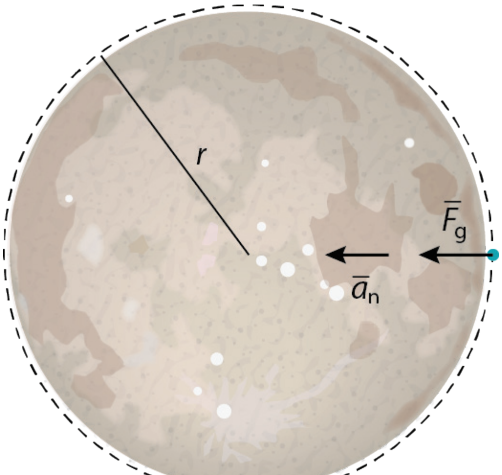
Maan säde R = 6 371 km = 6 371 000 m

Maan massa $M = 5{,}9723 \cdot 10^{24}$ kg

eksoplaneetan säde on R ja eksoplaneetan massa on $\frac{1}{2}M$.

gravitaatiovakio $\gamma = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

Merkitään eksoplaneettaa kiertävän kappaleen massaa m. Newtonin II lain mukaan kappaleen liikeyhtälö ympyräliikkeessä on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$. Kappale päätyy ympyräradalle gravitaatiovoiman vaikutuksesta. Kiihtyvyyden suunta on sama kuin gravitaatiovoiman suunta.



$\overline{F}_{\mathrm{g}}$ = gravitaatiovoima

$$F = ma_{\mathrm{n}}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m} \cdot \frac{1}{2} M}{R^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{R}}$$

$$\frac{1}{2} \gamma \frac{M}{R} = v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{2} \gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{5{,}9723 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{6\,371\,000\,\mathrm{m}}}$$

$$= 5\,593{,}129\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 5\,600\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Kappaleen nopeuden pitäisi olla 5 600 m/s, jotta se päätyisi kiertämään eksoplaneettaa.

Tehtävä 8.8.

a) Jousivakio voidaan määrittää värähtelyn jaksonajan avulla. Jaksonaika voidaan määrittää kuvaajalta.

TAPA 1 Suoraan kuvaajasta lukemalla

Värähtelyn jaksonaika voidaan päätellä kuvaajalta esimerkiksi selvittämällä kahden saman ääriaseman välinen aikaero ja värähtelyjen lukumäärä. Värähtelijä tekee 3 värähdystä aikavälillä 0,44 s – 1,80 s. Värähtelyn jaksonaika on $T = \frac{\Delta t}{N} = \frac{1{,}80\,\text{s} - 0{,}44\,\text{s}}{3} = 0{,}45333\,\text{s} \approx 0{,}45\,\text{s}$

TAPA 2 Sovitefunktion avulla

Värähtelyn taajuus saadaan sovitefunktiosta parametrin B avulla. Taajuudeksi saadaan

$$B = 2\pi f$$

$$f = \frac{B}{2\pi} = \frac{13{,}86}{2\pi}\,\text{Hz} = 2{,}2059\,\text{Hz} \approx 2{,}2\,\text{Hz}.$$

Tämän perusteella värähtelyn jaksonaika on

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{13{,}86}\,\text{s} = 0{,}4533\,\text{s} \approx 0{,}45\,\text{s}.$$

Harmonisen värähtelijän jaksonaika on $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Ratkaistaan tästä jousen jousivakio.

$$T^2 = 4\pi^2 \left(\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

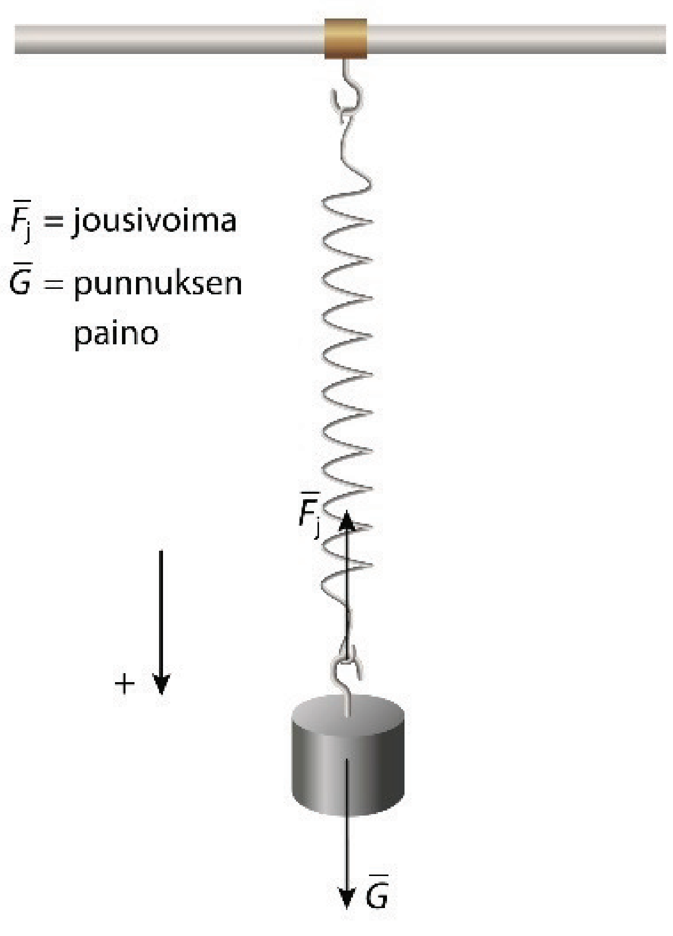
$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}100\,\text{kg}}{(0{,}4533\,\text{s})^2} = 19{,}2127\,\frac{^{\text{m)}}\text{kg}}{\text{s}^2} \approx 19{,}2\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

b) punnuksen massa m = 100 g = 0,100 kg

jousen jousivakio k = 19,2127 N/m

Kun punnus poistetaan, jousen pituus lyhenee saman verran kuin mitä jousi venyy, kun punnus ripustetaan jouseen.

Voimakuvio, kun punnus roikkuu jousessa.



Kun punnus on paikallaan, Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Kun suunta alaspäin valitaan positiiviseksi, saadaan yhtälö $G - F_j = 0$ eli $G = F_j$. Ratkaistaan jousen venymä tästä yhtälöstä.

$$mg = kx$$

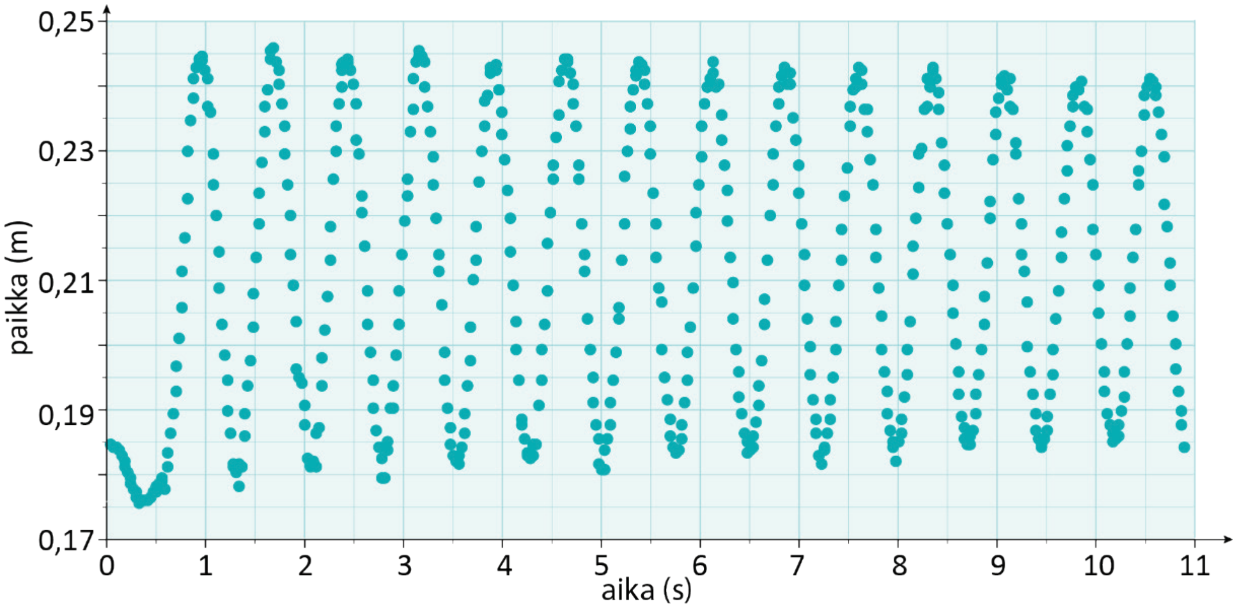
$$x = \frac{mg}{k} = \frac{0{,}100\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{19{,}2127\,\frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0{,}051\,06\,\text{m} \approx 5{,}1\,\text{cm}$$

Kun punnus poistetaan jousesta, jousi lyhenee 5,1 cm.

Tehtävä 8.9.

punnuksen massa m = 0,204 g

a) Esitetään punnuksen paikka eri ajanhetkillä.



Määritetään kuvaajasta kymmeneen värähdykseen kuluneen ajan keskiarvo. Jaksonaika on

$$T = \frac{8{,}357\ \text{s} - 0{,}934\ \text{s}}{10} = 0{,}7423\ \text{s} \approx 0{,}742\ \text{s}.$$

b) punnuksen massa m = 0,204 kg

Punnuksen jaksonajaksi saatiin T = 0,7423 s.

Jousen jousivakio saadaan jaksonajan yhtälöstä

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}204\ \text{kg}}{(0{,}7423\ \text{s})^2} = 14{,}616\,08\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 14{,}6\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

c) Jos jousta poikkeutetaan enemmän tasapainoasemasta, kuvaajan värähtelyn amplitudi suurenee. Amplitudi on punnuksen suurin poikkeama tasapainoasemasta. Värähtelyn taajuuden määrää aina aaltolähde, joten kuvaajan jaksonaika ei muutu, sillä jousivakio ei muutu.

d) Punnuksen suurin nopeus on tasapainoaseman kohdalla. Punnuksen nopeus saadaan paikan kuvaajalle määritetyn tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta. Kun kulmakerroin on suurimmillaan eli paikan kuvaaja on jyrkimmillään, punnuksen nopeus on suurimmillaan. Kuvaajan perusteella tämä tapahtuu aina tasapainoaseman kohdalla.

Tehtävä 8.10.

a) vasemmanpuoleisen vaunun 1 massa m_1 = 0,250 kg

oikeanpuoleisen vaunun 2 massa m_2 = 0,750 kg

jousen jousivakio k = 220 N/m

jousen puristuma x = 4,0 cm = 0,040 m

Kun vaunuja painetaan lähemmäs, vaikuttaa niihin vaakasuunnassa jousivoima.

Vasemmanpuoleiseen vaunuun vaikuttava voima suuntautuu vasemmalle. Myös voiman aiheuttaman kiihtyvyyden suunta on vasemmalle.

Oikeanpuoleiseen vaunuun vaikuttava voima suuntautuu oikealle, ja voima aiheuttaa kiihtyvyyden, jonka suunta on oikealle.

Molempiin vaunuihin kohdistuu yhtä suuret vastakkaissuuntaiset voimat Newtonin III lain mukaisesti. Vaunuille voidaan kirjoittaa liikeyhtälöt Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Jousivoimalle on voimassa $F = kx$, jossa k on jousivakio ja x jousen puristuma. Valitaan suunnat ja vaunujen kiihtyvyyksille saadaan

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{kx}{m_1} = \frac{220\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}040\,\text{m}}{0{,}250\,\text{kg}} = 35{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 35\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ ja}$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{220\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}040\,\text{m}}{0{,}750\ \text{kg}} = 11{,}733\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Voimat ja kiihtyvyydet ovat vastakkaisiin suuntiin, voima työntää vaunuja poispäin toisistaan.

b) Vaunujen nopeuksien suhde voidaan päätellä liikemäärän säilymislaista: $\overline{p}_{\text{alussa}} = \overline{p}_{\text{lopussa}}$.

Valitaan suunta oikealle positiiviseksi. Alussa vaunut ovat paikoillaan ja liikemäärä on nolla, lopussa vaunulla 1 on liikemäärä $p_1 = -m_1v_1$ vasemmalle ja vaunulla 2 $p_2 = m_2v_2$ oikealle.

Liikemäärän säilymislaista saadaan

$$
\begin{aligned}
0 &= -m_1v_1 + m_2v_2 \\
m_1v_1 &= m_2v_2 \\
v_2 &= \frac{m_1v_1}{m_2}
\end{aligned}
$$

Koska vaunut ovat herkkäliikkeisiä, mekaaninen energia säilyy. Tilanteessa jouseen varastoitunut energia muuttuu vaunujen liike-energiaksi.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\
\cancel{\frac{1}{2}}kx^2 &= \cancel{\frac{1}{2}}m_1v_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}}m_2\left(\frac{m_1v_1}{m_2}\right)^2 \\
kx^2 &= m_1v_1^2 + \frac{m_1^2v_1^2}{m_2} \\
kx^2 &= \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right)v_1^2 \\
v_1 &= \sqrt{\frac{kx^2}{m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}}} = \sqrt{\frac{220\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0{,}040\text{ m})^2}{0{,}250\text{ kg} + \frac{(0{,}250\text{ kg})^2}{0{,}750\text{ kg}}}} = 1{,}0276\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan vaunun 2 nopeus sijoittamalla vaunun 1 nopeus.

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{0{,}250\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}0276\,\mathrm{m/s}}{0{,}750\,\mathrm{kg}} = 0{,}3425\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}34\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Vaunun 1 loppunopeus vasemmalle on 1,0 m/s ja vaunun 2 loppunopeus oikealle on 0,34 m/s.

Tehtävä 8.11.

kahdeksan heilahduksen aika t = 13,6 s

a) Kun heilahdusaika määritetään useammasta heilahduksesta, mittausvirheen vaikutus pienenee ja mittaustuloksesta saadaan tarkempi.

b) Heilurin jaksonaika on yhden edestakaiseen heilahdukseen kulunut aika eli

$$T = \frac{t}{n} = \frac{13{,}6\,\text{s}}{8} = 1{,}7\,\text{s}.$$

c) Matemaattisen heilurin jaksonajalle on voimassa

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Heilurin langan pituudeksi saadaan a-kohdan tuloksen perusteella

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot (1{,}7\,\text{s})^2}{4\pi^2} = 0{,}7181\,\text{m} \approx 72\,\text{cm}.$$

Sovella

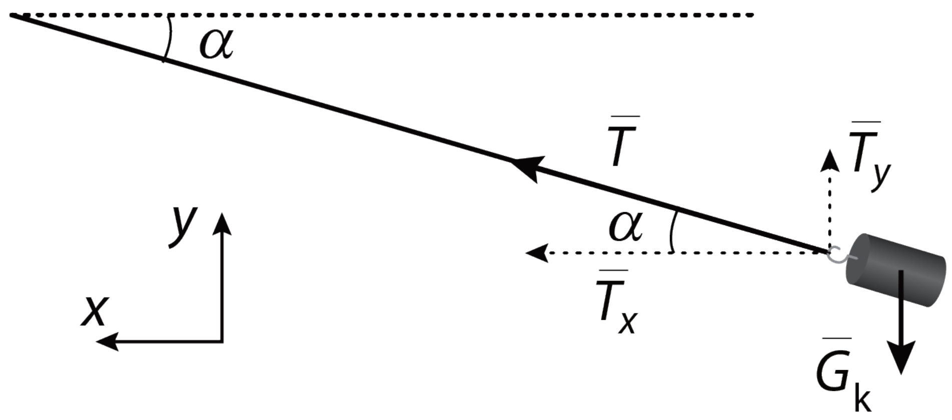
Tehtävä 8.12.

korkin massa m_k = 9,3 g
punnuksen massa m_p = 94,8 g
putken yläpuolisen narun pituus l = 0,212 m

a) Jotta alempi punnus pysyisi paikallaan, narun jännitysvoiman on oltava yhtä suuri kuin punnuksen paino. Narun jännitysvoiman on oltava

$$T = G_\mathrm{p} = m_\mathrm{p}g = 0{,}0948\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 0{,}9299\,\mathrm{N} \approx 0{,}93\,\mathrm{N}.$$

b) Tasaisessa ympyräliikkeessä kiertävä korkki pysyy samassa tasossa. Pystysuuntaisten voimien summa on silloin nolla. Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



$\overline{T}$ = narun jännitysvoima

$\overline{G}_k$ = korkin paino

Tarkastellaan korkkiin kohdistuvia voimia pystysuunnassa. Newtonin II lain mukaan, kun korkin paikka ei muutu pystysuunnassa, on voimassa

$$T_y - G_\text{k} = 0$$
$$T_y = G_\text{k}$$
$$T \sin\alpha = m_\text{k} g.$$

Kulman α arvoksi saadaan

$$\sin\alpha = \frac{m_\text{k} g}{T} = \frac{m_\text{k} g}{G_\text{p}} = \frac{m_\text{k} \cancel{g}}{m_\text{p} \cancel{g}} = \frac{9{,}3\ \text{g}}{94{,}8\ \text{g}}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{9{,}3\text{g}}{94{,}8\text{g}}\right) = 5{,}6298° \approx 5{,}6°.$$

c) Korkki on tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin Newtonin II lain mukaan korkille

$$F = m_\mathrm{k} a_\mathrm{n}$$

$$T_x = m_\mathrm{k}\frac{v^2}{r}$$

$$T\cos\alpha = m_\mathrm{k}\frac{v^2}{r}.$$

Langan jännitysvoima on yhtä suuri kuin punnuksen paino, sillä punnus roikkuu paikallaan, $T = G_\mathrm{p}$. Saadaan yhtälö

$$G_\mathrm{p}\cos\alpha = m_\mathrm{k}\frac{v^2}{r}$$

$$m_\mathrm{p} g\cos\alpha = m_\mathrm{k}\frac{v^2}{r}$$

Ratkaistaan yhtälöstä nopeus.

$$v^2 = \frac{m_\mathrm{p} g r\cos\alpha}{m_\mathrm{k}} = \frac{m_\mathrm{p} g\left(l\cos\alpha\right)\cos\alpha}{m_\mathrm{k}}$$

$$v = \sqrt{\frac{m_\mathrm{p} g\left(l\cos\alpha\right)\cos\alpha}{m_\mathrm{k}}}$$

$$= \sqrt{\frac{94{,}8\cdot10^{-3}\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(0{,}212\,\mathrm{m}\cdot\cos(5{,}6298^\circ))\cos(5{,}6298^\circ)}{9{,}3\cdot10^{-3}\ \mathrm{kg}}}$$

$$= 4{,}5821\,\mathrm{m/s}$$

$$\approx 4{,}6\,\mathrm{m/s}.$$

Tehtävä 8.13.

a) Kun kolikko liikkui pyörivän levyn päällä, kolikko oli ympyräliikkeessä. Tarkastellaan yksittäistä hetkeä ja yksinkertaistetaan tarkastelu tasaiseen ympyräliikkeeseen. Tällöin Newtonin II lain mukaan kolikolle oli voimassa ympyräradan säteen suunnassa

$F_{\mu 0} = ma_{\mathrm{n}}$.

$$F_{\mu 0} = ma_n = m\frac{v^2}{r},$$

jossa $F_{\mu 0}$ on kolikon ja levyn välinen lepokitka, m kolikon massa, v kolikon ratanopeus ja r kolikon ympyräradan säde.

Molempien kolikkojen yhden ympyräradan jaksonaika T oli sama. Koska ulompi kolikko liikkui samassa ajassa pidemmän matkan, ulomman kolikon ratanopeus oli suurempi. Tällöin edellisen yhtälön perusteella mitä suurempi on kolikon ympyräradan säde, sitä suurempi voima tarvitaan pitämään kolikko ympyräradalla. Koska kolikot olivat samanlaisia, molempiin kolikkoihin vaikutti yhtä suuri kitka. Kitka riitti pitämään lähempänä olevan kolikon paikallaan, mutta ulompana olevaa kolikkoa ei enää, kun levyn pyörimisnopeus oli riittävän suuri.

b) Edellisen kohdan perusteella kolikkoon kohdistuneen lepokitkan suuruus oli

$$F_{\mu 0} = ma_n = m\frac{v^2}{r}.$$

Koska kolikon ratanopeus kasvoi, kitkan suuruus myös kasvoi.

c) levyn pyörimisnopeus
n = 48 kierrosta/min = 0,80 kierrosta/s

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Kolikko kiersi ympyrärataa tasaisessa ympyräliikkeessä metallilevyn päällä. Koska kolikko liikkui levyyn nähden paikallaan levyn päällä, kolikon ympyräradan jaksonaika T saadaan levyn pyörimisnopeuden avulla

$$T = \frac{1}{n}.$$

Tasaisessa ympyräliikkeessä liikkuvalle kolikolle Newtonin II lain mukaan säteen suunnassa voimat huomioituina oli voimassa

$$F_{\mu 0} = ma_n = m\frac{v^2}{r}.$$

Kitkalle vaakasuoralla pinnalla on voimassa $F_{\mu 0} = \mu_0 N = \mu_0 G = \mu_0 mg$. Kolikko liikkui ympyräradan piirin matkan yhden jaksonajan aikana, jolloin kolikon ratanopeus oli

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi rn.$$

Yhdistetään edellä olevat yhtälöt ja ratkaistaan lepokitkakerroin

$$\mu_0 \cancel{m}g = \cancel{m}\frac{(2\pi rn)^2}{r}$$

$$\mu_0 g = 4\pi^2 rn^2$$

$$\mu_0 = \frac{4\pi^2 rn^2}{g} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}038\,\text{m} \cdot \left(0{,}80\,\frac{1}{\text{s}}\right)^2}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}097\,87 \approx 0{,}098.$$

Tehtävä 8.14.

jouseen ripustetun punnuksen massa m = 203 g = 0,203 kg

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

värähtelyn jaksonaika $T = \frac{9{,}61\,\text{s}}{13}$

Värähtelevän jousen jaksonaika

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Tällöin jousen jousivakioksi saadaan

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}.$$

Kun punnus roikkui paikallaan jousessa, Newtonin II lain mukaan jousen jousivoima oli yhtä suuri kuin punnuksen aiheuttama paino

$$\begin{aligned} F &= G \\ -kx &= mg. \end{aligned}$$

Miinusmerkki voidaan poistaa, sillä jousivoima oli kohti tasapainoasemaa.

Jousen venymä tasapainoasemassa oli

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{\cancel{m}g}{\frac{4\pi^2 \cancel{m}}{T^2}} = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(\frac{9{,}61\,\text{s}}{13}\right)^2}{4\pi^2} = 0{,}135\,79\,\text{m} \approx 13{,}6\,\text{cm}.$$

Tehtävä 8.15.

a) Maan massa $M = 5{,}9723 \cdot 10^{24}$ kg

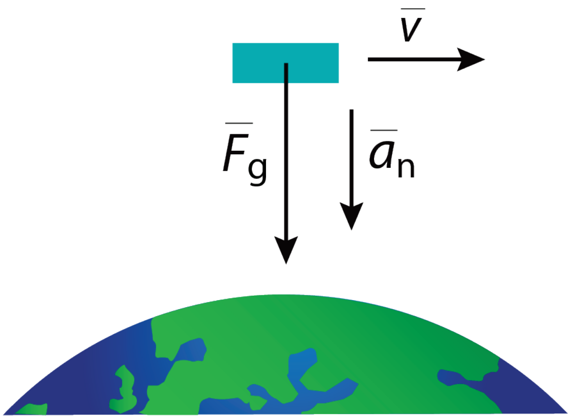
avaruusaseman etäisyys Maan pinnasta $h = 405\,000$ m

Maan säde $R = 6\,371\,000$ m

avaruusaseman kiertosäde
$r = R + h = 405\,000 \text{ m} + 6\,371\,000 \text{ m} = 6\,776\,000 \text{ m}$

gravitaatiovakio $\gamma = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

Avaruusasemaan vaikuttavat voimat



$\overline{F}_g$ = gravitaatiovoima

Avaruusasema pysyy ympyräradallaan Maan gravitaatiovoiman $F_{\mathrm{g}} = \gamma \frac{mM}{r^2}$ vaikutuksesta.

Avaruusasema on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa, jolloin avaruusaseman nopeus on

$$F_{\mathrm{g}} = ma_{\mathrm{n}}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 5{,}9723 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{6\,776\,000\,\mathrm{m}}}$$

$$= 7\,669{,}851\,\mathrm{m/s}$$

$$\approx 7\,670\mathrm{m/s}.$$

b) Avaruusasema on tasaisessa ympyräliikkeessä. Avaruusasema kiertää yhden kiertoajan aikana yhden kierroksen Maan ympäri. Kiertoaika Maan ympäri

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 6\,776\,000\,\mathrm{m}}{7\,669{,}851\,769\,\mathrm{m/s}} = 5\,550{,}93\,\mathrm{s} \approx 5\,550\,\mathrm{s} = 92{,}5\,\mathrm{min}.$$

c) Kun avaruusasema kiertää Maata, asema on tasaisessa ympyräliikkeessä ja putoaa jatkuvasti Maan ohi. Avaruusaseman sisällä oleva ihminen on samassa putoamisliikkeessä. Koska avaruusasema ei kohdista ihmiseen tukivoimia, ihminen kokee olevansa painottomassa tilassa.

Tehtävä 8.16.

jousen jousivakio k = 28,4 N/m

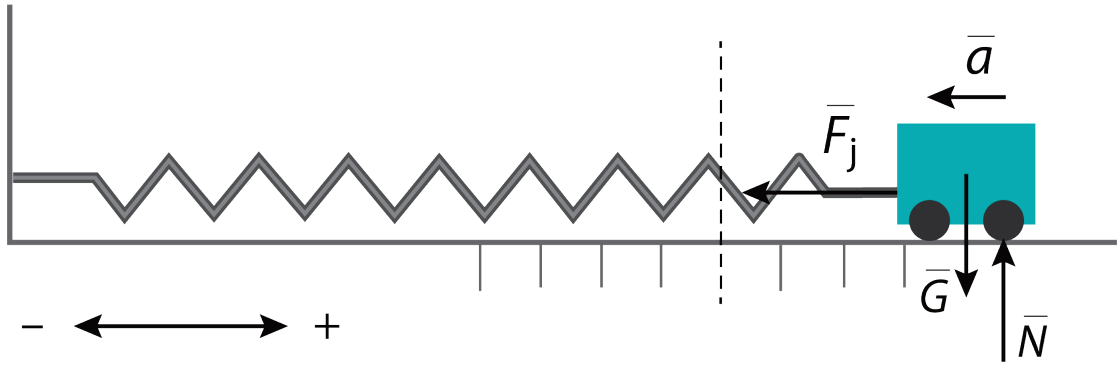
jousen poikkeama tasapainoasemasta x = 7,3 cm = 0,073 m

vaunun massa m = 330 g = 0,33 kg

a) Jousen venyttämisessä tehty työ on yhtä suuri kuin jouseen varastoituva potentiaalienergia.

$$W = E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 28{,}4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (0{,}073\,\mathrm{m})^2 = 0{,}075\,671\,8\,\mathrm{J} = 75{,}6718\,\mathrm{mJ} \approx 76\,\mathrm{mJ}$$

b) Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



$\overline{F}_j$ = jousivoima

$\overline{G}$ = vaunun paino

$\overline{N}$ = vaunuradan tukivoima

Jousivoima pyrkii palauttamaan vaunua tasapainoasemaan. Jousivoiman suuruus on $F_j = kx$.

Valitaan jousivoiman suunta positiiviseksi suunnaksi, tällöin Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö vaunun vaakasuuntaiselle liikkeelle on

$F_j = ma.$

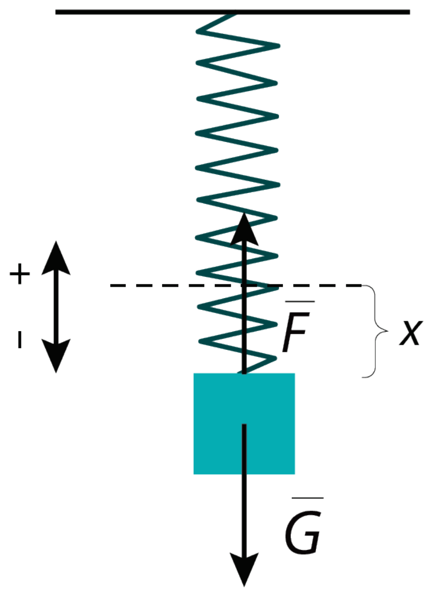
Vaunu lähtee liikkeelle kiihtyvyydellä

$$a = \frac{F_j}{m} = \frac{kx}{m} = \frac{28{,}4\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}073\,\text{m}}{0{,}33\,\text{kg}} = 6{,}282\,424\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 6{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehtävä 8.17.

a) Harmoninen värähdysliike tarkoittaa jaksottaisesti tasapainoaseman ympärillä tapahtuvaa värähdysliikettä. Harmonisen värähdysliikkeen aiheuttaa harmoninen voima.

b) Kun jouseen kiinnitettiin punnus, paikallaan olevaan punnukseen kohdistui jousen jousivoima ja punnuksen paino.



$\overline{G}$ = punnuksen paino

$\overline{F}$ = jousen jousivoima

Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioituna paikallaan olevalle punnukselle on voimassa

$F - G = 0.$

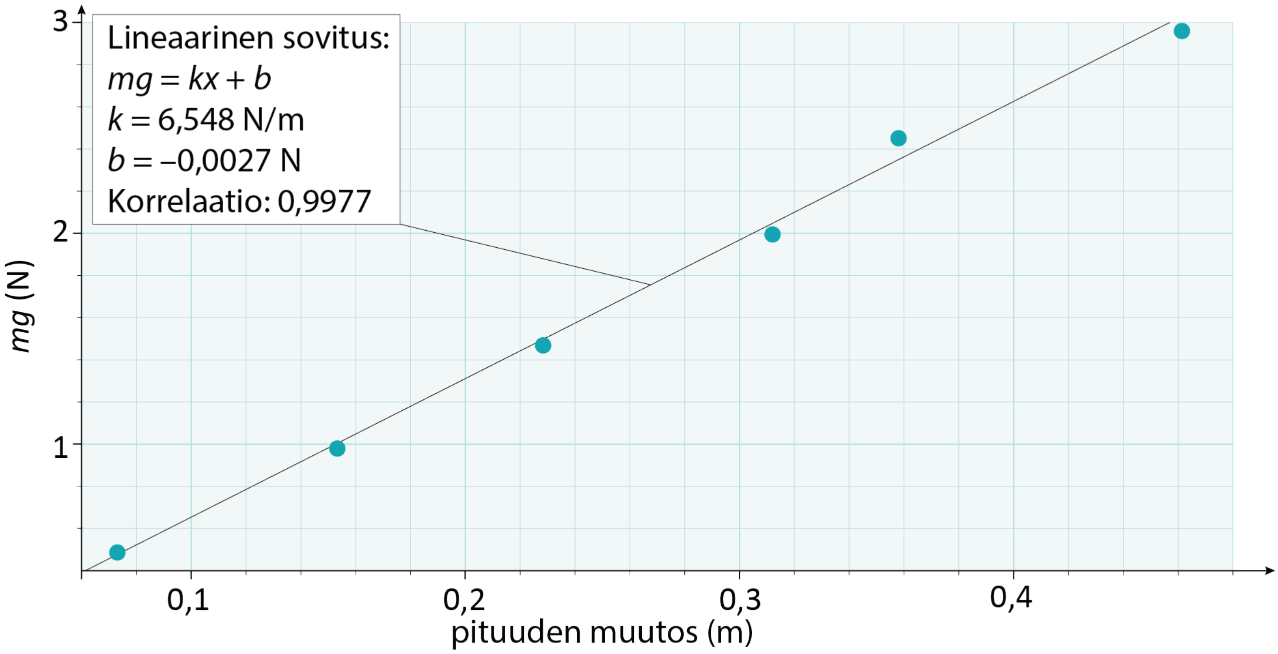
Jousivoiman suuruus on $F = kx$, missä x on jousen pituuden muutos ja paino $G = mg$. Saadaan yhtälö

$mg = kx.$

Jousen jousivakio saadaan (x, mg)-koordinaatiston sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Lasketaan uusi mg-sarake.

m **(g)**	***x*** **(m)**	***mg*** **(N)**
50	0,074	0,491
101	0,153	0,991
150	0,229	1,472
203	0,312	1,991
251	0,358	2,462
302	0,46	2,963

Laaditaan kuvaaja ja määritetään kuvaajasta jousivakio.



Jousen jousivakio on k = 6,548 N/m ≈ 6,5 N/m.

c) Mittaustarkkuuteen vaikuttaa jousen oma massa. Mittaustarkkuutta parantaa useampi mittaus usealla eri punnuksen massan arvolla. Mitä suuremmilla massoilla mitataan, sitä suurempi on jousen pituuden muutos ja sitä pienempi virhe tulee jousen pituuden muutoksen mittaukseen. Myös isompien massojen käyttö pienentää massan mittauksen virhettä.

d) Tarkastellaan tilannetta, jossa kaksi samanlaista jousta on kytkettynä rinnakkain. Paikallaan olevaan punnukseen Newtonin II lain mukaan kohdistuva kokonaisvoima on nolla, jolloin suunnat huomioituna on voimassa

$2F - G = 0.$

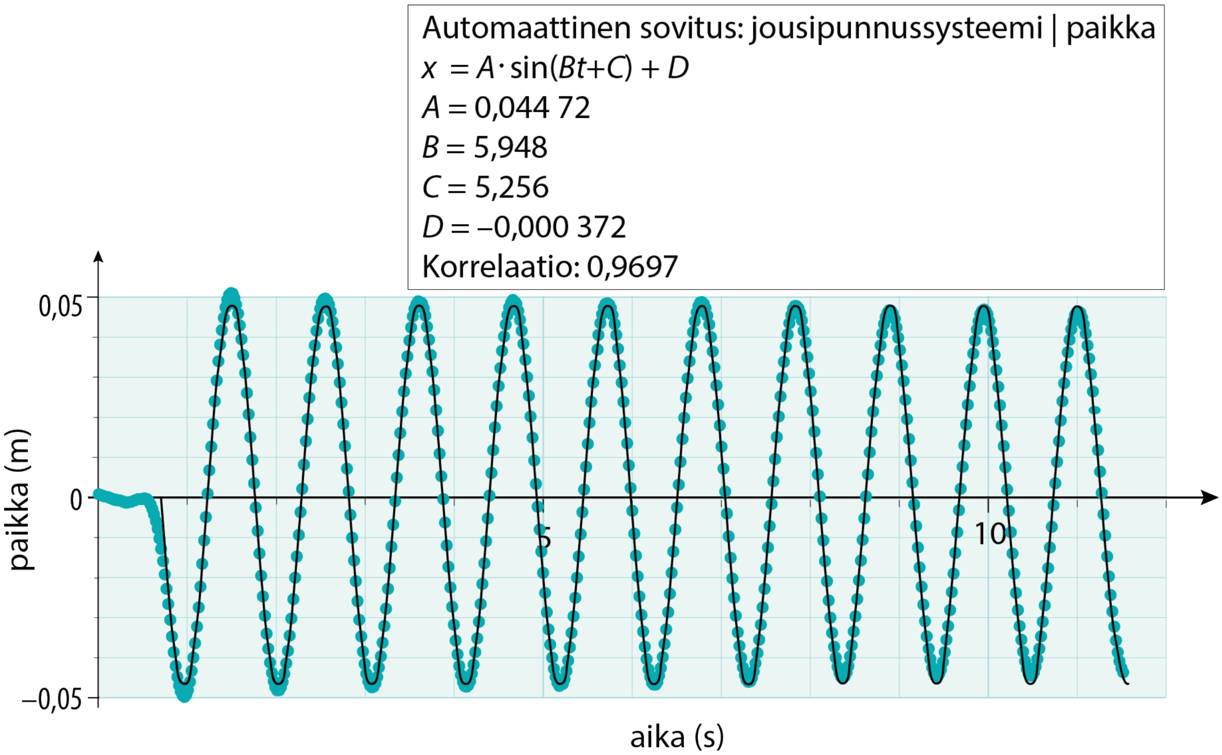
Jousivoiman suuruus on $F = kx$, missä x on jousen pituuden muutos ja paino $G = mg$. Jousien venymiksi saadaan

$$x = \frac{mg}{2k}.$$

Yhtälön mukaan jousien pituuden muutokset olisi ollut puolet yhden jousen pituuksien muutoksista. Koska pituuden muutokset olivat puolet yhden jousen pituuden muutoksista, jousisysteemin jousivakio on tällöin kaksinkertainen yhden jousen jousivakioon verrattuna.

Tehtävä 8.18.

a)



b) sovitefunktio $x(t) = A \sin(Bt + C) + D$.

Vakioiden arvot sovitekuvaajan tiedoista

$A = 0{,}04472$

$B = 5{,}948$

$C = 5{,}256$

$D = -0{,}0003722$

c) Sovitefunktion parametreista *A* kuvaa amplitudia, joten amplitudin suuruus on 4,472 cm ≈ 4,5 cm.

Taajuutta kuvaa parametri *B*. Sinifunktion riippuvuus ajasta on ilmoitettu muodossa $x(t) = A \sin(2\pi ft)$.

$$B = 2\pi f$$

$$f = \frac{B}{2\pi} = \frac{5{,}948\,1/\mathrm{s}}{2\pi} = 0{,}946\,65\,\mathrm{Hz} \approx 0{,}95\,\mathrm{Hz}.$$

Tehtävä 8.19.

a) Matemaattisen heilurin jaksonajan ja langan pituuden välillä on voimassa

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Yhtälön mukaan jaksonaikaan vaikuttaa vain langan pituus ja putoamiskiihtyvyys. Näin ollen heilahduksen amplitudi ja pyyhekumin massa eivät vaikuta heilahdusaikaan.

b) Langan päässä heilahtelevaa punnusta voidaan mallintaa matemaattisena heilurina, jonka jaksonaika on

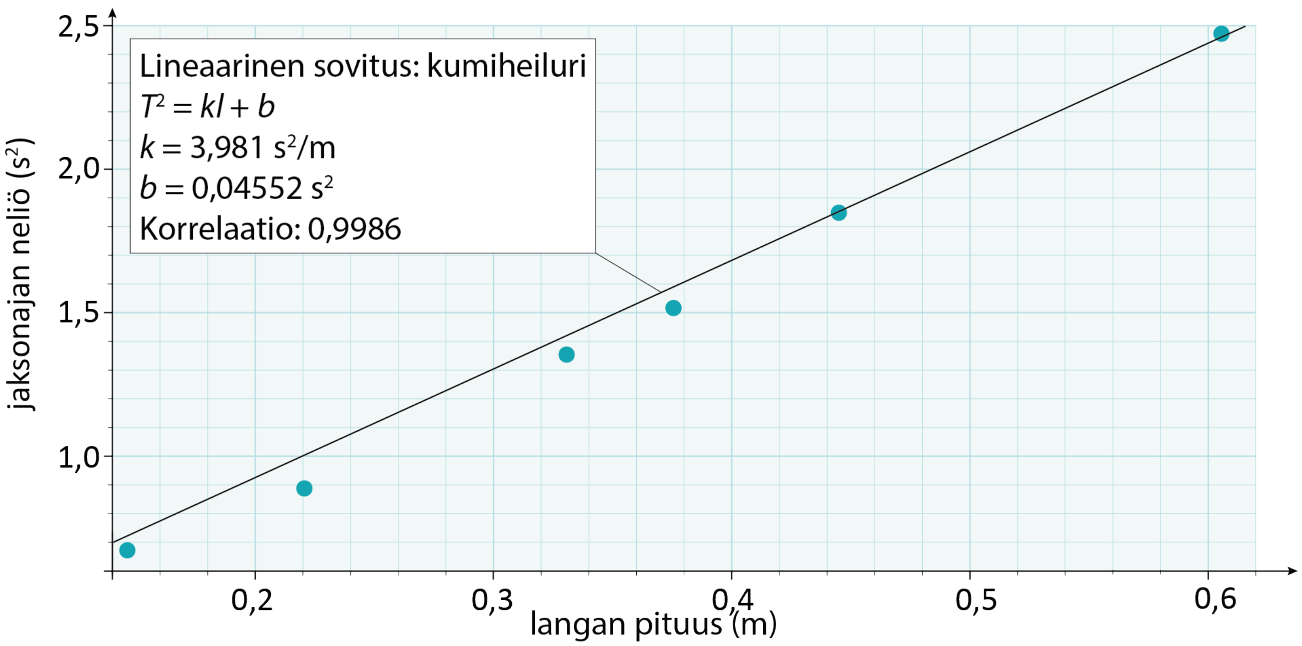
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Esitetään jaksonajan neliön ja langan pituuden välinen riippuvuus

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l.$$

Laaditaan uusi sarake jaksonajan neliölle.
(l, T^2)-koordinaatistoon sovitetun kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin on $\frac{4\pi^2}{g}$.



Sovitussuoran fysikaalinen kulmakerroin on
k = 3,981 s^2/m. Putoamiskiihtyvyydeksi saadaan

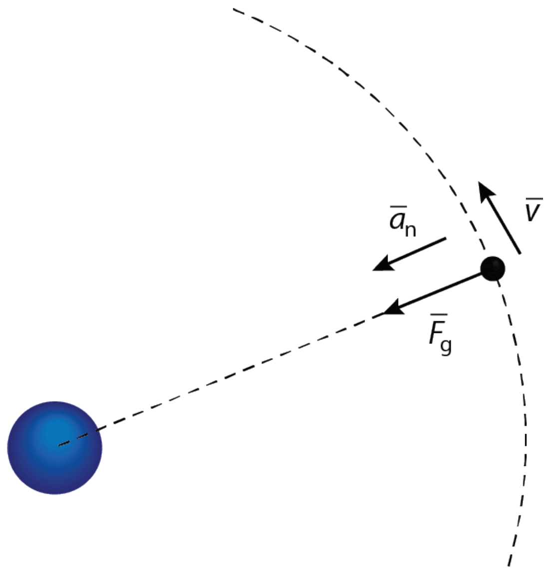
$$k = \frac{4\pi^2}{g}$$

$$g = \frac{4\pi^2}{k} = \frac{4\pi^2}{3{,}981\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}}} = 9{,}9167\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 9{,}92\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Tehtävä 8.20.

a) Tietoliikennesatelliitti kannattaa sijoittaa geostationaariselle radalle, koska Maassa olevien tietoliikenneantennien suuntaa ei tarvitse muuttaa.

b) Satelliittiin vaikuttaa vain Maan aiheuttama gravitaatiovoima, jonka suunta on Maan keskipistettä kohti.



$\bar{F}_g$ = Maan satelliittiin kohdistama gravitaatiovoima

c) Satelliitti kiertää Maan keskipisteen ympäri tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa tarkasteluna on voimassa

$$F_g = ma_n$$

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$\gamma \frac{M}{r} = v^2.$$

Koska satelliitti pysyy koko ajan Maan tietyn pisteen yläpuolella, satelliitti kiertää yhden ympyräradan matkan vuorokauden aikana. Satelliitti liikkuu vakio ratanopeudella, jolloin satelliitin nopeus on

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Sijoitetaan nopeus aiempana saatuun yhtälöön.

$$\gamma \frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

$$\gamma \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}.$$

Ratkaistaan satelliitin ympyräradan säde

$$r^3 = \frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}}.$$

Etäisyys maapallon pinnasta on

$$h = r - R = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} - R$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}9723 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot \left(24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{s}\right)^2}{4\pi^2}} - 6\,378\,137\,\text{m}$$

$$= 35\,863\,268{,}72\,\text{m} \approx 36\,000\,\text{km}.$$

Tehtävä 8.21.

a) Kuun massa $M = 7,348 \cdot 10^{22}$ kg

komentomoduulin kiertosäde
$r = 1\,738 \text{ km} + 110 \text{ km} = 1\,848 \text{ km}$

Kiertämiseen kulunut aika
$t = 128 \text{ h } 3 \text{ min} - 100 \text{ h } 12 \text{ min} = 27 \text{ h } 51 \text{ min} = 100\,260 \text{ s}$

gravitaatiovakio $\gamma = 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Newtonin II lain mukaan kappaleen liikeyhtälö ympyräliikkeessä on $\sum \bar{F} = m\bar{a}_n$.

Komentomoduuli pysyy ympyräradallaan Kuun gravitaatiovoiman $F_\mathrm{g} = \gamma \frac{mM}{r^2}$ vaikutuksesta. Kuumoduuli on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen

$$F_\mathrm{g} = ma_\mathrm{n}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$\frac{\gamma M}{r} = v^2.$$

Collins kulkee tasaista ympyräliikettä, jolloin hänen yhden kierroksen aikana kulkema matka on $s = 2\pi r = vt$. Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Collinsin kiertoaika Kuun ympäri on

$$\gamma M = \left(\frac{s}{t}\right)^2 r = \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 r = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot \left(1\,848 \cdot 10^3\ \text{m}\right)^3}{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 7{,}348 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}} = 7\,127{,}63\,\text{s} \approx 7{,}1 \cdot 10^3\ \text{s}.$$

Collins ehtii kiertää Kuun
N = 100 260 s /7 127,6338 s = 14,066 kertaa eli noin 14,1 kertaa

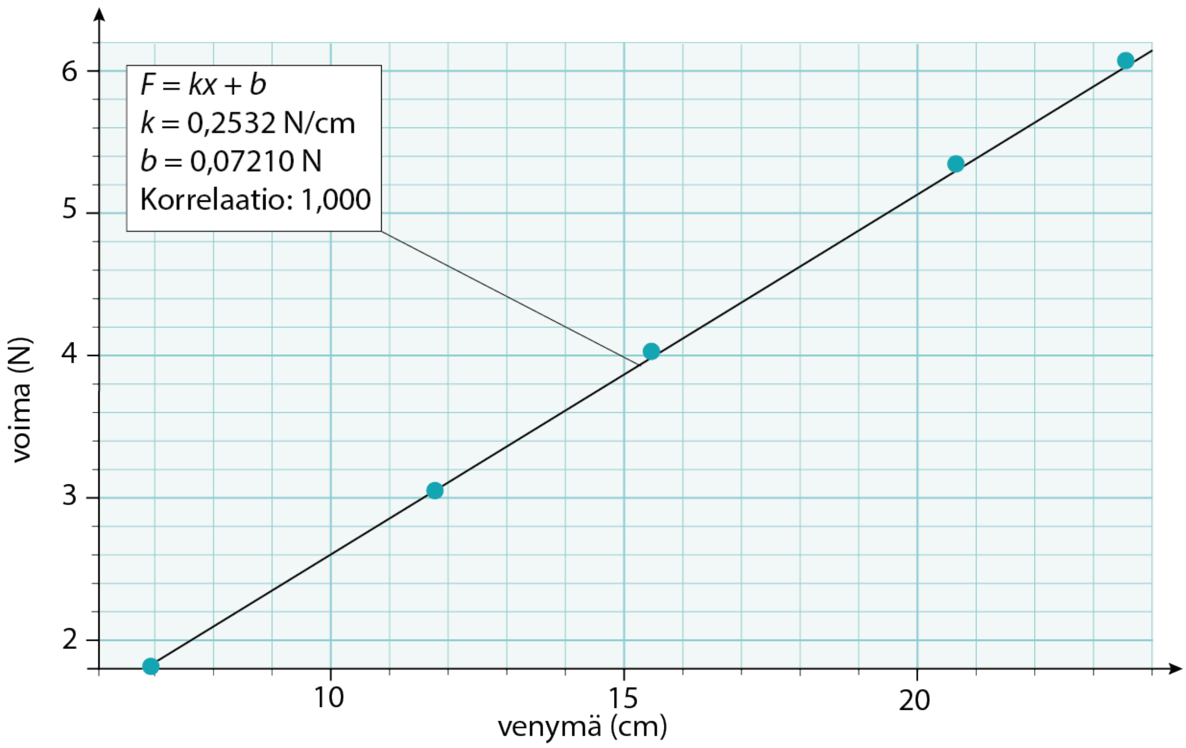
b) Kun Collins kiertää Kuuta komentomoduulissa, hän on vapaassa pudotuksessa. Sekä komentomoduuli että Collins ovat samassa kiihtyvyydessä, jonka gravitaatiovuorovaikutus saa aikaan. Komentomoduuli ei silloin aiheuta Collinsiin tukivoimia, ja Collins tuntee olevansa painoton moduulin sisällä.

Tehtävä 8.22.

a) Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa voima-anturin lukema on 0 N. Tällöin jouseen kiinnitetty punainen muovipalanen oli kohdassa 20,0 cm. Voima-anturin lukemia vastaavat jousen venymät saadaan, kun vähennetään muovipalasen paikasta sovittu alkupaikka 20,0 cm. Poimitaan videolta mittaustulokset ja taulukoidaan ne.

Venymä *x* (cm)	**Voima *F* (N)**
6,9	1,822
11,8	3,046
15,5	4,010
20,7	5,315
23,6	6,043

Laaditaan kuvaaja, jossa voima-anturin jousen kohdistama voima on esitetty jousen pituuden muutoksen suhteen.



b) Kun jousta venytetään ja jousi on paikallaan, jouseen vaikuttava kokonaisvoima on Newtonin II lain mukaan nolla. Tällöin jousessa vaikuttavat vaakasuunnassa vasemmalle jousivoima F_{j} ja vaakasuunnassa oikealle voima-anturin aiheuttama voima F. Huomioidaan suunnat ja saadaan

$$F_{\mathrm{j}} - F = 0$$
$$F_{\mathrm{j}} = F.$$

Jousivoiman suuruus on $F_{\mathrm{j}} = kx$, jossa k on jousen jousivakio ja x jousen pituuden muutos. Tällöin saadaan

$F = kx$.

Jousen jousivakio saadaan (x, F)-koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Edellisen kohdan perusteella
$k = 0{,}2532$ N/cm ≈ 25,3 N/m.

c) Mitä jäykempi jousi on, sitä suurempi on jousen jousivakio. Jos jousivakio suurenee, kuvaajasuoran jyrkkyyttä kuvaava kulmakerroin kasvaa.

Tehtävä 8.23.

a) Jousen pituus mittauksen alussa oli l_0 = 12,1 cm. Taulukoidaan massat ja pituudet. Lasketaan pituuden muutos $x = l - l_0$.

l **(m)**	***m*** **(kg)**	***x*** **(m)**
0,121	0	0
0,143	0,05	0,022
0,162	0,1	0,041
0,182	0,15	0,061
0,203	0,2	0,082
0,223	0,25	0,102
0,243	0,3	0,122

b) Punnus on paikallaan, jolloin tasapainossa olevalle jouselle on Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioituina $F_j - G = 0$ eli

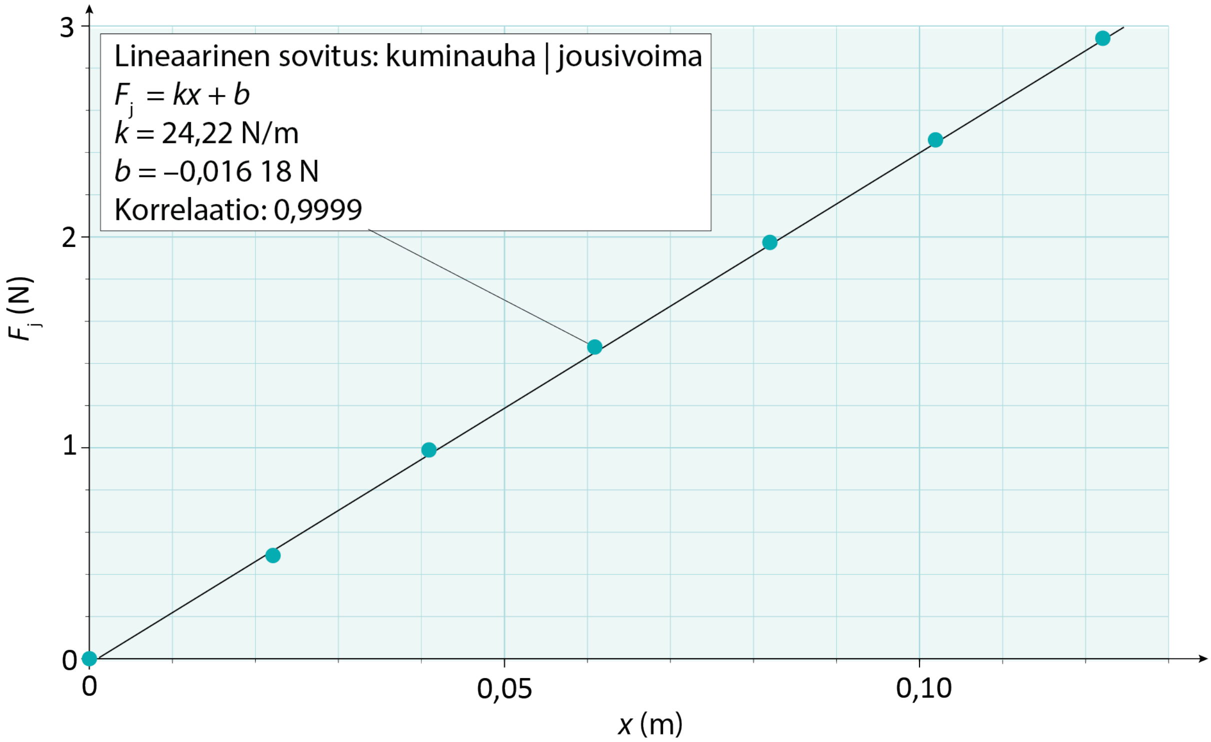
$F_j = G$

$F_j = mg$.

Lasketaan uudet sarakkeet jousivoimalle.

l **(m)**	***m*** **(kg)**	***x*** **(m)**	***F*** **(N)**
0,121	0	0	0
0,143	0,05	0,022	0,491
0,162	0,1	0,041	0,981
0,182	0,15	0,061	1,472
0,203	0,2	0,082	1,962
0,223	0,25	0,102	2,453
0,243	0,3	0,122	2,943

Jousivoimalle on voimassa $F_j = kx$.



Jousivakio saadaan (k, F_j)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Määritetään kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin.

Jousen jousivakio on k = 24,22 N/m = 24 N/m.

c) Mitä jäykempi jousi on, sitä suurempi on jousen jousivakio. Jousivoimalle pätee $F_j = kx$. Koska jousivakio on (k, F_j)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin, voidaan todeta, että mitä suurempi jousivakio on, sitä jyrkemmin suora kulkee koordinaatistossa.

Tehtävä 8.24.

a) Määritetään eri massoja vastaavat värähdysajat. Mitataan videon sekuntikellon avulla viiteen värähdyksen kulunut aika. Määritetään tuloksista punnusten eri massoja vastaavat jousen värähtelyn jaksonajat.

Jaksonaika $T = \frac{t}{5} = \frac{2{,}44\ \text{s}}{5} = 0{,}488\ \text{s}.$

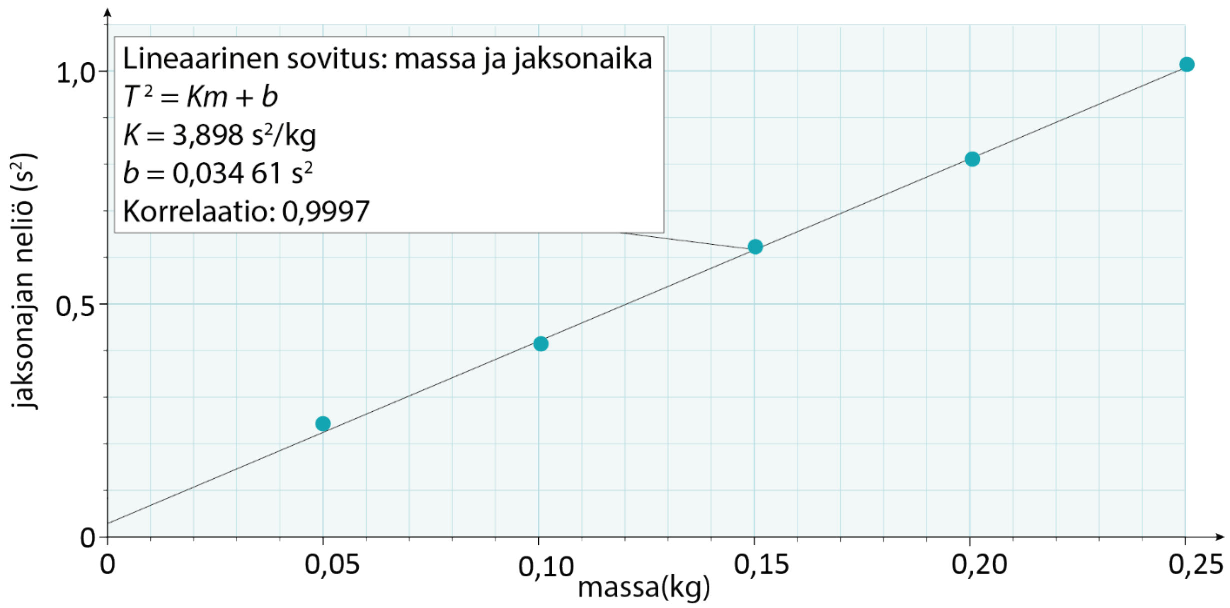
Massa (kg)	**5 värähdyksen aika (s)**	**Jaksonaika *T* (s)**
0,050	2,44	0,488
0,100	3,21	0,642
0,150	3,94	0,788
0,200	4,51	0,902
0,250	5,03	1,006

Kun jouseen ripustettavan punnuksen massa on suurempi, jousen värähdysaika on pidempi.

b) Lasketaan jaksonajan neliö annetuista arvoista.

Massa (kg)	**Jaksonaika T (s)**	**Jaksonajan neliö T^2 (s^2)**
0,050	0,488	0,238 144
0,100	0,642	0,412 164
0,150	0,788	0,620 944
0,200	0,902	0,813 604
0,250	1,006	1,012 036

Esitetään jaksonajan neliö massan funktiona.



c) Jousen värähtely noudattaa harmonisen värähtelyn yhtälöä.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \|(\ )^2$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m.$$

(m, T^2)-koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin $K = \frac{4\pi^2}{k}$. Määritetään kulmakerroin b-kohdan perusteella K = 3,898 s^2/kg. Ratkaistaan kulmakertoimen avulla jousen jousivakio.

$$K = \frac{4\pi^2}{k}$$

$$k = \frac{4\pi^2}{K} = \frac{4\pi^2}{3{,}898\,\frac{\text{s}^2}{\text{kg}}} = 10{,}127\,86\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 10{,}1\,\frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Tehtävä 8.25.

a) Newtonin II lain mukaan vaunuun vaikuttava kokonaisvoima on $F = ma$.

Herkkäliikkeiseen vaunuun ei kohdistu lainkaan kitkaa, ja kokonaisvoima on jouseen vaunuun kohdistama voima. Kun jousen massa on hyvin pieni, saadaan vaunun massa (a, F)-koordinaatiston kuvaajan kulmakertoimesta.

Määritetään kulmakerroin kuvaajasta luettujen pisteiden avulla.

$$m = \frac{\Delta F}{\Delta a} = \frac{0{,}42\,\text{N} - (-0{,}41\,\text{N})}{1{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - \left(-1{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 0{,}332\,\text{kg} \approx 0{,}33\,\text{kg}$$

Vaunun massa on 0,33 kg.

b) Jousivoima on $F = -kx$. Jousivakio voidaan siten määrittää (x, F)-koordinaatiston kuvaajan kulmakertoimesta.

Määritetään kulmakerroin kuvaajasta luettujen pisteiden avulla.

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{0{,}42\,\mathrm{N} - (-0{,}41\,\mathrm{N})}{-0{,}070\,\mathrm{m} - 0{,}071\,\mathrm{m}} = 5{,}8865\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \approx 5{,}9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

c) Värähdysliikkeen energia on summa vaunun liike-energiasta ja jousen potentiaalienergiasta, $E = E_k + E_p$. Mekaaninen energia on vuoroin vaunun liike-energiaa ja vuoroin jousen potentiaalienergiaa. Koska vastusvoimia ei ole, värähdysliikkeen mekaaninen energia säilyy. Mekaaninen energia voidaan päätellä mistä tahansa kohdasta värähdysliikettä, mutta yksinkertaisinta se on määrittää joko ääriaseman tai tasapainoaseman kohdalta.

Ääriasemassa $x = \pm 0{,}071$ m ja värähtelijän mekaaninen energia on kokonaisuudessaan jousen potentiaalienergiaa,

$$E = E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot 5{,}8865\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot\left(0{,}071\,\mathrm{m}\right)^2 = 0{,}014\,84\ \mathrm{J} \approx 15\,\mathrm{mJ}.$$

Tasapainoaseman kohdalla $x = 0$ m ja $v = \pm 0{,}030$ m/s ja värähtelijän mekaaninen energia on kokonaisuudessaan vaunun liike-energiaa,

$$E = E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}332\ \mathrm{kg}\cdot\left(0{,}030\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 0{,}014\,94\ \mathrm{J} \approx 15\,\mathrm{mJ}.$$

Värähtelijän energia on siten 15 mJ.

d) Vaunun ja jousen muodostama systeemi on harmoninen värähtelijä, jonka jaksonaika on $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Värähtelyn taajuus on

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{5{,}8865\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{0{,}332\,\mathrm{kg}}} = 0{,}670\,16\,\frac{1}{\mathrm{s}} \approx 0{,}67\,\mathrm{Hz}$$

Syvennä

Tehtävä 8.26.

a) Työn päävaiheet

Sidotaan lanka punnukseen ja kiinnitetään lanka toisesta päästä kiinni statiivissa olevaan koukkuun. Mitataan punnuksen painopisteen etäisyys langan ja statiivin koukun kiinnityskohdasta. Laitetaan punnus heilahtelemaan suhteellisen pienellä amplitudilla. Mitataan kuuteen edestakaiseen heilahteluun kulunut aika. Yksi edestakainen heilahtelu on esimerkiksi punnuksen ääriasemasta toiseen ja takaisin. Toistetaan tutkimus 5–7 kertaa eri pituisilla langoilla. Taulukoidaan punnuksen painopisteen etäisyydet langan ja statiivin kiinnityskohdasta sekä heilahtelun ajat.

Langan päässä heilahtelevaa punnusta voidaan mallintaa matemaattisena heilurina, jonka jaksonaika on

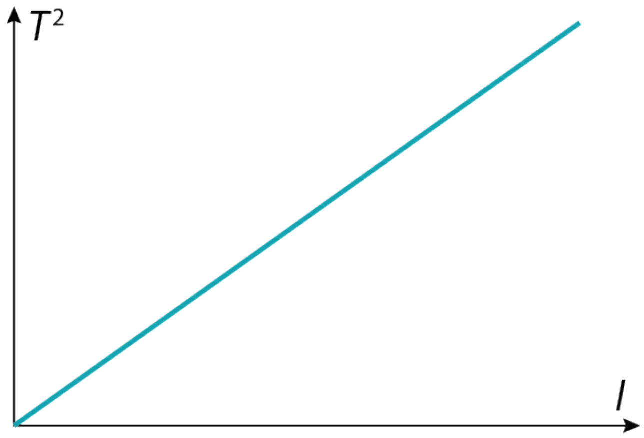
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Lasketaan jaksonaika kuuden edestakaisen heilahtelun keskiarvona eli $T = t/6$, jossa t on kuuteen heilahdukseen kulunut aika. Esitetään jaksonajan ja langan pituuden välinen riippuvuus

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l.$$

Laaditaan uusi sarake jaksonajan neliölle.
(l, T^2)-koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin on $\frac{4\pi^2}{g}$.



Putoamiskiihtyvyys saadaan määritettyä kuvaajalta määritetyn fysikaalisen kulmakertoimen avulla

$$k = \frac{4\pi^2}{g}$$

$$g = \frac{4\pi^2}{k}.$$

b) Tutkimuksessa mittausvirhettä aiheuttavat punnuksen painopisteen etäisyyden *l* määritys statiivin koukun ja langan kiinnityskohdasta. Toinen mittausvirhettä aiheuttava tekijä on jaksonajan määritys. Mitä pidempi on *l*, sitä pienempi on rullamitalla tehty pituuden määrityksen virhe.

Jaksonajan määrityksen virhettä voidaan pienentää mittaamalla mahdollisimman monen edestakaisen heilahduksen heilahdusaika ja laskea niistä keskiarvo. Mitä pidempi on lanka, sitä pidempi on heilahdusaika ja sitä pienemmäksi tulee heilahdusajan mittaamisen virhe. Heilahdusajan määrittämisessä kannattaa valita jokin kiinnepiste, esimerkiksi hetki, jolloin punnus ohittaa statiivin tangon aina samalta puolelta. Heilahdusaikaan tulee virhettä myös statiivin värähtelystä. Kun langan varassa roikkuva punnus laitetaan heilahtelemaan, heilahtelun aikana energiaa siirtyy statiiviin ja statiivi alkaa värähdellä. Tämä kasvattaa jaksonaikaa. Statiivin värähtelyä voidaan pienentää pitämällä statiivista kiinni tai kiinnittämällä statiivi yläpäästään myös johonkin kiinteään massiiviseen kappaleeseen kiinni.

Tehtävä 8.27.

a) kolmen vaunun pinon nopeus tilanteessa A
v_3 = 0,55 m/s

Ulkoisten voimien, kuten kitkan tai ilmanvastuksen, merkitys on tilanteessa mitätön, joten vaunujen vuorovaikuttaessa systeemin liikemäärä säilyy.

Liikemäärän säilymislain mukaan $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$. Alussa vaunut ovat paikoillaan ja liikemäärä p_{alussa} = 0. Lopputilanteessa yhden vaunun ja kolmen vaunun pino liikkuvat eri suuntiin. Valitaan kolmen vaunun pinon liikkeen suunta positiiviseksi suunnaksi. Suunnat huomioiden saadaan $0 = p_3 - p_1$, ja edelleen $p_1 = p_3$.

Tämän perusteella voidaan kirjoittaa

$$p_1 = p_3$$
$$\cancel{m}v_1 = 3\cancel{m}v_3$$
$$v_1 = 3v_3 = 3 \cdot 0{,}55\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1{,}65\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Eli yksittäisen vaunun nopeus on kolminkertainen kolmen vaunun pinon nopeuteen nähden ja nopeus on 1,7 m/s.

b) Jälleen vaunupinojen liikemäärä säilyy, $\overline{p}_{\text{alussa}} = \overline{p}_{\text{lopussa}}$. Valitaan jälleen kolmen vaunun pinon liikkeen suunta positiiviseksi suunnaksi, ja merkitään vaunujen nopeuksia symbolilla u. Liikemäärän säilymislaista saadaan $0 = p_{3B} - p_2$, ja edelleen $p_2 = p_{3B}$.

Tämän perusteella voidaan edelleen kirjoittaa

$$\begin{aligned} p_2 &= p_{3B} \\ 2\cancel{m}u_2 &= 3\cancel{m}u_3 \\ 2u_2 &= 3u_3 \\ u_2 &= \frac{3}{2}u_3. \end{aligned}$$

Koska A- ja B-tilanteissa käytössä on sama jousi, ja jousi puristetaan samalla tavalla, jouseen varastoituu sama potentiaalienergia kummassakin tilanteessa. Jousen potentiaalienergia muuntuu herkkäliikkeisten vaunujen liike-energiaksi.

a-kohdassa

$$\begin{aligned} E_{\text{p}} &= E_{\text{k1}} + E_{\text{k2}} = \frac{1}{2}mv_1^{\ 2} + \frac{1}{2}3mv_3^{\ 2} \\ &= \frac{1}{2}m(3v_3)^2 + \frac{1}{2}3mv_3^{\ 2} = \frac{9}{2}mv_3^{\ 2} + \frac{3}{2}mv_3^{\ 2} = \frac{12}{2}mv_3^{\ 2} = 6mv_3^{\ 2} \end{aligned}$$

b-kohdassa

$$\begin{aligned} E_{\text{p}} &= E_{\text{k1B}} + E_{\text{k2B}} = \frac{1}{2}\cdot 2mu_2^{\ 2} + \frac{1}{2}\cdot 3mu_3^{\ 2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2m\left(\frac{3}{2}u_3\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 3mu_3^{\ 2} = \frac{9}{4}mu_3^{\ 2} + \frac{3}{2}mu_3^{\ 2} = \frac{15}{4}mu_3^{\ 2} \end{aligned}$$

Nämä energiat ovat yhtä suuret, joten $6mv_3{}^2 = \frac{15}{4}mu_3{}^2$.

Ratkaistaan tästä kolmen vaunun pinon nopeus u_3.

$$6v_3{}^2 = \frac{15}{4}u_3{}^2$$

$$u_3{}^2 = \frac{24^{(3}}{15}v_3{}^2$$

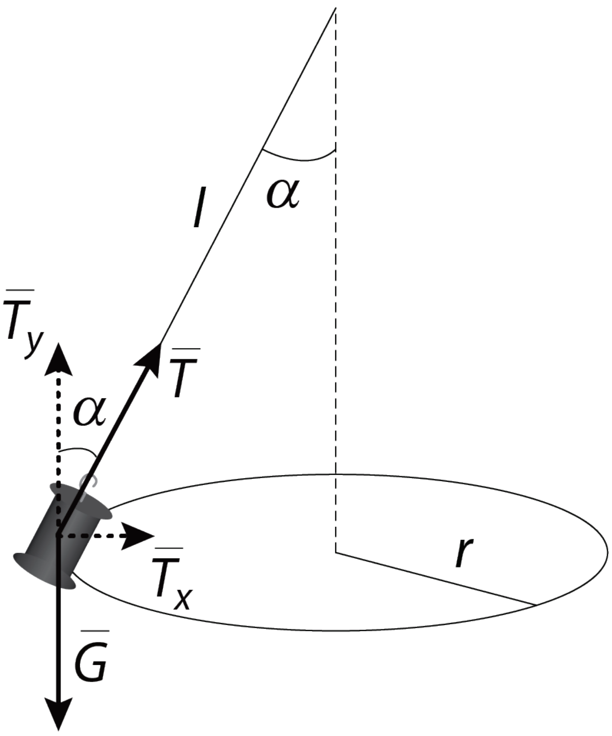
$$u_3 = \sqrt{\frac{8}{5}}v_3 = \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot 0{,}55\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}695\,70\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}70\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kahden vaunun pinon nopeus on

$$u_2 = \frac{3}{2}u_3 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{5}}v_3 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot 0{,}55\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1{,}04355\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tehtävä 8.28.

a) Kartioheilurin punnukseen vaikuttavat voimat:



$\overline{G}$ = paino

$\overline{T}$ = langan jännitysvoima

Punnus on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan $\sum F = ma_{\text{n}}$.

$T_x = ma_{\text{n}}$

$T_x = m\dfrac{v^2}{r}.$

Koska punnus etenee tasossa, on pystysuuntaisten voimien summa nolla.

$$\sum F_y = 0$$

$$T_y - G = 0$$

$$T_y = G$$

Ratkaistaan trigonometrian avulla vaakakomponentti

$$\tan\alpha = \frac{T_x}{T_y}$$

$$T_x = T_y \tan\alpha$$

ja sijoitetaan se tasaisen ympyräliikkeen yhtälöön.

$$T_x = m\frac{v^2}{r}$$

$$T_y \tan\alpha = m\frac{v^2}{r}$$

$$G \tan\alpha = m\frac{v^2}{r}$$

$$\cancel{m}g \tan\alpha = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

Ratkaistaan yhtälöstä $\tan\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{gr}$$

Koska massa ei esiinny yhtälössä, punnuksen massa ei vaikuta kiertokulman suuruuteen.

b) Kun nopeus kasvaa, muuttuu $\tan\alpha$ arvo suuremmaksi. Tämä tarkoittaa suurempaa kulmaa.

c) Kartioheilurin kierrosajan yhtälö voidaan johtaa seuraavasti: Tasainen ympyräliike:

$$\sum F = ma_{\text{n}}$$

$$T_x = m\frac{v^2}{r}$$

$$T_y \tan\alpha = m\frac{v^2}{r}$$

$$G\tan\alpha = m\frac{v^2}{r}$$

$$\cancel{m}g\tan\alpha = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

Koska tasaisessa ympyräliikkeessä punnus etenee tasaisella nopeudella, voidaan kirjoittaa:

$$g\tan\alpha = \frac{(2\pi r)^2}{t^2 r} = \frac{4\pi^2 r^{\cancel{2}}}{t^2 \cancel{r}} = \frac{4\pi^2 r}{t^2}$$

Ratkaistaan kuvan avulla säde *r*.

$$\sin\alpha = \frac{r}{L}$$

$$r = L\sin\alpha$$

Sijoitetaan säde yhtälöön ja ratkaistaan kiertoaika.

$$g\tan\alpha = \frac{4\pi^2 r}{t^2}$$

$$g\tan\alpha = \frac{4\pi^2 L\sin\alpha}{t^2}$$

$$t^2 = \frac{4\pi^2 L\sin\alpha}{g\tan\alpha} = \frac{4\pi^2 L\cos\alpha}{g}$$

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}}$$

Kun kulman suuruus lähestyy arvoa 90°, kiertoaika t pienenee lähelle nollaa. Näin ollen 90° kulman saavuttaminen ei ole mahdollista.

Asian voi perustella myös voimakuvion avulla. Painovoima vaikuttaa punnukseen, joten narun jännitysvoimalla on oltava pystykomponentti, jotta punnus kiertäisi keskusta tasossa.

Tehtävä 8.29.

a) kappaleiden massat m_1 = 0,52 kg ja m_2 = 0,22 kg

jousen venymä x = 128 mm

Ennen langan katkeamista systeemi on tasapainossa.

Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Kappaleiden painot vetävät jousta alaspäin ja jousivoima vetää ylöspäin yhtä suurella vastakkaissuuntaisella voimalla.

Kun suunta alaspäin valitaan positiiviseksi suunnaksi, saadaan $(m_1 + m_2)g - kx = 0$, josta voidaan ratkaista jousen jousivakio, $k = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{x}$.

(Välituloksena jousivakiolle saadaan
$k = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{x} = \dfrac{(0{,}52\text{ kg} + 0{,}22\text{ kg}) \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}128\,\text{m}} = 56{,}714\,\dfrac{\text{N}}{\text{m}}$.)

Kun lanka katkeaa, kappaleeseen 1 vaikuttaa jousivoima ylöspäin ja paino alaspäin.

Jousivoima on selvästi kappaleen 1 painoa suurempi, joten kappale kiihtyy ylöspäin.

Kappaleen 1 liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Kun suunta ylöspäin valitaan positiiviseksi, saadaan $kx - m_1 g = m_1 a_1$.

Ratkaistaan yhtälöstä kiihtyvyys ja sijoitetaan yhtälöön aiemmin laskettu jousivakio.

$$a_1 = \frac{kx - m_1 g}{m_1} = \frac{\frac{(m_1 + m_2)g}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} - m_1 g}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2)g - m_1 g}{m_1}$$

$$= \frac{\cancel{m_1 g} + m_2 g - \cancel{m_1 g}}{m_1} = \frac{m_2 g}{m_1} = \frac{0{,}22\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}52\,\text{kg}} = 4{,}1504\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 4{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(Tai jousivakion avulla,

$$a_1 = \frac{kx - m_1 g}{m_1} = \frac{56{,}714\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}128\ \text{m} - 0{,}52\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}52\,\text{kg}} = 4{,}1504\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 4{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.)$$

Kun lanka katkeaa, kappaleeseen 2 vaikuttaa ainoastaan kappaleen 2 paino. Kappale 2 putoaa langan katkeamisen jälkeen vapaasti alaspäin kiihtyvyydellä g = 9,81 m/s^2.

Langan katkeamisen jälkeen kappale 1 kiihtyy ylöspäin kiihtyvyydellä 4,2 m/s^2 ja kappale 2 putoamiskiihtyvyydellä 9,81 m/s^2 alaspäin.

b) Harmoniseen värähtelyyn päätyvän kappaleen 1 värähtelyn jaksonaika on

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{\frac{(m_1+m_2)g}{x}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 x}{(m_1+m_2)g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{0{,}52\,\text{kg}\cdot 0{,}128\,\text{m}}{(0{,}52\,\text{kg}+0{,}22\,\text{kg})\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0{,}6016\,\text{s} \approx 0{,}60\,\text{s}.$$

(Tai jousivakion avulla $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}52\text{ kg}}{56{,}714\text{ N/m}}} \approx 0{,}60\text{ s.}$)

Tehtävä 8.30.

aisan pituus l = 5,0 m

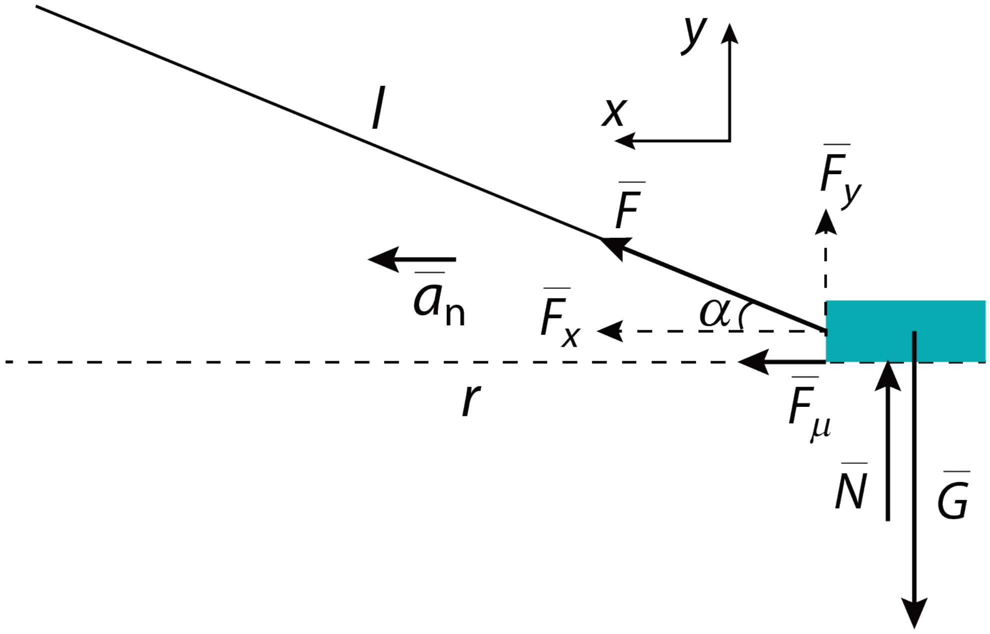
kierrosaika t = 3,8 s

kitkakerroin μ = 0,11

ympyräradan säde r = 4,5 m

kelkkailijan massa m = 57 kg

Piirretään kelkkaan vaikuttavat voimat



$\bar{G}$ = kelkan paino

$\bar{N}$ = liukukitka

$\bar{F}$ = aisan kelkkaan kohdistama voima

F_μ = jään kelkkaan kohdistama voima

Kelkka liikkuu tasaisessa ympyräliikkeessä. Tarkastellaan kelkkaan kohdistuvia voimia Newtonin II lain mukaan vaaka- ja pystysuunnassa suunnat huomioituna

$$\begin{aligned} F_x + F_\mu &= ma_\mathrm{n} \\ N + F_y - G &= 0. \end{aligned}$$

Tangon ja jäänpinnan välinen kulma

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{r}{l} = \frac{4{,}5\,\mathrm{m}}{5{,}0\,\mathrm{m}} \\ \alpha &= 25{,}84\,^\circ. \end{aligned}$$

Esitetään tangon komponentit tangon ja jäänpinnan välisen kulman avulla ja kitkalle $F_\mu = \mu N$ ja $a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r}$.

Saadaan

$$\begin{aligned} F\cos\alpha + \mu N &= m\frac{v^2}{r} \\ N &= G - F\sin\alpha. \end{aligned}$$

Sijoitetaan tukivoima.

$$F\cos\alpha + \mu G - \mu F\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$$

$$F\cos\alpha + \mu mg - \mu F\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$$

$$F\cos\alpha - \mu F\sin\alpha = m\frac{v^2}{r} - \mu mg$$

$$F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = m\frac{v^2}{r} - \mu mg$$

$$F = \frac{m\frac{v^2}{r} - \mu mg}{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}.$$

Koska kelkka liikkuu tasaisessa ympyräliikkeessä, on nopeudelle $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t}$.

Sijoitetaan saatu nopeus voiman yhtälöön. Aisaan vaikuttava voima on aisan suuntainen ja sen suuruus on

$$F = \frac{m\frac{(\frac{2\pi r}{t})^2}{r} - \mu mg}{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} = \frac{m\frac{4\pi^2 r^2}{t^2 r} - \mu mg}{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} = \frac{m\frac{4\pi^2 r}{t^2} - \mu mg}{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}$$

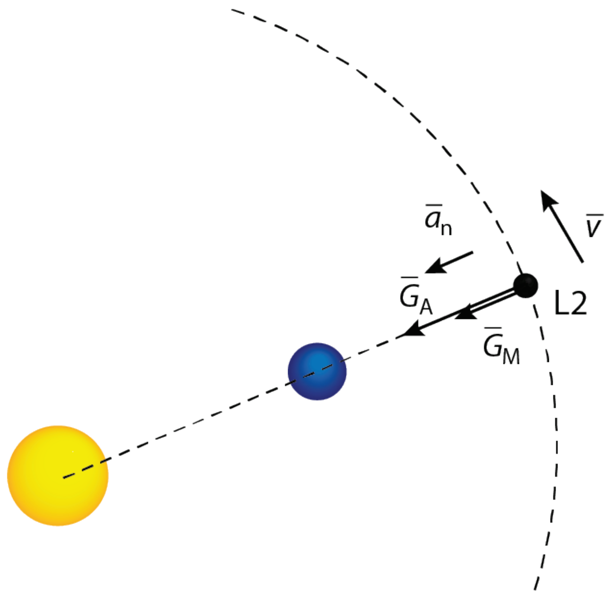
$$= \frac{57\,\text{kg}\cdot\frac{4\pi^2\cdot 4{,}5\,\text{m}}{(3{,}8\,\text{s})^2} - 0{,}11\cdot 57\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{(\cos 25{,}84^\circ - 0{,}11\sin 25{,}84^\circ)} = 750{,}82\,\text{N} \approx 750\,\text{N}.$$

Tehtävä 8.31.

a) Infrapunasäteilyä havainnoitaessa teleskoopin itsensä tuottama infrapunasäteily saattaisi häiritä mittauksia ja teleskoopin lähettämä infrapunasäteily on siksi eliminoitava niin perusteellisesti kuin mahdollista. Tämä toteutetaan pitämällä havaintolaitteet erittäin alhaisessa lämpötilassa.

b) Jos lämpösuoja olisi yhtenäinen kerros, lämpö pääsisi siirtymään johtumalla sen läpi. Lämpösuojan kerrosten väleissä olevassa tyhjiössä lämmön johtuminen ei ole mahdollista.

c)



$\bar{G}_A$ = Auringon teleskooppiin aiheuttama gravitaatiovoima

$\bar{G}_M$ = Auringon teleskooppiin aiheuttama gravitaatiovoima

Kuvattu ympyrärata on epästabiili, joten käytännössä teleskooppi liikkuu L2:n ympäristössä ja ratakorjaukset ovat välttämättömiä. Tätä ei ratkaisussa oteta huomioon.

d) gravitaatiovakio γ = 6,674 30 · 10^{-11} Nm^2/kg^2

Maan massa m_m = 5,9723 · 10^{24} kg

Auringon massa m_A = 1,989 · 10^{30} kg

Auringon ja Maan välinen etäisyys r = 1,4960 · 10^8 km

Maan ja teleskoopin välinen etäisyys d = 1,50 · 10^8 km

teleskoopin kiertoaika Auringon ympäri T = 265,2 d

Oletetaan, että teleskooppi kiertää Aurinkoa tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan suunnat ympyräradan säteen suunnassa huomioituina

$G_A + G_M = ma_n$, jossa m on teleskoopin massa ja a_n teleskoopin normaalikiihtyvyys. Normaalikiihtyvyydelle on voimassa

$a_n = \frac{v^2}{r+d}$, jossa d on Maan ja teleskoopin välinen etäisyys.

Teleskooppi kiertää yhden ympyräradan jaksonajan T aikana, jolloin teleskoopin ratanopeudelle on voimassa

$v = \frac{2\pi(r+d)}{T}$. Kun nopeus sijoitetaan normaalikiihtyvyyden yhtälöön, saadaan

$a_n = \frac{4\pi^2}{T^2}(r+d)$.

Auringon teleskooppiin kohdistama gravitaatiovoima on

$G_\mathrm{A} = \gamma \dfrac{m_\mathrm{A} m}{(r+d)^2}$ ja Maan teleskooppiin kohdistama gravitaatiovoima on

$$G_\mathrm{M} = \gamma \frac{m_\mathrm{M} m}{d^2}.$$

Edellä olevien yhtälöiden perusteella saadaan

$$\frac{4\pi^2}{T^2}(r+d) = \gamma \left(\frac{m_\mathrm{A}}{(r+d)^2} + \frac{m_\mathrm{M}}{d^2} \right).$$

Osoitetaan, että tämä toteutuu, kun $d = 1{,}50 \cdot 10^8$ km. Sijoitetaan arvot yhtälön molemmille puolille. Yhtälön vasemmalta puolelta saadaan arvoksi $5{,}9915 \cdot 10^{-3}$ m/s^2 ja yhtälön oikean puolen arvoksi $5{,}9914 \cdot 10^{-3}$ m/s^2. Nämä ovat riittävän tarkasti yhtä suuret, joten annettu Maan ja teleskoopin etäisyyden arvo noudattaa Newtonin II lakia.

Tehtävä 8.32.

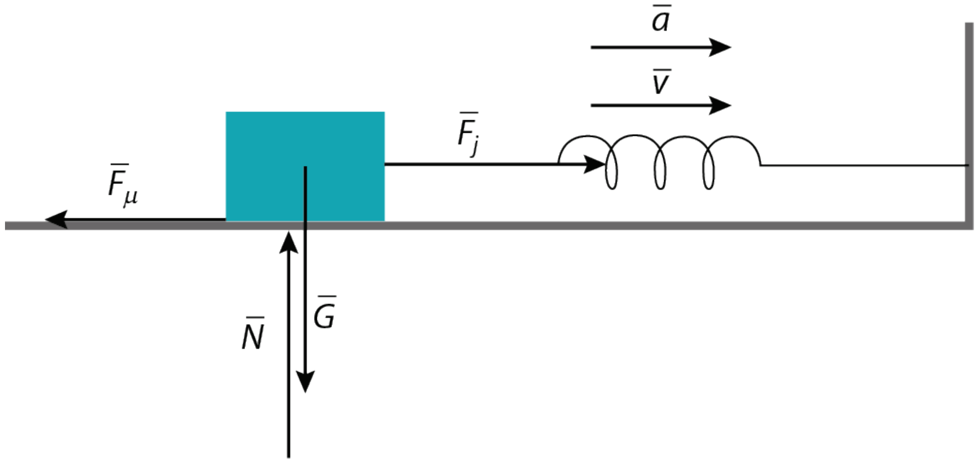
kappaleen massa m = 0,30 kg

jousen venymä s = 0,10 m

kappaleen ja lattian välinen kitkakerroin μ = 0,42

jousen jousivakio k = 40 N/m

Laaditaan kappaleesta liukumassa voimakuvio.



$\overline{G}$ = kappaleen painovoima

$\overline{F}_\mu$ = liukukitka

$\overline{N}$ = pinnan tukivoima

$\overline{F}_j$ = jousivoima

Merkitään jousen venymää alussa s. Kun kappale vapautetaan liukumaan, jousi puristuu kokoon toiseen suuntaan x:n verran.

Kun kappale liukuu pintaa pitkin, systeemin mekaaninen energia muuttuu liukukitkan tekemän työn vuoksi. Vaakasuoralla pinnalla liukukitka on $F_\mu = \mu N = \mu mg$.

Alkutilanteessa ja lopussa, kun kappaleen suunta kääntyy, kappale on paikallaan, joten mekaaninen energia on jouseen varastoitunutta potentiaalienergiaa.

$$E_{\text{pa}} + W = E_{\text{pl}}$$

$$\frac{1}{2}ks^2 - F_\mu(s+x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}ks^2 - \mu mg(s+x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$-\mu mg(s+x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}ks^2$$

$$-\mu mg(s+x) = \frac{1}{2}k\left(x^2 - s^2\right)$$

$$-\mu mg\,\cancel{(s+x)} = \frac{1}{2}k\left(x-s\right)\cancel{(x+s)}$$

$$-\mu mg = \frac{1}{2}k\left(x-s\right)$$

$$x - s = \frac{-2\mu mg}{k}$$

$$x = s - \frac{2\mu mg}{k} = 0{,}10\text{ m} - \frac{2\cdot 0{,}42\cdot 0{,}30\text{ kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{40\,\frac{\text{N}}{\text{m}}}$$

$$= 0{,}038\,197\,\text{m} \approx 3{,}8\,\text{cm}$$

Kappale liukuu siten kaiken kaikkiaan
$s + x = 0{,}10\text{ m} + 0{,}038\,197\text{ m} = 0{,}14\text{ m}$ eli 14 cm.

Tehtävä 8.33.

a) Kun rakettimoottori on käynnissä, polttoaineen sisäenergia muuntuu osittain rakettimoottorin ja vapautuvien kaasujen sisäenergiaksi ja osittain ulosvirtaavan kaasusuihkun liike-energiaksi.

   Osa sisäenergian muutoksesta lämmittää rakettimoottorin osia. Ulosvirtaava kaasusuihku aiheuttaa raketin runkoon työntövoiman, joka tekee työtä rakettiin. Osa ulosvirtaavan kaasusuihkun liike-energiasta kasvattaa raketin mekaanista energiaa.

b) Raketin mekaaninen energia kasvaa, kun moottori on käynnissä, koska rakettiin tehdään silloin työtä.

c) gravitaatiovakio $\gamma = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

maapallon massa on $M = 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$

maapallon säde $R = 6\,371\,000\ \mathrm{m}$

raketin korkeus polttoaineen loppuessa

$r_1 = h_1 + R = 8\,000\ \mathrm{m} + 6\,371\,000\ \mathrm{m} = 6\,379\,000\ \mathrm{m}$

Maapallon gravitaatiokentän voimakkuus on

$$g_\mathrm{r} = \gamma \frac{M}{r_1^2} = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot \frac{5{,}974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(6\,379\,000\ \mathrm{m})^2} = 9{,}7986\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \approx 9{,}80\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}.$$

d) Raketin etäisyys Maan keskipisteestä

$r_2 = h_2 + R = 4\,500\,000\,\mathrm{m} + 6\,371\,000\,\mathrm{m} = 10\,871\,000\,\mathrm{m}.$

Koska ulkoisia voimia ei tarvitse huomioida, raketin mekaaninen energia säilyy. Kun polttoaine loppuu, ollaan alkutilanteessa eli 8 km:n korkeudella Maan pinnasta. Lopputilanteessa eli lakipisteessä raketin korkeus on 4 500 km ja pystysuuntainen nopeus on nolla. Raketti liikkuu pystysuunnassa, joten vaakasuuntainen nopeus on koko lennon ajan häviävän pieni.

Kirjoitetaan mekaanisen energian säilymislain mukainen yhtälö ja ratkaistaan siitä raketin nopeus alkutilanteessa eli 8 km:n korkeudella.

$$E_{\mathrm{pa}} + E_{\mathrm{ka}} = E_{\mathrm{pl}} + E_{\mathrm{kl}}$$

$$-\gamma \frac{mM}{r_1} + \frac{1}{2} m v_{\mathrm{a}}^2 = -\gamma \frac{mM}{r_2} + \frac{1}{2} m v_{\mathrm{l}}^2$$

$$-2\gamma \frac{M}{r_1} + v_{\mathrm{a}}^2 = -2\gamma \frac{M}{r_2}$$

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{a}} &= \sqrt{2\gamma \frac{M}{r_1} - 2\gamma \frac{M}{r_2}} \\ &= \sqrt{2\gamma M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \\ &= \sqrt{2 \cdot 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 5{,}9723 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{1}{6\,379\,000\,\mathrm{m}} - \frac{1}{10\,871\,000\,\mathrm{m}} \right)} \\ &= 7\,186{,}17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 7{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

Raketin nopeus oli 7,2 km/s.

9 Mekaaninen aaltoliike ja ääni

Harjoittele

Tehtävä 9.1.

Oikeat vastaukset:

a) B

b) C

c) A

d) B

e) C

f) C

g) B

h) A

i) D

j) A

k) B

Tehtävä 9.2.

a) taajuusalueen pienin taajuus f_1 = 1,2 Hz ja suurin taajuus f_2 = 130 000 Hz

äänen nopeus vedessä (20 °C) on v = 1 484 m/s.

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $v = f\lambda$, joten aallonpituus on $\lambda = \dfrac{v}{f}$.

Ääniaaltojen aallonpituudet ovat

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{1\,484\,\mathrm{m/s}}{1{,}2\,1/\mathrm{s}} = 1\,236{,}667\ \mathrm{m} \approx 1\,200\,\mathrm{m}$$

$$\lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{1\,484\,\mathrm{m/s}}{130\,000\,1/\mathrm{s}} = 0{,}011\,415\ \mathrm{m} \approx 1{,}1\,\mathrm{cm}$$

Äänien aallonpituudet ovat siis väliltä 1,1 cm…1 200 m.

b) Kaikuluotauksessa äänilähde lähettää ääntä ja vastaanottaa kohteesta heijastuneen äänen. Äänen nopeus väliaineessa tiedetään, joten kohteen etäisyys saadaan matkaan kuluneen ajan perusteella, 2x = vt. Laskussa on huomioitava se, että ääni kulkee edestakaisen matkan (2x) lähettimestä kohteeseen ja takaisin.

c) Kohteen nopeus voidaan päätellä lähettämällä useampi peräkkäinen pulssi ja seuraamalla, miten pulssien kulkema matka tänä aikana muuttuu. Kohteen nopeudesta saadaan tietoa myös Dopplerin ilmiön avulla: lähestyvästä kohteesta heijastuneen äänen taajuus on korkeampi (ääni kuullaan korkeampana) ja loittonevasta kohteesta heijastuneen äänen taajuus on pienempi (ääni kuullaan matalampana).

Tehtävä 9.3.

a) Äänen heijastumisessa äänen aallonpituus λ, nopeus v ja taajuus f pysyvät muuttumattomina.

Äänen taittumisessa taajuus f ei muutu. Taulukkokirjan perusteella äänen nopeus ilmassa 20 °C:ssa on 343 m/s ja vedessä 1 484 m/s. Siten taittumisessa äänen nopeus v kasvaa, kun ääni etenee ilmasta veteen.

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $v = f\lambda$, joten nopeuden v suureneminen merkitsee myös sitä, että aallonpituus λ kasvaa.

b) ääniaallon A tulokulma $\alpha_{1A} = 7{,}5°$

ääniaallon B tulokulma $\alpha_{1B} = 15{,}0°$

Taulukkokirjan mukaan lämpötilassa T = 20 °C äänen nopeus ilmassa on v_1 = 343 m/s ja vedessä v_2 = 1 484 m/s.

Taittumislain mukaan ääniaallolle A taitekulma on

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_{1A}}{\sin\alpha_{2A}}$$

$$\sin\alpha_{2A} = \frac{v_2 \sin\alpha_{1A}}{v_1}$$

$$\alpha_{2A} = \sin^{-1}\left(\frac{v_2 \sin\alpha_{1A}}{v_1}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1\,484\,\text{m/s} \cdot \sin 7{,}5°}{343\,\text{m/s}}\right) = 34{,}383° \approx 34{,}4°.$$

Vastaava yhtälö ääniaallon B tulokulmalla antaa virheilmoituksen. Ääniaalto B kokonaisheijastuu. Ilman ja veden rajapinnassa taitekulma on 90°, kun tulokulma on kokonaisheijastuksen rajakulma α_r. Kokonaisheijastuksen rajakulma on

Koska $\alpha_{1B} > \alpha_r$, ääniaalto B kokonaisheijastuu. Ääniaalto A:n taitekulma on 34,4°.

Tehtävä 9.4.

a) jousen pituus L = 4,2 m

heilahdusten lukumäärä N = 10 ajassa Δt = 15,0 s

Kun jousta poikkeutetaan sopivassa tahdissa, jouseen muodostuu seisova aaltoliike. Heilahdusten lukumäärän perusteella seisovan aallon taajuus on

$$f_1 = \frac{N}{\Delta t} = \frac{10}{15{,}0\,\mathrm{s}} = 0{,}6667\,\mathrm{Hz} \approx 0{,}67\,\mathrm{Hz}.$$

Kuvan perusteella seisovan aallon aallonpituus on
$\lambda_1 = 2L = 2 \cdot 4{,}2\ \mathrm{m} = 8{,}4\ \mathrm{m}$.

b) Kuvan perusteella jousessa on seisova aalto, jossa koko jousen matkalla on 2,5 aallonpituutta eli $L = 2{,}5 \cdot \lambda_2$, joten aallonpituus on $\lambda_2 = \frac{L}{2{,}5} = \frac{4{,}2\,\text{m}}{2{,}5} = 1{,}68\,\text{m} \approx 1{,}7\,\text{m}$.

Aallon etenemisnopeus jousessa on sama kuin a-kohdassa. Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan

$$v = f_1\lambda_1 = \frac{N}{\Delta t}\lambda_1 = \frac{10}{15{,}0\,\text{s}} \cdot 8{,}4\,\text{m} = 5{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tämän perusteella uuden aallon taajuus on

$$v = f_2\lambda_2$$

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{5{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}68\,\text{m}} = 3{,}3333\,\text{Hz} \approx 3{,}3\,\text{Hz}.$$

Jaksonaika on taajuuden käänteisluku,

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{3{,}3333\,\text{Hz}} = 0{,}30\,\text{s}.$$

Seisovan aaltoliikkeen aallonpituus on 1,7 m, jaksonaika 0,30 s ja taajuus 3,3 Hz.

c) Pulssi kulkee edestakaisen matkan $2L = 8{,}4$ m nopeudella $v = 5{,}6$ m/s ajassa

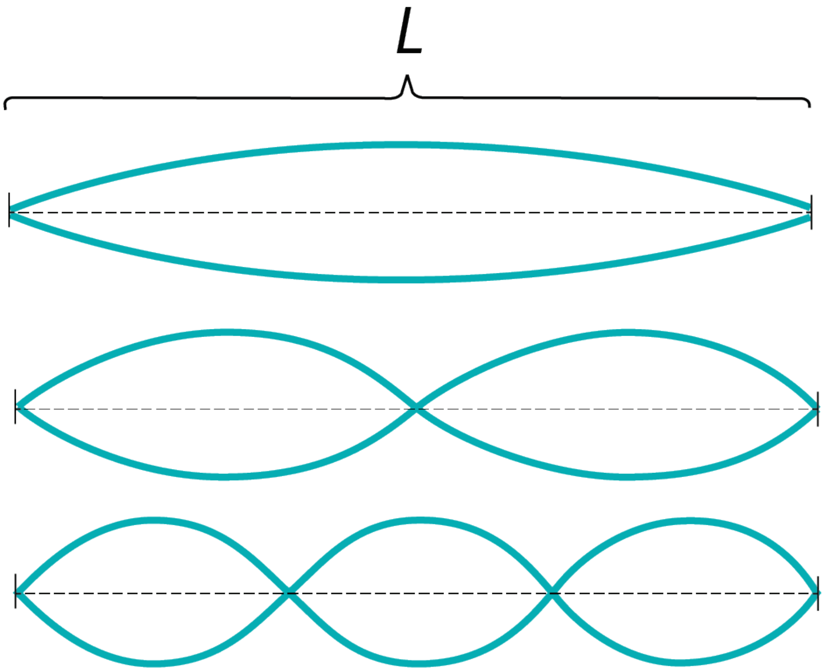
$$t = \frac{s}{v} = \frac{2L}{v} = \frac{8{,}4\,\text{m}}{5{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1{,}5\,\text{s}.$$

Tehtävä 9.5.

värähtelevän kielen pituus L = 69 cm

perustaajuus f = 65,4 Hz

a) Kieleen syntyvät seisovat aaltoliikkeet perustaajuudelle ja kahdelle ylätaajuudelle.



$$\frac{\lambda_1}{2} = L$$

$$\lambda_2 = L$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$$

Päistään kiinnitettyyn kieleen muodostuvan seisovan aallon aallonpituus on perustaajuudella kaksi kertaa kielen pituus.

Seisovan aallon aallonpituus

$\lambda_1 = 2L = 2 \cdot 0{,}69\,\text{m} = 1{,}38\,\text{m} \approx 1{,}4\,\text{m}.$

b) Aallon nopeus kielessä on vakio kaikille seisoville aalloille.

Ensimmäisellä ylätaajuudella aallonpituus $\lambda_2 = L = 0{,}69\,\text{m}$, joten aaltoliikkeen perusyhtälöstä saadaan taajuudeksi

$$v = f_2\lambda_2$$
$$f_1\lambda_1 = f_2\lambda_2$$
$$f_2 = \frac{f_1\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{f_1 2L}{L} = 2f_1 = 2\cdot 65{,}4\,\text{Hz} = 130{,}8\,\text{Hz} \approx 131\,\text{Hz}.$$

Toisella ylätaajuudella aallonpituus

$\lambda_3 = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3}\cdot 0{,}69\,\text{m} = 0{,}46\,\text{m}$, joten aaltoliikkeen perusyhtälöstä saadaan taajuudeksi

$$v = f_3\lambda_3$$
$$f_1\lambda_1 = f_3\lambda_3$$
$$f_3 = \frac{f_1\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{f_1 2L}{\frac{2}{3}L} = 3f_1 = 3\cdot 65{,}4\,\text{Hz} = 196{,}2\,\text{Hz} \approx 196\,\text{Hz}.$$

c) Aallon etenemisnopeus kielessä saadaan aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} v &= f_1\lambda_1 \\ &= f_1\lambda_1 = 65{,}4\,\text{Hz}\cdot 2\cdot 0{,}69\,\text{m} \\ &= 90{,}252\,\text{m/s} \approx 90\,\text{m/s}. \end{aligned}$$

Tehtävä 9.6.

a) tulokulma α = 33°

Heijastumislain mukaan tulokulma on yhtä suuri kuin heijastuskulma, joten heijastuskulma on $\beta = \alpha = 33°$.

b) nopeus väliaineessa A v_1 = 5 100 m/s

nopeus väliaineessa B v_2 = 1 500 m/s

tulokulma α_1 = 33°

Taittumislain mukaan

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1.$$

Taitekulma on

$$\alpha_2 = \sin^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1\,500\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\,100\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\cdot\sin 33°\right) = 9{,}217\,805° \approx 9{,}2°.$$

c) Jotta kokonaisheijastuminen voisi tapahtua, aallon on tultava aineiden rajapintaan väliaineesta B.

Lasketaan, kuinka suuri on kokonaisheijastumisen rajakulma. Kokonaisheijastumisen rajakulma on se tulokulma, jossa aalto taittuu rajapintaa pitkin eli taitekulma on α_2 = 90°. Taittumislaista saadaan kokonaisheijastumisen rajakulmaksi

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_r}{\sin\alpha_2}$$

$$\sin\alpha_r = \frac{v_1 \sin\alpha_2}{v_2}$$

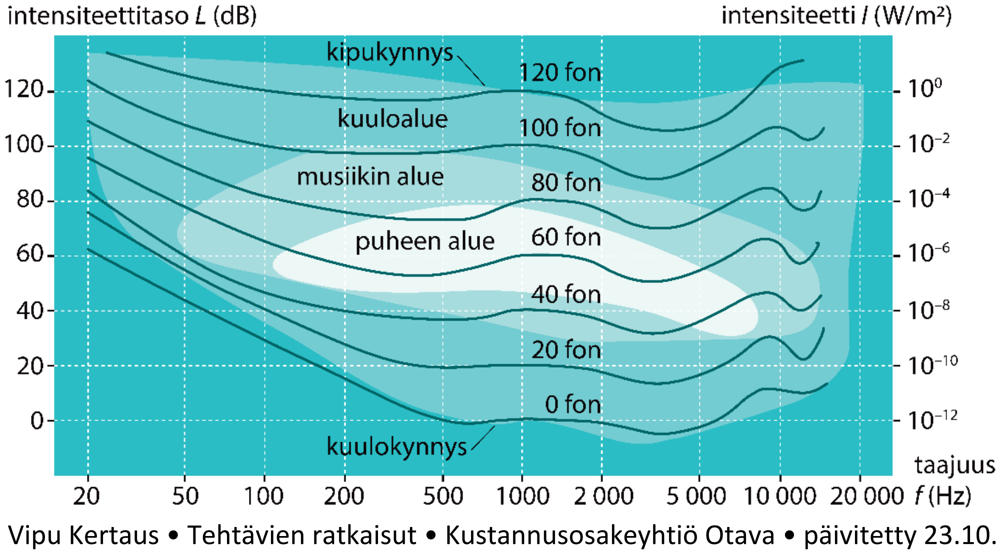
$$\alpha_r = \sin^{-1}\left(\frac{v_1 \sin\alpha_2}{v_2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1\,500\,\mathrm{m/s} \cdot \sin 90^\circ}{5\,100\,\mathrm{m/s}}\right) = 17{,}105^\circ \approx 17{,}1^\circ.$$

Tehtävä 9.7.

a) Mitä suurempi äänen taajuus on, sitä korkeammalta ääni kuulostaa. Ääninäytteen 2 taajuus on suurempi kuin ääninäytteen 1, joten ääninäyte 2 kuulostaa korkeammalla.

Ihmiskorvan aistiman äänen voimakkuus ei ole suoraan verrannollinen intensiteettiin vaan se on intensiteetin suhteen logaritminen. Intensiteettitaso on suure, joka on intensiteetin suhteen logaritminen. Parhaiten kuuloaistimuksen voimakkuutta kuvaa äänekkyystaso, sillä ääneen taajuus vaikuttaa myös kuuloaistimukseen. Taulukkokirjan kuuloaluetta esittävän kuvaajan perusteella 440 Hz ja 1 000 Hz:n äänten välillä ei kuitenkaan ole tässä suurta eroa. Intensiteettitasojen perusteella voidaan sanoa, että ääninäytteen 2 äänen voimakkuus on suurempi kuin ääninäytteen 1.

Koska $f_2 > f_1$ ja $L_2 > L_1$, kuulostaa ääninäytteen 2 ääni korkeammalta ja voimakkaammalta kuin ääninäytteen 1 ääni.



b) Äänen intensiteettitaso on $L = 10\lg\left(\frac{I}{I_0}\right)\text{dB}$, jossa

$I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 on kuulokynnyksen intensiteetti.

Ratkaistaan tästä intensiteetti.

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0}\text{dB}$$

$$\frac{L}{10\text{ dB}} = \lg\frac{I}{I_0}$$

$$\frac{I}{I_0} = 10^{\frac{L}{10\text{ dB}}}$$

$$I = I_0 \cdot 10^{\frac{L}{10\text{ dB}}}$$

Vertaillaan intensiteettitasoja L_1 = 40 dB ja L_2 = 68 dB vastaavia intensiteettejä.

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cancel{I_0} \cdot 10^{\frac{L_2}{10\text{ dB}}}}{\cancel{I_0} \cdot 10^{\frac{L_1}{10\text{ dB}}}} = \frac{10^{\frac{L_1}{10\text{ dB}}}}{10^{\frac{L_2}{10\text{ dB}}}} = \frac{10^{\frac{68\text{ dB}}{10\text{ dB}}}}{10^{\frac{40\text{ dB}}{10\text{ dB}}}} = 10^{6,8-4} = 10^{2,8} = 630,957 \approx 630.$$

Eli ääninäytteen 2 intensiteetti on 630-kertainen ääninäytteen 1 intensiteettiin verrattuna.

Tehtävä 9.8.

a) Kuvaajasta luettuna 2 000 Hz:n ääni, jonka intensiteetti on 0,50 W/m^2 tuottaa kipua.

b) Ihmisen kuulokynnys on 0 fon. Tätä käyrää tutkimalla voidaan todeta, että ihminen kuulee 50 Hz:n äänen, jos äänen intensiteettitaso on noin 44 dB. Ihminen ei siis kuule 50 Hz:n ääntä, jonka intensiteettitaso on 40 dB.

c) Kaavion perusteella ihminen aistii paremmin suuria kuin pieniä taajuuksia eli ihminen kuulee korkeat äänet matalia paremmin. Jotta bassokaiutinelementin tuottaman äänen kuuloaistimus saadaan yhtä voimakkaaksi kuin keski- ja diskanttielementtien tuottamien äänten kuuloaistimus, bassokaiuttimelle pitää tuoda signaali suurella teholla. Suurempi teho tuottaa suuremman äänen intensiteetin.

Tehtävä 9.9.

äänen nopeus ilmassa v = 340 m/s

havaitsijan nopeus $v_\mathrm{h} = 25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{25}{3,6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

soitettu taajuus f_0

Ennen ohitusta pyöräilijä kuulee taajuuden

$$f = f_0\,\frac{v+v_\mathrm{h}}{v} = f_0\,\frac{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \frac{25}{3,6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1,020\,424\,84\;f_0 \approx 1,020\;f_0$$

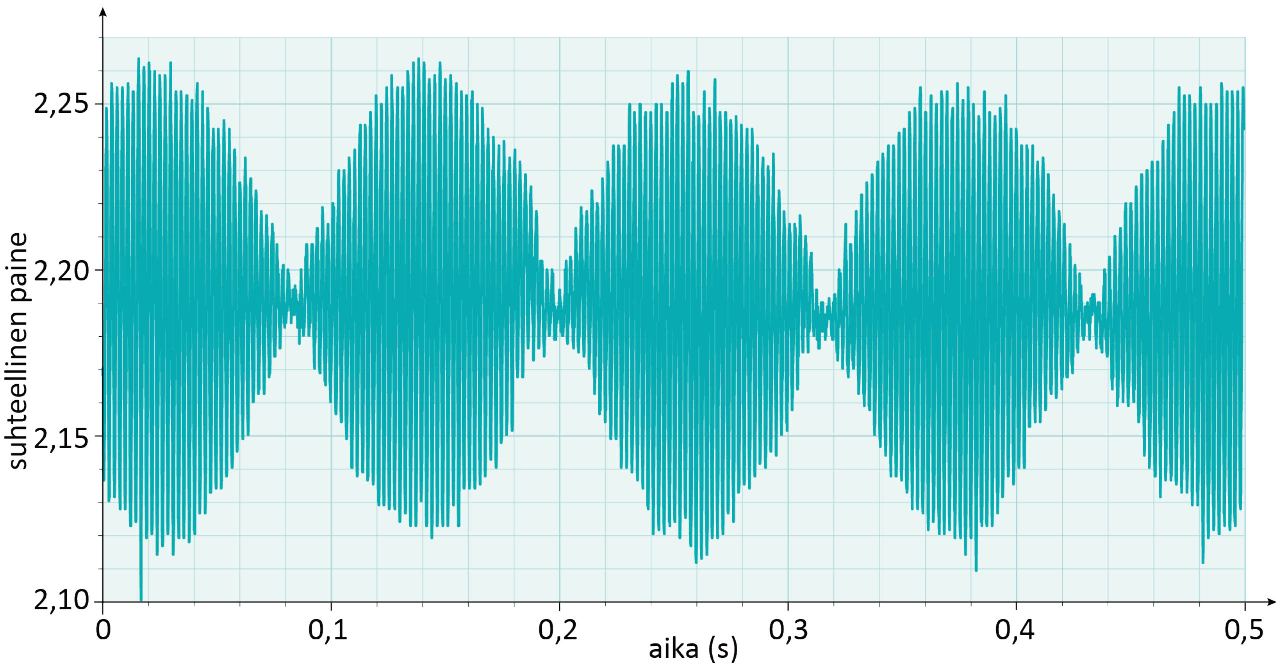
Ohituksen jälkeen pyöräilijä kuulee taajuuden

$$f = f_0\,\frac{v-v_\mathrm{h}}{v} = f_0\,\frac{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \frac{25}{3,6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0,979\,575\,16\;f_0 \approx 0,980\;f_0$$

Ennen ohitusta pyöräilijä kuulee 2,0 % korkeamman taajuuden kuin soitettu taajuus ja ohituksen jälkeen 2,0 % matalamman taajuuden kuin soitettu taajuus.

Tehtävä 9.10.

a)



b) Kun kaksi äänirautaa laitetaan tuottamaan mekaanista aaltoliikettä (ääntä) samaan aikaan, äänirautojen synnyttämät mekaaniset aallot (ääniaallot) interferoivat. Kun äänirautojen taajuudet ovat hieman toisistaan poikkeavat, aallot interferoivat välillä vahvistavasti ja välillä heikentävästi. Vahvistava interferenssi kuullaan äänen voimakkuuden kasvuna ja heikentävä interferenssi voimakkuuden pienentymisenä. Jaksottainen huojuntaääni kuullaan, koska interferenssin seurauksena syntyvän aallon paineenmuutokset ovat jaksottaisia.

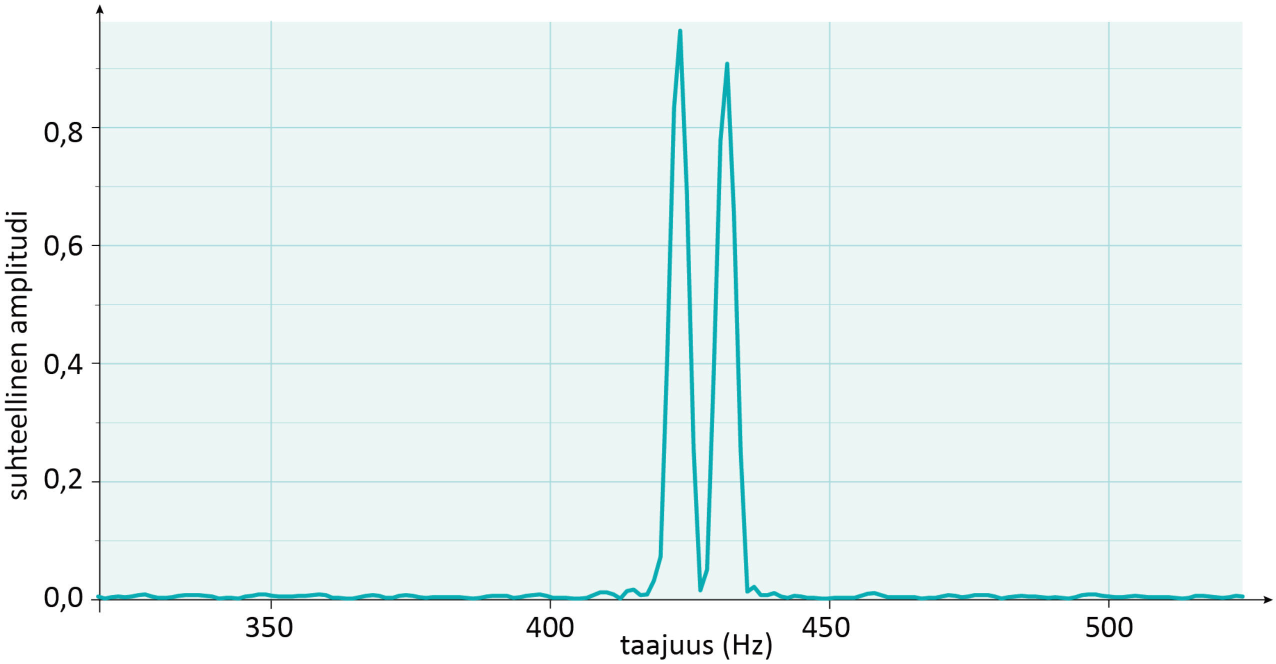
c) Huojuntataajuus saadaan määritettyä kuvaajalta huojunnan jaksonajasta eli peräkkäisten suhteellisen paineen amplitudien minimien välisestä ajasta. Kuvaajan perusteella kolmen peräkkäisen jakson aika on t = 0,3487 s.

Tästä voidaan laskea huojunnan jaksonaika $T = \frac{t}{3}$.

Huojuntataajuus on

$$f = \frac{1}{T} = \frac{3}{t} = \frac{3}{0{,}3487\,\text{s}} = 8{,}603\,\text{Hz} \approx 8{,}6\text{ Hz}.$$

d) Huojuntaäänen muodostavien äänten taajuudet saadaan mittausaineistolle taajuusanalyysille tehdyn FFT-analyysilla.



Huojuntaäänen muodostavien äänten taajuudet ovat

f_1 = 423,58 Hz ja f_2 = 432,13 Hz.

Summa-aallon taajuus on

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{423{,}58\,\text{Hz} + 432{,}13\,\text{Hz}}{2} = 427{,}855\,\text{Hz} \approx 428\,\text{Hz}.$$

Tehtävä 9.11.

a) Väärin. Värähtelijöiden välinen etäisyys on neljä aallonpituutta.

b) Oikein. Koska molempien lähettämät aallot ovat aallonpohjana hetkellä, jolloin aalto on toisen värähtelijän kohdalla, värähtelee värähtelijät samassa vaiheessa.

c) Oikein. Molempien värähtelijöiden lähettämät aallot ovat pisteessä A aallonharjoja, joten aallot ovat samassa vaiheessa.

d) Oikein. Pisteessä C aallot ovat samassa vaiheessa, jolloin ne vahvistavat toisiaan.

e) Väärin. Pisteessä B toisen aallon lähettämä aalto on aallonpohjana ja toisen aallonharjana, jolloin ne heikentävät toisiaan.

Tehtävä 9.12.

a) Mereltä saapuu tasoaaltoja aallonmurtajia kohti. Aallonmurtajat vaimentavat ja heijastavat mereltä tulevia aaltoja. Kun mereltä tulevat aallot kohtaavat aallonmurtajan pään, aallonmurtajan pää toimii uutena aaltolähteenä, joka synnyttää Huygensin periaatteen mukaan ympyräaaltoja. Jos mereltä tulevien tasomaisten aaltojen aallonpituus on aallonmurtajan muodostaman salmen leveyden luokkaa, aallonmurtajan muodostamassa salmessa syntyy uusi ympyräaalto, joka taipuu aallonmurtajan taakse.

b) Jos mereltä saapuu aalto suoraan aallonmurtajan muodostamaan aukkoon, aukon kohdalla oleva vene kohtaa nämä aallot. Tämän veneen kohtaamilla aalloilla on likimain sama aallonpituus, amplitudi, taajuus ja nopeus kuin mereltä aallonmurtajaan tulevalla aallolla, mikäli meren syvyys ei merkittävästi muutu.

   Aallonmurtajan pää synnyttää Huygensin periaatteen mukaan ympyräaaltoja. Aallonmurtajan takana olevat veneet kohtaavat nämä syntyneet ympyräaallot. Ympyräaaltojen taajuus on sama, mutta amplitudi on pienempi kuin mereltä aallonmurtajalle saapuvalla aaltoliikkeellä.

Tehtävä 9.13.

a) Melu on häiritsevää, epämiellyttävää tai kuulolle haitallista ääntä. Kun äänen intensiteetti on suuri, ääni kuljettaa mukanaan paljon energiaa. Kun tällainen ääniaalto etenee korvaan, se voi tuhota korvan simpukassa olevia kuuloaistisoluja, jotka eivät uusiudu. Kuuloaistisolujen vaurioituminen voi johtaa pysyvään kuulonalenemaan, jossa tietyn taajuisten äänten kuuleminen on mahdotonta. Solujen tuhoutuminen voi myös aiheuttaa tinnitusta eli korvien jatkuvaa soimista.

   Melu häiritsee keskittymistä ja voi aiheuttaa unihäiriöitä ja heikentää unen laatua. Melualtistus voi muun muassa lisätä stressiä ja kohottaa verenpainetta sekä lisätä sydänsairauksien riskiä.

b) Melua voidaan pienentää vaikuttamalla auton tuottaman melun voimakkuuteen tai asuinalueelle tulevan äänen voimakkuuteen.

Kolme esimerkiksi seuraavista:

Auton tuottama melun voimakkuuden pienentämiseen vaikuttavia tekijöitä

-nopeuksien pienentäminen: Kuvaajan mukaan nopeuden pienentäminen pienentää äänen intensiteettitasoa, mikä taas pienentää asuinalueelle tulevaa melua.

- tien pinnan laadun parantaminen: Mitä epätasaisempi tien pinta on, sitä enemmän tiellä kulkeva auto tuottaa ääntä.

Asuinalueelle tulevan äänen voimakkuuteen vaikuttavia tekijöitä

- tien etäisyys asuinalueesta: Ääni on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Kun tie rakennetaan mahdollisimman kauaksi asuinalueesta, heikkenee äänen intensiteetti.

- meluvallien rakentaminen tien ja asuinalueen väliin: Ääni heijastuu ja absorboituu meluvallissa, jolloin ääntä ei tule asuinalueelle yhtä paljoa kuin ilman meluvallia.

- istutukset asuinalueen ja tie väliin: Istutukset toimivat autoista tulevan äänen absorboijina. Etenkin autoista tulevaa ilmanvastuksen aiheuttamaa kohinaa absorboituu kasvillisuuteen.

c) auton ajonopeus v = 80 km/h

auton stereoiden tuottaman äänen intensiteettitaso L_s = 74 dB

intensiteetin vertailuarvo $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Liitteenä olevan tiedoston mukaan, kun auton nopeus on 80 km/h, syntyy autosta melua intensiteettitasolla L_A = 72 dB. Määritetään auton aiheuttaman äänen intensiteetti intensiteettitason avulla

$$L_A = 10\lg\left(\frac{I_A}{I_0}\right)\text{dB}.$$

Auton lähettämän äänen intensiteetiksi saadaan edellisen yhtälön perusteella

$$I_A = I_0 \cdot 10^{\frac{L_A}{10\,\text{dB}}} = 10^{-12}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\cdot 10^{\frac{72\,\cancel{\text{dB}}}{10\,\cancel{\text{dB}}}} = 10^{-12}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\cdot 10^{7,2} = 10^{-4,8}\frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Auton stereoiden tuottama intensiteetti on vastaavasti

$$L_s = 10\lg\left(\frac{I_s}{I_0}\right)\text{dB}.$$

$$I_A = I_0 \cdot 10^{\frac{L_A}{10\,\text{dB}}} = 10^{-12}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\cdot 10^{\frac{74\,\cancel{\text{dB}}}{10\,\cancel{\text{dB}}}} = 10^{-12}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\cdot 10^{7,4} = 10^{-4,6}\frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Kokonaisintensiteetti autossa on $I = I_A + I_s$.

Tällöin auton ja stereoiden aiheuttama intensiteettitaso on

$$L_{\mathrm{A}} = 10\lg\left(\frac{I_{\mathrm{A}} + I_{\mathrm{s}}}{I_0}\right)\mathrm{dB} = 10\lg\left(\frac{10^{-4,8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} + 10^{-4,6}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}{10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}\right)\mathrm{dB} = 76{,}1244\ \mathrm{dB} \approx 76\ \mathrm{dB}.$$

Sovella

Tehtävä 9.14.

Vastaus A, 0 p

Kyseessä on seisovan aallon muodostuminen ääniraudoissa. Äänirautojen tuottamat ääniaallot muodostavat interferenssin seurauksena seisovan aallon. Seisovassa aallossa eri suuntiin kulkevat aallot interferoivat. Syntyy kohtia, joissa kohtaavat aallot vahvistavat toisiaan niin, että värähtely on laajaa ja toisaalta heikentävät toisiaan niin, että värähtelijät eivät juurikaan värähtele. Laajan värähtelyn kohdissa, eli seisovan aallon kupukohdissa, kuullaan voimakas ääni. Kohdissa, joissa värähtelijät eivät värähtele, eli seisovan aallon solmukohdissa, kuullaan hiljainen ääni. (0 p)

Vastaus B, 4 p

Huojunta eli äänen voimakkuuden jaksottainen vaihtelu aiheutuu kahden lähes samantaajuisen äänen interferenssistä. Interferenssi tarkoittaa kohtaavien aaltojen yhteisvaikutusta. (2 p) Lisäpainon vuoksi äänirautojen taajuudet eroavat hieman toisistaan, joten interferenssissä syntyvän summa-aallon amplitudi vuoroin suurenee ja pienenee. Amplitudi kuvaa värähdysliikkeen laajuutta, joka tässä yhteydessä tarkoittaa äänen voimakkuutta. Kun ääniaalloille tapahtuu vahvistava interferenssi, ilmaan syntyvät paineen vaihtelut ovat suuria ja ääni kuullaan voimakkaana. Heikentävän interferenssin tapauksessa paineen vaihtelu on pientä ja ääni kuulostaa hiljaiselta. (2 p)

Vastaus C, 2 p

Kyseessä on huojunta. Kahden ääniraudan tuottamat ääniaallot interferoivat, jolloin ääni interferoi vahvistavasti ja heikentävästi. (2 p) Ääni kuullaan vuoroin voimakkaana ja hiljaisena. Kun ääni on voimakas, ilman molekyylit värähtelevät laajasti. Kun ääni hiljainen, ilman molekyylien värähtely on vähäistä. Paineaallot siirtyvät mekaanisena aaltoliikkeenä kohti korvaa. Kun paineaallot osuvat korvaan, korvan tärykalvo alkaa värähdellä. Signaali etenee sisäkorvaan, jossa mekaaninen värähtely muuntuu sähköiseksi signaaliksi. Sähköinen signaali siirtyy kuulohermoa pitkin aivoihin, jossa tapahtuu kuuloaistimus.

Tehtävä 9.15.

edestakaisten liikkeiden määrä n = 19

edestakaisiin liikkeisiin kulunut aika t = 5,93 s

a) Koska jousta liikuteltiin jousen pituussuunnassa edestakaisin, jouseen syntyi pitkittäinen aaltoliike.

b) Mekaanisen aallon taajuus riippuu aaltolähteen taajuudesta. Aallon taajuus on

$$f=\frac{n}{t}=\frac{19}{5{,}93\,\mathrm{s}}=3{,}204\,05\,\mathrm{Hz}\approx 3{,}20\,\mathrm{Hz}.$$

c) aallon matka s = 1,84 m

aallon etenemisaika t = 1,74 s

Aalto etenee väliaineessa tasaisessa liikkeessä. Aallon nopeus on

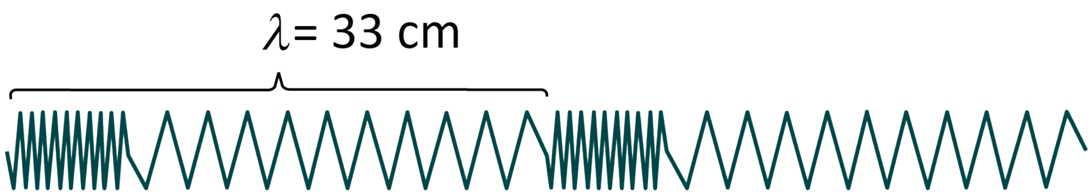
$$v=\frac{s}{t}=\frac{1{,}84\,\mathrm{m}}{1{,}74\,\mathrm{s}}=1{,}057\,47\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 1{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Aallonpituus ratkaistaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä.

$$v=f\lambda$$

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{\frac{s}{t}}{f}=\frac{s}{ft}=\frac{1{,}84\,\mathrm{m}}{\frac{19}{5{,}93\,\mathrm{s}}\cdot 1{,}74\,\mathrm{s}}=0{,}330\,042\,\mathrm{m}\approx 33\,\mathrm{cm}$$

d)



e) Kun jousen kireys pysyy samana, mekaanisen aallon nopeus ei muutu. Aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan aallon taajuus ja aallonpituus ovat kääntäen verrannollisia. Kun aallon taajuus suurenee, aallonpituus pienenee.

f) Kun jousta kiristetään, mekaanisen aallon etenemisnopeus jousessa kasvaa. Kun taajuus ei muutu, aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan aallon nopeuden kasvaessa myös aallonpituus kasvaa.

Tehtävä 9.16.

a) Vedessä etenevät aallot ovat mekaanisia aaltoja. Mekaanisessa aallossa väliaineen rakenneosaset värähtelevät omien tasapainoasemiensa ympärillä. Aallot kuljettavat mukanaan energiaa, mutta väliaine ei etene.

Veden pinnassa aallot ovat yhdistelmä pitkittäistä ja poikittaista aaltoliikettä. Yksittäiset värähtelijät liikkuvat pinnan lähellä ympyrän muotoista rataa.

b) aallon tulokulma α_1 = 45°

aallon taitekulma α_1 = 22°

Mekaanisen aallon taittumisessa aallon taajuus ei muutu.

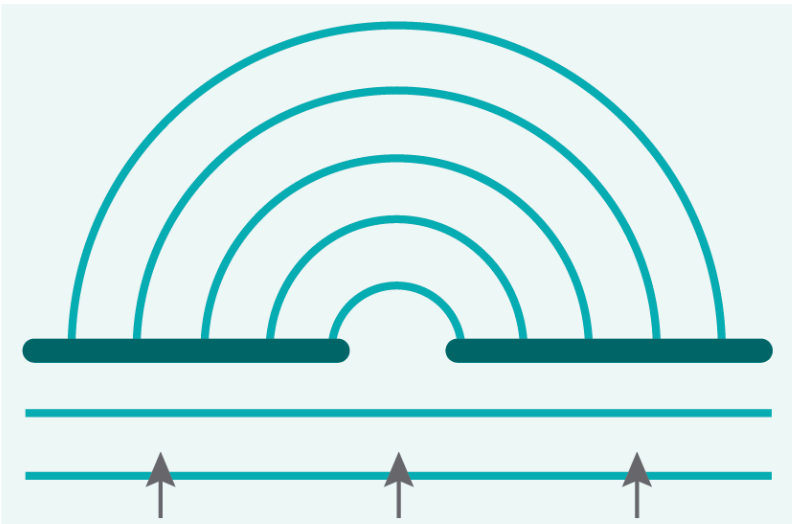
Ratkaistaan taittuneen aallon nopeus v_2 taittumislain avulla.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

$$v_2 = v_1 \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = 5{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\sin 22^\circ}{\sin 45^\circ} = 2{,}966\,733\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Koska aallon nopeus v pienenee ja taajuus f pysyy samana, aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan aallonpituus λ pienenee.

c) Kun aaltorintama kohtaa esteen, tapahtuu aallon diffraktio eli taipuminen. Huygensin periaatteen mukaan aallonmurtajan rako toimii alkeisaallon lähteenä. Raosta syntyy ympyräaaltoja.



Aallonmurtajaan osuneet aallot heijastuvat ja heijastuneet aallot noudattavat heijastumislakia.

Tehtävä 9.17.

a) Ääni on väliaineessa etenevää mekaanista aaltoliikettä, jolla on tietty taajuus, aallonpituus ja nopeus. Kun pillillä puhallettu ilmavirta kulkee pyörivän reikälevyn reikien läpi, ilmaan aiheutuu tietyllä taajuudella paine-eroja. Paine-erot aiheuttavat ilmaan mekaanisen aaltoliikkeen, joka kuullaan äänenä.

b) Pillillä puhallettiin ilmaa pyörivän reikälevyn läpi. Kun puhallettiin uloimman kehän reikien läpi, syntyneen äänen taajuus oli suurin. Kun puhallettiin sisimmän kehän reikien läpi, syntyneen äänen taajuus oli pienin.

c) Mitä kauempana reiät ovat levyn keskipisteestä, sitä suurempi on reikien ratanopeus. Yhden jaksonajan aikana ulompana olevat reiät liikkuvat pidemmän matkan. Ilmavirta kulkee jaksottaisesti reikien läpi, jolloin ilmaan syntyy tietyllä taajuudella paineaaltoja. Koska ulompana olevat reiät kulkevat suuremmalla nopeudella, puhalluksesta ilmaan syntyvien paineaaltojen taajuus on suurempi kuin lähellä levyn keskipistettä olevien reikien tapauksessa. Kun taajuus on suurempi, kuullaan ulompana olevien reikien synnyttämä ääni korkeampana kuin lähempänä levyn keskipistettä olevien reikien synnyttämä ääni.

Tehtävä 9.18.

a) 7 m

b) 0,2 Hz

c) 8 m/s

d) E

e) B

f) B

g) E

Tehtävä 9.19.

a) Aallonpituus lyhenee, kun taajuutta kasvatetaan.

b) Amplitudin muutos ei vaikuta aallonpituuteen. Amplitudi kuvaa värähtelyn laajuutta kohtisuorassa aallon etenemissuuntaa vastaan.

c) Aallon etenemisnopeuden voi mitata rullamitan ja sekuntikellon avulla. Määritetään jokin matka rullamitan avulla ja mitataan sekuntikellolla aika, joka aallolla menee matkan kulkemiseen. Sitten lasketaan tasaisen liikkeen yhtälöllä $s = vt$ aallon nopeus $v = s/t$.

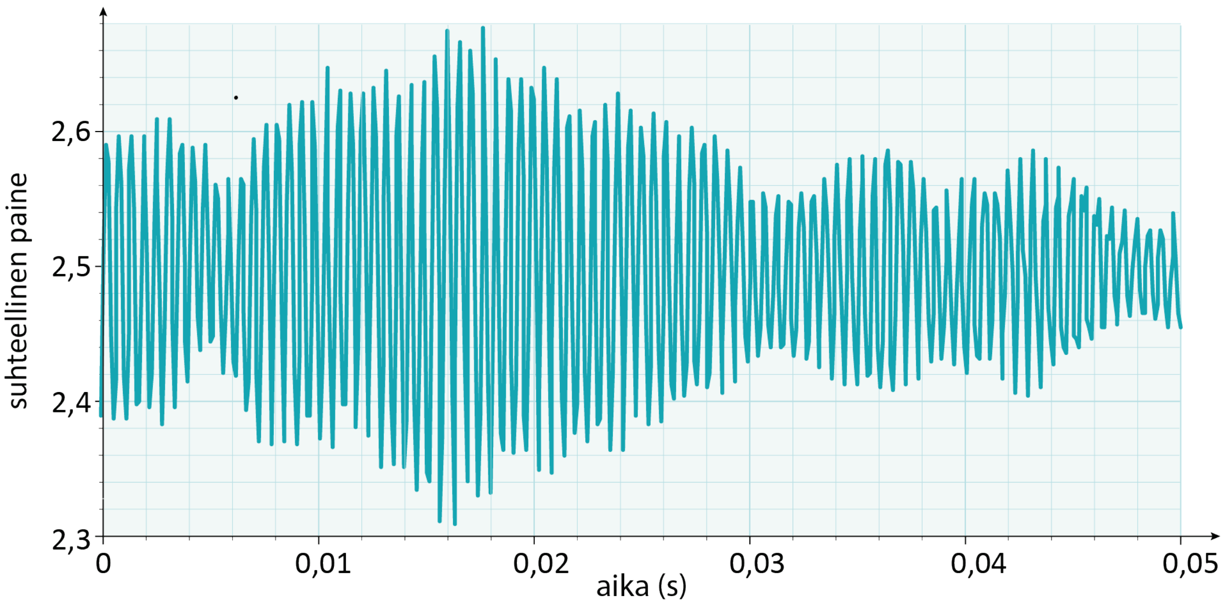
Aallon taajuus saadaan mitattua niin, että lasketaan, kuinka monta värähdystä kulkee tietyn paikan ohi tietyssä ajassa. Lasketaan värähdysten määrä ja jaetaan se mitatulla ajalla. $f = n/t$.

d) Jos paineanturien etäisyys on tasan yhden aallonpituuden mittainen, aallot ovat samassa aiheessa. Paineanturi, joka on kauempana äänilähteestä, näyttää värähtelyn amplitudin olevan pienempi kuin lähempänä äänilähdettä oleva paineanturi. Tämä johtuu siitä, että aallon energia jakautuu suuremmalle pinta-alalle ja aalto vaimenee.

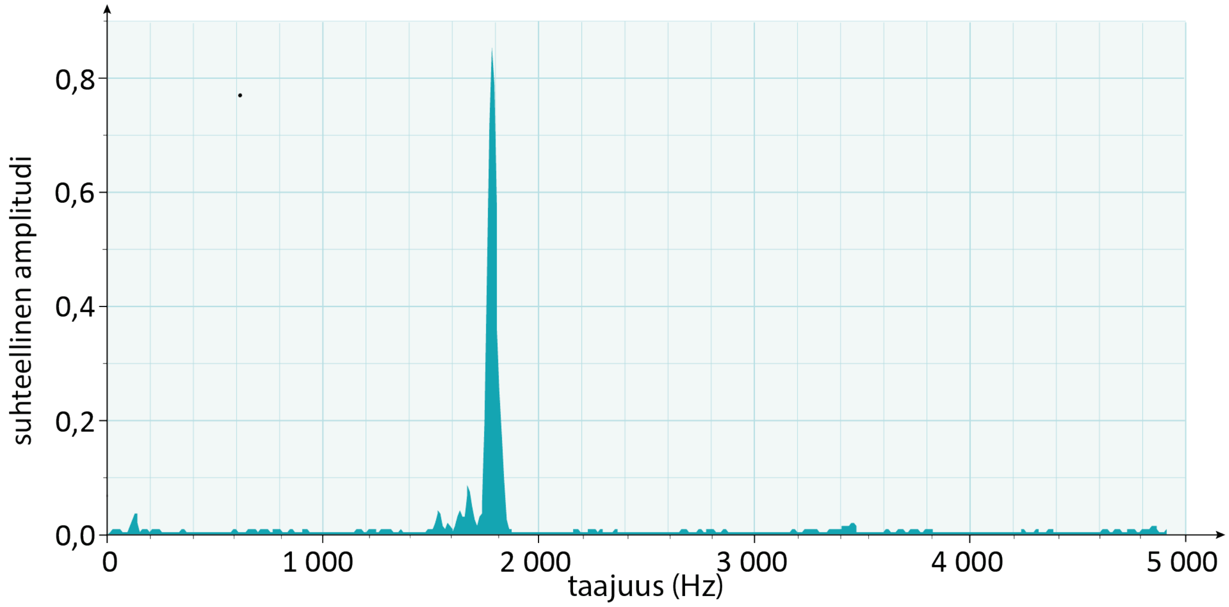
e) Aallon taajuus ei vaikuta aallon etenemisnopeuteen. Aallonpituus lyhenee, mutta aallonnopeus ei muutu.

Tehtävä 9.20.

a)



b) Tehdään mittausaineistolle FFT-analyysi.



Voimakkaimpana kuullun äänen taajuus on se taajuus, jolla on suurin suhteellinen amplitudi FFT-analyysin kuvaajassa. Kuvaajasta määritettynä voimakkaimpana kuullun äänen taajuus on f = 1 770 Hz.

c) Kun alumiinitankoa hangataan etanolilla kostutetulla paperilla, tanko alkaa värähdellä. Tangossa alkaa edetä mekaaninen aalto, joka heijastuu aina, kun aalto kohtaa tangon pään. Heijastuneella ja tulevalla aallolla on sama taajuus ja aallonpituus. Heijastunut ja tuleva aalto interferoivat vahvistavasti ja tankoon syntyy seisova aalto, jolla on tietty aallonpituus ja taajuus. Värähtelevä tanko aiheuttaa omalla värähtelytaajuudellaan ilmaan paineaaltoja, jotka mekaanisina aaltoina etenevät ilmassa ihmisen kuuloelimiin ja paineaalto kuullaan äänenä.

d) Kun tanko alkaa värähdellä, osa tangon mekaanisen aallon energiasta siirtyy ilman paineaaltojen energiaksi. Koska tangosta pidetään kiinni, osa mekaanisen aallon energiasta siirtyy kiinnipitokohdasta myös kiinnipitäjään. Koska energiaa ei tuoda tankoon lisää, pienenee tangon värähtelyn amplitudi, ja tanko ei aiheuta enää yhtä suuria paineenvaihteluja ilmaan. Tällöin kuultu ääni myös heikkenee.

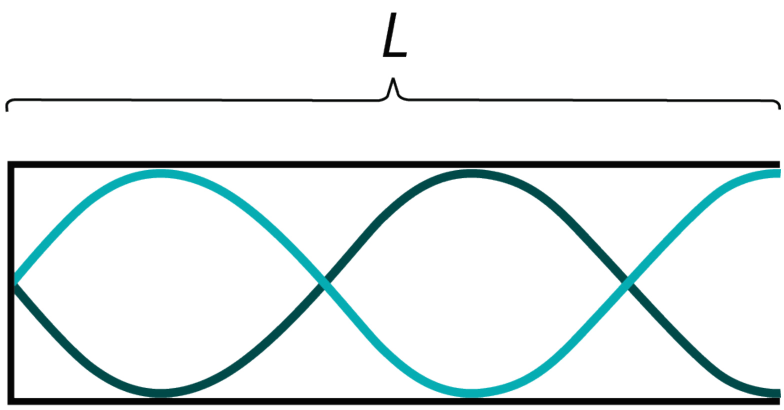
Tehtävä 9.21.

a) putken pituus L = 0,47 m

äänen nopeus v = 343 m/s

Toisesta päästä avoimeen putkeen syntyy ääni, jonka seisovan aallon toinen ylätaajuus.

Piirretään tilanteesta kuva.



Putken pituus $L=\frac{5\lambda}{4}$ ja aallonpituus on $\lambda=\frac{4L}{5}$.

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan putkeen syntyneen seisovan aallon taajuus on

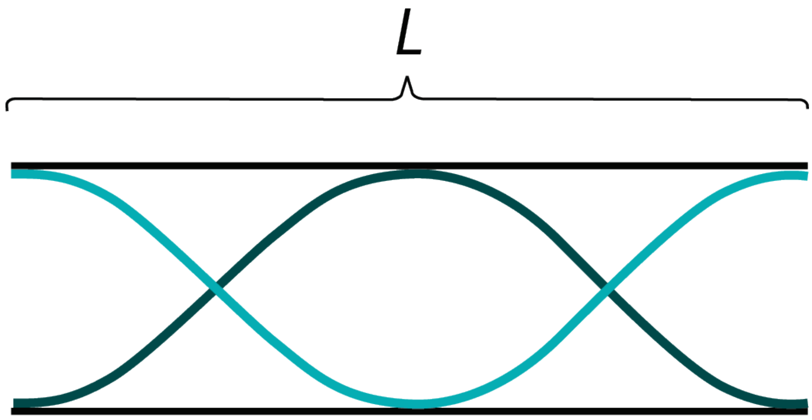
$$v=f\lambda$$

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{v}{\frac{4L}{5}}=\frac{5v}{4L}=\frac{5\cdot 343\,\text{m/s}}{4\cdot 0{,}47\,\text{m}}=912{,}23\,\text{Hz}\approx 910\,\text{Hz}.$$

b) putken pituus L = 0,47 m

äänen nopeus v = 343 m/s

Piirretään tilanteesta kuva



Syntyneen aallon aallonpituudeksi saadaan $\lambda = L$.

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan syntyneen aaltoliikkeen taajuus on

$$v = f\lambda$$

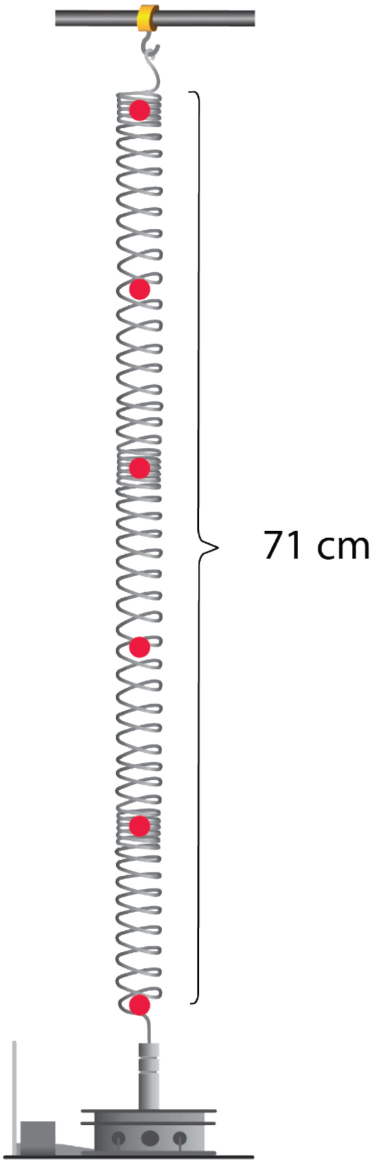
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L} = \frac{343\,\text{m/s}}{0{,}47\,\text{m}} = 729{,}787\,\text{Hz} \approx 730\,\text{Hz}.$$

Tehtävä 9.22.

värähtelijän taajuus $f = 52$ Hz

toisistaan kauimpana olevien kohtien etäisyys $L = 0{,}71$ cm

a) Värähtelijä synnyttää jouseen pitkittäisen aaltoliikkeen, joka heijastuu statiivin päästä. Tietyillä taajuuksilla jouseen syntyy seisova aalto. Seisovassa aallossa tuleva ja heijastunut aalto interferoivat. Syntyy kohtia, joissa kohtaavat aallot heikentävät toisiaan niin, että värähtelijät pysyvät paikoillaan.



b) Jouseen syntyy kuusi solmua.

Koska jousi on molemmista päistä kiinnitetty, on jousen molemmissa päissä solmut ja näiden välissä viisi kupua.

Kuvaan punaisella merkityt pisteet ovat kohtia, jotka näyttävät olevan paikoillaan. Kahden punaisen pisteen välinen etäisyys on aallonpituuden puolikas.

Jousen pituuden ja syntyneen aallon aallonpituuden välille on voimassa $L = \frac{5\lambda}{2}$.

Syntyneen aallon aallonpituudeksi saadaan $\lambda = \frac{2}{5}L$.

Aallon nopeus jousessa aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan on

$$v = f\lambda$$

$$v = f\frac{2}{5}L = \frac{2}{5}fL = \frac{2}{5} \cdot 52\,\mathrm{Hz} \cdot 0{,}71\,\mathrm{m} = 14{,}768\,\mathrm{m/s} \approx 15\,\mathrm{m/s}.$$

Tehtävä 9.23.

kuminauhan pituus L = 1,79 m

a) Kuminauhaan muodostuu seisova aalto.
Perustaajuudella kuminauhaan syntyy yksi kupu, jolloin syntyneen aallon aallonpituus on

$$L=\frac{\lambda}{2}$$
$$\lambda=2L=2\cdot 1{,}79\,\text{m}=3{,}58\,\text{m}.$$

Vastaavasti muille taajuuksille

2 kupua:

$$L=\lambda=1{,}79\,\text{m}.$$

3 kupua:

$$L=\frac{3\lambda}{2}$$
$$\lambda=\frac{2L}{3}=\frac{2\cdot 1{,}79\,\text{m}}{3}=1{,}1933\,\text{m}.$$

4 kupua:

$$L=2\lambda$$
$$\lambda=\frac{L}{2}=\frac{1{,}79\,\text{m}}{2}=0{,}895\,\text{m}.$$

5 kupua:

$$L = \frac{5\lambda}{2}$$

$$\lambda = \frac{2L}{5} = \frac{2 \cdot 1{,}79\,\text{m}}{5} = 0{,}716\,\text{m}.$$

6 kupua:

$$L = 3\lambda$$

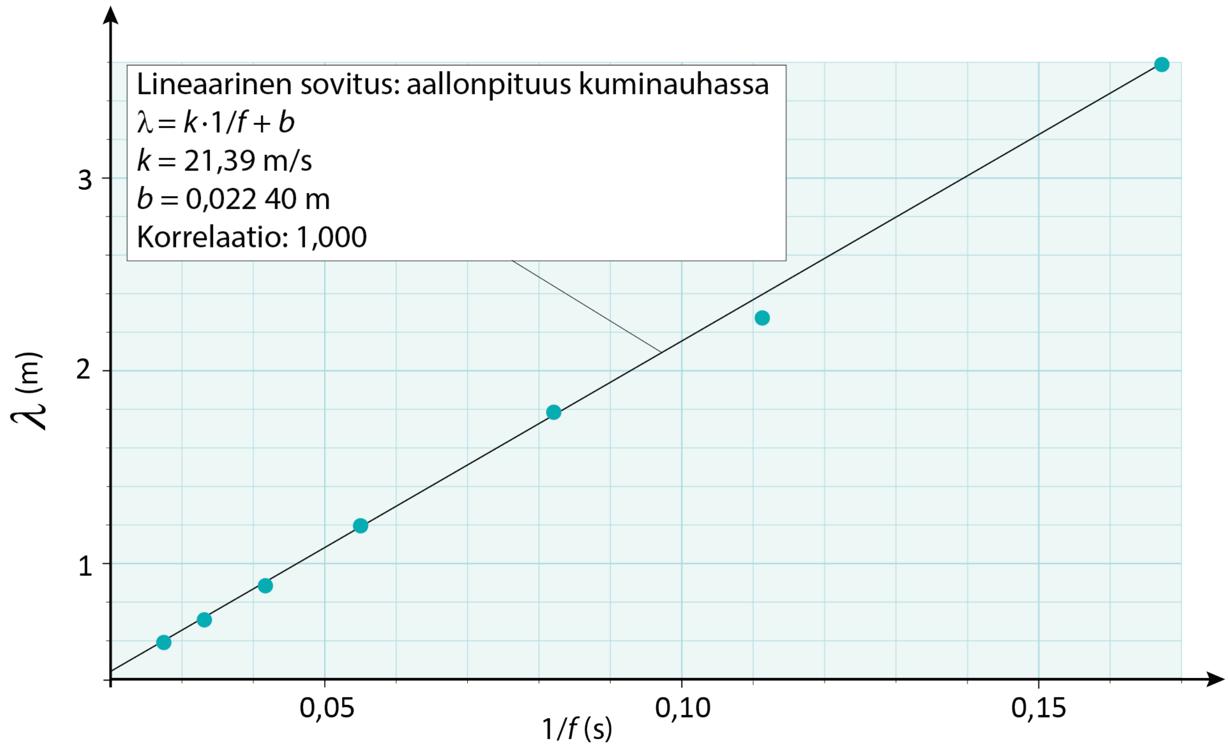
$$\lambda = \frac{L}{3} = \frac{1{,}79\,\text{m}}{3} = 0{,}5967\,\text{m}.$$

b) Kuminauhaan syntynyt aalto noudattaa aaltoliikkeen perusyhtälöä $v = f\lambda$. Aallon nopeus ei muutu mittauksen aikana, joten taajuus ja aallonpituus ovat kääntäen verrannollisia. Tällöin aaltoliikkeen perusyhtälö voidaan esittää muodossa

$$\lambda = v\frac{1}{f}.$$

Aallon nopeus v saadaan $\left(\frac{1}{f}, \lambda\right)$-koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta.

Lasketaan uusi sarake $\frac{1}{f}$, sovitetaan pistejoukkoon suora ja määritetään suoran fysikaalinen kulmakerroin.



Aallon nopeus kuminauhassa on
$v = 21{,}39\ \text{m/s} \approx 21{,}4\ \text{m/s}.$

Tehtävä 9.24.

a) Kun värähtelijän taajuutta muutetaan, havaitaan, että metallilanka alkaa värähdellä suuremmalla taajuudella. Tietyllä taajuuden arvolla metallilankaan syntyy kohtia, joissa värähtelyn amplitudi on suurimmillaan ja kohtia, joissa amplitudi on likimain nolla. Kun taajuutta suurennetaan edelleen, häviävät metallilankaan syntyneet kohdat, jossa amplitudi on suurimmillaan.

Kun värähtelijään kiinnitetty metallilanka alkaa värähdellä, metallilangassa alkaa liikkua mekaaninen aalto. Kun mekaaninen aalto kohtaa langan kiinnityskohdan, aalto heijastuu takaisin. Tällöin tuleva ja heijastunut mekaaninen aalto interferoivat. Tuleva ja heijastunut aalto interferoivat vahvistavasti tietyllä langan pituudella, kun tulevan ja heijastuneen aallon aallonpituus, nopeus ja taajuus ovat sama. Tällä tietyllä taajuudella ja sen monikerroilla lankaan syntyy seisova aalto. Kupukohtia ovat kohdat, joissa aallot vahvistavat toisiaan ja amplitudi on suurimmillaan. Solmukohdat ovat kohtia, joissa aallot heikentävät toisiaan ja amplitudi on pienimmillään.

b) silmukan halkaisija d = 24,5 cm

Silmukan langan pituus $L = \pi d$.

Videon perusteella silmukkaan syntyi amplitudiltaan suurin seisova aalto, kun värähtelytaajuus oli 70,22 Hz. Tällä taajuudella silmukkaan syntyi 5 kupua. Langan pituudelle L ja aallonpituudelle λ on tällöin voimassa

$L = 2{,}5\lambda$.

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan aallon nopeus silmukassa on

$$v = f\lambda = f\frac{L}{2{,}5} = \frac{f\pi d}{2{,}5} = \frac{70{,}22\,\mathrm{Hz} \cdot \pi \cdot 0{,}245\,\mathrm{m}}{2{,}5} = 21{,}619\,\mathrm{m/s} \approx 21{,}6\,\mathrm{m/s}.$$

Tehtävä 9.25.

a) A-kielen soivan osan pituus l = 0,87 m

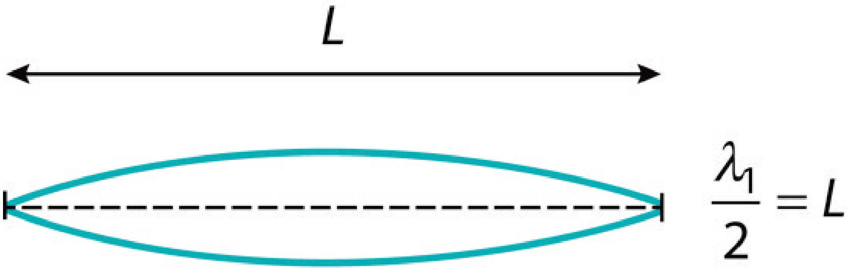
A-kielen perustaajuus f_1 = 55,0 Hz

Kieleen syntyy seisova aaltoliike, jossa on solmut ainakin kielen päissä. Taajuudet voidaan päätellä aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ avulla.

Laaditaan kuviot yksinkertaisimmista mahdollisista tapauksista.

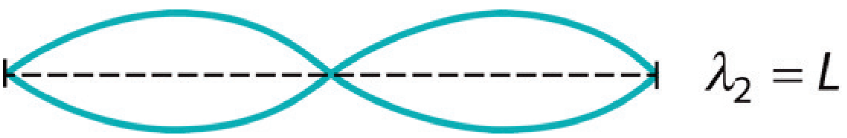
1) Perustaajuus saadaan, kun kielessä on yksi kupu ja solmut päissä.

Tällöin $\lambda_1 = 2l$ ja $f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2l}$



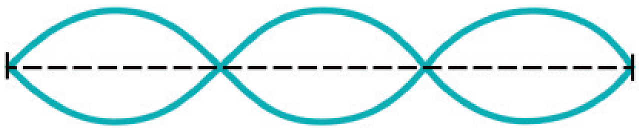
2) 1. ylävärähtely saadaan, kun kielessä on yksi solmu keskellä ja solmut päissä.

Tällöin $\lambda_2 = l$ ja $f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{l} = 2f_1$



3) 2. ylävärähtely saadaan, kun kielessä on kaksi solmua keskellä ja solmut päissä.

Tällöin $\lambda_3 = \frac{2}{3}l$ ja $f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{3v}{2l} = 3 \cdot f_1$



$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$$

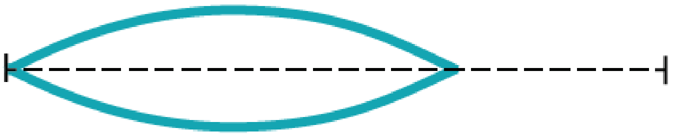
Kielen värähtelytaajuudet saadaan yhtälöstä
$f_n = n \cdot f_1 = n \cdot 55{,}0$ Hz, jossa $n = 1, 2, 3, \ldots$

Kieli soi taajuuksilla
55,0 Hz, 110,0 Hz, 165,0 Hz, 220,0 Hz jne.

b) Uusi perusvärähtelyn aallonpituus on $\lambda' = 2l' = 2 \cdot \frac{2}{3} l$.

Tätä vastaava taajuus on $f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{3v}{4l}$, josta saadaan a-kohdan perusteella

$$f' = \frac{3}{4} \cdot \frac{v}{l} = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot f_1 = \frac{3}{2} \cdot f_1 = \frac{3}{2} \cdot 55{,}0\,\text{Hz} = 82{,}5\,\text{Hz}$$



$$L' = \frac{2}{3} L$$

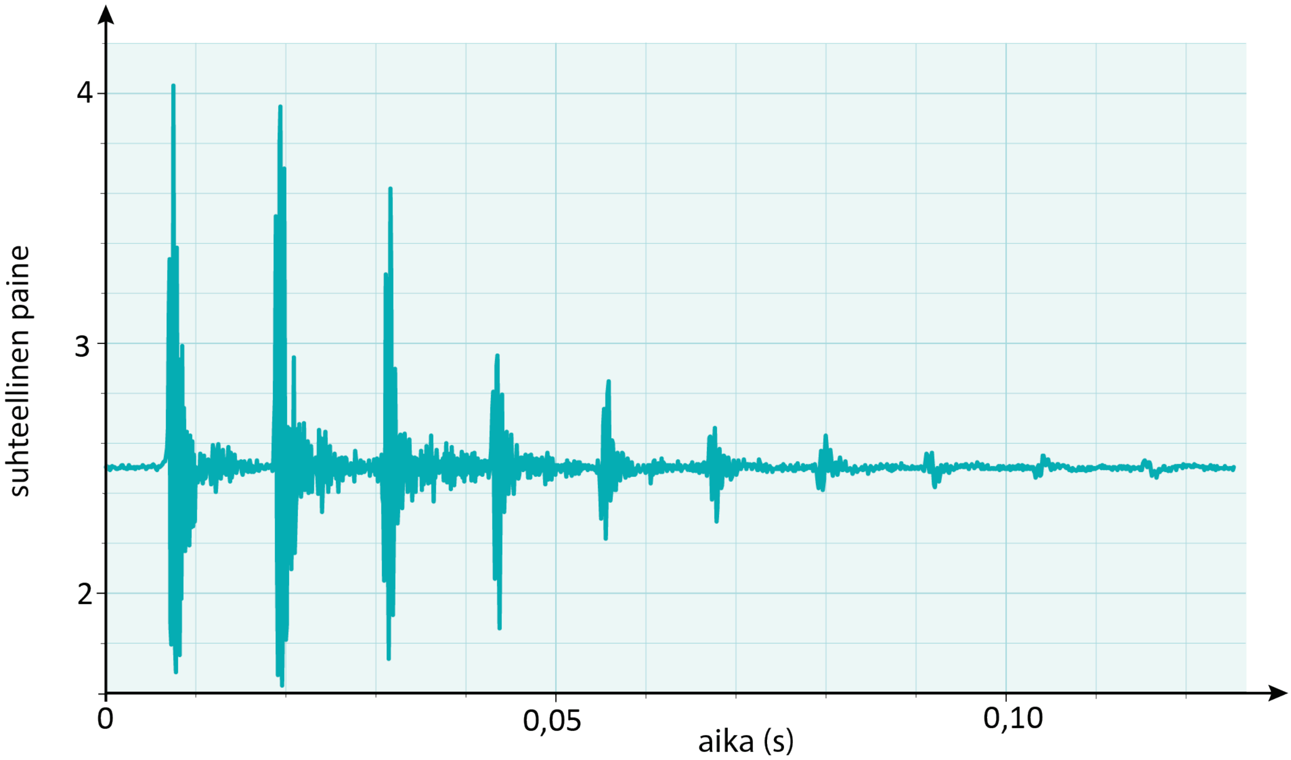
c) Aaltoliikkeen nopeus saadaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä,

$v = f_1 \lambda_1 = f_1 \cdot 2l = 55{,}0\text{ Hz} \cdot 2 \cdot 0{,}87\text{ m} = 95{,}7\text{ m/s} \approx 96\text{ m/s}$

Tehtävä 9.26.

putken pituus on l = 2 055 mm

a)



b) Kuvaajassa ensimmäinen piikki on naksuttimesta syntynyt ääni. Muut piikit ovat putken toisesta päästä heijastuneen äänen tuottamia paineaaltoja.

Ääni kulkee putken pituisen matkan, heijastuu ja kulkee saman matkan takaisin.

Määritetään kuvaajasta viiteen edestakaiseen matkaan kulunut aika.

t = 0,0601 s.

Ääni etenee vakionopeudella. Äänen kulkema matka edellä määritetyssä ajassa on

$s = 5 \cdot 2l = 10l = 10 \cdot 2\,055\text{ mm} = 20\,550\text{ mm}.$

Äänen nopeus on

$$v = \frac{s}{t} = \frac{10l}{t} = \frac{10 \cdot 2\,055\,\text{mm}}{0{,}0601\,\text{s}} = 341{,}93\,\text{m/s} \approx 342\,\text{m/s}.$$

c) Äänen nopeuden määritys riippuu äänen kulkeman matkan ja ajan määrityksestä. Mittauksessa syntynyttä virhettä voidaan pienentää, kun pienennetään mittausajan ja matkan virhettä.

Mitä pidemmän matkan ääni kulkee, sitä pienempi matkan määrityksen virhe on. Matka pitenee, mikäli tutkimus suoritetaan käyttämällä pidempää putkea. Mitä useampi edestakainen matka saadaan mitattua, sitä pienempi mittausvirhe on.

Ajan mittaamiseen liittyvää virhettä voidaan pienentää, kun valitaan tarkalleen sama aallon kohta, josta äänen kulkema aika määritetään. Myös mittaustaajuuden suurentaminen pienentää virhettä.

Äänen nopeuden virhettä voidaan pienentää myös toistamalla koe useita kertoja ja määrittämällä toistokokeissa saatujen äänen nopeuksien keskiarvo.

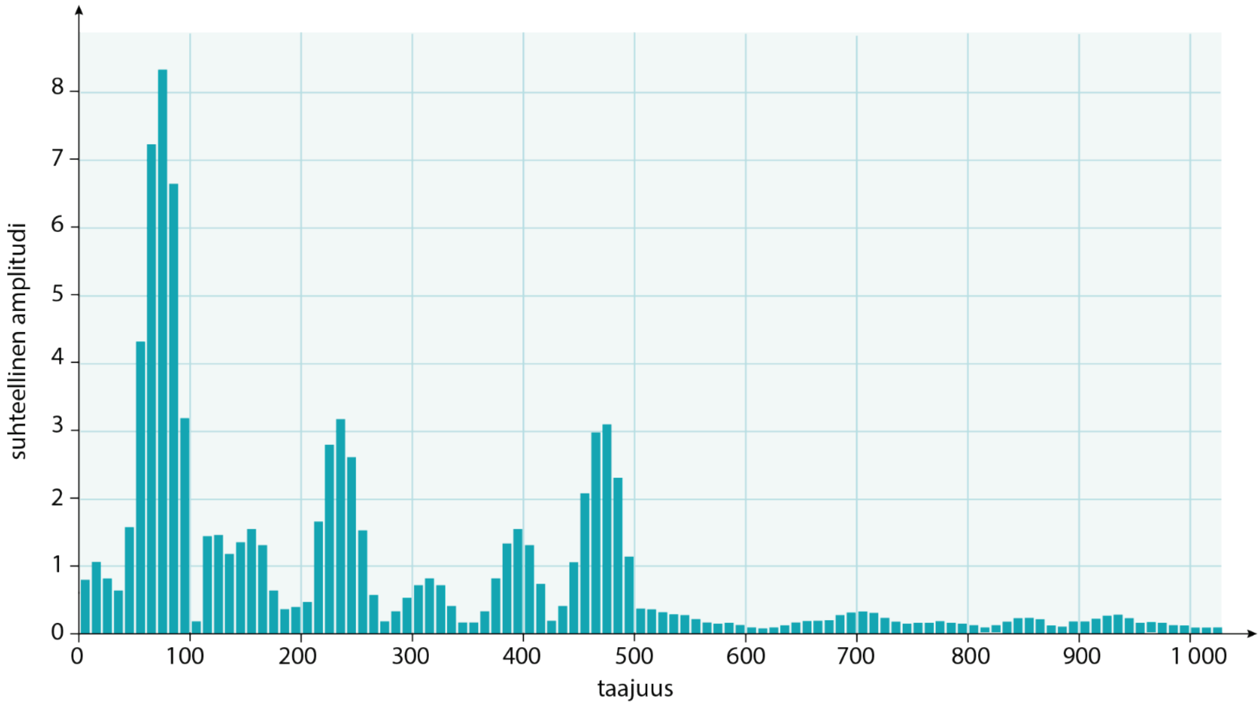
TAI

Koe voidaan suorittaa eripituisilla putkilla. Tällöin eripituisilla putkilla voidaan määrittää äänen kulkema matka ja aika ja nämä mittaukset voidaan esittää (t, s)-koordinaatistossa. Koordinaatistoon merkittyihin mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin on äänen nopeus.

Tehtävä 9.27.

moottoripyörän nopeus v_p = 82 km/h

a) Moottoripyörän tuottaman äänen taajuus saadaan, kun mittausaineistolle tehdään FFT-analyysi.



Voimakkaimpana kuullaan taajuus, jonka suhteellinen amplitudi on suurin. Määritetään voimakkaimmin kuullun äänen taajuus interpoloimalla FFT-kuvaajaa.

f = 78,12 Hz ≈ 78 Hz.

b) äänen nopeus ilmassa v_i = 343 m/s

Kun moottoripyörä lähestyy tien vierellä seisovaa jalankulkijaa, jalankulkija kuulee äänen voimakkuuden kasvun. Mitä suurempi on äänen intensiteetti, sitä voimakkaampana ääni kuullaan. Äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen äänilähteen etäisyyden neliöön $I \sim \frac{1}{r^2}$. Mitä lähempänä äänilähde on, sitä suurempi on äänilähteen intensiteetti ja sitä voimakkaampana ääni kuullaan.

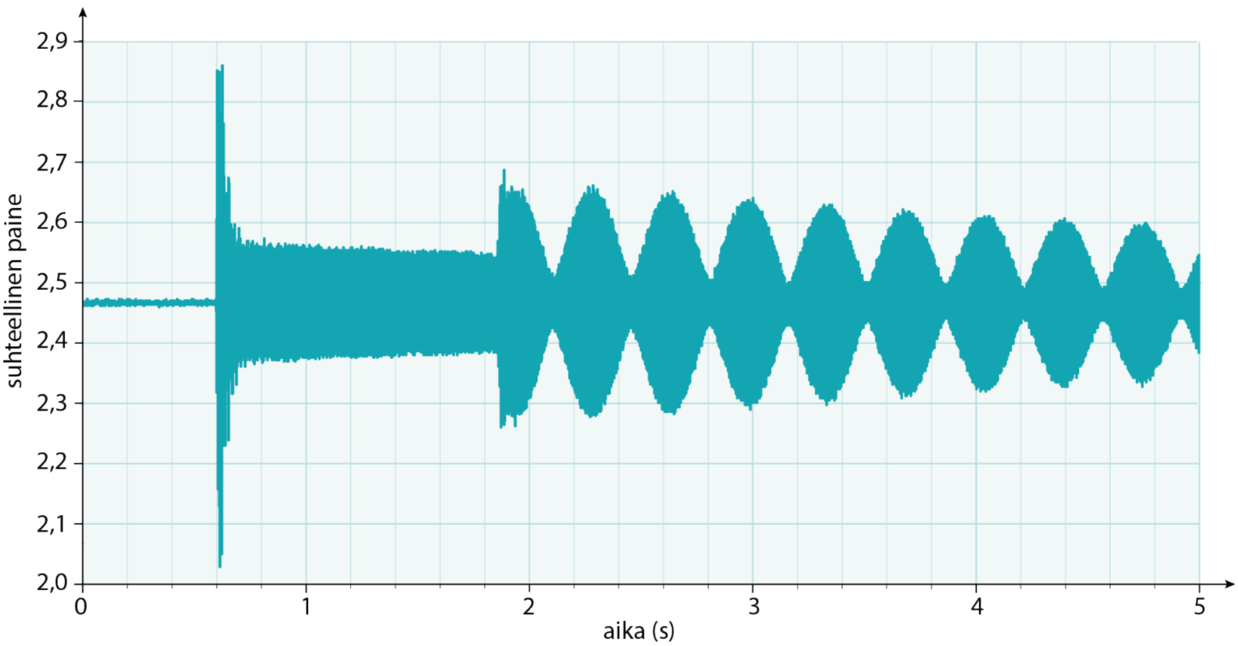
Kun äänilähde liikkuu jalankulkijaa kohden, havaitaan Dopplerin ilmiö. Koska äänilähde lähestyy jalankulkijaa, jalankulkija kuulee äänen taajuuden kasvun eli äänen korkeuden kasvun. Kuullun äänen taajuus on Dopplerin ilmiön perusteella

$$f = f_\text{p} \frac{v}{v - v_\text{p}} = 78{,}12\,\text{Hz} \cdot \frac{343\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{343\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{82}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 83{,}676\,766\,\text{Hz} \approx 84\,\text{Hz}.$$

Tehtävä 9.28.

a) Videolla yhden ääniraudan tuottaman äänen korkeus ja voimakkuus pysyi koko ajan samana. Kun kaksi äänirautaa värähteli samaan aikaan, kuultiin ääni, jonka voimakkuus vaihteli jaksottaisesti. Kahden ääniraudan tuottaman äänen korkeutta ei pysty aistien varaisesti vertailemaan videolta yhden ääniraudan tuottamaan ääneen, sillä taajuudet ovat niin lähellä toisiaan.

b) Esitetään äänen suhteellinen paine eri ajanhetkillä.



c) Huojuntataajuus kertoo, kuinka monta kertaa ääni huojunnassa voimistuu ja heikkenee sekunnissa. Määritetään kuvaajasta seitsemään äänen voimakkuuden jaksottaiseen vaihteluun kulunut aika t = 2,46 s. Tämän keskiarvona saadaan yhden huojunnan jaksonaika

$$T = \frac{t}{7} = \frac{2{,}462\,\text{s}}{7} = 0{,}3517\,\text{s}.$$

Huojuntataajuus on

$$f = \frac{1}{T} = \frac{7}{t} = \frac{7}{2{,}462\,\text{s}} = 2{,}8432\,\text{Hz} \approx 2{,}8\,\text{Hz}.$$

Tehtävä 9.29.

a) Ääni on mekaanista aaltoliikettä. Värähtelijä synnyttää ääniaallon, joka on väliaineessa etenevä mekaaninen aalto. Väliaineen rakenneosaset päätyvät värähdysliikkeeseen, joka välittyy värähtelijältä toiselle. Kaasuissa ja nesteissä ääni on pitkittäistä aaltoliikettä. Kiinteässä aineessa ääni voi edetä myös poikittaisena aaltoliikkeenä. Ilmassa ääni havaitaan jaksollisena paineenvaihteluna.

Ultraääni on sellaista ääntä, jonka taajuus on suurempi, kuin mitä ihminen voi kuulla. Ultraäänen taajuus on yli 20 kHz.

b) ultraäänen taajuus f = 11 MHz = $11 \cdot 10^6$ Hz

ultraäänen nopeus rasvakudoksessa v = 1 450 m/s

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $v = f\lambda$, joten aallonpituus rasvakudoksessa on

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1\,450\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{11 \cdot 10^6\ \text{Hz}} = 1{,}3181 \cdot 10^{-4}\ \text{m} \approx 0{,}13\,\text{mm}.$$

c) Ultraäänen käyttö lääketieteellisessä kuvantamisessa perustuu ultraäänen heijastumiseen erilaisten kudosten ja elinten rajapinnoissa. Kyseessä on siten kaikuluotausmittaus.

Ultraääni etenee eri nopeuksilla eri kudoksissa, sillä väliaineen rakenneosasten väliset kytkökset vaikuttavat siihen, miten ääni etenee väliaineessa. Kudosten rajapinnoissa osa aaltoliikkeestä voi heijastua. Kaiku on sitä voimakkaampi, mitä suurempi ero ultraäänen nopeudella on eri kudoksissa. Luun ja pehmytkudoksen ja nesteen tai kaasun ja kudoksen rajapinnasta saadaan yleensä voimakas kaiku.

Heijastumiskohtien etäisyydet eli elinten rajapintojen sijainnit voidaan selvittää mittaamalla ultraäänisignaali lähettämisen ja kaiun havaitsemisen välinen aikaero. Kun aallon etenemisnopeus kudoksessa tiedetään, voidaan aikaeron avulla laskea, kuinka kaukana ultraäänilähteestä rajapinta sijaitsee. Tässä, kuten muussakin kaikuluotauksessa, pitää huomioida, että signaali on kulkenut matkan rajapintaan ja takaisin.

Kaksi- tai kolmiulotteista kuvaa voidaan muodostaa, kun ultraäänisignaali lähtee keilamaisesti isommalle alueelle ja kaikujen kohdalla mitataan myös mistä suunnasta kaiku ilmaisimeen saapuu.

Tehtävä 9.30.

a) Ääni on väliaineessa etenevää mekaanista aaltoliikettä. Kaasuissa ja nesteissä ääni on pitkittäistä aaltoliikettä. Ultraääni on sellaista ääntä, jonka taajuus on niin suuri, että ihminen ei kykene sitä kuulemaan. Ihmisen kuuloalue kattaa taajuudet n. 20 Hz – 20 kHz. Ultraäänen taajuus on yli 20 kHz.

b) Äänen nopeus ilmassa lämpötilassa 20 °C on 343 m/s.

Ilman molekyylien keskimääräisestä vapaasta matkasta voidaan päätellä äänen pienin mahdollinen aallonpituus ilmassa, $\lambda_{\text{min}} = 10 \cdot 0{,}65\ \mu\text{m} = 6{,}5\ \mu\text{m} = 6{,}5 \cdot 10^{-6}$ m.

Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan taajuudeksi

$$f_{\text{max}} = \frac{v}{\lambda_{\text{min}}} = \frac{343\,\text{m/s}}{6{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{m}} = 52{,}769\,\text{MHz} \approx 53\,\text{MHz}.$$

c) Heijastukseen perustuvat sovellukset:

- kaikuluotaus (äänen heijastuminen kiinteästä kappaleesta)

- lääketieteellinen kuvantaminen (ultraääni heijastuu eritavoin riippuen elimen ominaisuuksista)

- teollisuudessa halkeamien ja säröjen paikannus (ultraääni heijastuu epäjatkuvuuskohdasta)

- liikkeen mittaaminen

Heijastukseen perustuvissa sovelluksissa mitataan ultraäänen kulkuaikaa väliaineessa ja päätellään siitä miltä etäisyydeltä kaiku tuli. Kun ultraäänen nopeus väliaineessa tunnetaan, saadaan ultraäänen kulkema matka yhtälöstä $s = vt$. Laskuissa on lisäksi otettava huomioon, että ultraäänen kulkema matka on kaksinkertainen heijastavan rajapinnan etäisyyteen verrattuna.

Kun ultraäänisignaalia lähetetään useita pulsseja lyhyen aikavälin sisään, voidaan etäisyyden muutoksesta päätellä millä nopeudella kappale liikkuu. Kaiun voimakkuudesta voidaan myös päätellä, millaisesta materiaalista ultraääni heijastui. Lisäksi nykytekniikalla pystytään suuresta määrästä dataa muodostamaan kaksi- tai kolmiulotteisia kuvia tutkittavasta kohteesta.

Energian siirtoon perustuvat sovellukset:

- rakenteiden rikkominen lääketieteessä (riittävän suuri energia hajottaa rakenteen esim. hammaskiven)

- lämpöhoitomenetelmä lääketieteessä

- liuosten sekoittaminen kemianteollisuudessa

- kemiallisten reaktioiden luominen (polymeeriketjujen katkaiseminen)

- muovien hitsaus (ultraäänen värähtely kuumentaa saumaa ja sulaneet osat liitetään lopulta yhteen)

- instrumenttien puhdistus (ultraääni synnyttää voimakkaita imu- ja paineimpulsseja, jotka irrottavat lian pinnoista)

Muut käyttösovellukset:

- eläinten kuuloalueen häirintä (tuholaisten karkotus)

Vastauksessa vaadittiin kahden käyttöalueen kuvailu ja esimerkki.

Tehtävä 9.31.

a) yhden sipsipussin tuottaman äänen intensiteettitaso L_1 = 95 dB

Äänen havaittua voimakkuutta kuvaa intensiteettitaso $L = 10\,\text{dB} \cdot \lg \frac{I}{I_0}$, jossa I on havaittu intensiteetti ja ihmisen kuulokynnystä vastaava intensiteetin vertailutaso $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

Yhden pussin rapistelun intensiteettitaso metrin etäisyydellä on $L = 10\,\text{dB} \cdot \lg \frac{I_\text{p}}{I_0} = 95\,\text{dB}$,, jossa I_p yhden pussin rapistelun intensiteetti.

Tästä saadaan yhden pussin rapistelun intensiteetiksi

$$L = 10\,\text{dB} \cdot \lg \frac{I_\text{p}}{I_0}$$

$$\frac{L}{10\,\text{dB}} = \lg \frac{I_\text{p}}{I_0}$$

$$I_\text{p} = 10^{\frac{L}{10\,\text{dB}}} I_0 = 10^{\frac{95\,\text{dB}}{10\,\text{dB}}} \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 10^{-2,5}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Jos rapistelijoita on viisi, intensiteetti on viisinkertainen eli $5I_\text{p}$.

Tällöin viiden pussin tuottaman äänen intensiteettitaso on

$$L = 10\,\text{dB} \cdot \lg\left(\frac{5I_\text{p}}{I_0}\right) = 10\,\text{dB} \cdot \lg\left(\frac{5 \cdot 10^{-2,5}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{10^{-12}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}\right) = 101,9897\,\text{dB} \approx 100\,\text{dB}.$$

b) uuden pussin tuottaman äänen intensiteettitaso
L_2 = 75 dB

Lasketaan uuden pussin intensiteetti intensiteettitason yhtälöstä

$$L_2 = 10\,\text{dB} \cdot \lg\frac{I_2}{I_0}$$

$$I_2 = 10^{\frac{L_2}{10\,\text{dB}}} I_0 = 10^{\frac{75\,\text{dB}}{10\,\text{dB}}} \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 10^{-4,5}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Verrataan uuden pussin tuottaman äänen intensiteettiä alkuperäisen pussin tuottamaa äänen intensiteettiin.

$$\frac{I_2}{I_\text{P}} = \frac{10^{-4,5}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{10^{-2,5}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} = 0,01 = 1\,\%.$$

Uuden pussin tuottaman äänen intensiteetti on 1 % alkuperäisen pussin tuottaman äänen intensiteetistä.

c) tuulen huminan intensiteettitaso L_t = 30 dB

Tuulen huminan intensiteettitasolle on voimassa

$$L_\mathrm{t} = 10\,\mathrm{dB} \cdot \lg \frac{I_\mathrm{t}}{I_0}.$$

Tuulen huminan intensiteetti

$$I_\mathrm{t} = 10^{\frac{L_\mathrm{t}}{10\,\mathrm{dB}}} I_0 = 10^{\frac{30\,\mathrm{dB}}{10\,\mathrm{dB}}} \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 10^{-9}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

Intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Saadaan verranto

$\frac{I_\mathrm{p}}{I_\mathrm{t}} = \frac{r_\mathrm{t}^2}{r_\mathrm{p}^2}$. Etäisyys, jolla sipsipussin rapinan intensiteetti vastaa tuulen huminan intensiteettiä

$$r_\mathrm{t} = r_\mathrm{p}\sqrt{\frac{I_\mathrm{p}}{I_\mathrm{t}}} = 1{,}0\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{\frac{10^{-2{,}5}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}{10^{-9}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}} = 1\,778{,}3\,\mathrm{m} \approx 1{,}8\,\mathrm{km}.$$

d) Ääniaaltojen energiaa absorboituu ilmaan ja tiellä oleviin esteisiin. Näin ollen ääni vaimenee tehokkaammin kuin edellä kuvatussa ideaalitilanteessa. Etäisyys, jossa intensiteettitaso on vaimentunut 30 desibeliin, on siis käytännössä huomattavasti pienempi kuin edellisessä kohdassa lasketussa ideaalitilanteessa.

Tehtävä 9.32.

P-aaltojen etenemisnopeus v_P = 8,0 km/s

P-aaltojen taajuus f_P = 2 Hz

S-aaltojen etenemisnopeus v_S = 4,8 km/s

S-aaltojen taajuus f_S = 10 Hz

havaittu aikaero P- ja S-aaltojen välillä $\Delta t = t_S - t_P = 30$ s

a) Maanjäristysaaltojen liike on tasaista. P-aalto ja S-aalto etenevät järistyskeskuksesta havaitsijaan saman matkan

$s = v_P t_P = v_S t_S$. Jotta matka s pystytään ratkaisemaan, pitää ensin ratkaista aika t_P tai t_S

$$\begin{aligned} v_P t_P &= v_S t_S \\ v_P t_P &= v_S t_S \\ t_P &= \frac{v_S t_S}{v_P}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan t_P havaittuun aikaeroon

$$t_S - t_P = \Delta t$$

$$t_S - \frac{v_S t_S}{v_P} = \Delta t$$

$$t_S\left(1 - \frac{v_S}{v_P}\right) = \Delta t$$

$$t_S = \frac{\Delta t}{\left(1 - \frac{v_S}{v_P}\right)}$$

$$t_S = \frac{30\,\text{s}}{\left(1 - \frac{4{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{8{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}\right)} = 75\,\text{s}.$$

Etäisyys s on

$$s = v_S t_S = 4{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 75\,\text{s} = 360\,\text{km}.$$

Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan aallonpituudet P- ja S-aallolle

$$\lambda_P = \frac{v_P}{f_P} = \frac{8{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{2\,\text{Hz}} = \frac{8{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{2\,\frac{1}{\text{s}}} = 4\,\text{km}$$

$$\lambda_S = \frac{v_S}{f_S} = \frac{4{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{10\,\text{Hz}} = \frac{4{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{10\,\frac{1}{\text{s}}} = 0{,}48\,\text{km} \approx 0{,}5\,\text{km}.$$

b) P-aaltoja voidaan kuvata pitkittäisellä aaltoliikkeellä ja S-aaltoja poikittaisella aaltoliikkeellä. Seismiset aallot etenevät eri aineissa ja kerroksissa eri nopeuksilla. Ne taittuvat ja heijastuvat aineiden ja eri tiheyksisten kerrosten rajapinnoista. Eri havaintopisteisiin tulleet järistysaallot ovat kulkeneet maapallon kerrosten läpi eri reittejä. Yhdistämällä eri havaintopisteiden seismografien mittaustulokset, saadaan tietoa maapallon sisäosien kerrosten rakenteesta ja kerrosten rajapintojen sijainnista.

S-aaltoja ei esiinny nesteessä, joten niiden puuttuminen tietyillä maanpinnan vyöhykkeillä suhteessa havaittuihin järistyskeskuksiin osoittaa, että maapallon ytimessä on nestemäinen osa. S-aallot eivät esimerkiksi etene maapallon läpi suoraan sen puolelta toiselle.

Tehtävä 9.33.

a) Ääni etenee pitkittäisenä aaltoliikkeenä.

Pisteytys: Vastauksessa on kerrottu äänen etenevän pitkittäisenä aaltoliikkeenä (2 p.).

b) Ääniaallot etenevät yhtä pitkän matkan ilmassa ja messinkilangassa:

$$x = v_{ilma} t_{ilma} = v t_{messinki}$$

Peltipurkkien pituudet voidaan olettaa mitättömiksi, joten matka on yhtä pitkä kuin messinkilanka eli *x* m.

Lasketaan matka-aikojen erotus

$$\Delta t = t_{ilma} - t_{messinki} = \frac{x}{v_{ilma}} - \frac{x}{v} = x\left(\frac{1}{v_{ilma}} - \frac{1}{v}\right)$$

Sijoitetaan äänen nopeus messinkilangassa yhtälöön

$$\Delta t = t_{ilma} - t_{messinki} = x\left(\frac{1}{v_{ilma}} - \frac{1}{v}\right) = x\left(\frac{1}{v_{ilma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}\right)$$

$$\Delta t = x\left(\frac{1}{v_{ilma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}\right) = 75\text{ m}\cdot\left(\frac{1}{343\text{ m/s}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{10{,}5\cdot 10^{10}\text{ N}}{8{,}4\cdot 10^{3}\text{ kg/m}^3}}}\right) = 0{,}197\,446\text{ s} \approx 0{,}20\text{ s}$$

Ääni saavuttaa kuulijan 0,20 s nopeammin peltipurkkipuhelimen avulla kuin huutamalla.

c) Äänen intensiteettitaso L määritellään äänen kuulokynnyksen intensiteetin I_0 avulla:

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0}\text{dB}$$

Kun ääni on edennyt messinkilangassa matkan x =75 m, sen intensiteetti on

$I_2 = I_1 e^{-\alpha x}$, jossa I_1 on äänen intensiteetti lähteessä, I on äänen intensiteetti etäisyydellä x lähteestä ja α = 0,086 m

Vaimennetun äänen intensiteettitaso voidaan laskea käyttäen ensimmäistä yhtälöä:

$$\begin{aligned}L_2 &= 10\lg\frac{I_2}{I_0}\text{dB} = 10\lg\frac{I_1 e^{-\alpha x}}{I_0}\text{dB} = 10\lg\left(\frac{I_1}{I_0}\cdot e^{-\alpha x}\right)\\ &= 10\lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right) + 10\lg\left(e^{-\alpha x}\right) = L_1 + 10\lg\left(e^{-\alpha x}\right)\end{aligned}$$

$$L_2 = L_1 + 10\lg\left(e^{-\alpha x}\right) = 72\text{ dB} + 10\lg\left(e^{-0{,}0861/\text{m}\cdot 75\,\text{m}}\right) = 43{,}9880\,\text{dB} \approx 44\text{ dB}.$$

Ääni etenee ilmassa palloaaltona, joten äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön,

$$I \sim \left(\frac{1}{r}\right)^2, I = k\left(\frac{1}{r}\right)^2$$

Verrannollisuuden perusteella $\frac{I_1}{I_2}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$ eli

$$I_2=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\cdot I_1$$

$$L_2=10\lg\frac{I_2}{I_0}\text{dB}=10\lg\frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\cdot I_1}{I_0}\text{dB}=10\lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right)+10\lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2=L_1+10\lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$L_2=L_1+10\lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2=L_1+20\lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Alkuperäisen äänen intensiteettitaso etäisyydellä 7,0 cm oli 72 dB, jolloin intensiteettitaso

etäisyydellä x = 75 m on

$$L_2=L_1+20\lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right)=72\,\text{dB}+20\lg\left(\frac{0{,}07\,\text{m}}{75\,\text{m}}\right)=11{,}007\,\text{dB}\approx 11\text{ dB.}$$

Äänen intensiteettitaso kuulijan kohdalla on suurin piirtein sama kuin ihmisen hengityksen intensiteettitaso (noin 10 dB), kun puhuja puhuu ilman peltipurkkipuhelinta, eli 11 dB. Peltipurkkipuhelimen avulla intensiteettitaso on 44 dB, eli ääni saavuttaa kuulijan suunnilleen samalla intensiteettitasolla kuin hiljainen puhe (noin 40 dB).

Tehtävä 9.34.

a) Heijastuskerroin $R = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$. Heijastumista ei tapahdu lainkaan, kun R = 0. Näin käy, kun $Z_1 = Z_2$. Tällöin aineiden akustiset impedanssit ovat samat, eikä heijastumista tapahdu.

b) ilman akustinen impedanssi

$$Z_{1,\,\text{ilma}} = 0{,}000\,41 \cdot 10^6\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} = 410\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$$

geelin akustinen impedanssi $Z_{1,\,\text{geeli}} = 1{,}5 \cdot 10^6\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$

ihon akustinen impedanssi $Z_2 = 1{,}99 \cdot 10^6\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$

Heijastuskerroin ilman ja ihon rajapinnassa on

$$R = \frac{Z_2 - Z_{1,\,\text{ilma}}}{Z_2 + Z_{1,\,\text{ilma}}} = \frac{1{,}99 \cdot 10^6\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} - 410\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}}{1{,}99 \cdot 10^6\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} + 410\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}}$$
$$= 0{,}999\,59 \approx 100\,\%.$$

Koska ilman ja ihon akustiset impedanssit ovat niin erilaiset, käytännössä kaikki ultraääni heijastuu ilman ja ihon rajapinnasta, eikä ultraääntä etene lainkaan kudokseen.

Heijastuskerroin geelin ja ihon rajapinnassa on

$$R = \frac{Z_2 - Z_{1,\,\text{geeli}}}{Z_2 + Z_{1,\,\text{geeli}}} = \frac{1{,}99 \cdot 10^6\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} - 1{,}5 \cdot 10^6\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}}{1{,}99 \cdot 10^6\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} + 1{,}5 \cdot 10^6\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}}$$

$$= 0{,}140\,40 \approx 14\,\%.$$

eli ainoastaan 14 % ultraäänestä heijastuu geelin ja ihon rajapinnassa.

Kun ihon pinnalle levitetään tarkoitukseen suunniteltua geeliä, saadaan ultraääni etenemään tutkittavaan kudokseen. Ilman geeliä mittausta on mahdoton tehdä.

c) Kun poskiontelo on terve ja täynnä ilmaa, ultraääni heijastuu voimakkaasti jo ontelon etureunasta eli läheltä posken ihon pintaa.

Kun poskiontelo on tulehtunut ja se on täynnä märkäistä eritettä, ultraääni etenee poskessa aina ontelon takana olevaan luuhun saakka. Luusta saadaan voimakas ultraäänikaiku. Poskiontelon takaseinämä on aikuisella ihmisellä vähintään 2,5 cm:n etäisyydellä posken etureunasta, joten tulehtuneesta poskiontelosta saadaan voimakas kaiku vasta melko syvältä kudoksesta.

d) alkuperäinen taajuus f_0 = 3 052,0 Hz

heijastuvan ultraäänen taajuus on f = 3 053,9 kHz

ultraäänen ja veren virtaussuunnan välinen

kulma θ = 70°

ultraäänen nopeus veressä on c = 1 575 m/s

Taajuuden muutos on
$\Delta f = f - f_0$ = 3 053,9 kHz − 3 052 kHz = 1,9 kHz.

Heijastuvan ultraäänipulssin taajuuden muutos on

$$\Delta f = 2\frac{v}{c} f_0 \cos\theta.$$

Veren virtausnopeudeksi saadaan yhtälön perusteella

$$v = \frac{c\Delta f}{2f_0\cos\theta} = \frac{1\,575\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1{,}9\,\text{kHz}}{2 \cdot 3\,052\,\text{kHz} \cdot \cos 70^\circ} = 1{,}433\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ultraäänisignaali heijastuu veren punasoluista takaisin kohti anturia. Koska anturin havaitsema heijastuneen äänen taajuus kasvaa, Dopplerin ilmiön mukaan heijastuneen äänen lähde liikkuu kohti ultraäänianturia. Koska äänen taajuus kasvaa, veri virtaa kohti anturia.

10 Valo

Harjoittele

Tehtävä 10.1.

Oikeat vastaukset:

a) A

b) A

c) C

d) B

e) A

f) C

g) A

h) B

i) B

j) D

k) A

l) D

Tehtävä 10.2.

a) Kuvan laite on lämpökamera, joka hyödyntää infrapunasäteilyä.

b) Kuvan laite on WLAN-reititin, joka hyödyntää radioaaltoja.

c) Kuvan laite on solarium, joka hyödyntää ultraviolettisäteilyä.

d) Kuvan laite on PET-kuvauslaite, joka hyödyntää gammasäteilyä.

Tehtävä 10.3.

a) mikroaaltojen aallonpituus λ = 2,45 GHz = 2,45 · 10^9 Hz

Sähkömagneettisen säteilyn, kuten mikroaaltojen, nopeus ilmassa on liki pitäen sama kuin niiden nopeus tyhjiössä eli c_0 = 2,997 924 58 · 10^8 m/s.

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $c = f\lambda$, joten mikroaaltojen aallonpituus on

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2{,}45 \cdot 10^9\ \text{Hz}} = 0{,}122\,36\ \text{m} \approx 12{,}2\ \text{cm}.$$

b) Valon heijastumisessa valon aallonpituus λ, nopeus c ja taajuus f pysyvät muuttumattomina.

Valon taittumisessa taajuus f ei muutu.

Taulukkokirjan perusteella valon taitekerroin ilmassa on $n_i = 1{,}000$ ja vedessä $n_v = 1{,}33$.

Väliaineen A taitekerroin $n_A = \dfrac{c_0}{c_A}$, jossa

$c_0 = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s on valon nopeus tyhjiössä ja c_A on valon nopeus aineessa A.

Koska valon taitekerroin ilmassa on liki pitäen 1,000, on valon nopeus ilmassa liki pitäen sama kuin tyhjiössä.

Valon nopeus vedessä on

$c = \dfrac{c_0}{n} = \dfrac{299\,792\,458\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}33} = 225\,407\,863\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2{,}25 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Tämä on selvästi pienempi nopeus kuin valon nopeus ilmassa tai tyhjiössä.

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $c = f\lambda$, joten nopeuden c pieneneminen merkitsee myös pienempää aallonpituutta λ.

Kun valo taittuu ilmasta veteen valon taajuus ei muutu, mutta nopeus ja aallonpituus pienenevät.

Tehtävä 10.4.

a) Kun laserin valo kohtaa etanolin ja ilman rajapinnan, valo heijastuu ja taittuu. Heijastunut valo noudattaa heijastumislakia ja heijastuu samassa kulmassa kuin mikä on valon tulokulma. Valo taittuu rajapinnan normaalista poispäin.

b) valon tulokulma on $\alpha_1 = 40°$

valon taitekulma $\alpha_2 = 60°$

ilman taitekerroin on $n_2 = 1{,}00$

Kun valo kulkee etanolista ilmaan, valo taittuu ja noudattaa taittumislakia

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Etanolin taitekertoimeksi saadaan

$$n_1 = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} n_2 = \frac{\sin 60°}{\sin 40°} \cdot 1{,}00 = 1{,}347 \approx 1{,}3.$$

c) etanolin taitekerroin n_1 = 1,347

Valolle voi tapahtua kokonaisheijastuminen, kun valo tulee etanolista veteen, sillä tilanteessa taitekulma kasvaa. Kokonaisheijastuksen rajakulmalla taittunut valonsäde kulkee rajapintaa pitkin ja taitekulma on tällöin 90°. Taittumislain mukaan

$$\frac{\sin\alpha_{\mathrm{r}}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\sin\alpha_{\mathrm{r}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Kokonaisheijastuksen rajakulmaksi saadaan b-kohdan taitekertoimen perusteella

$$\alpha_{\mathrm{r}} = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1{,}00}{1{,}347}\right) = 47{,}935^\circ \approx 47{,}9^\circ.$$

d) Veden taitekerroin on pienempi kuin etanolin taitekerroin. Taitekulmalle on voimassa taittumislain mukaan

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\alpha_2 = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha_1\right).$$

Mitä pienempi on aineen taitekerroin, sitä suurempi on taitekulma.

Mitä suurempi on taitekulma, sitä vähemmän valon kulkusuunta muuttuu eli sitä vähemmän valo taittuu. Valo taittuu veden ja ilman rajapinnassa vähemmän kuin etanolin ja ilman rajapinnassa.

TAI

Koska veden taitekerroin on pienempi kuin etanolin taitekerroin, valo taittuu vähemmän veden ja ilman rajapinnassa kuin etanolin ja ilman rajapinnassa.

Tehtävä 10.5.

a) Kuu heijastaa Auringon valoa.

b) Hehkulamppu emittoi eli lähettää valoa.

c) Savukoneen tuottaman savun hiukkasista laservalo siroaa eri suuntiin, joten voimme nähdä laservalon, kun se kulkee savun läpi. Ilman ilmassa olevia epäpuhtauksia emme voi nähdä laservalon sädettä.

d) Hätäuloskäynnin kyltit lähettävät valoa myös päiväaikaan, mutta niistä heijastunut valo päiväaikaan on paljon kirkkaampi. Näemme kyltit heijastumisen takia päivänvalossa. Samasta syystä erotamme myös kylttien muut yksityiskohdat päivänvalossa paremmin kuin pimeässä.

e) Hätäuloskäynnin kyltit lähettävät valoa pimeässä. Kyltit lähettävät vihreää valoa ja vaikka valo ei ole kirkas, se erottuu hyvin pimeässä.

Tehtävä 10.6.

a) Kaikki valkoisen valon aallonpituudet siroavat valkoisen kipsipatsaan pinnasta. Kun valkoista patsasta valaistaan vihreällä valolla, pinnasta siroaa vihreää valoa ja patsas näyttää vihreältä.

Punainen paperiarkki näyttää valkoisessa valossa punaiselta, koska se absorboi sinisen ja vihreän valon aallonpituuksia ja sirottaa lähinnä valoa, jonka aistitaan punaisena. Kun punaisen paperiarkin pintaa valaistaan vihreällä valolla, paperiarkki absorboi suurimman osan säteilystä, ja paperiarkin pinta näyttää hyvin tummalta.

b) Kun valkoista patsasta valaistaan samanaikaisesti vihreällä ja punaisella valolla, pinnasta siroaa sekä vihreää että punaista valoa. Vihreän ja punaisen valon yhdistelmä aistitaan keltaisena. Patsas näyttää keltaiselta.

Kun punaisen paperiarkin pintaa valaistaan vihreällä ja punaisella valolla, paperiarkki absorboi suurimman osan vihreän valon aallonpituuksista, mutta sirottaa punaisen valon aallonpituuksia. Silloin paperiarkin pinta näyttää punaiselta.

Tehtävä 10.7.

a) Ilmiössä on kyse valon taipumisesta eli diffraktiosta. Varjostimelle syntyy valoisia pisteitä sellaisiin kohtiin, jossa eri raoista tulleen säteet interferoivat vahvistavasti.

b) B

c) C

d) D

e) B

f) A

Tehtävä 10.8.

valon aallonpituus $\lambda = 633 \cdot 10^{-9}$ m

hilan hilavakio eli rakojen välinen etäisyys $d = \frac{1{,}0\ \text{mm}}{600}$.

varjostimen etäisyys hilasta $s = 1{,}5$ m

Ensimmäisten intensiteettimaksimien välinen etäisyys $2y$

a) Kun laserin valo kulkee hilan läpi, valo taipuu ja interferoituu hilassa. Interferenssimaksimit syntyvät kohtiin, jotka noudattavat hilayhtälöä $d\sin\alpha = k\lambda$. Suurimmillaan taipumiskulma α voi olla 90°, jolloin sin 90° = 1. Määritetään k:n arvo, kun taipumiskulma on 90°.

$$k = \frac{d}{\lambda} = \frac{\frac{1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}{600}}{633 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 2{,}632.$$

Interferenssimaksimeja syntyy symmetrisesti päämaksimin molemmille puolille. Koska nyt $k = 2$, varjostimella näkyvien interferenssimaksimien määrä on

$n = 2k + 1 = 5$ kpl.

b) Lasketaan taipumiskulma hilayhtälöstä

$$d\sin\alpha = k\lambda$$

$$\sin\alpha = \frac{k\lambda}{d}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{k\lambda}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1\cdot 633\cdot 10^{-9}\ \text{m}}{\frac{1\cdot 10^{-3}\text{m}}{600}}\right) = 22{,}3213° \approx 22{,}3°.$$

Lasketaan 1. kertaluvun intensiteettimaksimin välinen etäisyys keskimaksimista.

$$\tan\alpha = \frac{y}{s}$$

$$y = s\tan\alpha.$$

Koska intensiteettimaksimit ovat symmetrisesti keskimaksimin molemmin puolin yhtä etäällä toisistaan, 1. kertaluvun intensiteettimaksimien välinen etäisyys on

$$x = 2y$$

$$x = 2s\tan\alpha$$

$$x = 2s\tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{k\lambda}{d}\right)\right) =$$

$$x = 2\cdot 1{,}5\text{m}\cdot\tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{1\cdot 633\cdot 10^{-9}\ \text{m}}{\frac{1\cdot 10^{-3}\text{m}}{600}}\right)\right) = 1{,}231\,69\text{m} \approx 1{,}23\text{m}.$$

c) Vihreän valon aallonpituus on lyhyempi kuin punaisen valon aallonpituus. Hilayhtälöstä $d\sin\alpha = k\lambda$ nähdään, että aallonpituuden pienentyessä myös taipumiskulma pienenee. Kun taipumiskulma pienenee, intensiteettimaksimit ovat lähempänä toisiaan ja intensiteettimaksimien välinen välimatka lyhenee.

Tehtävä 10.9.

a) Havaitaan, että punaisen valon tapauksessa interferenssimaksien paikat ovat suurimmalla etäisyydellä toisistaan ja sinisellä valolla lähimpänä toisiaan. Vihreän valon tapauksessa interferenssimaksien paikat ovat toiseksi suurimmalla etäisyydellä toisistaan.

b) Kun valo osuu hilaan, valon taipuu ja varjostimelle syntyy valoisia kohtia paikkoihin, jossa taipuneet valonsäteen interferoivat vahvistavasti. Interferenssimaksimien paikat muodostuvat kohtiin, jossa valon noudattaa hilayhtälöä $d\sin\alpha = k\lambda$. Yhtälön mukaan taipumiskulman sini on suoraan verrannollinen valon aallonpituuteen. Koska punaisen valon aallon pituus on vihreää ja sinistä pidempi, punaisen valon taipumiskulma on suurin. Vastaavasti sinisen valon aallon pituus on punaista ja vihreää lyhyempi ja taipumiskulma on pienin.

Tehtävä 10.10.

intensiteettimaksimin taajuus f_{max} = 550 THz = $550 \cdot 10^{12}$ Hz

valonnopeus c = $2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s

Wienin siirtymälain vakio b = $2{,}897\,771\,955 \cdot 10^{-3}$ m · K

a) Ratkaistaan aallonpituus aaltoliikkeen perusyhtälöstä

$$c = f\lambda$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{c}{f_{\text{max}}} = \frac{2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{550 \cdot 10^{12} \text{ Hz}} = 5{,}450\,771\,97 \cdot 10^{-7} \text{ m} \approx 545 \text{ nm}.$$

b) Mallinnetaan tähden lähettämään säteilyä mustan kappaleen säteilynä. Lasketaan tähden pintalämpötila Wienin siirtymälain avulla

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}$$

$$T = \frac{b}{\lambda_{\text{max}}} = \frac{b}{\frac{c}{f_{\text{max}}}} = \frac{bf_{\text{max}}}{c}$$

$$= \frac{2{,}897\,771\,955 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \cdot 550 \cdot 10^{12} \text{ Hz}}{2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 5\,316{,}259\,741 \text{K} \approx 5320 \text{K}.$$

c) Tähden lähettämää säteilyä voidaan mallintaa mustan kappaleen säteilynä. Mitä suurempi on mustan kappaleen säteilyä lähettävän kappaleen lämpötila, sitä suurempi on säteilyn intensiteetti ja sitä lyhyempi on säteilyn intensiteettimaksimin aallonpituus. Tähden lähettämän säteilyn intensiteetti kasvaa ja intensiteettimaksimin aallonpituus pienenee.

Tehtävä 10.11.

hehkulampun teho P = 75 W

hehkulampun hyötysuhde η = 0,05

lampun kuvun halkaisija d = 5,8 cm

a) Lampun tuottaman valon intensiteetti on

$$I=\frac{P}{A}.$$

Lampun säteilyteho on $P_s = \eta P$. Säteily jakautuu pallon pinta-alalle, jolloin valon intensiteetti kuvun pinnalla on

$$I=\frac{\eta P}{4\pi r^2}=\frac{\eta P}{4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}=\frac{\eta P}{\pi d^2}=\frac{0{,}05\cdot 75\,\mathrm{W}}{\pi\left(0{,}058\,\mathrm{m}\right)^2}=354{,}834\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\approx 350\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

b) kirjoituspöydän etäisyys lampusta r_2 = 1,8 m

Pistemäisen valonlähteen tuottaman valon intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön $I\sim\frac{1}{r^2}$. Eri etäisyyksillä oleville intensiteeteille saadaan suhde

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}}.$$

Valon intensiteetti kirjoituspöydän kohdalla on

$$I_2=I_1\frac{r_1^{\,2}}{r_2^{\,2}}=\frac{\eta P}{\pi d^2}\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{r_2^{\,2}}=\frac{\eta P}{4\pi r_2^{\,2}}=\frac{0{,}05\cdot 75\,\mathrm{W}}{4\pi\cdot\left(1{,}8\,\mathrm{m}\right)^2}=0{,}0921\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\approx 0{,}09\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

c) Mustan kappaleen lähettämän säteilyn aallonpituus on sitä lyhyempi, mitä kuumempi säteilijä on. Myös säteilyn intensiteetti kasvaa, kun säteilijän lämpötila kasvaa. Auringon pintalämpötila on huomattavasti hehkulampun lämpötilaa suurempi. Tällöin hehkulampun lähettämän säteilyn spektrin intensiteetti on pienempi ja säteilyn aallonpituudet ovat pidempiä kuin Auringon lähettämän säteilyn.

Tehtävä 10.12.

a) Kun polarisaatiosuunnat ovat 90°:n kulmassa toisiinsa nähden, toiselle polarisaatiokalvolle tulee vain valoa, jonka polarisaatiosuunta on kohtisuorassa toisen kalvon sallimaan polarisaatiosuuntaan nähden. Tällöin yhtään valoa ei pääse toisen polarisaatiokalvon läpi.

b) Kun kalvojen polarisaatiosuunta on sama, toiselle polarisaatiokalvolle tulee vain valoa, jonka polarisaatiosuunta on sama kuin toisen kalvon sallima polarisaatiosuunta. Kaikki toiselle kalvolle tuleva valo läpäisee polarisoivan kalvon. Valon intensiteetti pienenee kummankin kalvon läpäisyssä.

c) Kun polarisaatiosuunnat ovat 45°:n kulmassa toisiinsa nähden, toiselle polarisaatiokalvolle tulevan valon polarisaatiosuunta on eri kuin kalvon sallima polarisaatiosuunta. Polarisaatiosuunta ei ole kuitenkaan kohtisuorassa toisen kalvon sallimaan polarisaatiosuuntaan nähden, joten osa valosta pääsee läpi. Valon intensiteetti pienenee kummankin kalvon läpäisyssä.

Sovella

Tehtävä 10.13.

a) Hilojen rakojen väliset etäisyydet ovat samat kuin hilavakiot. Merkitään taulukkoon taipumiskulmien sinien arvot.

d **(µm)**	**sin*α***
1,67	0,385 906 042
2	0,318 959 309
3,33	0,189 095 443
10	0,064 532 308
12,5	0,050 592 94

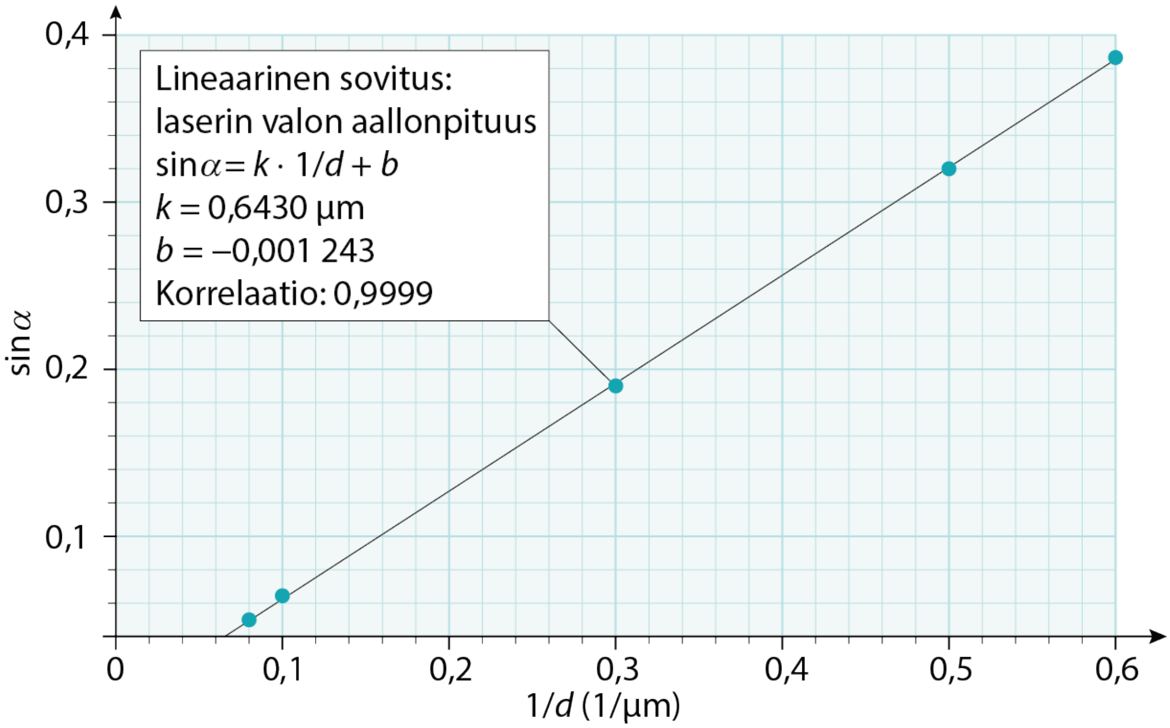
b) Kun laserin valo kulki hilan läpi, valo taipui. Taipuneet taipunut valo noudattivat interferenssimaksimien kohdilla yhtälöä $d\sin\alpha = k\lambda$.

Yhtälölle on voimassa $\sin\alpha = \frac{k\lambda}{d} = k\lambda\frac{1}{d}$.

Koska tilanteessa tarkasteltiin ensimmäistä sivumaksimia, on k = 1 ja yhtälö saa muodon $\sin\alpha = \lambda\frac{1}{d}$.

Laserin valon aallonpituus saadaan $\left(\frac{1}{d}, \sin\alpha\right)$-koordinaatiston mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Lasketaan uusi sarake $\frac{1}{d}$ ja määritetään fysikaalinen kulmakerroin.

d **(µm)**	**1/*d* (1/µm)**
1,67	0,598 802 395
2	0,5
3,33	0,300 3003
10	0,1
12,5	0,08



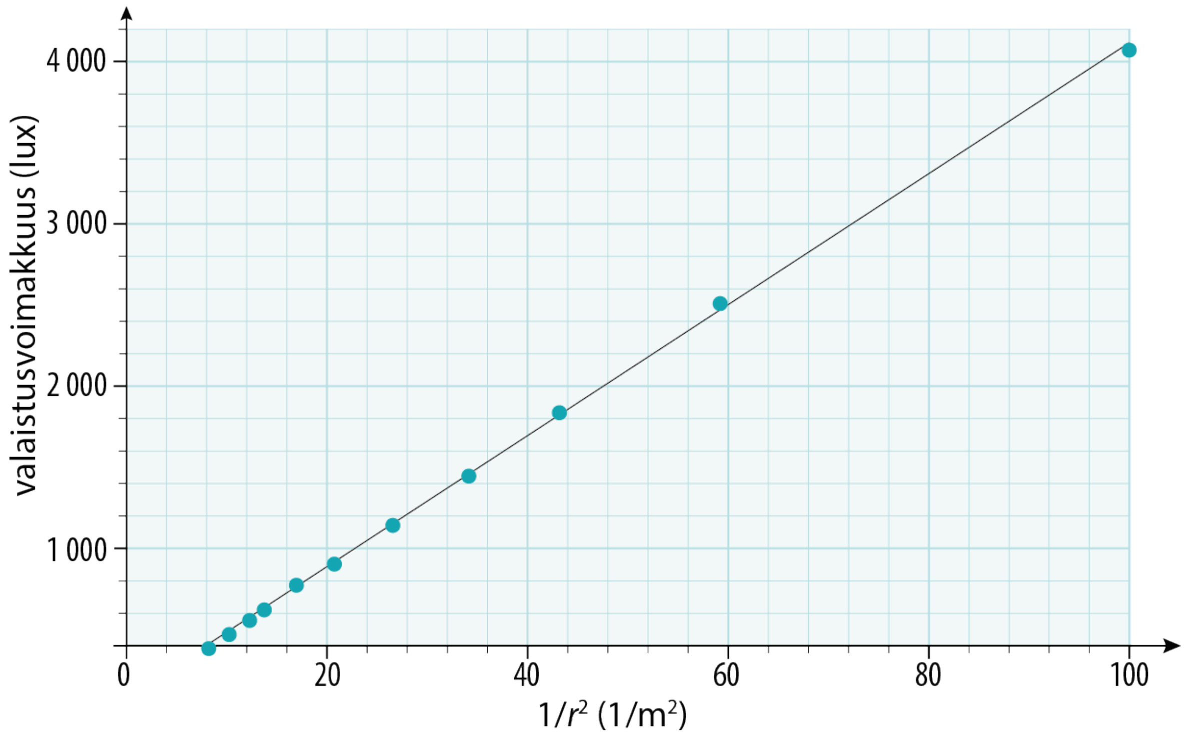
Laserin valon aallonpituus on λ = 0,6430 µm ≈ 643 nm. Laserin tuottaman valon väri on aallonpituuden perusteella punaista.

Tehtävä 10.14.

a) Lasketaan uusi sarake $1/r^2$.

r **(m)**	***E*** **(lux)**	$\mathbf{1/}\boldsymbol{r}^\mathbf{2}$ **(1/m²)**
0,1	4 096,650 696	100
0,13	2 530,280 457	59,171 597 63
0,152	1 851,141 357	43,282 548 48
0,171	1 461,807 861	34,198 556 82
0,194	1 159,738 77	26,570 305 03
0,22	932,928 772	20,661 157 02
0,243	792,866 8213	16,935 087 81
0,268	651,126 709	13,922 9227
0,285	569,284 0576	12,311 480 46
0,31	497,381 2866	10,405 827 26
0,347	410,245 9717	8,305 027 033

Esitetään mittaustulokset $\left(\frac{1}{r^2}, E\right)$-koordinaatistossa.



b) Pistemäinen valonlähde säteilee energiaa ympärilleen, jolloin valaistusvoimakkuudelle on voimassa $E = \frac{\Phi}{A} = \frac{\Phi}{4\pi r^2}$. Tällöin pistemäisen valonlähteen valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön.

Koska mittausaineistoon voidaan $\left(\frac{1}{r^2}, E\right)$-koordinaatistossa sovittaa suora, hehkulamppu noudattaa pistemäisen valonlähteen mallia.

c) Huoneen valaistusvoimakkuus saadaan mittauspisteisiin sovitetun suoran ja valaistusvoimakkuusakselin leikkauskohdasta. Huoneen valaistusvoimakkuus on E_{huone} = 90,04 lux ≈ 90 lux.

Tehtävä 10.15.

a) Lasketaan tulo- ja taitekulmien sinien arvot ja laaditaan kuvaaja.

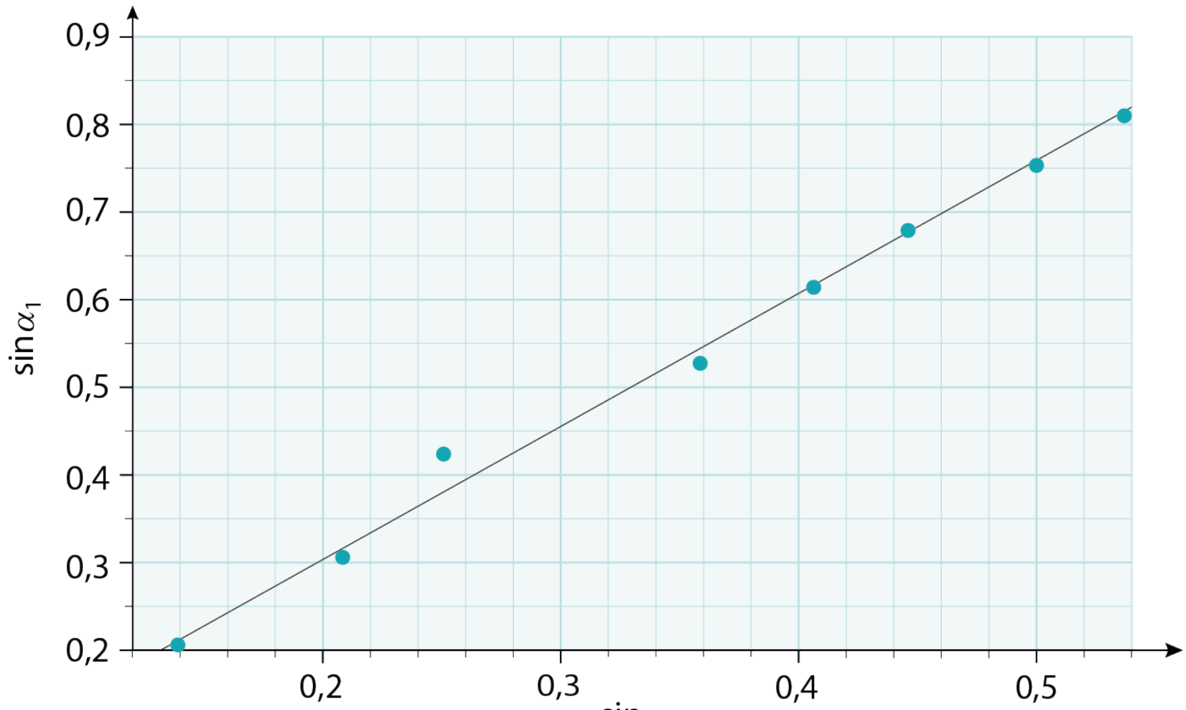
α_1 (°)	α_2 (°)	sin α_1	sin α_2
12	8	0,208	0,139
18	12	0,309	0,208
25	14,5	0,423	0,250
32	21	0,530	0,358
38	24	0,616	0,407
43	26,5	0,682	0,446
49	30	0,755	0,500
54	32,5	0,809	0,537

b) ilman taitekerroin $n_1 = 1{,}00$

Kun valo tulee ilmasta akryyliin, valo noudattaa taittumislakia $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$.

Tulokulman ja taitekulman sinien välille saadaan yhtälö $\sin\alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin\alpha_2$.

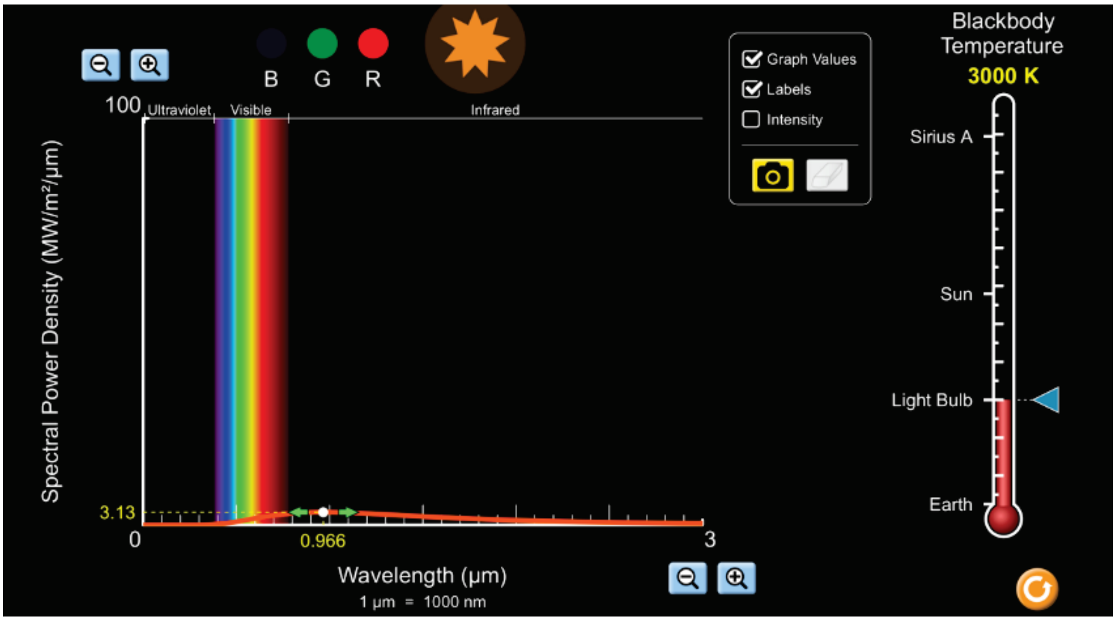
Taitekertoimien suhde $\frac{n_2}{n_1}$ on $(\sin\alpha_2, \sin\alpha_1)$-koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin. Sovitetaan suora ja määritetään suoran fysikaalinen kulmakerroin.



Kuvaajan perusteella $k = \frac{n_2}{n_1}$. Akryylin taitekertoimeksi saadaan $n_2 = kn_1 = 1{,}518 \cdot 1{,}00 = 1{,}518$.

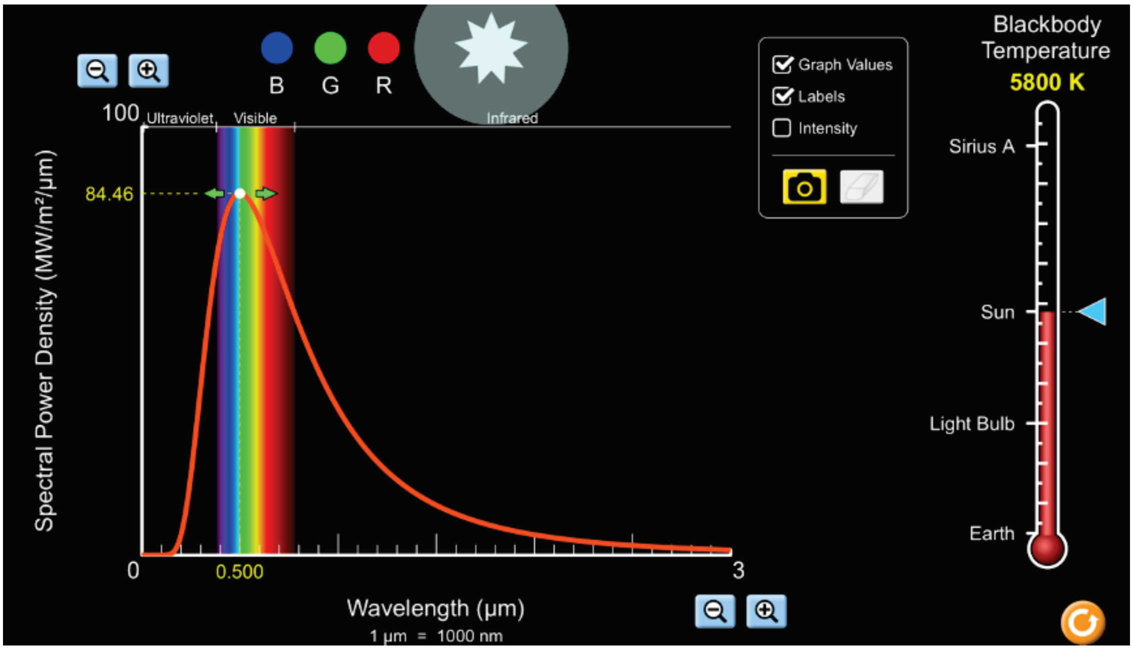
Tehtävä 10.16.

a) Hehkulampun tuottaman valon spektri



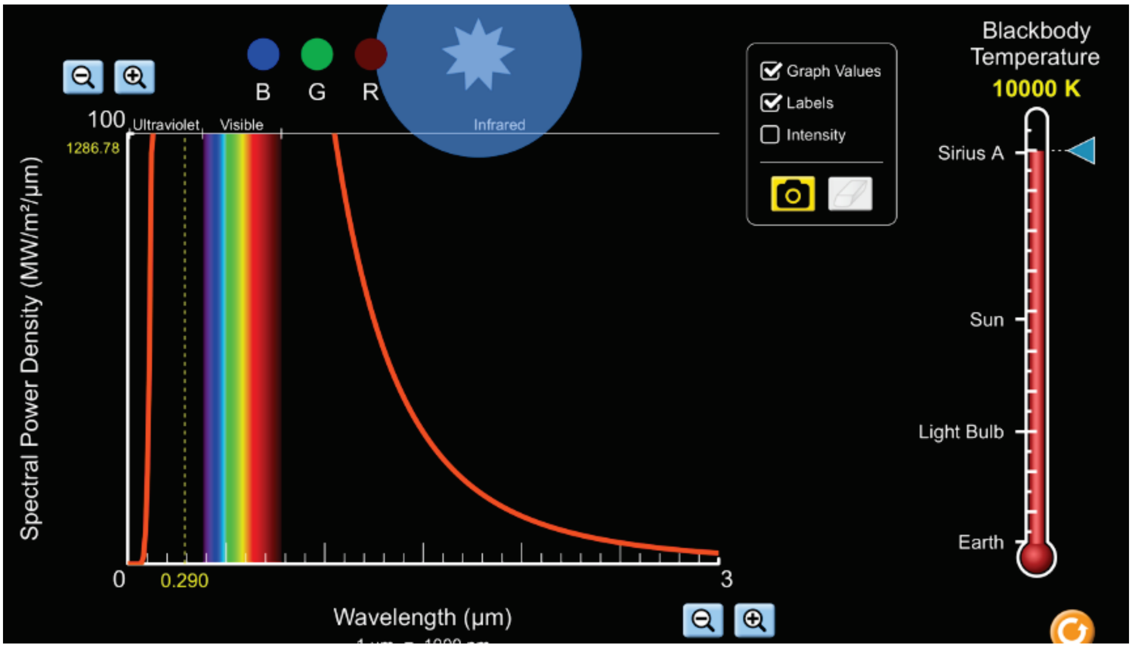
Intensiteettimaksimin aallonpituus on λ_L = 966 nm.

Auringon tuottaman valon spektri



Intensiteettimaksimin aallonpituus on λ_A = 500 nm.

Sirius A -tähden tuottaman valon spektri

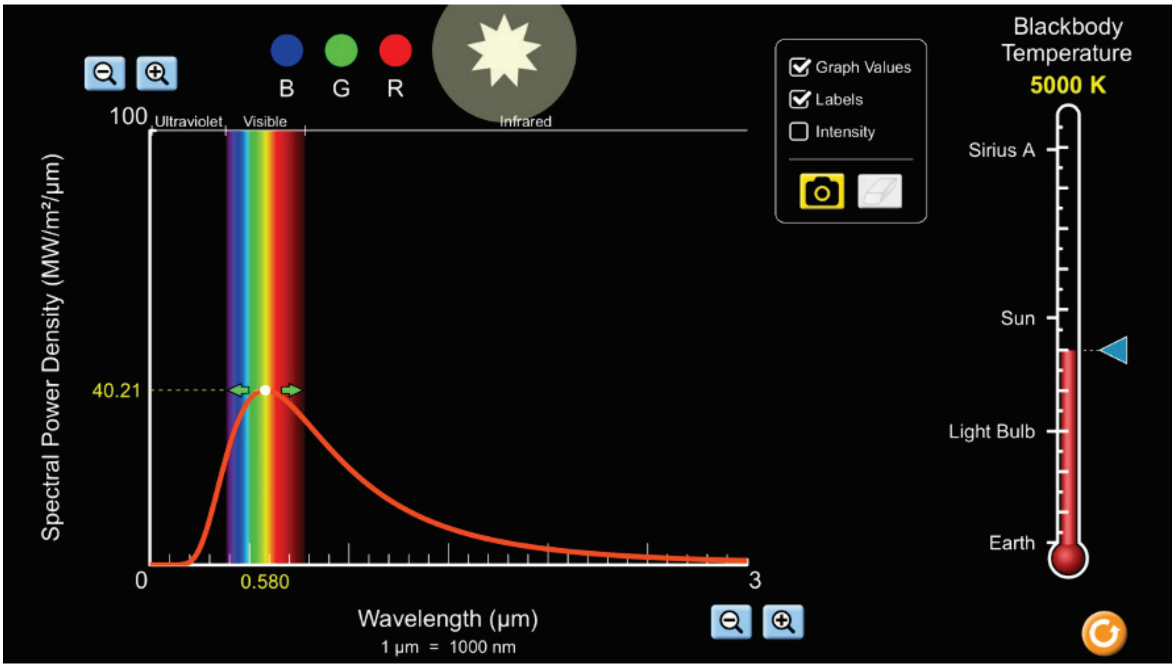


Intensiteettimaksimin aallonpituus on λ_S = 290 nm.

b) Keltaisen valon aallonpituus on välillä 560 nm – 590 nm.

Määritetään tältä aallonpituusalueelta intensiteettimaksimi ja sitä vastaava lämpötila.

Kun mustan kappaleen lähettämän säteilyn intensiteettimaksimi on keltaisen valon intensiteettimaksimin aallonpituudella, kappaleen lämpötila on T = 5 000 K.



c) Simulaation avulla voidaan havaita, että mitä suurempi on mustan kappaleen lämpötila, sitä suurempi on säteilyn intensiteetti ja sitä pienempi on intensiteettimaksimin aallonpituus.

Tehtävä 10.17.

a) Näkyvä valo on aallonpituusalueella 400 nm – 700 nm. Kuvaajasta voidaan havaita, että 2 700 K:n lämpöisen mustan kappaleen säteilyspektrin huippuintensiteetti on aallonpituudella 1 100 nm, joten suurin osa säteilyn intensiteetistä on infrapuna-alueella. Eli suurin osa hehkulampun tuottamasta säteilystä on infrapunasäteilyä, ja vain pieni osa energiasta muuttuu näkyväksi valoksi. Kaikkein suurin osa sähkötehosta menee lampun osien lämmittämiseen.

b) Kun mustan kappaleen lämpötila kasvaa, mustan kappaleen säteilyspektrin kokonaisintensiteetti kasvaa voimakkaasti. Intensiteettihuippu siirtyy kohti pienempää aallonpituutta, eli infrapuna-alueelta kohti näkyvän valon aluetta.

Infrapunasäteilyn lisäksi musta kappale alkaa säteilemään voimakkaammin näkyvää valoa ja ultraviolettisäteilyä, kun kappaleen lämpötila kasvaa. Kun lampun värilämpötila on 2 700 K, sen lähettämä valo on kellertävää, koska keltaisen ja punaisen valon osuus spektristä on vallitseva. Kun värilämpötilaa kasvatetaan niin, että se on 3 000 K, valo on lämpimän valkoista. Vihreän valon osuus kasvaa.

Kun värilämpötila on 3 500 K, siinä on mukana kaikkia näkyvän valon aallonpituuksia. Väri on kirkkaan valkoista. Tätä korkeampi värilämpötila nähtäisiin jo sinertävänä.

Tehtävä 10.18.

valon taitekerroin ilmassa on $n_i = 1{,}000$ ja lasissa $n_l = 1{,}509$

Valo osuu ensimmäiseen ilman ja lasin rajapintaan kohtisuorasti 90°:n tulokulmassa. Osu valosta heijastuu, osa läpäisee rajapinnan. Valo ei taitu, vaan etenee suoraviivaisesti suuntaansa muuttamatta lasiin.

Toisessa rajapinnassa valon tulokulma on 45°.

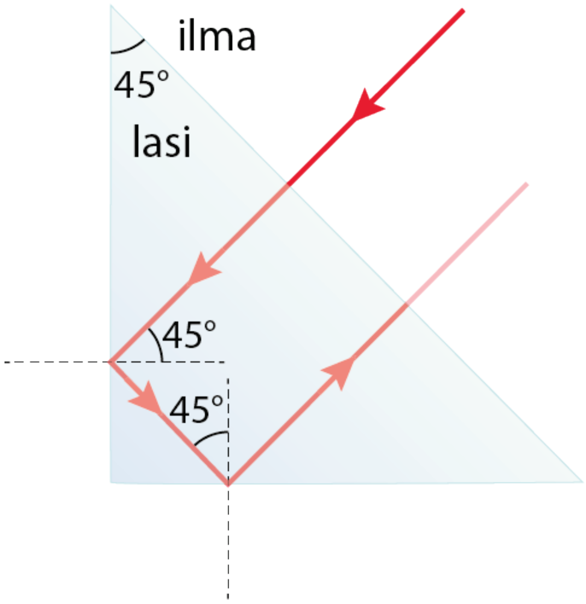
Kokonaisheijastuksen rajakulma lasin ja ilman rajapinnassa on

$$\sin\alpha_r = \frac{n_i}{n_l}$$

$$\alpha_r = \sin^{-1}\left(\frac{n_i}{n_l}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1{,}000}{1{,}509}\right) = 41{,}50539° \approx 41{,}51°.$$

Koska tulokulma on suurempi kuin kokonaisheijastuksen rajakulma, valo kokonaisheijastuu. Heijastumislain mukaisesti valon heijastuskulma on yhtä suuri kuin valon tulokulma.

Tämän jälkeen heijastunut valonsäde osuu uudelleen lasin ja ilman rajapintaan 45°:n tulokulmassa, ja jälleen tapahtuu kokonaisheijastuminen. Heijastumislain mukaisesti valonsäde jatkaa 45°:n kulmassa seuraavaan rajapintaan, johon valonsäde osuu kohtisuorasti 90°:n tulokulmassa. Osa valosta läpäisee rajapinnan lasista ilmaan suuntaansa muuttamatta.


ilma
45°
lasi
45°
45°

Tehtävä 10.19.

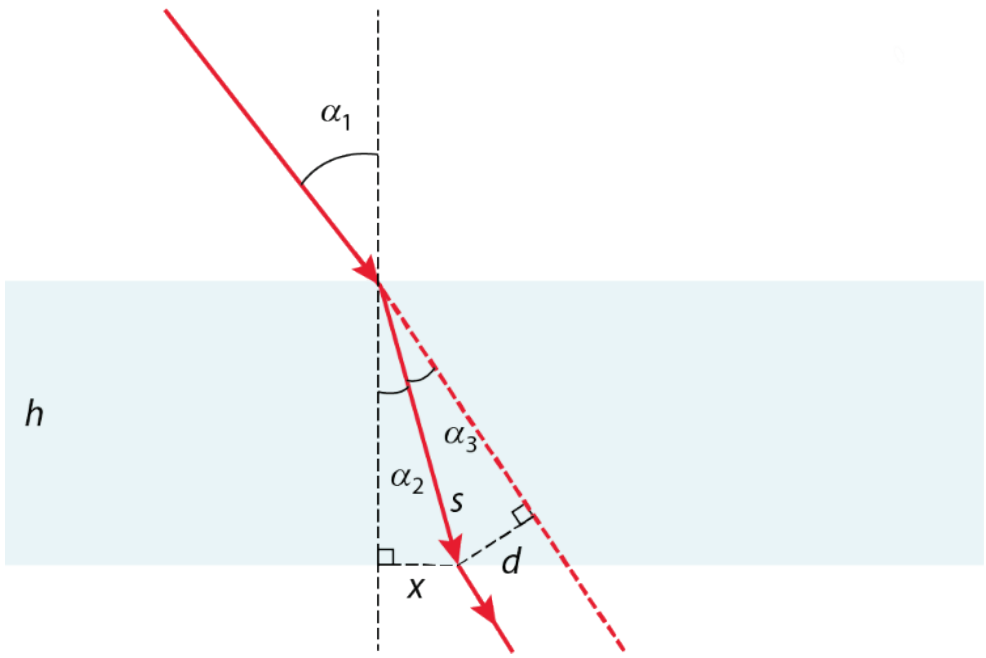
valonsäteen tulokulma $\alpha_1 = 38°$

ilman taitekerroin $n_1 = 1,00$

lasin taitekerroin $n_2 = 1,50$

lasin paksuus $h = 2,2$ cm

Piirretään kuva tilanteesta



Lasketaan ensin taittumislain $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{n_2}{n_1}$ avulla taitekulma.

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{n_2}{n_1}.$$

$$\sin\alpha_2=\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha_1$$

$$\alpha_2=\sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha_1\right)=\sin^{-1}\left(\frac{1{,}00}{1{,}50}\cdot\sin38{,}0^\circ\right)=24{,}232\,54^\circ$$

Lasketaan taitekulman α_2 avulla kulman α_3 arvo.

$\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$ =38° − 24,232 539 71°=13,767 460 29°

Lasketaan kuvan avulla valon kulkema matka lasilevyssä.

$$\cos\alpha_2=\frac{h}{s}$$

$$s=\frac{h}{\cos\alpha_2}$$

Määritetään seuraavaksi yhdensuuntaissiirtymä *d*

$$\sin\alpha_3=\frac{d}{s}$$

$$d=s\cdot\sin\alpha_3=\frac{h}{\cos\alpha_2}\cdot\sin\alpha_3=\frac{2{,}2\,\text{cm}}{\cos(24{,}232\,5397^\circ)}\cdot\sin(13{,}767\,460\,29^\circ)$$

$$=0{,}574\,1502\,\text{cm}\approx0{,}57\,\text{cm}$$

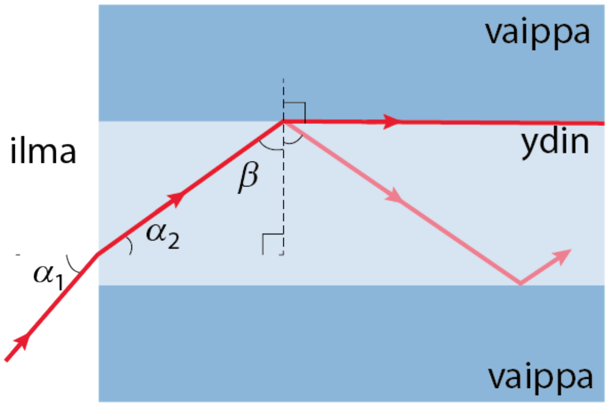
Tehtävä 10.20.

valokuidun ytimen taitekerroin n_y = 1,55

ilman taitekerroin n_i = 1,00

tulokulma α_1 = 16,0°

a) Valo jää kulkemaan kuituun, kun valo saapuu valokuituun 16°:n tulokulmassa.



Lasketaan, kuinka suuri taitekulma on ytimen ja ilman rajapinnassa.

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha_1$$

$$\alpha_2 = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha_1\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1,00}{1,55}\cdot\sin 16,0^\circ\right) = 10,243\,42^\circ$$

Lasketaan, kuinka suuri valonsäteen tulokulma β on ytimen ja vaipan rajapinnassa. Valonsäteen tulokulma β kuidun ytimen ja vaipan rajapinnassa on niin suuri, että tapahtuu kokonaisheijastuminen.

$$\alpha_2 + \beta + 90° = 180°$$

$$\beta = 180° - 90° - \alpha_2 = 180° - 90° - 10{,}243\,42° = 79{,}756\,58° \approx 79{,}8°$$

Kokonaisheijastumisen rajakulma on 79,8°.

b) Lasketaan pinnoitteen taitekerroin kokonaisheijastuksen rajakulmasta.

$\sin\beta_{\mathrm{r}} = \dfrac{n_{\mathrm{p}}}{n_{\mathrm{y}}}$ eli $n_{\mathrm{p}} = \sin\beta \cdot n_{\mathrm{y}} = \sin(79{,}756\,58°) \cdot 1{,}55 = 1{,}525\,29 \approx 1{,}53$

Pinnoitteen taitekerroin on 1,53.

Tehtävä 10.21.

a) Havaitaan, että kun valo osuu ilman ja levyn rajapintaan, osa valosta heijastuu ja osa taittuu. Valon heijastuskulma on yhtä suuri kuin valon tulokulma. Kun valo kulkee ilmasta levyyn, valo taittuu kohti pinnan normaalia. Heijastuneen ja taittuneen valon intensiteetit ovat pienempiä kuin tulevan valon intensiteetti.

b) ilman taitekerroin n_1 = 1,00

$\boldsymbol{\alpha_1}$ **(°)**	$\boldsymbol{\alpha_2}$ **(°)**
4,5	2
9,5	5
14	9,5
20	13,5
25	15
30	20

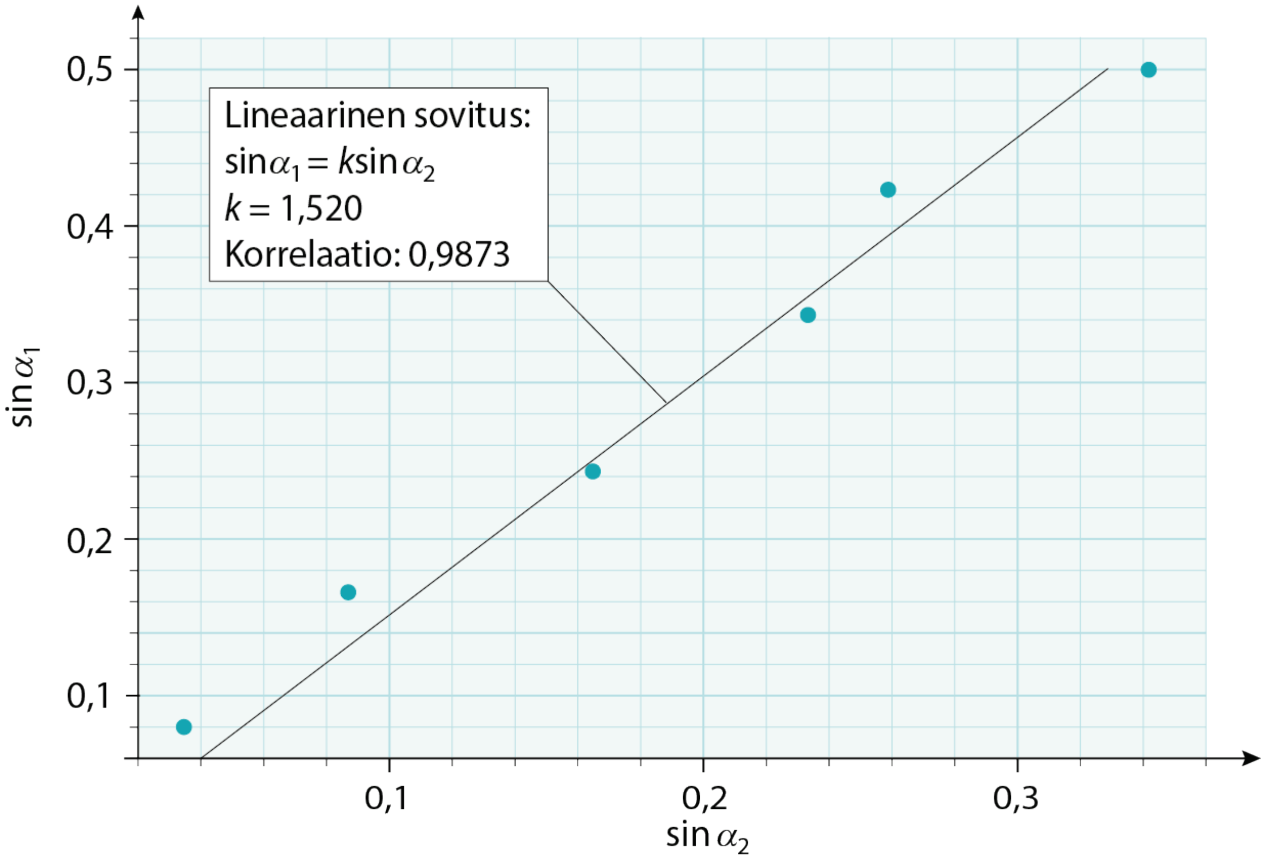
Kun valo tulee ilmasta levyyn, valo taittuu, ja taittunut valon noudattaa taittumislakia.

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Tulo- ja taitekulman välille saadaan yhtälö

$$\sin\alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin\alpha_2.$$

Tulo- ja taitekulmien sinien arvot ovat suoraan verrannolliset. Laaditaan kuvaaja ($\sin\alpha_2$, $\sin\alpha_1$)-koordinaatistoon. Mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin on $k = \frac{n_2}{n_1}$. Lasketaan uudet sarakkeet ja laaditaan kuvaaja.



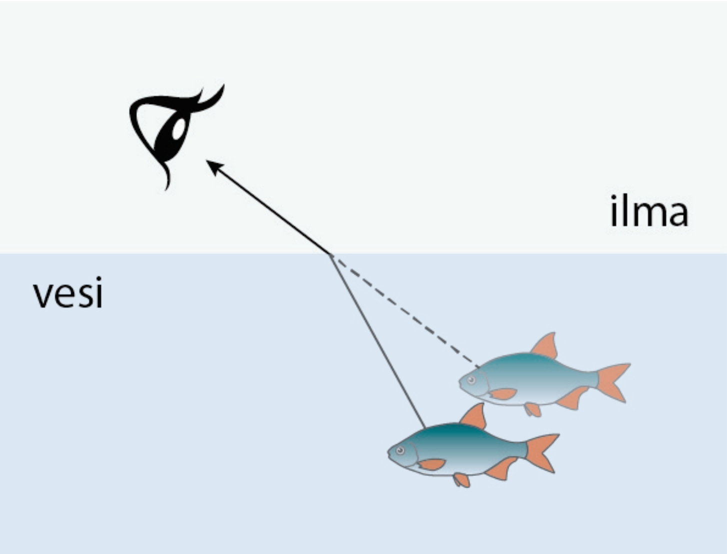
Suoran fysikaalinen kulmakerroin k = 1,520.

Levyn taitekerroin oli

$n_2 = kn_1 = 1{,}520 \cdot 1{,}00 = 1{,}520 \approx 1{,}52.$

c) Tulokulman ja taitekulman tarkkojen arvojen lukeminen on vaikeaa. Tulokulman arvot voi lukea noin asteen tarkkuudella. Valo ei osunut mittauksessa aina tarkasti rajapinnan normaalin ja levyn leikkauskohtaan, mikä aiheutti virhettä kulmien määrittämisessä.

Tehtävä 10.22.
Havaitsijan mielestä kala on lähempänä pintaa kuin mitä se oikeasti on. Näköhavainto ja kalan todellisen sijainti poikkeavat toisistaan, koska valo taittuu veden ja ilman rajapinnassa.



Tehtävä 10.23.

prisman taittava kulma $\varphi = 30{,}0°$

laservalon kulkusuunnan muutos $\delta = 19{,}6°$

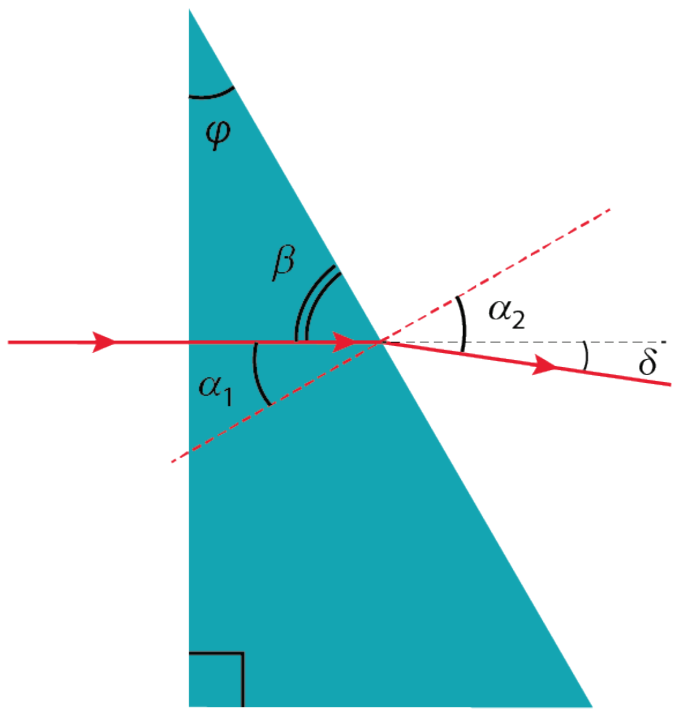
valon taitekerroin ilmassa $n_i = 1{,}000$

lasin taitekerroin laservalolle n_l

a) Koska laservalo tulee kohtisuoraan ilman ja prisman rajapintaan, valo ei taitu.

Seuraavaan, lasin ja ilman rajapintaan laservalo saapuu tulokulmassa, joka on yhtä suuri kuin prisman taittava kulma, $\alpha_1 = \varphi = 30{,}0°$.

Perustelu: Kolmion kulmien summa on 180°, joten $\varphi + \beta = 90°$. Koska pinnan normaali muodostaa suoran kulman pinnan suhteen, myös $\alpha_1 + \beta = 90°$. Siksi $\varphi = \alpha_1$.



Kuvan mukaisesti taitekulma
$\alpha_2 = \alpha_1 + \delta = \varphi + \delta = 30{,}0^\circ + 19{,}6^\circ = 49{,}6^\circ.$

Ratkaistaan taittumislaista $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_\text{i}}{n_1}$ taitekerroin laservalolle.

$$n_1 = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} \cdot n_\text{i} = \frac{\sin 49{,}6^\circ}{\sin 30{,}0^\circ} \cdot 1{,}000 = 1{,}523\,0766 \approx 1{,}523$$

b) Kuvaajasta katsottuna laservalon aallonpituus on 480 nm. Laservalon väri on sininen.

Tehtävä 10.24.

asetonin taitekerroin $n_a = 1,25$

lasin taitekerroin $n_l = 1,50$

ilman taitekerroin $n_i = 1,00$

valon aallonpituus $\lambda = 630$ nm

a) Valo heijastuu osittain kalvon yläpinnasta ja osittain pinnan ja kalvon rajapinnasta. Nämä heijastuneet aallot interferoivat keskenään.

Aallot joko vahvistavat tai vaimentavat toisiaan sen mukaan, kuinka suuri vaihe-ero niillä on. Jos vaihe-eroa ei ole, aallot vahvistavat toisiaan voimakkaimmin. Jos vaihe-ero vastaa puolta aallonpituutta, aallot vaimentavat toisiaan eniten.

Vaihe-ero riippuu kalvon paksuudesta ja heijastumisissa mahdollisesti tapahtuvista puolta aallonpituutta vastaavista vaihesiirroista.

b) Molemmissa heijastumisissa tapahtuu puolta aallonpituutta vastaava vaihesiirto, koska valo saapuu aineesta, jonka taitekerroin valolle on pienempi aineeseen, jonka taitekerroin on suurempi. Tällöin heijastuneet aallot ovat samassa vaiheessa ja vahvistavat toisiaan voimakkaimmin, jos kalvon alapinnalta heijastunut aalto on kulkenut kalvossa yhden aallonpituuden mittaisen matkan (tai tämän matkan kokonaisen monikerran). Jos kalvon paksuutta merkitään *d*:llä, saadaan ehto

$2d = \lambda_{\text{asetoni}}$,

jossa λ_{asetoni} on valon aallonpituus asetonissa.

Aallonpituus saadaan taittumislain $\frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$ ja aaltoliikkeen perusyhtälön $c = f\lambda$ avulla. Aallon taajuus ei muutu rajapinnassa, jolloin

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\cancel{f}\lambda_1}{\cancel{f}\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Taittumislaki asetonin ja ilman rajapinnalle on

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_i} = \frac{n_i}{n_a},$$

joten

$$\lambda_a = \frac{n_i}{n_a} \cdot \lambda_i.$$

Asetonikerroksen paksuus on

$$d = \frac{\lambda_a}{2} = \frac{n_i}{2n_a} \cdot \lambda_i = \frac{1,00}{2 \cdot 1,25} \cdot 630\,\text{nm} = 252\,\text{nm}.$$

(Paksuus voi olla myös tämän monikerta.)

Tehtävä 10.25.

hilan etäisyys varjostimesta b = 1,27 m

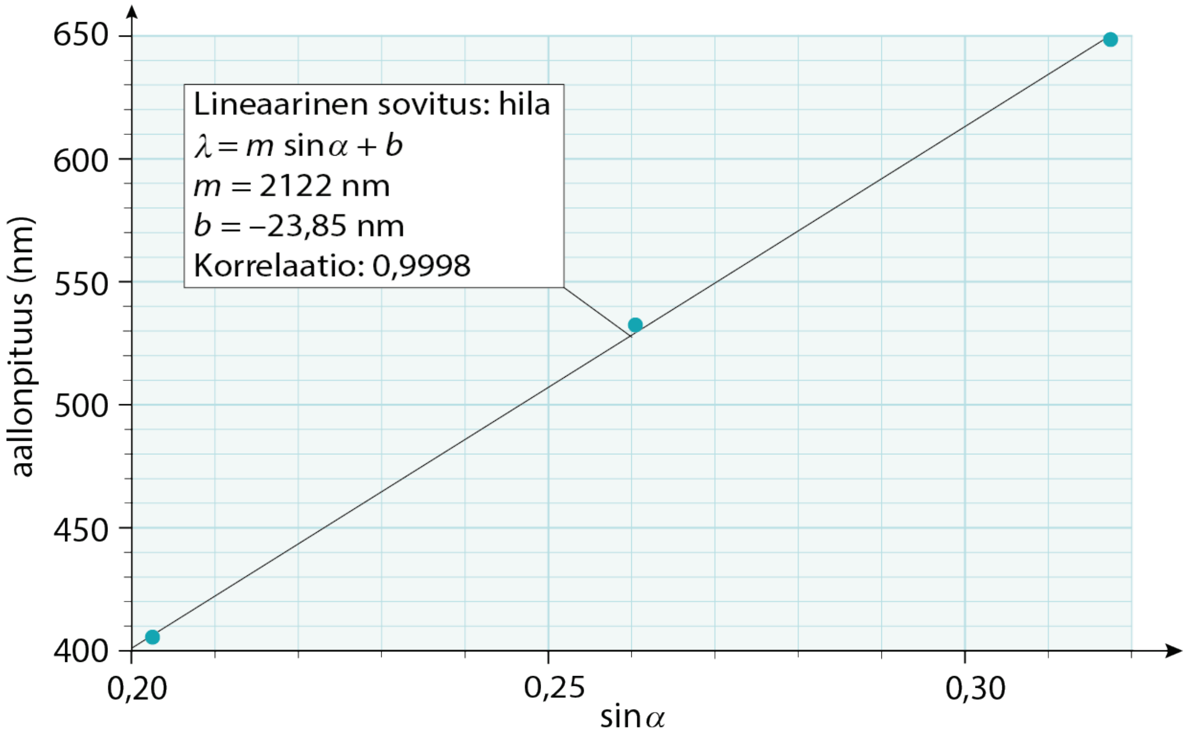
Lisätään uuteen sarakkeeseen kulmia vastaavat sinien arvot.

α (°)	$\sin\alpha$
18,5	0,317 305
15,1	0,260 505
11,7	0,202 787

b) Valo taipuu ja interferoituu hilassa. Interferenssimaksimit syntyvät kohtiin, jotka noudattavat hilayhtälöä $d\sin\alpha = k\lambda.$ Mittauksessa tutkittiin ensimmäisen kertaluvun interferenssimaksimia, joten k = 1. Tällöin hilassa taipuneen valon aallonpituudelle on voimassa

$$\lambda = d\sin\alpha.$$

Hilan rakojen välinen etäisyys saadaan ($\sin\alpha$, λ)-koordinaatiston mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta.



Suoran kulmakerroin eli hilan rakojen välinen etäisyys $m = d$ = 2 122 nm ≈ 2,12 µm.

c) Mittaus on suoritettu kolmella eri aallonpituudella. Mitä useammalla eri aallonpituudella mittaus tehdään, sitä enemmän (sinα, λ)-koordinaatiston kuvaajaan tulee mittauspisteitä ja sitä luotettavammin kulmakerroin voidaan määrittää. Luotettavuutta voidaan parantaa, kun mitataan kunkin valon taipumiskulmia useammalla eri hilan ja varjostimen välisellä etäisyydellä.

Hilan rakojen välimatka lasketaan valon aallonpituuden ja taipumiskulman avulla. Mitä lähempänä hila on varjostinta, sitä suurempi on taipumiskulman määrittämisessä tapahtuva mittausvirhe. Mittausvirhettä siis voidaan pienentää, kun pidennetään hilan ja varjostimen välistä välimatkaa.

Tehtävä 10.26.

valon aallonpituus λ = 632,8 nm

taipumiskulma α = 0,22°

kaksoisraon etäisyys varjostimesta b = 4,8 m

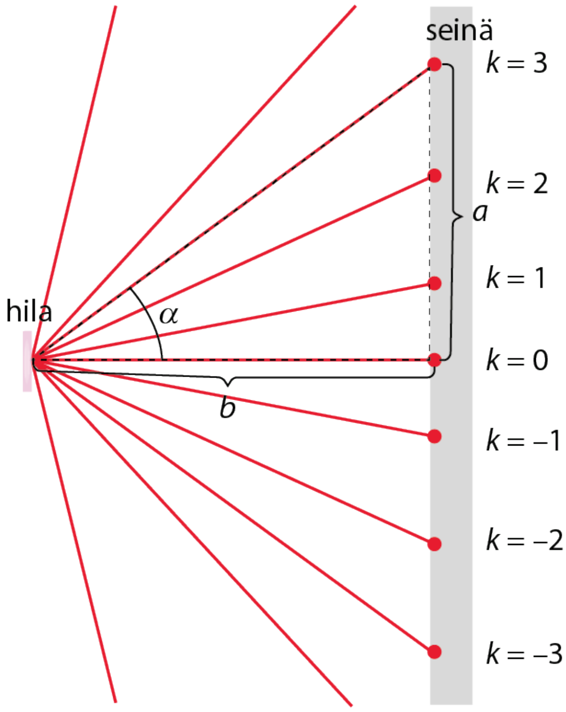
a) Tarkastellaan interferenssin kolmannen sivumaksimin taipumiskulmaa, joten kertaluku k = 3.

Kaksoisraosta taipunut valo noudattaa interferenssimaksimien kohdilla yhtälöä $d\sin\alpha = k\lambda$.

Kaksoisraon rakojen välinen etäisyys on

$$d = \frac{k\lambda}{\sin\alpha} = \frac{3 \cdot 632{,}8 \cdot 10^{-9}\text{ m}}{\sin 0{,}22^\circ} = 4{,}944 \cdot 10^{-4}\text{ m} \approx 0{,}49\,\text{mm}.$$

b) Taipumiskulma on erittäin pieni. Lasketaan, kuinka etäällä interferenssikuvion kolmas sivumaksimin valoisa kohta on päämaksimista.



$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$a = b\tan\alpha = 4{,}8\,\text{m} \cdot \tan 0{,}22° = 0{,}018\,43\,\text{m} \approx 1{,}8\,\text{cm}$$

c) Mitä kauemmaksi kaksoisrako viedään varjostimesta, sitä suurempi on maksimien välinen etäisyys. Jos kaksoisrako on liian lähellä varjostinta, valomaksimin paikan määrittämisen virhe tulee kasvaa.

Tehtävä 10.27.

a) Auringon valo taittuu ja heijastuu osuessaan ilmassa oleviin vesipisaroihin. Veden taitekerroin riippuu aallonpituudesta, joten eriväriset säteet taittuvat eri suuntiin. Tällöin syntyy sateenkaari. Valo taittuu myös eri suuntiin aallonpituuden mukaan osuessaan lumikiteisiin, timanttikorukiviin sekä kristallikruunujen lasirakenteisiin.

b) Bensiini- tai öljykalvon ala- ja yläpinnoista heijastuvat valoaallot interferoivat heikentäen tai vahvistaen toisiaan riippuen kalvon paksuudesta sekä suunnasta, josta kalvoa katsotaan. Tällöin eriväriset valoaallot vahvistuvat.

c) Laserin valo voi olla tasopolarisoitunutta, eli sähkömagneettisen aallon sähkökentän värähtely tapahtuu vain tietyssä tasossa. Jos tasopolarisoituneen valon annetaan osua lasin pintaan siten, että heijastuneen ja taittuneen valonsäteen välinen kulma on Brewsterin lain mukaisesti 90°, ja lisäksi käännetään valon polarisaatiotaso kohtisuoraan lasin pintaa vastaan, valoa ei heijastu lainkaan.

Tehtävä 10.28.

etäisyys vuorenharjanteelta lampareeseen s = 150 m

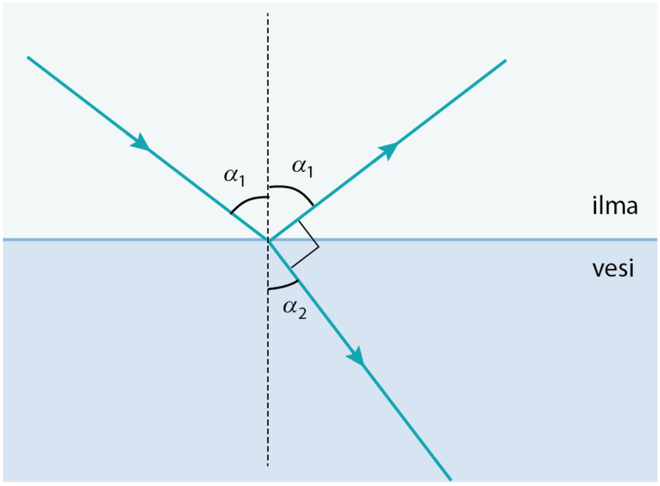
veden taitekerroin n_{vesi} = 1,33

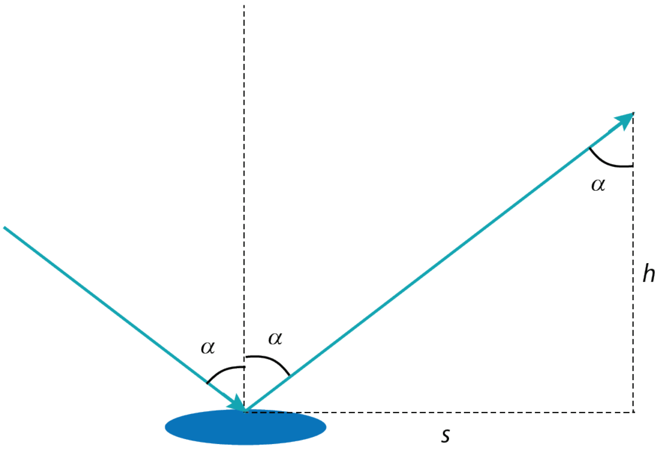
ilman taitekerroin n_{ilma} = 1,000

vuorenharjanteen korkeus h

a) Ilmiö johtuu valon polarisoitumisesta. Koska polarisoivat aurinkolasit estävät lähes kokonaan heijastuneen valonsäteen pääsyn silmiisi, on veden pinnasta heijastuva valo tasopolarisoitunutta. Heijastunut valo on tasopolarisoitunutta, kun rajapinnasta heijastunut ja läpi mennyt valonsäde ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan toisin sanottuna valo tulee veden pintaan Brewsterin kulmassa.

b) Laaditaan tilanteesta kuva:





Valo on tasopolarisoitunutta eli valo tulee veteen Brewsterin kulmassa α.

Määritetään Brewsterin kulman suuruus,

$$\tan\alpha = \frac{n_{\text{vesi}}}{n_{\text{ilma}}}.$$

Lasketaan kulman avulla vuorenharjanteen korkeus.

Kuvasta $\tan\alpha = \frac{s}{h}$.

Merkitään lausekkeet yhtä suuriksi.

$$\frac{n_{\text{vesi}}}{n_{\text{ilma}}} = \frac{s}{h}$$

$$h = \frac{n_{\text{ilma}}}{n_{\text{vesi}}} \cdot s = \frac{1{,}000}{1{,}33} \cdot 150\,\text{m} = 112{,}7819\,\text{m} \approx 113\,\text{m}$$

Tehtävä 10.29.

a) Kuvassa A vedenpinnasta tulee enemmän valoa puhelimen kameralle kuin kuvassa B. Kun Auringosta tullut valo osuu vedenpintaan, valo heijastuu vedenpinnasta. Vedenpinnasta heijastunut valo on tasopolarisoitua, kun heijastunut valo ja veteen taittunut valo etenee toisiaan vastaan kohtisuorasti. Kun heijastunutta valoa katsotaan polarisoivien aurinkolasien läpi, vedenpinnasta heijastuneesta tasopolarisoituneesta valosta absorboituu aurinkolaseihin muut kuin aurinkolasien polarisaatiosuunnassa värähtelevät tasopolarisoituneen valon suunnat. Siksi kuvassa B tulee kameralle vähemmän vedenpinnasta heijastunutta valoa kuin kuvassa A.

b) Auringon valo siroaa ilmakehän molekyyleissä. Sironnut valo etenee kaikkiin suuntiin. Ilmakehä myös absorboi auringon valoa sitä enemmän, mitä pidemmän matkan valo kulkee ilmakehässä. Sininen valo siroaa enemmän kuin punainen valo. Auringonlaskun aikaan taivaanrannan suunnasta tullut valo kulkee pidemmän matkan ilmakehässä kuin päivällä. Tällöin ilmakehässä sironnut sininen valo absorboituu ilmakehän molekyyleihin enemmän kuin punainen valo ja silmään saapuneen punaisen valon intensiteetti on tällöin suurin. Koska silmään saapuneen punaisen valon intensiteetti on suurin, taivas näyttää punaiselta.

Syvennä

Tehtävä 10.30.

a) Kynälaserin valon aallonpituus voidaan määrittää hilassa tapahtuvan diffraktion ja interferenssin avulla.

Asetetaan kynälaser ja hila peräkkäin statiivissa oleviin kouriin. Teipataan valkoista paperia seinälle, ja asetetaan hila reilun metrin etäisyydelle seinästä siten, että hila on samansuuntainen seinän kanssa. Kun laserin tuottama valo ohjataan kohtisuorasti hilaan, seinälle teipatussa paperissa näkyy interferenssimaksimeja.

Mitataan hilan etäisyys valkotaulusta sekä keskellä hilan takana olevan päämaksimin ja reunimmaisena näkyvän interferenssimaksin välinen etäisyys. Kirjataan ylös myös, kuinka mones kyseinen interferenssimaksimi on päämaksimista lukien.

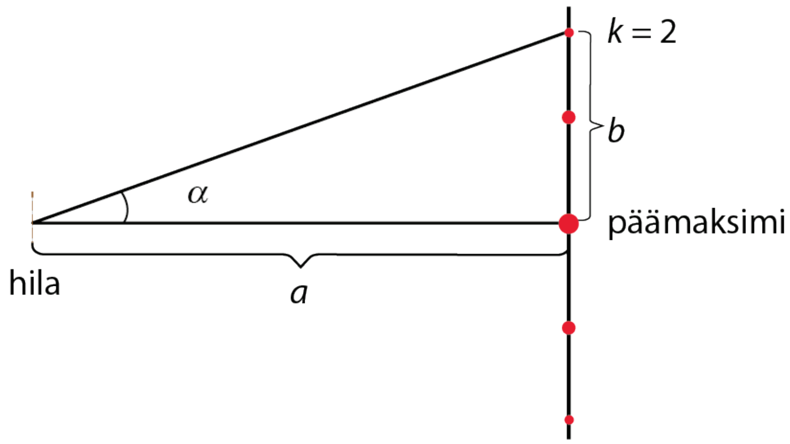
b) Tutkimuksessa käytetyt välineet:

statiiveja 2 kpl
kouria 2 kpl
kynälaser
hila
teippiä
paperia
rullamitta

c) Laserin aallonpituuden määrittäminen

Laserin valo taipuu hilassa ja taipuneet valoaallot interferoivat. Interferenssimaksimit tulevat kohtiin, joissa eri raoista kulkeneiden aaltojen matkaero on aallonpituuden monikerta. Tämä voidaan muotoilla hilayhtälöksi $d\sin\alpha = k\lambda$, jossa d on hilan rakojen välinen etäisyys, α on taipumiskulma, k on valomaksimin kertaluku ja λ on laserin valon aallonpituus.

Taipumiskulma α saadaan, kun mitataan kauimmaisen interferenssimaksimin etäisyys päämaksimista b ja hilan etäisyys a seinästä.



Taipumiskulmaksi saadaan

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Laserin valon aallonpituus saadaan hilayhtälöstä

$$\lambda = \frac{d\sin\alpha}{k} = \frac{d\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)}{k}$$

d) Mittaamisessa virhettä syntyy hilan etäisyyden määrityksestä seinästä sekä interferenssimaksimien paikan määrittämisestä.

Mitä pienempiä ovat etäisyydet, sitä suurempia on etäisyyden mittaukseen liittyvät virheet ja sitä suurempi virhe tulee kynälaserin valon aallonpituuden määritykseen.

Mittausvirhettä voidaan pienentää käyttämällä mahdollisimman suuria etäisyyksiä.

Lisäksi mittausvirhettä saadaan pienennettyä määrittämällä mahdollisimman etäällä päämaksimista olevan interferenssimaksimin etäisyys päämaksimista.

Myös hilan asentoon seinään ja kynälaseriin nähden liittyy virhettä. Päämaksimin kautta kulkevan valkotaulun normaalin pitää kulkea hilan kautta, jotta taipumiskulma saadaan määritettyä oikein. Kohtisuoruus voidaan mitata suorakulmaisen kolmion ja Pythagoraan lauseen avulla.

Tehtävä 10.31.
Asetetaan lasilevy pahvin päälle ja piirretään kynällä pahviin lasilevyn paikka. Laitetaan lasilevyn reunan keskikohtaan yksi nuppineula pahviin pystyyn. Asetetaan toinen nuppineula muutaman senttimetrin etäisyydelle levystä vähän vinosti edelliseen nuppineulaan nähden. Katsotaan nuppineulojen suuntaisesti lasilevyn läpi. Laitetaan uusi neula lasilevyn toiselle puolelle siten, että kaikki neulat ovat neulojen suunnasta katsottuna samassa linjassa. Laitetaan vielä yksi neula muutaman senttimetrin etäisyydelle lasilevyn toiselle puolelle siten, että kaikki neulat ovat neulojen suunnasta katsottuna samassa linjassa.

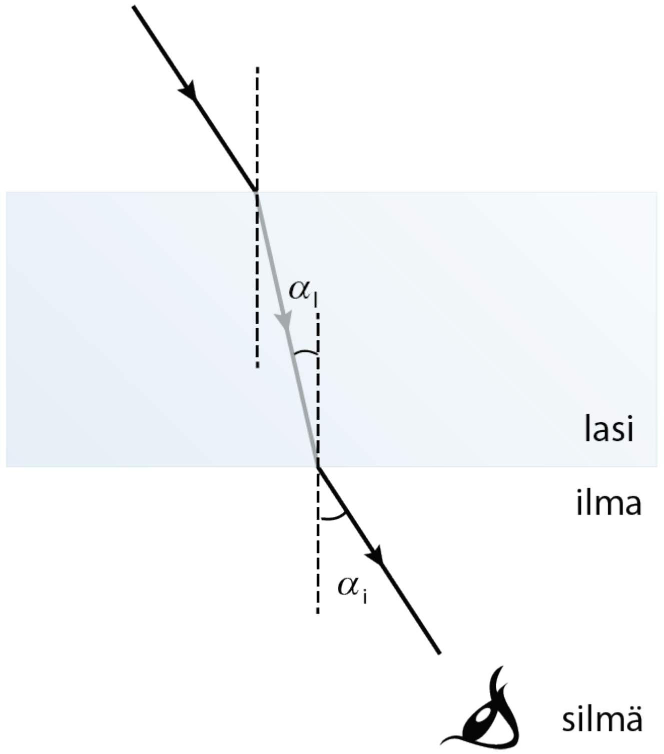
Otetaan lasilevy pois. Piirretään nuppineulojen paikat. Piirretään lasilevyn pinnan normaalit kohtiin, jossa nuppineulat olivat lasilevyn vieressä. Yhdistetään neulojen paikat kulmaviivaimella. Määritetään syntyneet tulo- ja taitekulmat. Lasketaan taittumislain mukaan lasilevyn taitekerroin yhtälöstä

$$\frac{\sin\alpha_\mathrm{i}}{\sin\alpha_\mathrm{l}} = \frac{n_\mathrm{l}}{n_\mathrm{i}}$$

$$n_\mathrm{l} = \frac{\sin\alpha_\mathrm{i}}{\sin\alpha_\mathrm{l}} n_\mathrm{i},$$

jossa n_i on ilman taitekerroin, n_l lasin taitekerroin,
α_i = pinnan normaalin ja valon kulkusuunnan välinen kulma ilmassa ja α_l = pinnan normaalin ja valon kulkusuunnan välinen kulma lasissa.

Kuva saadusta kuviosta



Tehtävä 10.32.

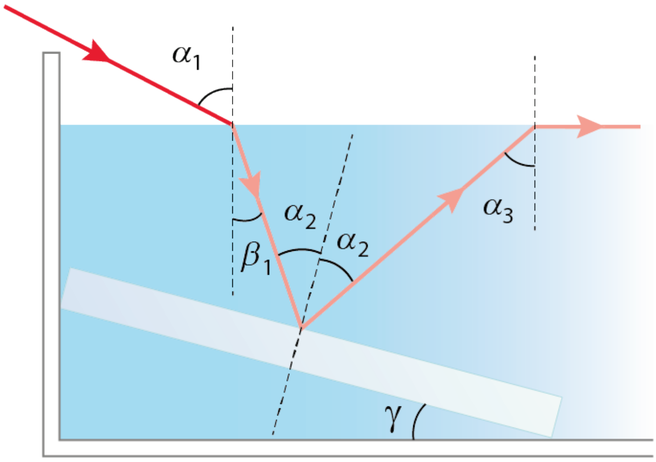
a) tulokulma veden pintaan α_1 = 52,5°

lasin taitekerroin n_l = 1,61

veden taitekerroin n_v = 1,33

ilman taitekerroin n_i = 1,00

Merkitään lasilevyn kallistuskulmaa γ ja laaditaan valonsäteen kulkureitistä kuva.



Ilman ja veden rajapinnassa valon kulkusuunta muuttuu.

Taittumislain mukaan $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}=\frac{n_v}{n_i}$, josta $\sin\beta_1=\frac{n_i}{n_v}\sin\alpha_1$ eli

$$\beta_1=\sin^{-1}\left(\frac{n_i}{n_v}\sin\alpha_1\right)=\sin^{-1}\left(\frac{1,00}{1,33}\cdot\sin 52,5°\right)=36,62°.$$

Lasista heijastunut valo on täydellisesti polarisoitunutta. Silloin vedessä olevasta lasilevystä heijastuneen säteen ja rajapinnassa taittuneen säteen välinen kulma on 90° Brewsterin lain mukaisesti.

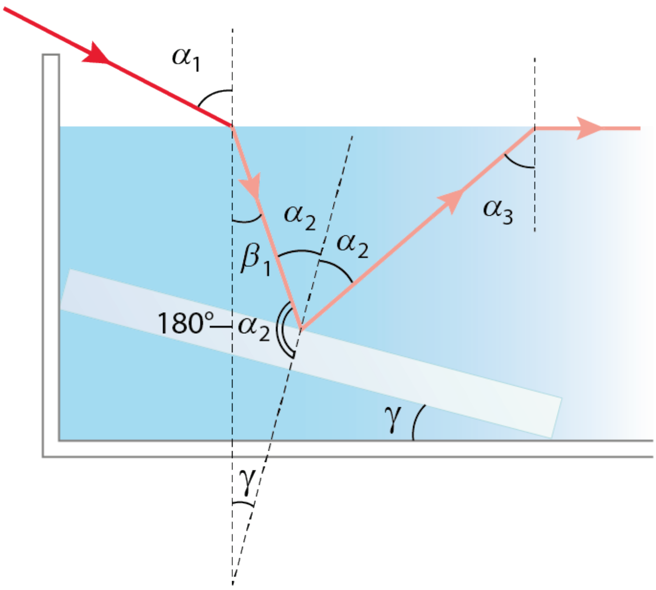
Taittumislaki veden ja lasin rajapinnassa on $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}=\frac{n_\mathrm{l}}{n_\mathrm{v}}$.

Brewsterin lain mukaan $\beta_2 = 90° - \alpha_2$ ja

$$\tan\alpha_2 = \frac{n_\mathrm{l}}{n_\mathrm{v}}$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1{,}61}{1{,}33}\right) = 50{,}44°$$

Lasilevyn kallistuskulma *γ* on myös vedenpinnan ja lasilevyn normaalien välinen kulma. Täydennetään tämä kuvaan.



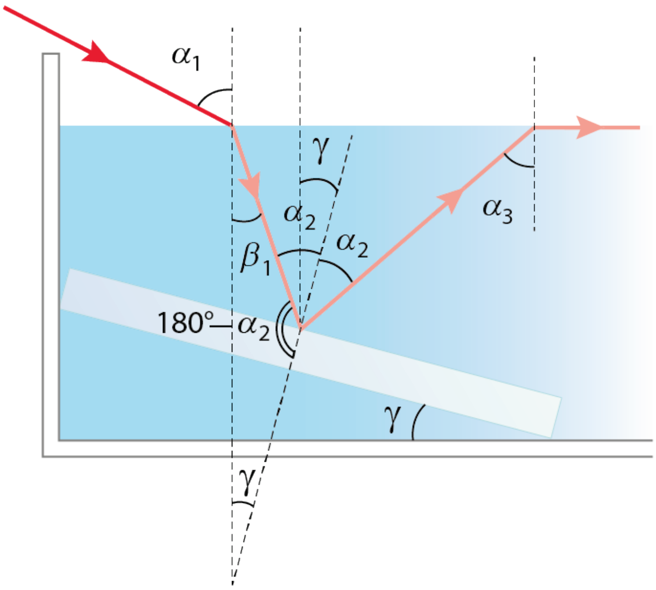
Koska kolmion kulmien summa on 180°, voidaan kuvan perusteella kirjoittaa $\gamma + 180° - \beta_1 + \alpha_2 = 180°$.
Ratkaistaan tästä lasin kallistuskulma,
$\gamma = \alpha_2 - \beta_1 = 50{,}44° - 36{,}62° = 13{,}82° \approx 13{,}8°$.

b) Jotta valo näkyisi vedenpinnan yläpuolella, täytyy tulokulman α_3 olla pienempi kuin kokonaisheijastuksen rajakulma α_r veden ja ilman rajapinnassa. Rajatilanteessa taitekulma on 90°, ja taittumislaki on

$$\frac{\sin\alpha_r}{\sin 90°} = \frac{n_i}{n_v}.$$

Rajakulma on $\alpha_r = \sin^{-1}\left(\frac{n_i}{n_v}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1{,}00}{1{,}33}\right) = 48{,}75° \approx 48{,}8°.$

Täydennetään kuvioon vielä kulman α_3 kanssa samankohtainen kulma, jonka suuruus on kuvion perusteella $\alpha_2 + \gamma$. Kuvion perusteella tulokulma on siten $\alpha_3 = \alpha_2 + \gamma = 50{,}44° + 13{,}82° = 64{,}26° \approx 64{,}3°$.



Koska tulokulma α_3 on suurempi kuin kokonaisheijastuksen rajakulma α_r, valonsäde kokonaisheijastuu, eikä sitä silloin näy vedenpinnan yläpuolella.

Tehtävä 10.33.

Oikea vaihtoehto on A.

Heijastumisessa tapahtuu puolen aallonpituuden vaihesiirto, kun valo heijastuu rajapinnan aineesta, jonka taitekerroin on suurempi. Vaihesiirrossa aallonharjat muuttuvat aallonpohjiksi.

Pinnoitteen etupinnalla, ilman ja pinnoitteen rajapinnasta heijastuvassa valossa tapahtuu puolen aallonpituuden vaihesiirto, koska $n_{\text{pinnoite}} > n_{\text{ilma}}$.

Pinnoitteen alapinnassa, pinnoitteen ja alustan rajapinnasta heijastuvassa valossa ei tapahdu vaihesiirtoa, koska $n_{\text{alusta}} < n_{\text{pinnoite}}$.

Monokromaattinen valo sisältää vain yhtä aallonpituutta. Ympyränmuotoisen alueen reunalla pinnoitteen paksuus lähestyy nollaa. Silloin pinnoitteen etu- ja takapinta ovat lähes samassa kohdassa. Etupinnasta ja takapinnasta heijastuvat aallot ovat vastakkaisessa vaiheessa, koska toisessa rajapinnassa tapahtuu puolen aallonpituuden vaihesiirto. Silloin aallot ovat vastakkaisessa vaiheessa, jolloin tapahtuu heikentävä interferenssi ja pinnoitteen reunalle tulee tumma rengas.

Tehtävä 10.34.

a) Kuvan perusteella kuoppa A alkaa aaltoluvun 570 1/cm kohdalta ja päätyy kohtaan 770 1/cm.

Kuoppaa A vastaava aallonpituusväli rajautuu aallonpituuksiin

$$\lambda_1 = \frac{1}{770}\,\text{cm} = 1{,}2987 \cdot 10^{-3}\,\text{cm} = 12{,}987 \cdot 10^{-6}\,\text{m} \approx 13\,\mu\text{m}$$

ja

$$\lambda_2 = \frac{1}{570}\,\text{cm} = 1{,}7543 \cdot 10^{-3}\,\text{cm} = 17{,}543 \cdot 10^{-6}\,\text{m} \approx 18\,\mu\text{m}.$$

Kuoppaa A vastaava aallonpituusväli on 13 µm – 18 µm.

Kuopat aiheutuvat maapallon lähettämän lämpösäteilyn absorboitumisesta ilmakehän kaasuihin.

b) valon nopeus c = 2 997 924 58 m/s

Planckin vakio h = 6,626 070 15 · 10^{-34} Js

Boltzmannin vakio k = 1,380 649 · 10^{-23} J/K

Kuvaan A eli maapallon pinnan lähettämän lämpösäteilyn spektriin on sovitettu mustan kappaleen spektri, jossa intensiteetin maksimiarvo on aaltoluvun 580 1/cm kohdalla. Tämä vastaa aallonpituutta

$$\lambda = \frac{1}{580}\,\text{cm} = \frac{1}{580}\cdot 10^{-2}\ \text{m}.$$

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $c = f\lambda$, josta $f = \frac{c}{\lambda}$.

Sijoitetaan tämä annettuun Wienin siirtymälain yhtälöön ja ratkaistaan lämpötila.

$$f_{\text{max}} = \frac{\alpha}{h}kT$$

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{\alpha}{h}kT$$

$$T = \frac{h}{\alpha}\frac{c}{k\lambda} = \frac{6{,}626\,070\,15\cdot 10^{-34}\ \text{Js}\cdot 299\,792\,458\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2{,}8214\cdot 1{,}380\,649\cdot 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}}\cdot\frac{1}{580}\cdot 10^{-2}\ \text{m.}} = 295{,}7718\,\text{K} \approx 296\,\text{K}$$

Sovitteen perusteella maapallon pintalämpötila on 296 K eli 23 °C.

c) Yläilmakehästä mitatun maapallon lähettämän lämpösäteilyn alueellisten vaihteluiden merkittävin selitys ovat eri alueiden lämpötilaerot. Auringosta tulevan säteilyn intensiteetti eli teho pinta-alayksikköä kohden on suurin päiväntasaajan läheisyydessä. Intensiteetti pienenee napoja kohti mentäessä, tämän seurauksena päiväntasaajalla on selvästi korkeammat keskilämpötilat kuin maapallon napa-alueilla. Siten napojen lähellä olevat alueet lähettävät keskimäärin vähemmän lämpösäteilyä kuin päiväntasaajaa lähellä olevat alueet.

Alueellisen jakauman kartassa erottuvat myös aavikkoalueet. Näillä alueilla pilvisyys on vähäistä. Lämpösäteily absorboituu vesihöyryyn, joten pilvipeite vähentää mitatun lämpösäteilyn määrää. Päiväntasaajan kohdalla erottuu linja, josta lämpösäteilyä on mitattu vähemmän, ja tämä johtuu alueelle tyypillisestä suuresta ilmankosteudesta ja pilvipeitteen yleisyydestä.

Lisäksi alueellisen jakauman kartassa erottuvat jäätiköt. Jäätikköalueet heijastavat Auringon lähettämää säteilyä, ja niiden lähettämä lämpösäteily on samalla leveyspiirillä olevaa paljasta maata vähäisempää.

11 Sähkövaraus ja sähkökenttä

Harjoittele

Tehtävä 11.1.

Oikeat vastaukset:

a) C

b) C

c) B

d) A

e) D

f) A

g) D

h) B

i) C

j) A

k) C

Tehtävä 11.2.

a) pölyhiukkasen sähkövaraus
Q = +5,45 aC = +5,45 · 10^{-18} C

elektronin sähkövaraus $-e$ = −1,602 176 634 · 10^{-19} C

Pölyhiukkasesta sähköisesti neutraali, kun N kappaletta elektroneja siirtyy siihen. Saadaan ehto $Q + N(-e) = 0$ eli

$$Q = Ne$$

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{5{,}45 \cdot 10^{-18}\text{ C}}{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\text{ C}} = 34{,}016 \approx 34$$

Pölyhiukkaseen pitäisi siirtyä 34 elektronia, jotta siitä tulisi sähköisesti neutraali.

b) Sähkövirta kuvaa johtimen poikkipinnan läpi siirtyneen sähkövarauksen määrää aikayksikössä eli $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$.

Siirtynyt sähkövaraus on (t, I)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan ja aika-akselin väliin jäävän alueen fysikaalinen pinta-ala. Kolmion pinta-alasta saadaan sähkövaraukseksi $\Delta Q = \dfrac{150 \cdot 10^{-3}\text{ A} \cdot 2{,}8\text{ s}}{2} = 210 \cdot 10^{-3}\text{ C} = 210\,\text{mC}$.

Tehtävä 11.3.

varauksien siirtymisnopeus $\frac{Q}{t} = 18000\,\frac{\text{C}}{\text{s}}$

purkautumisen kesto t = 83 µs

a) Salaman purkautumisen sähkövirta on sama kuin varauksien siirtymisnopeus eli I = 18 000 C/s = 18 000 A.

b) Salaman purkautumisessa siirtynyt varaus saadaan sähkövirran avulla

$$Q = It = 18\,000\,\frac{\text{C}}{\text{s}} \cdot 83 \cdot 10^{-6}\text{ s} = 1{,}494\text{ C} \approx 1{,}5\text{ C}.$$

Tehtävä 11.4.

a) levyjen välinen jännite U = 120 V

levyjen välimatka d = 60,0 cm = 0,600 m

Levyjen väliin muodostuu homogeeninen sähkökenttä, jonka suunta on levyjen välissä korkeammasta potentiaalista matalampaan, ja suuruus on kaikkialla yhtä suuri.

Sähkökentän voimakkuus levyjen välissä on

$$E = \frac{U}{d} = \frac{120\,\text{V}}{0{,}600\,\text{m}} = 200\,\frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

b) johdelevyn A potentiaali V_A = +15 V

levyjen välinen jännite U = 120 V

Jos johdelevy A on korkeammassa potentiaalissa, saadaan jännitteestä eli potentiaalierosta yhtälö $U = V_A - V_B$, jolloin $V_B = V_A - U$ = 15 V − 120 V = −105 V.

Johdelevyn B potentiaali on −105 V.

Levyjen välissä homogeenisessa sähkökentässä potentiaali muuttuu tasaisesti, kun siirrytään levyltä A levylle B.

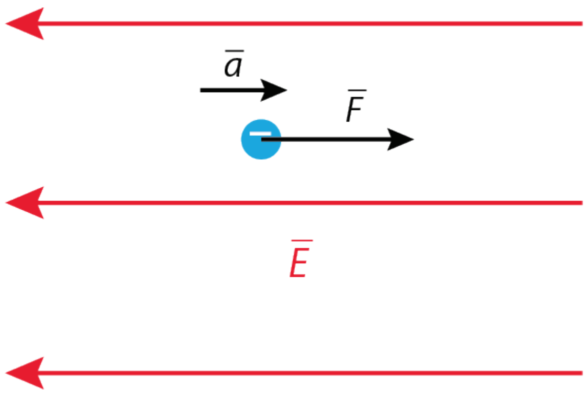
Tehtävä 11.5.

elektroniin kohdistuva sähköinen voima F = 0,21 fN

elektronin sähkövarauksen suuruus
$Q = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

elektronin massa $m = 9{,}109\ 3837 \cdot 10^{-31}$ kg

a)



$\bar{F}$ = elektroniin kohdistuva sähköinen voima

Elektronin painoa ei huomioida voimakuviossa, koska elektronin paino on sähköiseen voimaan verrattuna mitättömän pieni.

b) Elektroniin kohdistuu sähköinen voima. Sähkökentän voimakkuudeksi saadaan

$$E = \frac{F}{Q} = \frac{0{,}21 \cdot 10^{-15}\ \text{N}}{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 1\,310{,}7169\,\frac{\text{N}}{\text{C}} \approx 1{,}3\,\frac{\text{kN}}{\text{C}}.$$

c) Sähköinen voima on ainoa elektroniin vaikuttava voima. Valitaan sähköisen voiman suunta positiiviseksi suunnaksi. Ratkaistaan Newtonin II lain avulla elektronin kiihtyvyys.

$$F = ma$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{0{,}21 \cdot 10^{-15}\ \text{N}}{9{,}109\,3837 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 2{,}3053 \cdot 10^{14}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}3 \cdot 10^{14}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Verrataan saatua kiihtyvyyttä putoamiskiihtyvyyteen.

$$\frac{a}{g} = \frac{2{,}3053 \cdot 10^{14}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2{,}349\,96 \cdot 10^{13} = 2{,}3 \cdot 10^{13}.$$

Sähköisen voiman aiheuttama kiihtyvyys on $2{,}3 \cdot 10^{13}$-kertainen gravitaatiovuorovaikutuksen elektronille aiheuttamaan kiihtyvyyteen verrattuna.

Tehtävä 11.6.

a) levyjen välinen jännite U = 500 V

levyjen välimatka d = 50,0 cm = 0,50 m

protonin sähkövaraus $Q = +e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

Sähkökentän voimakkuus levyjen välissä on
$E = \frac{U}{d} = \frac{500\ \text{V}}{0{,}50\ \text{m}} = 1\ 000\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$. Homogeenisessa sähkökentässä potentiaali kasvaa tasaisesti siirryttäessä maadoitetulta levyltä kohti positiivista levyä. Sähkökentän voimakkuuden perusteella potentiaali muuttuu jokaista 10 cm:ä kohden 100 V. Siten 10 cm etäisyydellä positiivisesta levystä potentiaali on V = 400 V.

Protonin potentiaalienergia sähkökentässä on
$E_p = QV = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 400\ \text{V}$
$= 6{,}408\ 707 \cdot 10^{-17}\ \text{J} \approx 64{,}1$ aJ eli
$E_p = QV = +e \cdot 400\ \text{V} = 400$ eV

b) elektronin sähkövaraus
$Q = -1e = -1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

1) Kun elektroni siirtyy sähkökenttää vastaan kohtisuorassa suunnassa pisteestä A pisteeseen B, elektronin potentiaalienergia ei muutu, sillä elektroni on koko ajan samalla etäisyydellä levyistä ja samassa potentiaalissa, $V_A = V_B$. Varatun hiukkasen kokonaisenergia sähkökentässä säilyy, ja jos potentiaalienergia ei muutu, ei myöskään liike-energiassa tapahdu muutosta. Liike-energian muutos on 0 J tai 0 eV.

2) Kun elektroni siirtyy levyjen puolivälistä pisteestä A pisteeseen C, sähkökentän potentiaali muuttuu.

Levyjen puolivälissä potentiaali on $V_A = 250$ V.

5,0 cm:n päässä positiivisesta levystä potentiaali on

$$V_C = U - Ex = 500\,\text{V} - 1\,000\,\frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 0{,}050\,\text{m} = 450\,\text{V}.$$

Varatun hiukkasen kokonaisenergia sähkökentässä säilyy. Kun elektroni siirtyy sähkökentässä pisteestä A pisteeseen C, niin $E_{pA} + E_{kA} = E_{pC} + E_{kC}$.

Ratkaistaan tästä liike-energian muutos.

$$\begin{aligned} QV_A + E_{kA} &= QV_C + E_{kC} \\ E_{kC} - E_{kA} &= QV_A - QV_C \\ \Delta E_k &= Q(V_A - V_C) = -1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot (250\,\text{V} - 450\,\text{V}) \\ &= 3{,}204\,353 \cdot 10^{-17}\,\text{J} \approx 32{,}0\,\text{aJ} \end{aligned}$$

eli $\Delta E_{\mathrm{k}} = Q(V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{C}}) = -e \cdot (250\text{ V} - 450\text{ V}) = 200\text{ eV}.$

Samaan tulokseen olisi voinut päätyä myös työperiaatteen avulla. Työperiaatteen mukaan elektroniin vaikuttavan sähköisen voiman tekemä työ W on yhtä suuri kuin elektronin liike-energian muutos ΔE_{k} eli $W = \Delta E_{\mathrm{k}}$.

Tehtävä 11.7.

levyjen välinen jännite U = 820 V

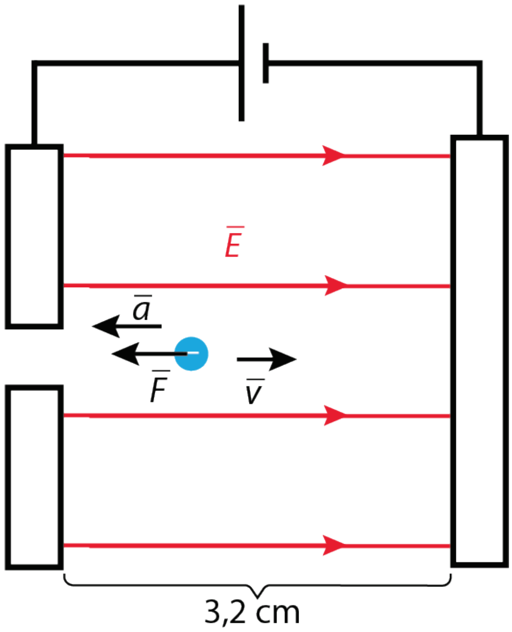
levyjen välimatka d = 3,2 cm = 0,032 m

elektronin sähkövaraus $Q = +e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

elektronin nopeus v = 4 800 000 m/s

elektronin massa $m = 9{,}109\ 3837 \cdot 10^{-31}$ kg

a) Laaditaan sähkökentässä liikkuvan elektronin voimakuvio.



$\bar{F}$ = elektroniin kohdistuva sähköinen voima

b) Sähkökentän voimakkuus levyjen välissä on $E = \frac{U}{d}$.

Sähkökenttä aiheuttaa elektronin sähköisen voiman ja elektroni on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä.

Työperiaatteen mukaan sähköisen voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin elektronin liike-energian muutos.

$$W = \Delta E_\mathrm{k}$$
$$Fs = \Delta E_\mathrm{k}$$

Kun elektroni saapuu sähkökenttään, elektronilla on liike-energiaa. Kun elektroni on lähimpänä jännitelähteen negatiiviseen napaan kytkettyä johdelevyä, elektronin nopeus on nolla, jolloin elektronin liike-energia lopussa on nolla. Tällöin sähkökentän tekemä työ on yhtä suuri kuin elektronin liike-energia silloin, kun elektroni saapuu sähkökenttään

$$Fs = E_\mathrm{k}$$
$$Fs = \frac{1}{2}mv^2.$$

Sähkökentän elektroniin aiheuttama sähköinen voima

$$F = EQ = \frac{U}{d}Q = \frac{UQ}{d}.$$

Matka, jonka elektroni liikkui sähkökentässä ennen kuin elektroni pysähtyi hetkellisesti.

$$s = \frac{mv^2}{2F} = \frac{mv^2}{2\frac{QU}{d}} = \frac{dmv^2}{2QU}.$$

Elektronin etäisyys jännitelähteen negatiiviseen napaan kytkettyyn johdelevyyn oli pienimmillään

$$x = d - s = d - \frac{dmv^2}{2QU} = d\left(1 - \frac{mv^2}{2QU}\right)$$

$$= 0{,}032\,\text{m} \cdot \left(1 - \frac{9{,}109\,3837 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot \left(4{,}8 \cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 820\,\text{V}}\right) = 0{,}029\,443\,96\,\text{m} \approx 2{,}9\,\text{cm}.$$

Tehtävä 11.8.

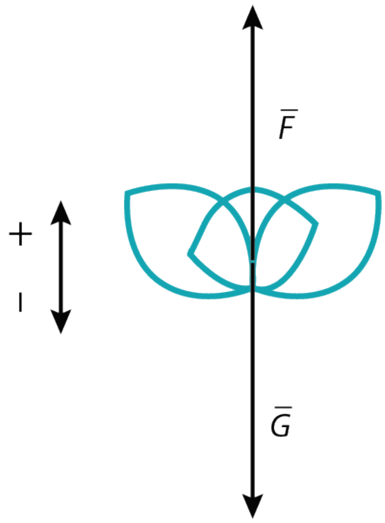
a) Faradayn häkki on sähkönjohteesta valmistettu häkki tai kuori. Faradayn häkki käyttäytyy ulkoisessa sähkökentässä kuten johdekappale. Koska johteessa elektronit pääsevät liikkumaan vapaasti, Faradayn häkin sisällä kokonaissähkökenttä on nolla.

b) Autoissa on metallista tehty kori. Jos salama osuu autoon, kori toimii Faradayn häkkinä, jolloin auton sisällä sähkökenttä on nolla ja sähkövirta kulkee koria pitkin maahan. Tällöin kokonaan auton sisäpuolella oleva ihminen on turvassa. Osuessaan salama kuitenkin aiheuttaisi joitakin vaurioita autoon.

c) Tietoliikennekaapelit pyritään suojaamaan mahdollisilta ulkopuolisilta sähköisiltä häiriöiltä. Paras suoja saadaan Faradayn häkin avulla. Siksi tietoliikennekaapelit päällystetään metallisella suojavaipalla, joka estää ulkopuoliset häiriösignaalit.

Tehtävä 11.9.

a)



$\overline{F}$ = alumiinifolioon kohdistuva sähköinen voima

$\overline{G}$ = alumiinifolion paino

b) alumiinifolion etäisyys kuvusta $r = 0{,}358$ m

alumiinifolion massa $m = 24 \cdot 10^{-6}$ kg

ilman suhteellinen permittiivisyys $\varepsilon_r = 1{,}0006$

Kun alumiinifolio irtoaa kuvusta, alumiinifolion ja kuvun sähkövaraukset ovat yhtä suuret. Merkitään molempia sähkövarauksia kirjaimella *Q.*

Otetaan voimien suunnat huomioon. Newtonin II lain mukaan

$F = G$.

Koska sähkövaraukset ovat yhtä suuret, saadaan voimien yhtälö muotoon

$$\frac{k}{\varepsilon_r}\frac{QQ}{r^2} = mg$$

$$\frac{k}{\varepsilon_r}\frac{Q^2}{r^2} = mg.$$

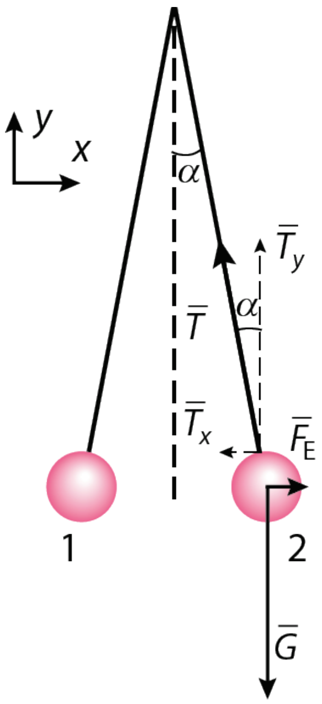
Alumiinifolion sähkövaraukseksi saadaan

$$Q = \sqrt{\frac{\varepsilon_r mgr^2}{k}} = \sqrt{\frac{1{,}0006 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-6}\,\text{kg} \cdot (0{,}358\,\text{m})^2}{8{,}987\,551\,787 \cdot 10^9\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}} = 5{,}851 \cdot 10^{-9}\,\text{C} \approx 5{,}9\,\text{nC}.$$

Tehtävä 11.10.

Kun pallo on paikallaan, voidaan sille kirjoittaa Newtonin II lain mukaisesti $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Koska pallot hylkivät toisiaan, niiden sähkövarausten täytyy olla samanmerkkiset. Newtonin III lain mukaisesti vuorovaikutuksessa molempiin palloihin vaikuttaa yhtä suuri sähköinen voima, olivatpa pallojen sähkövaraukset Q_1 ja Q_2 suuruudelta mitä tahansa.



Pallojen massoissa voidaan todeta, että koska kumpaankin palloon vaikuttavat sähköiset voimat ovat yhtä suuret, täytyy palloihin vaikuttavien painojen olla eri suuruiset, sillä pallot ovat eri korkeuksilla. Pallo 1 on alempana, ja eristelangan ja pystysuunnan välinen kulma α on pienempi. Langan jännitysvoiman pystykomponentti on silloin pidempi, ja voidaan päätellä, että pallon 1 paino on suurempi kuin pallon 2 paino. Siten vaihtoehto 2) $m_1 > m_2$ on mahdollinen.

Pallojen sähkövarauksista sen sijaan ei voi kuvan perusteella tehdä enempää johtopäätöksiä. Kumpaankin palloon vaikuttaa Coulombin lain mukainen $F = k\frac{Q_1Q_2}{r^2}$ yhtä suuri sähköinen voima. Kaikki vaihtoehdot 4), 5) ja 6) ovat mahdollisia.

Sovella

Tehtävä 11.11.

a) Muovikalvo ja paperi pysyvät yhdessä sähköisen vuorovaikutuksen takia. Muovikalvo voi varautua sähköisesti esimerkiksi hankauksessa. Muovikalvo varautuu yleensä negatiivisesti. Varautunut muovikalvo aiheuttaa sähkövarausten polarisoitumisen paperissa. Paperin muovikalvon puoleinen pinta varautuu positiivisesti. Vastakkaiset varaukset vetävät toisiaan puoleensa. Muovikalvo ja paperi pysyvät toisissaan kiinni.

b) Vaatteet hankaavat toisiaan kuivausrummussa, jolloin osa vaatteista varautuu positiivisesti ja osa negatiivisesti. Erimerkkisesti varautuneiden vaatteiden välille syntyy sähköinen vetävä voima, mikä saa vaatteet tarttumaan yhteen.

c) Kun villapaitaa riisutaan, hankaa villakangas hiuksiin ja hiukset varautuvat. Kaikkien hiusten sähkövaraus on samanmerkkinen. Sähköinen vuorovaikutus aiheuttaa hiusten välille hylkivän sähköisen voiman, mikä nostaa hiukset pystyyn ja erilleen toisistaan.

Tehtävä 11.12.

positiivisesti varatun pallon sähkövaraus $Q_1 = 8{,}0\ \text{nC}$

negatiivisesti varatun pallon sähkövaraus $Q_2 = -5{,}0\ \text{nC}$

a) Yhdistämisen jälkeen molemmilla palloilla on yhtä suuri sähkövaraus. Sähkövarauksen säilymislain mukaan varaukset eivät häviä. Pallojen varaukset yhdistämisen jälkeen ovat

$$Q = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \frac{+8{,}0\ \text{nC} + (-5{,}0\ \text{nC})}{2} = +1{,}5\ \text{nC}.$$

b) Kun pallot yhdistetään johtimella, varausero tasoittuu. Negatiivisesti varattu pallo luovuttaa ja positiivisesti varattu pallo vastaanottaa elektroneja.

c) Negatiivisesti varatun pallon varauksen muutos
$\Delta Q = Q - Q_2 = 1{,}5\ \text{nC} - (-5{,}0\ \text{nC}) = 6{,}5\ \text{nC}.$

Elektronin varaus on alkeisvaraus
$Q_\text{e} = e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$. Varaus muuttui

$$n = \frac{\Delta Q}{Q_\text{e}} = \frac{Q - Q_2}{e} = \frac{6{,}5 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 4{,}056\,98 \cdot 10^{10} \approx 4{,}1 \cdot 10^{10}$$

elektronin varauksen verran.

Tehtävä 11.13.

puhelimen latausvirta I = 2,4 A

akun varauksen muutos Q = 2 100 mAh = 2,1 Ah

a) Akun lataamisen kesto saadaan sähkövirran avulla

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q}{t}$$

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{2{,}1\ \mathrm{Ah}}{2{,}4\ \mathrm{A}} = 0{,}875\,\mathrm{h} \approx 53\,\mathrm{min}.$$

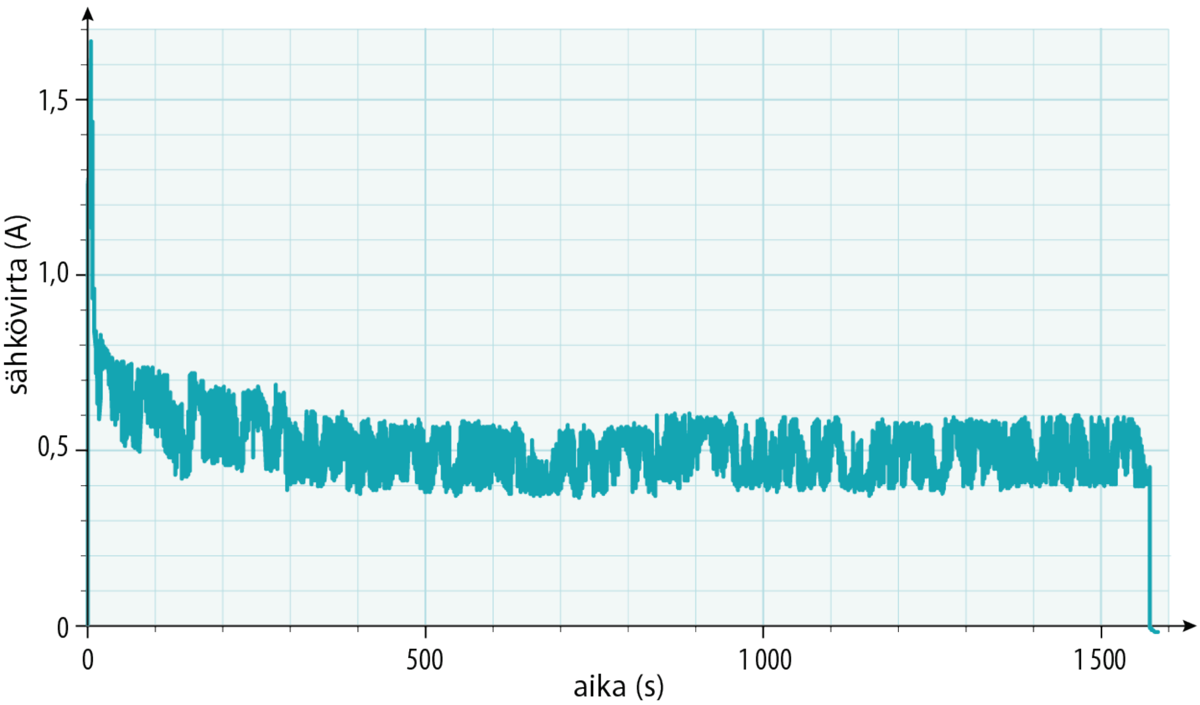
b) elektronin varaus $Q_\mathrm{e} = e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

Siirtyneiden elektronien määrä

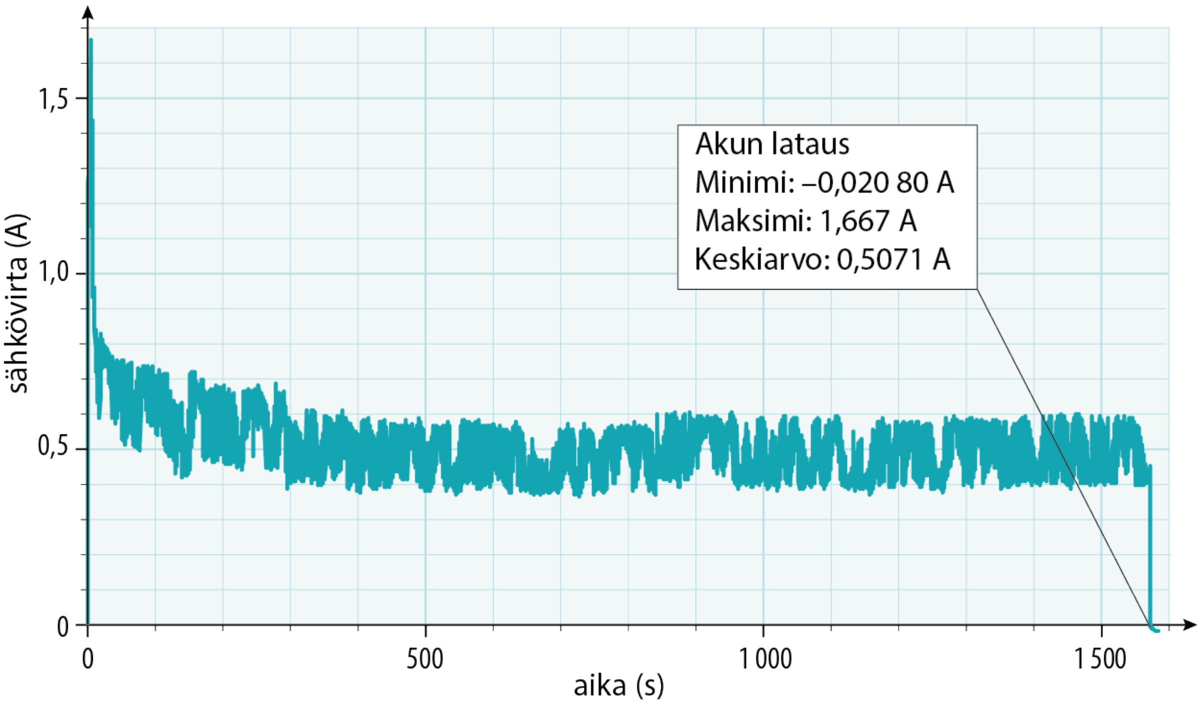
$$n = \frac{Q}{Q_\mathrm{e}} = \frac{2{,}1 \cdot 3\,600\ \mathrm{As}}{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}} = 4{,}7185 \cdot 10^{22} \approx 4{,}7 \cdot 10^{22}.$$

Tehtävä 11.14.

a)

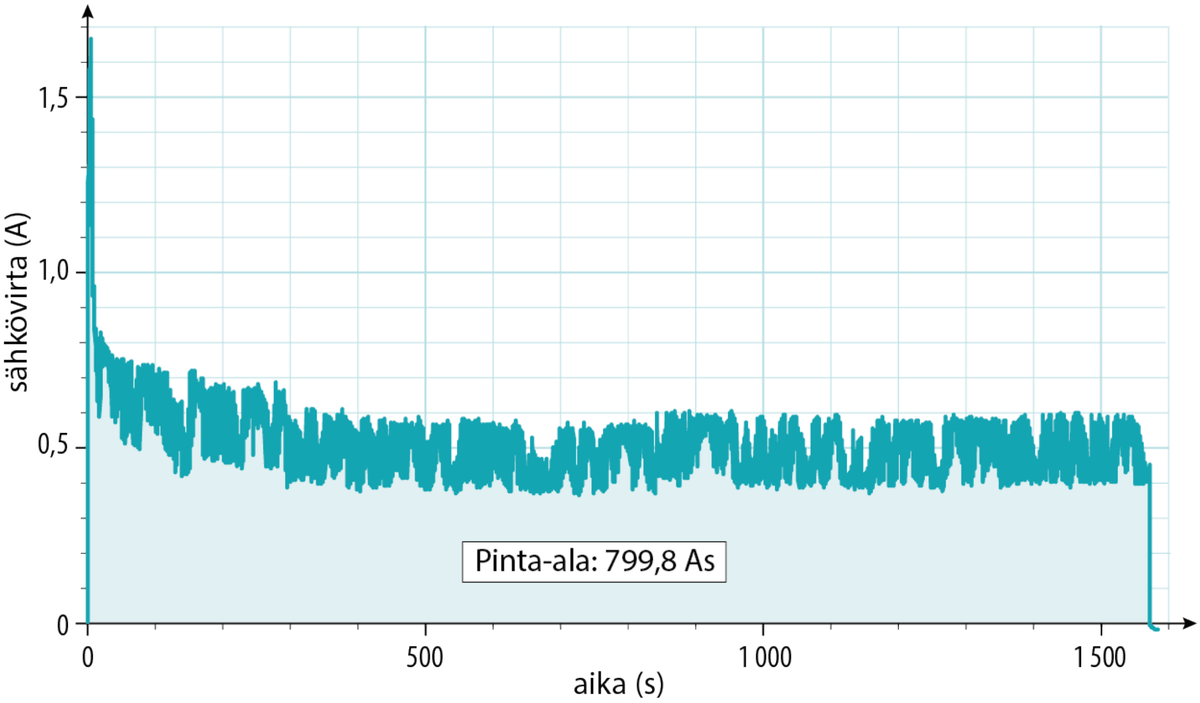


b) Määritetään akun latausvirran keskimääräinen arvo mittausohjelmiston työkalun avulla.



Latauksen aikana keskimääräinen latausvirran arvo oli 0,5071 A ≈ 0,51 A.

c) Laturin tuottama sähkövaraus saadaan (t, I)-koordinaatistoon laadittavan kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään fysikaalinen pinta-ala.



Laturin tuottama sähkövaraus on Q = 799,8 As ≈ 800 As = 800 C.

Tehtävä 11.15.

a) Kun kondensaattorilevyt varataan, metallisylinterit levyjen välissä ovat sähkökentässä. Sähkökentässä metallisylintereissä oleviin vapaisiin elektroneihin kohdistuu sähköinen voima, joka siirtää elektroneja kohti positiivisesti varattua kondensaattorilevyä eli kuvassa vasemmalle. Vasemmanpuoleinen sylinteri saa ylimääräisiä elektroneja ja oikeanpuoleiseen sylinteriin jää elektronien vajaus. Metallisylinterit polarisoituvat, ja elektroskoopit osoittavat sähkövarausta.

   Elektroneja siirtyy niin paljon, että sähkövarausten siirtymisestä aiheutuvan sähkökentän voimakkuus metallisylinterien sisällä on yhtä suuri, mutta vastakkaissuuntainen kuin kondensaattorien aiheuttama sähkökentän voimakkuus. Silloin metallisylinterien sisällä kokonaissähkökenttä on nolla.

b) Kun sylinterit erotetaan toisistaan, vasemmanpuoleiseen sylinteriin jää ylimäärisiä elektroneja ja sen sähkövaraus on negatiivinen. Oikeanpuoleiseen sylinteriin jää elektronien vajaus ja sen sähkövaraus on positiivinen. Kun sähkökenttä poistetaan, elektroneihin ei enää kohdistu sähköistä voimaa, mutta sylinterien sähkövaraus säilyy, koska varauserot eivät pääse tasoittumaan.

c) Kun sylinterit yhdistetään, varauserot tasoittuvat ja vasemmanpuoleisesta sylinteristä siirtyy elektroneja oikeanpuoleiseen sylinteriin.

Tehtävä 11.16.

sähkökentän voimakkuus E = 8 200 kV/m

jännitelähteen jännite U = 1 800 V

a) protonin sähkövaraus $Q = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C

protonin massa $m = 1{,}672\,6219 \cdot 10^{-27}$ kg

Sähkökenttä aiheuttaa protoniin sähköisen voiman, jonka suunta on sama kuin sähkökentän suunta. Protonin saama kiihtyvyys voidaan ratkaista Newtonin II lain yhtälöstä $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$. Valitaan suunnaksi sähkökentän suunta ja ratkaistaan protonin kiihtyvyys.

$$F = ma$$

$$EQ = ma$$

$$a = \frac{EQ}{m} = \frac{8\,200\,\frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{1{,}672\,6219 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 7{,}854\,64 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7{,}9 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Protonin kiihtyvyys on $7{,}9 \cdot 10^{11}$ m/s^2 ja kiihtyvyyden suunta on sama kuin sähkökentän suunta.

b) protonin nopeus alussa $v_1 = 0$ m/s

Työperiaatteen mukaan sähkökentän tekemä työ on yhtä suuri kuin protonin liike-energian muutos.

$$W = \Delta E_\mathrm{k}$$
$$QU = \Delta E_\mathrm{k}$$

Koska protoni lähtee paikoiltaan, on protonin liike-energia alussa nolla. Tällöin sähköisen voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin protonin liike-energia sähkökentän jälkeen

$$QU = E_\mathrm{k}$$
$$QU = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kun protonia on kiihdytetty sähkökentässä koko sähkökentän pituinen matka, protonin nopeus on

$$v = \sqrt{\frac{2QU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1\,800\ \mathrm{V}}{1{,}672\,6219 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}} = 587\,229{,}0852\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}59\ \frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{s}}.$$

c) Neutronin sähkövaraus on nolla, joten neutroniin ei kohdistu sähköistä voimaa sähkökentässä. Tällöin neutronin liike-energia ei muutu.

Tehtävä 11.17.

positiivisesti varatun johdelevyn sähkökentän potentiaali
$V_1 = 840$ V

negatiivisesti varatun johdelevyn sähkökentän potentiaali
$V_2 = -840$ V

johdelevyjen välinen etäisyys $d_1 = 0{,}32$ m

pisteiden A ja B välinen etäisyys $d_2 = 0{,}21$ m

a) Sähkökentän suunta on suuremmasta sähkökentän potentiaalista kohti pienempää potentiaalia eli positiivisesti varatulta johdelevyltä kohti negatiivisesti varattua johdelevyä.

Sähkökentän voimakkuus on

$$E = \frac{U}{d_1} = \frac{V_1 - V_2}{d_1} = \frac{840\ \text{V} - (-840\text{V})}{0{,}32\ \text{m}} = 5\,250\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \approx 5{,}3\ \frac{\text{kV}}{\text{m}}.$$

b) Varatun hiukkasen potentiaalienergia homogeenisessa sähkökentässä on $E_\mathrm{p} = QV$. Potentiaalienergian muutos on

$$\Delta E_\mathrm{p} = E_\mathrm{pA} - E_\mathrm{pB} = QV_\mathrm{A} - QV_\mathrm{B} = Q(V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B}).$$

Pisteiden A ja B välinen sähkökentän potentiaalin muutos saadaan sähkökentän avulla. $V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B} = Ed_2$. Hiukkasen potentiaalienergia sähkökentässä kasvaa

$$\Delta E_\mathrm{p} = QEd_2 = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 5\,250\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}21\,\mathrm{m}$$
$$= 1{,}7663 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J} \approx 0{,}18\ \mathrm{fJ}\,(= 1\,102{,}5\ \mathrm{eV} \approx 1{,}1\ \mathrm{keV}).$$

c) Kun hiukkanen siirtyy pisteestä A pisteeseen B, positiivisesti varattu hiukkanen siirtyy sähkökentän suunnassa. Siirtyminen tapahtuu hiukkaseen kohdistuvan sähköisen voiman suuntaan, jolloin hiukkasen potentiaalienergia sähkökentässä pienenee.

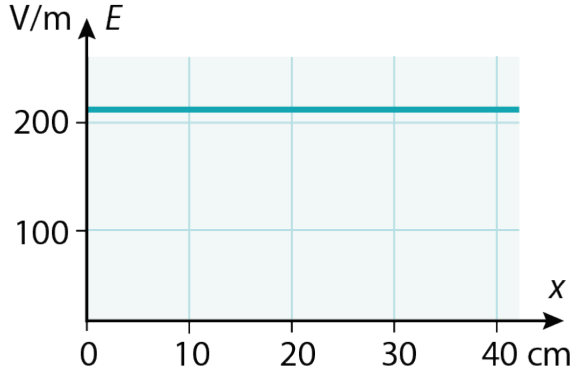
Tehtävä 11.18.

levyjen välinen etäisyys d = 40 cm = 0,40 m

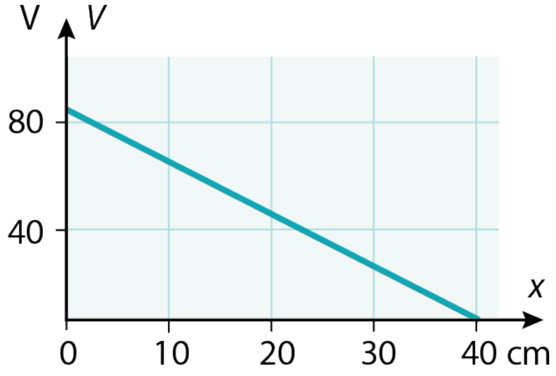
levyjen välisen sähkökentän voimakkuuden suuruus
E = 210 V/m

a) Yhdensuuntaisten johdelevyjen välillä on homogeeninen sähkökenttä. Sähkökentän voimakkuus on kaikkialla levyjen välissä $E = \frac{U}{d}$.
Ratkaistaan levyjen välinen jännite
$U = Ed = 210\ \mathrm{V} \cdot 0{,}4\ \mathrm{m} = 84\ \mathrm{V}$.
Koska levy B on maadoitettu, levyn A potentiaali on +84 V.

b) Valitaan positiivinen suunta oikealle. Yhdensuuntaisten johdelevyjen väliin syntyy homogeeninen sähkökenttä, jossa kentän kaikissa pisteissä sähkökentän voimakkuuden suuruus on sama ja suunta samaan suuntaan. Sähkökentän suunta on kuvassa oikealle, joten sähkökentän voimakkuus levyjen välissä on paikasta riippumatta +210 V/m.

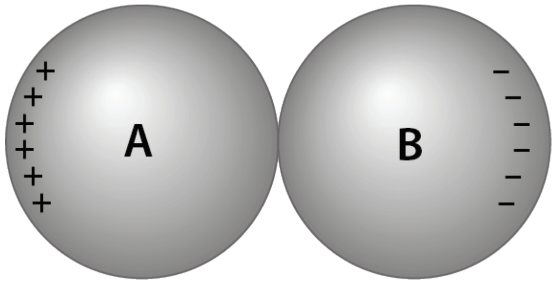


c) Levy B on maadoitettu, joten maadoitetun levyn potentiaali on nolla eli V = 0 V, kun x = 40 cm. Levyjen välissä on homogeeninen sähkökenttä, jossa potentiaali laskee tasaisesti 84 V:sta 0 V:iin.

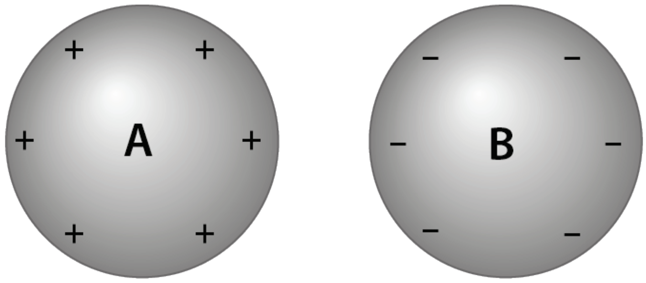


Tehtävä 11.19

Kun sähköisesti varattu eboniittisauva tuodaan pallon A lähelle, syntyy varatun eboniittisauvan ja johdinpallon A elektronien välille sähköinen vuorovaikutus. Sähköinen vuorovaikutus aiheuttaa vapaisiin elektroneihin sähköisen voiman, joka siirtää johdepalon A vapaita elektroneja palloon B. Tapahtuu sähköinen polarisaatio, minkä seurauksena palloon A tulee positiivinen varaus ja



Kun pallot siirretään etäälle toisistaan, varauksien jakautuminen säilyy palloissa. Pallossa A on positiivinen ja pallossa B on negatiivinen varaus. Varaukset asettuvat palloihin tasaisesti.



Tehtävä 11.20.

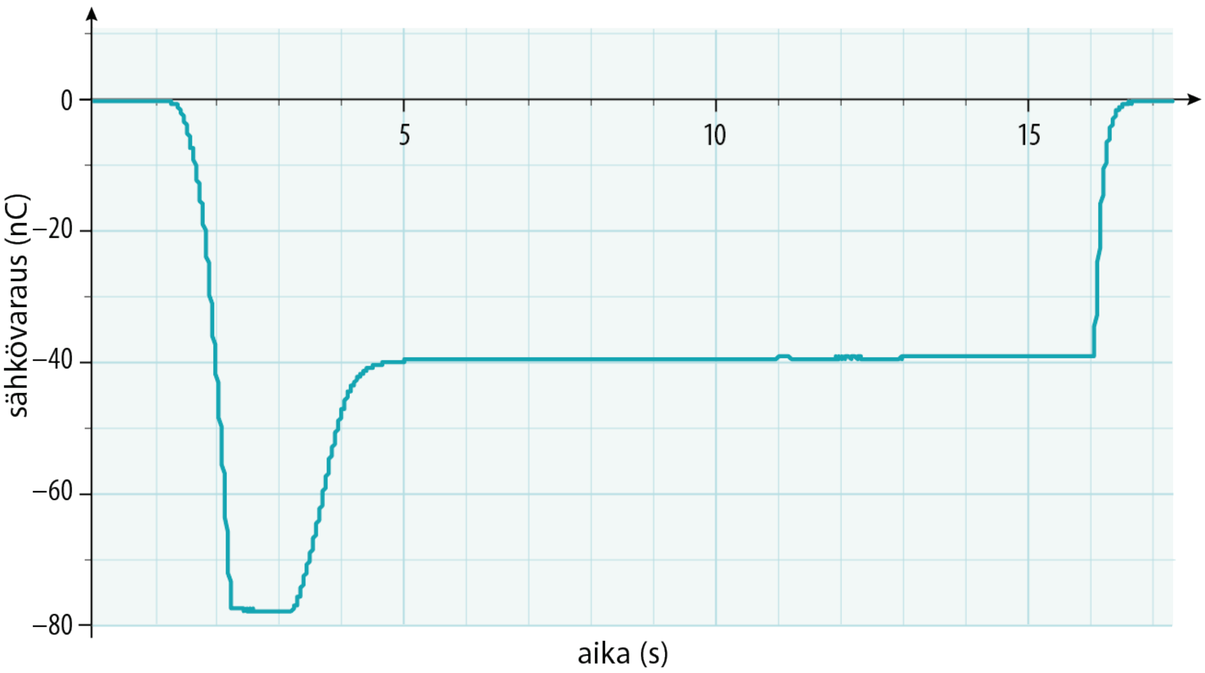
Sähkövirta aiheuttaa magneettisen vaikutuksen. Sähkövirran kulkiessa havaitaan kompassineulan kääntyminen sähköjohtimen lähellä. Kompassineula on kestomagneetti. Sähkövirta aiheutti kompassineulaan voiman ja liikutti neulaa.

Sähkövirta aiheuttaa kemiallisen vaikutuksen. Koeputket oli täytetty vedellä. Kun elektrolyysilaitteistossa alkoi kulkea sähkövirta, koeputkessa olevaan veteen alkoi muodostua kaasukuplia. Toiseen koeputkeen muodostui vetykaasua ja toiseen happikaasua.

Sähkövirran vaikutuksesta kappaleen sisäenergia kasvaa ja kappale lämpenee. Kun vastuslangan läpi alkoi kulkea sähkövirtaa, vastuslanka alkoi hehkua punaisena. Lanka kuumeni, jolloin langan sisäenergia kasvoi sähkövirran vaikutuksesta.

Tehtävä 11.21.

a)

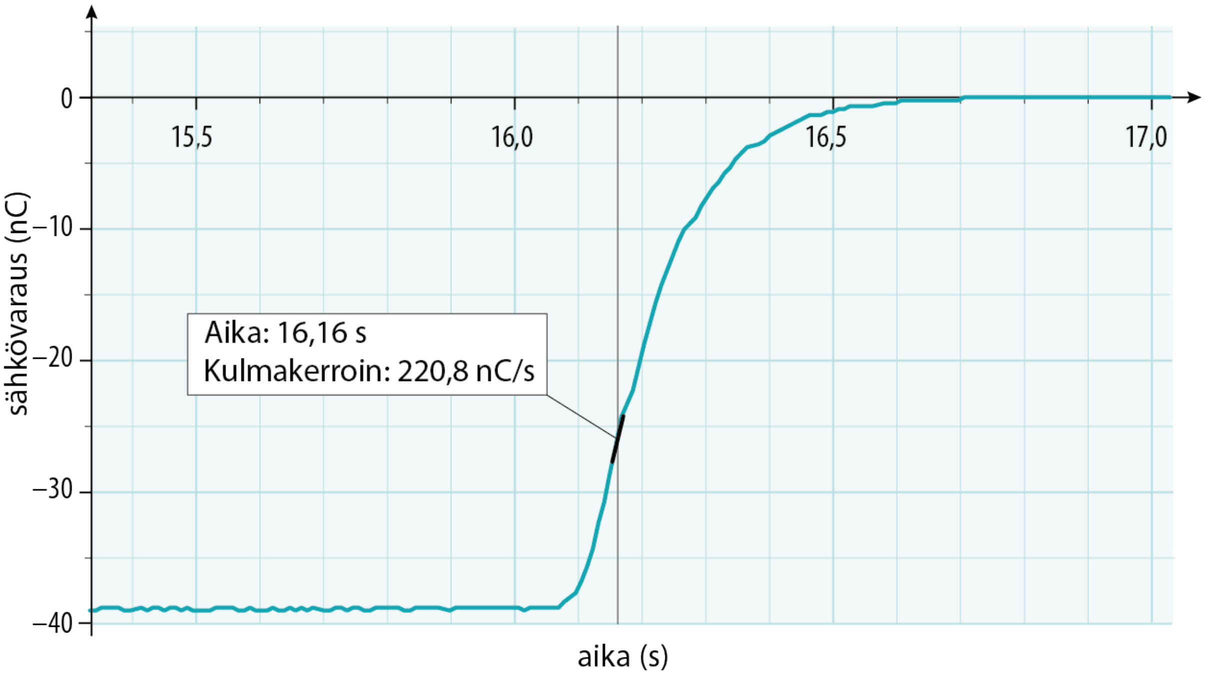


b) Kun varatulla eboniittisauvalla kosketettiin metallipalloa, eboniittisauvasta siirtyi elektroneja metallipalloon ja metallipallo varautui negatiivisesti. Kuvaajasta voidaan lukea, että kun eboniittisauva on kiinni pallossa, pallon varaus saavuttaa arvon −77,6 nC.

c) Kun varattu eboniittisauva irrotettiin pallosta, pallon sähkövaraus pieneni.

d) Kun pallon maadoitetaan, purkautuu pallon varaus ja lopulta pallon varaus on nolla. Sähkövirta on $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$.

Suurin sähkövirta saadaan (*t, Q*)-koordinaatistoon laaditulle kuvaajalle sovitetun tangentin suurimmasta arvosta. Sovitetaan kuvaajan purkutilanteen jyrkimpään kohtaan tangentti ja määritetään tangentin fysikaalinen kulmakerroin.



Suurin sähkövirta on *I* = 220,8 nC/s ≈ 221 nA.

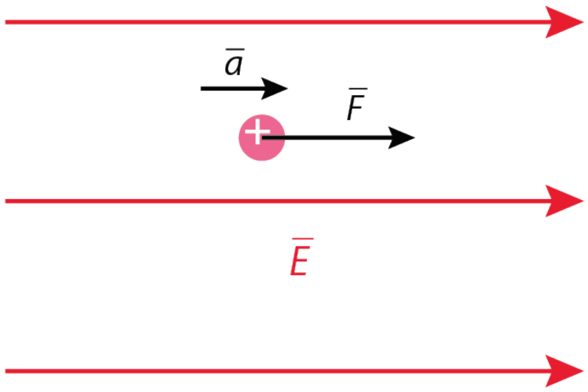
Tehtävä 11.22.

sähkökentän voimakkuus E = 2,1 N/C

protonin sähkövaraus Q = 1,602 176 634 · 10^{-19} C

protonin massa m = 1,672 6219 · 10^{-31} kg

a)



$\overline{F}$ = protoniin kohdistuva sähköinen voima

b) Määritetään protoniin kohdistuvan voiman suuruus.

$$E = \frac{F}{Q}$$
$$F = EQ.$$

Valitaan kentän suunta positiiviseksi suunnaksi.

Newtonin II lain mukaan sähköinen voima aiheuttaa protonille kiihtyvyyden, jonka suuruus on

$$F = ma$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{EQ}{m}$$

$$= \frac{2{,}1\,\frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{1{,}672\,621\,9 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 201\,155\,499\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 200\,\frac{\text{Mm}}{\text{s}^2}.$$

c) protonin kiihdytysmatka s = 0,18 m

Protoni on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Koska oletettiin, että protoni lähtee levosta, protonin kulkemalle matkalle on voimassa

$$s=\frac{1}{2}at^2.$$

Protonin loppunopeus kiihdytyksen jälkeen

$v = at$.

Ratkaistaan nopeuden yhtälöstä aika $t=\frac{v}{a}$. Sijoitetaan saatu ajan yhtälö matkan lausekkeeseen ja ratkaistaan nopeus.

$$s=\frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2=\frac{v^2}{2a}$$
$$v=\sqrt{2sa}.$$

Sijoitetaan hiukkasen kiihtyvyyden lauseke $a=\frac{F}{m}=\frac{EQ}{m}$ nopeuden lausekkeeseen. Nopeudeksi saadaan

$$v=\sqrt{2s\frac{EQ}{m}}=\sqrt{\frac{2sEQ}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}18\,\text{m}\cdot 2{,}1\,\frac{\text{N}}{\text{C}}\cdot 1{,}602\,176\,634\cdot 10^{-19}\,\text{C}}{1{,}672\,621\,9\cdot 10^{-27}\,\text{kg}}}$$
$$=8\,509{,}757\,91\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 8{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Tehtävä 11.23.

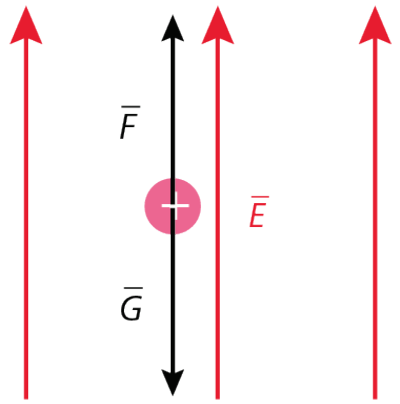
sähkökentän voimakkuus E = 3,5 kN/C = 3 500 kN/C

nokihiukkasen massa $m = 2{,}6 \cdot 10^{-12}$ g $= 2{,}6 \cdot 10^{-15}$ kg

putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

alkeisvarauksen sähkövaraus $Q_e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

a)



$\overline{F}$ = nokihiukkaseen kohdistuva sähköinen voima

$\overline{G}$ = nokihiukkasen paino

b) Nokihiukkanen leijuu sähkökentässä paikallaan.

Newtonin II lain mukaan $\Sigma \overline{F} = \overline{0}$.

Valitaan sähköisen voiman suunta positiiviseksi.

$F - G = 0$

Nokihiukkaseen vaikuttava sähköinen voima $F = EQ$ ja paino $G = mg$. Ratkaistaan nokihiukkasen sähkövaraus.

$EQ = mg$

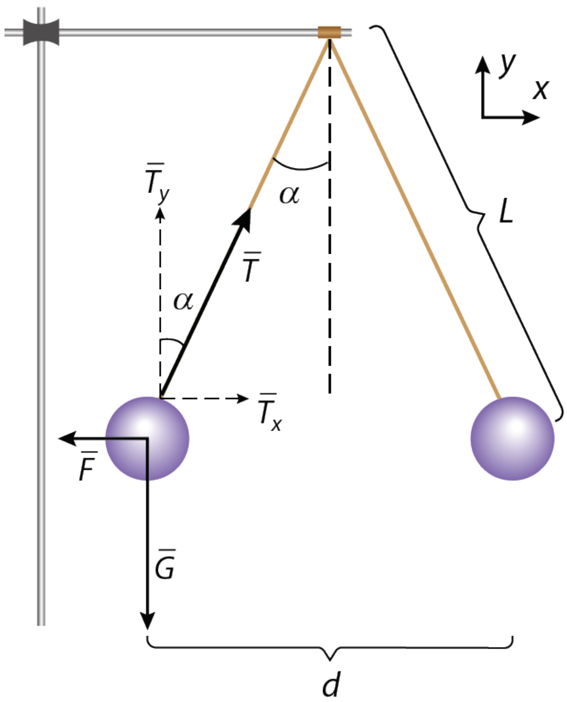
$$Q = \frac{mg}{E} = \frac{2{,}6 \cdot 10^{-15}\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{3\,500\ \frac{\text{N}}{\text{C}}} = 7{,}2874 \cdot 10^{-18}\ \text{C} \approx 7{,}3 \cdot 10^{-18}\ \text{C}.$$

c) Verrataan nokihiukkasen sähkövarausta $Q = \frac{mg}{E}$ alkeisvarauksen sähkövaraukseen.

$$n = \frac{Q}{Q_\text{e}} = \frac{mg}{EQ_\text{e}} = \frac{2{,}6 \cdot 10^{-15}\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{3\,500\ \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 45{,}48 \approx 45.$$

Tehtävä 11.24.

a)



$\overline{G}$ = paino

$\overline{F}$ = sähköinen voima

$\overline{T}$ = langan jännitysvoima

b) ripustuslankojen pituus ripustuspisteestä pallojen keskipisteeseen L = 130 cm = 1,3 m

pallon massa m = 3,0 g = 0,0030 kg

pallojen keskipisteiden etäisyyden d = 12 cm = 0,12 m

Coulombin lain vakio $k = 8{,}987\,551\,787 \cdot 10^9 \ \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

Koska pallot hylkivät toisiaan, niillä on samanmerkkinen sähkövaraus. Koska pallot ovat samankokoiset, ne on pinnoitettu johtavalla materiaalilla ja yhdistetty johtavalla langalla, pallojen välillä ei ole varauseroa. Palloilla on siten yhtä suuret sähkövaraukset.

Kun pallo on paikallaan, voidaan sille kirjoittaa Newtonin II lain mukaisesti $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Kun huomioidaan suuntasopimus, liikeyhtälö on

x-suunnassa $-F + T_x = 0$ eli $F = T_x$

y-suunnassa $T_y - G = 0$ eli $T_y = G$.

Palloihin vaikuttavien sähköisten voimien suuruudet saadaan Coulombin lain avulla, $F = k\dfrac{Q_1 Q_2}{d^2} = k\dfrac{Q^2}{d^2}$, sillä $Q_1 = Q_2 = Q$.

Ilman suhteellinen permittiivisyys $\varepsilon_r \approx 1{,}00$, väliaineen merkitystä ei tarvitse huomioida.

Voimakuvion perusteella $\tan\alpha = \frac{T_x}{T_y}$, josta saadaan

$$\tan\alpha = \frac{F}{G}$$

$$\tan\alpha = \frac{k\frac{Q^2}{d^2}}{mg}$$

$$Q^2 = \frac{mgd^2\tan\alpha}{k}$$

$$Q = \sqrt{\frac{mgd^2\tan\alpha}{k}}$$

Ripustuslanka on kulmassa α, jolle voidaan kirjoittaa

$\frac{\frac{d}{2}}{L} = \sin\alpha$ eli $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{d}{2L}\right)$.

Pallojen sähkövaraukset ovat

$$Q = \sqrt{\frac{mgd^2\tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{d}{2L}\right)\right)}{k}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}0030\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(0{,}12\,\text{m})^2\tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{0{,}12\,\text{m}}{2\cdot 1{,}3\,\text{m}}\right)\right)}{8{,}987\,551\,787\cdot 10^9\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}} = 4{,}6676\cdot 10^{-8}\,\text{C} \approx 47\,\text{nC}.$$

Tehtävä 11.25.

a) elektrodien välinen jännite U = 15 V

Levyjen välimatka on kuvan ruutujen perusteella d = 10,0 cm = 0,100 m.

Homogeenisen sähkökentän voimakkuus on

$$E=\frac{U}{d}=\frac{15\,\mathrm{V}}{0{,}100\,\mathrm{m}}=150\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Sähkökentän suunta on korkeammasta potentiaalista matalampaan. Sähkökentän suunta on kuvassa oikealta vasemmalle, eli positiiviselta elektrodilta negatiiviselle.

b) Pisteiden A ja B välimatka on kuvan ruutujen perusteella d_{AB} = 3,0 cm = 0,030 m.

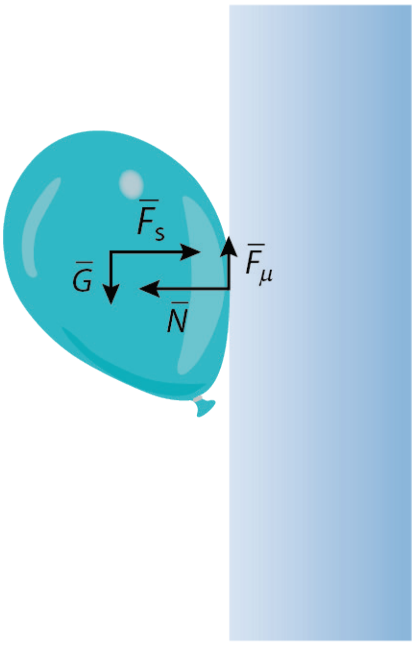
Jännitemittarin plusjohto on korkeammassa potentiaalissa, joten jännitemittari näyttää positiivista lukemaa. Jännite on $U_{\mathrm{AB}}=Ed_{\mathrm{AB}}=150\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\cdot 0{,}030\,\mathrm{m}=4{,}5\,\mathrm{V}.$

c) Kun pisteet A ja B ympyröidään hopeamusteella, muodostuu Faradayn häkki, jonka sisällä ei ole sähkökenttää. Sähkökentän voimakkuus on johdekappaleen sisällä nolla, ja kaikki kohdat ympyrän sisäpuolella ovat silloin samassa potentiaalissa. Jännitemittari näyttää silloin nollaa.

Tehtävä 11.26.

a) Kun ilmapalloa hangataan vaatetta vasten, siihen siirtyy vaatteesta elektroneja tai siitä siirtyy elektroneja vaatteeseen. Ilmapallo tulee tämän hankaussähkön takia sähköisesti varautuneeksi.

b) Kun varautunut ilmapallo viedään seinän läheisyyteen, sen sähkökenttä aiheuttaa seinän pinnan atomeissa ja molekyyleissä sähköisen polarisoitumisen. Tästä aiheutuu ilmapalloon kohtisuorasti seinään päin kohdistuva sähköinen voima $\bar{F}_s$. Seinä kohdistaa ilmapalloon tukivoiman $\bar{N}$, joka on yhtä suuri kuin tämä sähköinen voima. Ilmapallo pysyy paikallaan, kun ylöspäin suuntautuva ilmapallon ja seinän välinen lepokitka $\bar{F}_\mu$ on yhtä suuri kuin alaspäin vaikuttava ilmapallon paino $\bar{G}$. Voimat ovat sähköinen voima, pinnan tukivoima, paino ja lepokitka.



$\bar{F}_s$ = sähköinen voima

$\bar{N}$ = tukivoima

$\bar{F}_\mu$ = lepokitka

$\bar{G}$ = ilmapallon paino

c) Ilmapallon sähkövaraus pienenee aikaa myöten, koska ilmapallon ja seinän välille syntyy sähkövirta. Kun ilmapallon sähkövaraus pienenee, pienenevät myös seinän ilmapalloon kohdistamat sähköinen voima $\overline{F}_s$ ja pinnan tukivoima $\overline{N}$. Tukivoiman pieneneminen pienentää lepokitkaa ilmapallon ja seinän välillä. Kun sähkövaraus on pienentynyt riittävästi, lepokitkan suurin arvo tulee pienemmäksi kuin ilmapalloon kohdistuva paino eli $\mu_0 N < G$. Silloin ilmapallo joutuu alaspäin suuntautuvaan kiihtyvään liikkeeseen.

Tehtävä 11.27.

a) Videolta voidaan havaita, että nauhageneraattorin ja varatun eboniittisauvan välillä on vuorovaikutus, koska eboniittisauva alkaa liikkua, kun nauhageneraattori tuodaan sen lähelle. Koska eboniittisauvaan vaikuttava sähköinen voima on kohti nauhageneraattoria, nauhageneraattorin sähkövaraus oli eri merkkinen kuin eboniittisauvan. Eboniittisauva varautuu negatiivisesti, kun sauvaa hangataan tekoturkikseen. Tällöin nauhageneraattorin sähkövaraus oli positiivinen.

b) Videolta havaitaan, että kun eboniittisauva viedään vesinoron lähelle, vesinoro alkoi liikkua kohti eboniittisauvaa ja vesinorosta irtosi vesipisaroita.

c) Eboniittisauva oli negatiivisesti varautunut. Kun eboniittisauva viedään vesinoron lähelle, vesinoro liikkuu kohti eboniittisauvaa sähköisen voiman vuoksi. Koska sähköinen voima aiheuttaa veden liikkeen kohti eboniittisauvaa, täytyy veden seassa olla positiivisia ioneja. Vesinoron ja siitä irronneiden pisaroiden täytyy sisältää positiivisia H^+-ioneja.

Tehtävä 11.28.

hiukkasen sähkövaraus eli alkeisvaraus $Q_e = -e$

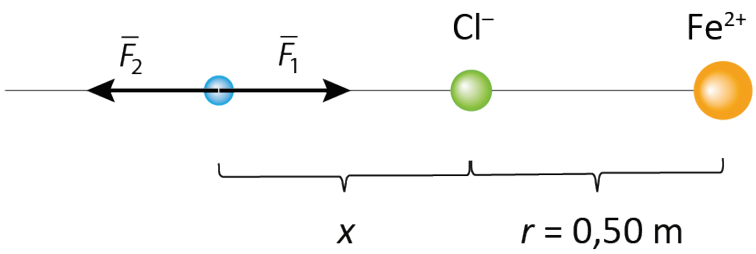
Cl^--ionin sähkövaraus $Q_{Na} = -e$

Fe^{2+}-ionin sähkövaraus $Q_{Fe} = +2e$

ionien välinen etäisyys $r = 0{,}50$ m

a) Koska samanmerkkiset sähkövaraukset hylkivät toisiaan ja erimerkkiset sähkövaraukset vetävät toisiaan puoleensa, Cl^--ioni aiheuttaa hiukkaseen sähköisen poistovoiman ja Fe^{2+}-ioni sähköisen vetovoiman. Koska hiukkanen on ionien kanssa samalla suoralla, on vain yksi kohta, jossa hiukkaseen kohdistuvat voimat ovat eri suuntaiset ja yhtä suuret. Vain tässä yhdessä kohdassa hiukkaseen vaikuttavien sähköisten voimien summa on nolla. Cl^--ionin on oltava Fe^{2+}-ionin ja hiukkasen välissä.

b)



$\bar{F}_1$ = Fe^{2+}-ionin hiukkaseen aiheuttama sähköinen voima

$\bar{F}_2$ = Cl^--ionin hiukkaseen aiheuttama sähköinen voima

c) Merkitään Cl^--ionin ja hiukkasen välistä etäisyyttä $r_2 = x$ ja Fe^{2+}-ionin ja hiukkasen välistä etäisyyttä $r_1 = r + x$. Rautaionin ja hiukkasen välillä on sähköinen vetovoima. Kloridi-ionin ja hiukkasen välillä on sähköinen poistovoima. Tietyssä pisteessä ioneja yhdistävällä janalla voimat ovat yhtä suuret. Tässä pisteessä hiukkaseen vaikuttavien sähköisten voimien summa on nolla.

Cl^--ionin ja hiukkasen välillä vaikuttava sähköinen voima on Coulombin lain mukaan

$$F_1 = k\frac{e \cdot e}{r_2^2} = k\frac{e^2}{x^2}.$$

Fe^+-ionin ja hiukkasen välillä vaikuttava sähköinen voima on Coulombin lain mukaan

$$F_2 = k\frac{2e \cdot e}{r_1^2} = k\frac{2e^2}{(r+x)^2}.$$

Koska hiukkanen on paikallaan, Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Merkitään voimat yhtä suuriksi ja huomioidaan suunnat. Ratkaistaan hiukkasen etäisyys Cl^--ionista.

$$F_1 = F_2$$

$$\cancel{k}\frac{\cancel{e^2}}{x^2} = \cancel{k}\frac{2\cancel{e^2}}{(r+x)^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{2}{(r+x)^2}$$

$$(r+x)^2 = 2x^2$$

$$r^2 + 2rx + x^2 = 2x^2$$

$$x^2 - 2rx - r^2 = 0$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan

$$x = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 + 4r^2}}{2} = \frac{\left(2 \pm \sqrt{8}\right)r}{2} = \frac{\left(2 \pm \sqrt{8}\right) \cdot 0{,}50\,\text{m}}{2}$$

josta x_1 = 1,2071 m ≈ 1,20 m

(ja x_2 = −0,2071 m ≈ −0,21 m, joka ei ole mahdollinen)

Varauspalloon kohdistuva kokonaisvoima on nolla silloin, kun etäisyys kloridi-ionista on 1,20 m.

Tehtävä 11.29.

levyjen välinen etäisyys $d = 0{,}112$ m

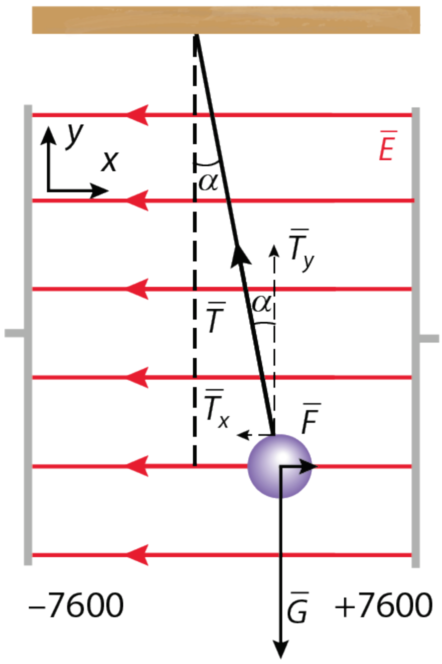
pallon massa $m = 1{,}8$ g

negatiivisesti varatun levyn potentiaali $V_1 = -7\,600$ V

positiivisesti varatun levyn potentiaali $V_2 = +7\,600$ V

langan ja pystysuunnan välinen kulma $\alpha = 15°$

a)



$\overline{F}$ = palloon kohdistuva sähköinen voima

$\overline{G}$ = pallon paino

$\overline{T}$ = langan jännitysvoima

b) Pallo roikkui langan varassa paikallaan, jolloin Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituina on

x-suunnassa: $F - T_x = 0$

y-suunnassa: $T_y - G = 0$

Esitetään langan jännitysvoima kulman α avulla ja $G = mg$. Tällöin

x-suunnassa: $T\sin\alpha = F$

y-suunnassa: $T\cos\alpha = mg$.

Jaetaan yhtälöt puolittain, jolloin

$$\tan\alpha = \frac{F}{mg}.$$

Palloon kohdistuu sähköinen voima $F = EQ$. Levyjen välinen potentiaaliero eli jännite on $U = \Delta V = V_2 - V_1$. Levyjen väliin muodostunut sähkökenttä on

$$E = \frac{U}{d}.$$

Yhdistetään edellä olevat yhtälöt ja saadaan ratkaistua pallon sähkövaraus

$$mg\tan\alpha = \frac{V_1 - V_2}{d}Q$$

$$Q = \frac{dmg\tan\alpha}{V_1 - V_2} = \frac{0{,}112\,\text{m} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \tan 15^\circ}{7600\,\text{V} - (-7600\,\text{V})} = 3{,}158\,979\,953 \cdot 10^{-9}\,\text{C} \approx 3{,}2\,\text{nC}.$$

c) Levyjen välinen potentiaaliero eli jännite on $U = \Delta V = V_2 - V_1$. Edellisen kohdan perusteella palloon kohdistuva sähköinen voima on

$$F = \frac{U}{d}Q.$$

Mitä suurempi on levyjen välinen jännite eli myös jännitelähteen jännite, sitä suurempi sähköinen voima palloon kohdistuu. Mitä suurempi sähköinen voima palloon kohdistuu, sitä suurempi on langan ja pystysuunnan välinen kulma.

Tehtävä 11.30.

a) öljypisaran massa $m = 26\ \text{pg} = 26 \cdot 10^{-12}\ \text{g} = 26 \cdot 10^{-15}\ \text{kg}$

kondensaattorin levyjen välimatka
$d = 20{,}0\ \text{mm} = 20{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$

alkeisvaraus $e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$.

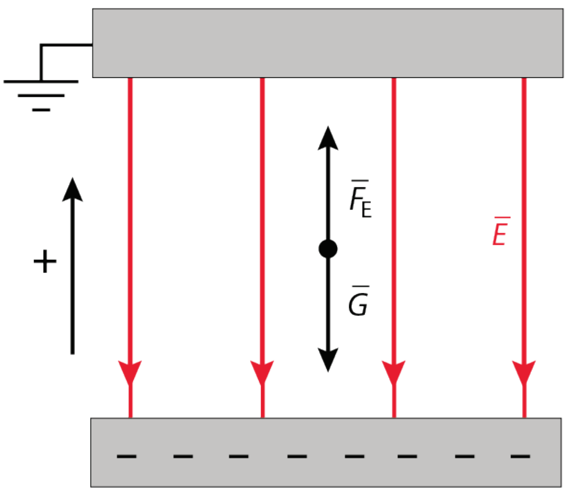
alemman levyn potentiaali $V_1 = -8{,}1\ \text{kV}$

Koska ylempi levy on maadoitettu, sen potentiaali on
$V_2 = 0\ \text{kV}$ ja levyjen välinen jännite on
$U = V_2 - V_1 = 0\ \text{V} - 8\ 100\ \text{V} = 8\ 100\ \text{V}$.

Levyjen välissä olevan homogeenisen sähkökentän suunta on alaspäin.

Kun varattu öljypisara pysyy sähkökentässä paikallaan, pisaraan vaikuttavien voimien summa on Newtonin II lain mukaan nolla. Pisaraan vaikuttaa paino $G = mg$ alaspäin, joten sähköisen voiman $F_E = QE$ suunta on ylöspäin. Tällöin pisaran varaus on negatiivinen.

Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Valitaan suunta ylöspäin positiiviseksi, jolloin $|Q|E = mg$.

Homogeenisen sähkökentän voimakkuus on $E = \dfrac{U}{d}$, jolloin saadaan

$$|Q|\frac{U}{d} = mg$$

$$|Q| = \frac{mgd}{U} = \frac{26 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 20{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}{8\,100\ \mathrm{V}} = 6{,}297\,78 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

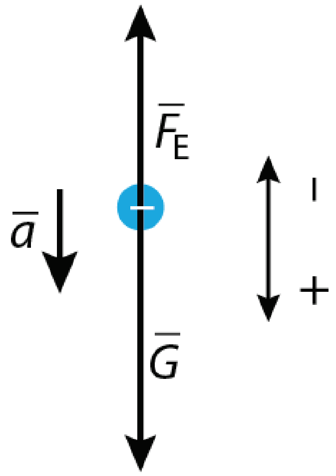
Tarkin arvo sähkövaraukselle saadaan, kun huomioidaan, että sähkövarauksen suuruus on aina alkeisvarauksen monikerta.

$$|Q| = ne$$

$$n = \frac{|Q|}{e} = \frac{6{,}297\,778 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}}{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}} = 3{,}9308 \approx 4$$

Pisaran sähkövaraus on –4*e*.

b) Kun pisarasta irtoaa elektroni, on pisaran varaus $Q = -3e$. Pisaran paino pysyy käytännössä samana, mutta sähköinen voima pienenee, joten pisara joutuu kiihtyvään liikkeeseen alaspäin.



Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = m\bar{a}$, ja pisaran liikeyhtälö on $mg - |Q|E = ma$, jossa a on pisaran saama kiihtyvyys:

$$a = \frac{mg - |Q|E}{m} = g - \frac{|Q|U}{md}$$

$$= 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - \frac{3 \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 8\,100\ \text{V}}{26 \cdot 10^{-15}\ \text{kg} \cdot 20{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} = 2{,}323\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Kiihtyvyyden suunta on alaspäin.

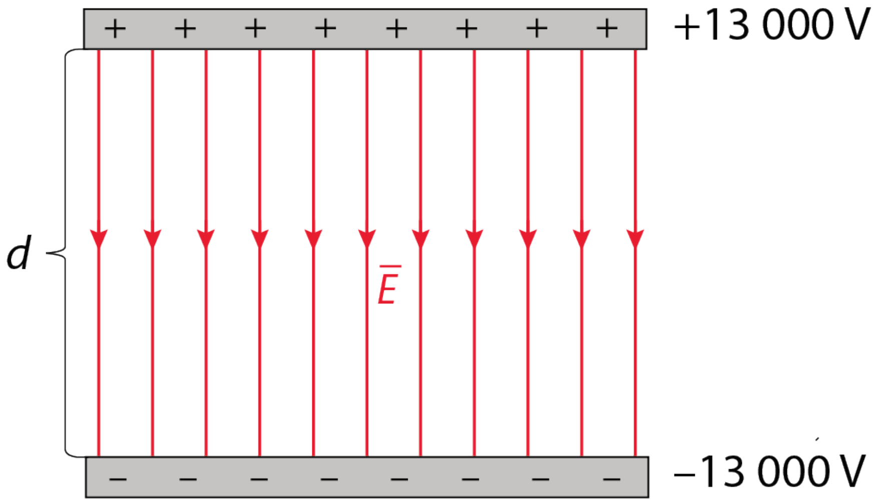
Tehtävä 11.31.

johdelevyn 1 potentiaali V_1 = +13 000 V

johdelevyn 2 potentiaali V_2 = −13 000 V

johdelevyjen välinen etäisyys d = 0,065 m

a) Johdelevyjen välille syntyy sähkökenttä, jonka suunta on korkeammasta potentiaalista kohti matalampaa potentiaalia. Syntyneen sähkökentän suunta on siis +13 000 V:n levyltä −13 000 V:n levylle.



Sähkökentän voimakkuus on $E = Ud$. Levyjen välille syntynyt potentiaaliero on $U = V_1 - V_2$.

Sähkökentän voimakkuus on

$$E = \frac{U}{d} = \frac{V_1 - V_2}{d} = \frac{+13\,000\text{ V} - (-13\,000\text{ V})}{0{,}16\text{ m}} = 400\,000\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = 400\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}.$$

b) Kun alemmassa eli −13 000 V:n potentiaalissa oleva levy maadoitetaan, levyn potentiaali on maadoituksen jälkeen 0 V. Maadoituksen jälkeen levyjen välinen jännite on U = 13 000 V − 0 V = 13 000 V.

c) Alfahiukkanen on heliumydin He^{2+}. Ytimessä on kaksi protonia, joten alfahiukkasen sähkövaraus on $Q = 2e = 2 \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C

alfahiukkasen massa $m = 6{,}644\,657 \cdot 10^{-27}$ kg

alfahiukkasen nopeus alussa $v_1 = 8{,}9 \cdot 10^6$ m/s

Alfahiukkasen potentiaalienergia sähkökentässä on nolla, sillä hiukkanen on maadoitetun levyn läheisyydessä. Varatun hiukkasen kokonaisenergia sähkökentässä säilyy. Kokonaisenergia on hiukkasen potentiaalienergian ja liike-energian summa

$$E_{\mathrm{pa}} + E_{\mathrm{ka}} = E_{\mathrm{pl}} + E_{\mathrm{kl}}$$

$$QV_1 + \frac{1}{2}mv_1^{\ 2} = QV_2 + \frac{1}{2}mv_2^{\ 2}.$$

Koska alussa hiukkanen on sähkökentässä kohdassa, jossa potentiaali on nolla, hiukkasen potentiaalienergia sähkökentässä on myös nolla. Hiukkanen osuu toiselle johdelevylle kohdassa, jossa sähkökentän potentiaali on 13 000 V. Kun hiukkanen osuu toiselle johdelevylle, hiukkasen nopeus on

$$\frac{1}{2}mv_2^{\ 2} = \frac{1}{2}mv_1^{\ 2} - QV_2$$

$$v_2^{\ 2} = v_1^{\ 2} - \frac{2QV_2}{m}$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^{\ 2} - \frac{2QV_2}{m}}$$

$$= \sqrt{(8{,}9 \cdot 10^6\ \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - \frac{2 \cdot 2 \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 13\,000\ \text{V}}{6{,}644\,657 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}}$$

$$= 8\,829\,278{,}722\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 8{,}8\,\frac{\text{Mm}}{\text{s}}.$$

d) Alfahiukkasella on positiivinen sähkövaraus, joten hiukkaseen kohdistuva sähköinen voima on sähkökentän suuntainen. Tällöin positiivisesti varatun hiukkasen liike-energia pienenee ja hiukkasen potentiaalienergia sähkökentässä kasvaa.

Syvennä

Tehtävä 11.32.

protonin sähkövaraus $e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C

johdelevyjen välinen etäisyys $d = 3{,}0 \cdot 10^{-2}$ m

johdelevyjen välinen jännite $U = 60$ V

johdelevyjen pituus $s = 0{,}15$ m

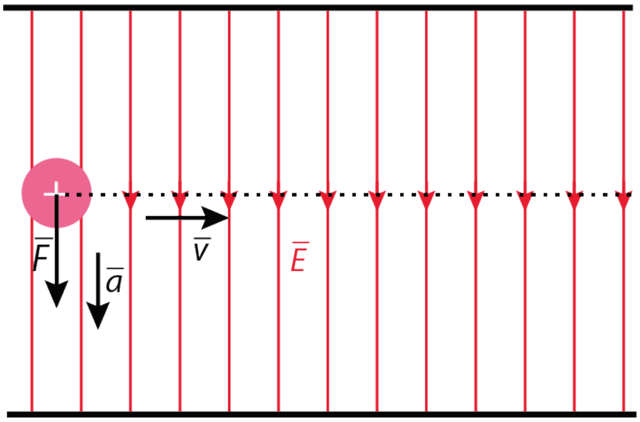
protonin nopeus $v = 8{,}3 \cdot 10^{5}$ m/s

protonin massa $m = 1{,}672\,6219 \cdot 10^{-27}$ kg

a) Levyjen välinen sähkökenttä voidaan laskea levyjen välisen jännitteen ja levyjen välisen välimatkan avulla.

$$E = \frac{U}{d} = \frac{60\ \text{V}}{3{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 2{,}0\ \text{kV/m}.$$

b) Laaditaan sähkökentässä liikkuvan protonin voimakuvio.



$\overline{F}$ = protoniin kohdistuva sähköinen voima

Sähkökentän aiheuttama voima protoniin

$$F = QE = Q\frac{U}{d} = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot \frac{60\ \text{V}}{3{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 3{,}204\,35 \cdot 10^{-16}\ \text{N} \approx 0{,}32\ \text{fN}.$$

c) Koska protoniin ei kohdistu nopeuden suunnassa voimia, protoni on tasaisessa liikkeessä suunnassa, jossa protoni tulee sähkökenttään. Lasketaan, kuinka kauan protoni on sähkökentässä tasaisen liikkeen avulla.

$$s = vt$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{15 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{8{,}3 \cdot 10^{5}\ \text{m/s}} = 0{,}108\,722\,8916\ \mu\text{s} \approx 0{,}11\,\mu\text{s}.$$

Lasketaan, kuinka pitkän matkan protoni liikkuu pystysuunnassa aikana, jona protoni on sähkökentässä. Sähkökentän aiheuttama voima saa protonin tasaisesti kiihtyvään liikkeeseen Newtonin II lain mukaisesti sähkökentän suunnassa *F* = *ma.* Protonin kulkema matka sähkökentän suunnassa

$$s_E = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 = \frac{Q\frac{U}{d}}{2m}t^2 = \frac{Q\frac{U}{d}}{2m}\left(\frac{s}{v}\right)^2 = \frac{QUs^2}{2mdv^2}$$

$$s_E = \frac{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 60\ \text{V} \cdot \left(15 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\right)^2}{2 \cdot 1{,}672\,6219 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 3{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \left(8{,}3 \cdot 10^{5}\ \text{m/s}\right)^2} = 0{,}003\,128\,5178\ \text{m} \approx 3{,}12\ \text{mm}.$$

Koska protoni liikkuu pystysuunnassa vain 3,12 mm ja levyjen välinen välimatka on 3 cm, protoni ei osu kumpaankaan levyyn ja pääsee kentän läpi.

Tehtävä 11.33.

johdepallon 1 massa $m_1 = 1{,}2$ g

johdepallon 2 massa $m_2 = 3{,}9$ g

johdepallon 1 etäisyys pisteestä A $r_1 = 4{,}0$ cm

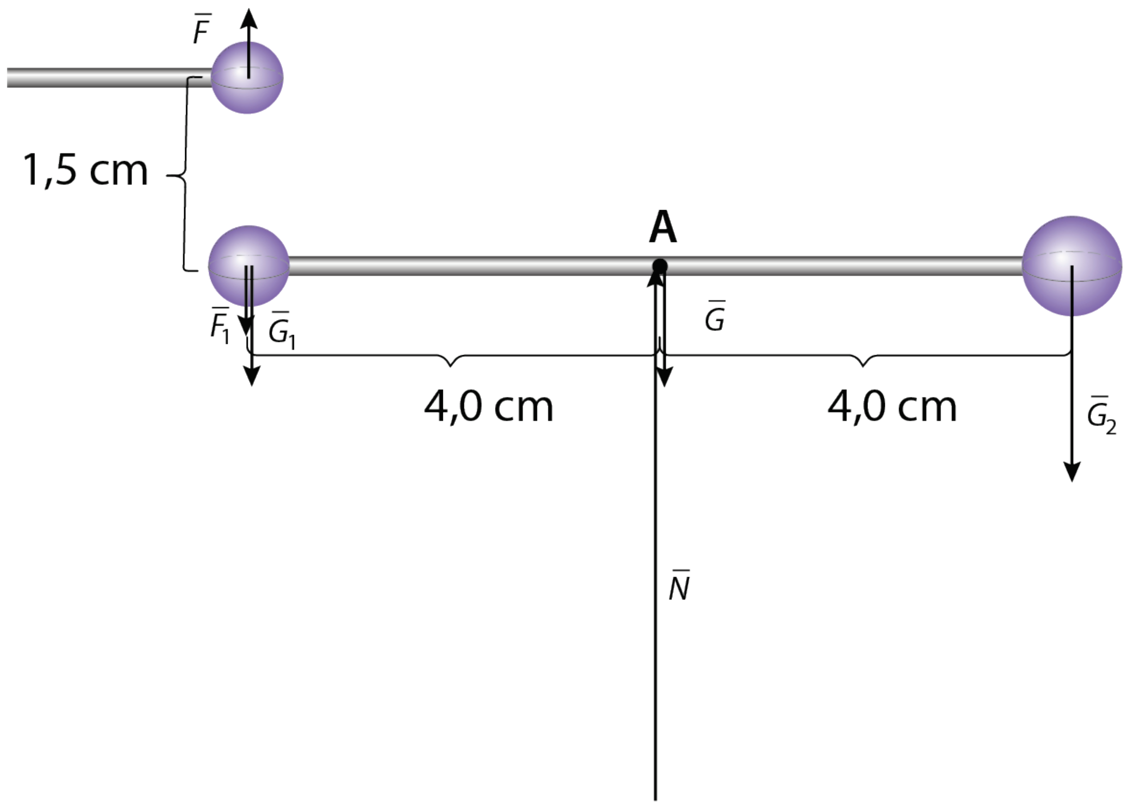
johdepallon 2 etäisyys pisteestä A $r_2 = 4{,}0$ cm

johdepallon 1 sähkövaraus $Q_1 = 31$ nC

johdepallojen 1 ja 3 välinen etäisyys $r = 1{,}5$ cm

Merkitään pallon 3 sähkövarausta tunnuksella Q.

a)



$\overline{G}_1$ = pallon 1 paino

$\overline{G}_2$ = pallon 2 paino

$\overline{G}$ = tangon paino

$\overline{N}$ = tankoon kohdistuva tukivoima

$\overline{F}$ = palloon 3 kohdistuva sähköinen voima

$\overline{F}_1$ = palloon 1 kohdistuva sähköinen voima

b) Johdepalloilla 1 ja 3 on samanmerkkiset sähkövaraukset, koska pallon 3 pitää kohdistaa palloon 1 sähköinen voima alaspäin, jotta tanko olisi tasapainossa. Pallolla 3 on positiivinen sähkövaraus.

c) Tanko ja pallot ovat pyörimisen suhteen tasapainossa, jolloin momenttien summa on nolla. Sovitaan, että momentin suunta vastapäivään on positiivinen. Tasapainoehdoksi pyörimisen suhteen saadaan

$$\Sigma M_{\mathrm{A}} = 0$$
$$F_1 r_1 + G_1 r_1 - G_2 r_2 = 0.$$

Ratkaistaan sähköisen voiman suuruus, kun voimien etäisyydet pisteestä A ovat yhtä suuret.

$$F_1 \cancel{r_1} = G_2 \cancel{r_2} - G_1 \cancel{r_1}$$
$$F_1 = G_2 - G_1.$$

Pallon 3 sähkövarus saadaan Coulombin lain avulla

$$k\frac{QQ_1}{r^2} = m_2 g - m_1 g$$

$$Q = \frac{r^2 g(m_2 - m_1)}{kQ_1} = \frac{(0{,}015\,\mathrm{m})^2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(3{,}9 - 1{,}2)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{8{,}987\,551\,787 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot 31 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}$$

$$= 2{,}139 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C} \approx 21\,\mathrm{nC}.$$

Tehtävä 11.34.

a) Luonnossa esiintyvien aineiden Coulombin potentiaalienergia on pienin mahdollinen, kun aine on pysyvässä tai stabiilissa muodossaan.

b) Potentiaalienergian yhtälö on $E_{\mathrm{p}} = k\frac{Q_1 Q_2}{r}$. Kun hiukkasten sähkövaraukset Q_1 ja Q_2 ovat samanmerkkiset, niiden tulo on positiivinen. Kun hiukkasten sähkövaraukset ovat erimerkkiset, Coulombin potentiaalienergia on negatiivinen eli pienempi kuin samanmerkkisten sähkövarausten Coulombin potentiaalienergia.

c) Vetymolekyylin yhden vety-ytimen ja kahden sidoselektronin Coulombin potentiaalienergia on $E_{\mathrm{p}} = k\dfrac{-2e \cdot e}{r_{\mathrm{H}}}$. Kahden vety-ytimen Coulombin potentiaalienergia on $E_{\mathrm{p}} = k\dfrac{e \cdot e}{2r_{\mathrm{H}}}$. Kun lasketaan yhteen kolmen hiukkasparin Coulombin potentiaalienergiat, saadaan arvio vetymolekyylin Coulombin potentiaalienergialle. Tällöin $E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{H_2}} = k\dfrac{-2e \cdot e}{r_{\mathrm{H}}} + k\dfrac{-2e \cdot e}{r_{\mathrm{H}}} + k\dfrac{e \cdot e}{2r_{\mathrm{H}}} = -\dfrac{7}{2}k\dfrac{e \cdot e}{r_{\mathrm{H}}}$. Tulos on pienempi kuin $E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{2H}} = -2k\dfrac{e \cdot e}{r_{\mathrm{H}}}$. Tarkastelussa ei ole huomioitu kahden sidoselektronin systeemin Coulombin energiaa. Sidoselektronit eivät ole tarkalleen ottaen paikallaan vaan jatkuvassa liikkeessä. Ne liikkuvat toisten toistensa ohi siten, että systeemin Coulombin potentiaalienergia jää negatiivisemmaksi kuin kahden erillisen atomin tapauksessa.

Tehtävä 11.35.

a) Salaman fysiikkaa ei ymmärretä vielä kunnolla, koska sen ominaisuuksia on vaikea mitata, salamakanavan virta on suuri, lämpötila on hyvin korkea ja ilmiö tapahtuu nopeasti.

b) Ukkospilven jääkiteet törmäilevät keskenään nousuvirtauksessa, jolloin jääkiteistä irtoaa elektroneja ja ioneja. Kun elektronit ja ionit kiinnittyvät eri kiteisiin tai hiukkasiin, syntyy varautuneita hiukkasia.

c) Vaikka ukkospilven sähkökentän mittauksissa ei ole toistaiseksi havaittu teorian ennustamia sähkökentän voimakkuuden suuruuksia, salaman aiheuttama röntgensäteily viittaa siihen, että pilvissä esiintyy teorian mukaisia paikallisia sähkökenttiä. Röntgensäteilyä syntyy, kun suureen nopeuteen kiihdytettyjen elektronien rata kaareutuu.

d) elektronin massa m = 9,109 3837 · 10^{-31} kg

elektronin sähkövaraus
$Q = -e = -1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

Oletetaan, että O_2^{1+}-ionin massa on yhtä suuri kuin O_2-molekyylin massa.
$m_{O2} = 2 \cdot 16\ \text{u} = 32 \cdot 1{,}660\ 539\ 069 \cdot 10^{-27}$ kg

$= 5{,}313\ 725\ 021 \cdot 10^{-26}$ kg

O_2^{1+}-ionin sähkövaraus $Q_{O2} = e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

sähkökentän voimakkuus
$E = 1{,}0 \cdot 10^6$ V/m = $1{,}0 \cdot 10^6$ N/C

Elektroniin ja O_2^{+1}-ioniin vaikuttaa yhtä suuret, mutta vastakkaissuuntaiset voimat. Sähköisen voiman suuruus on

$$F_E = QE = Q_{O2}E = eE$$
$$= 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1{,}0 \cdot 10^6\ \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-13}\ \text{N}.$$

Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Sovitaan voiman suunta positiiviseksi ja elektronin liikeyhtälöksi saadaan $eE = ma$, josta voidaan ratkaista kiihtyvyys.

$$a = \frac{F_E}{m} = \frac{1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-13}\ \text{N}}{9{,}109\ 3837 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 1{,}758\,82 \cdot 10^{17}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1{,}8 \cdot 10^{17}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vastaavalla tavalla O_2^{1+}-ionin liikeyhtälöksi saadaan $eE = m_{O2}a$, josta voidaan ratkaista kiihtyvyys.

$$a = \frac{F_E}{m} = \frac{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{N}}{5{,}313\,725\,021 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}} = 3{,}015\,167 \cdot 10^{12}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 3{,}0 \cdot 10^{12}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

12 Tasavirtapiirit

Harjoittele

Tehtävä 12.1.

Oikeat vastaukset:

a) E

b) B

c) D

d) D

e) E

f) C

g) A

h) B

i) B

j) D

k) A

l) B

m) D

n) A

o) A

p) C

q) D

r) A

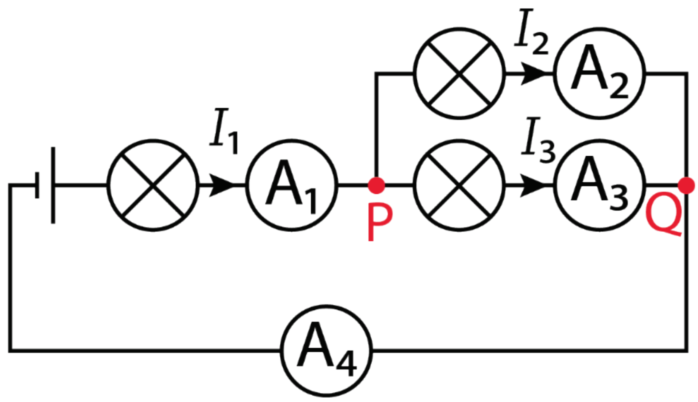
s) B

t) B

u) C

Tehtävä 12.2.

a) Sähkövirran suunta on jännitelähteen positiiviselta navalta kohti negatiivista napaa. Merkitään kytkentäkaavioon piirissä kulkevat virrat I_1, I_2 ja I_3 sekä pisteet P ja Q niihin kohtiin, joissa virtapiiri haarautuu.



Virtapiiri haarautuu pisteessä P. Kirchhoffin virtalain mukaan pisteeseen P saapuvien sähkövirtojen summa on yhtä suuri kuin pisteestä lähtevien sähkövirtojen summa eli $I_1 = I_2 + I_3$. Ratkaistaan yhtälöstä sähkövirta I_3.

$I_3 = I_1 - I_2 = 185 \text{ mA} - 60 \text{ mA} = 125 \text{ mA}$

Pisteessä Q sähkövirrat yhdistyvät jälleen 185 mA:n suuruiseksi sähkövirraksi I_1.

Virtamittari 3 näyttää lukemaa 125 mA, ja virtamittari 4 näyttää lukemaa 185 mA.

b) yksittäisen pariston napajännite $U_{\text{paristo}} = 9{,}0$ V

vastuksen päiden välinen jännite $U_{\text{vastus}} = 5{,}5$ V

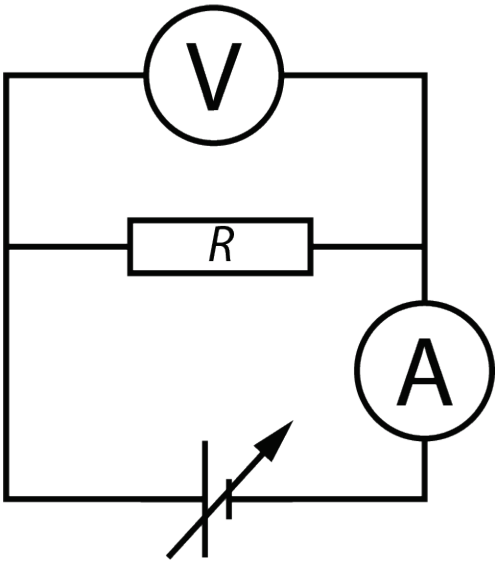
Kirchhoffin jännitelain mukaan suljetussa virtapiirissä potentiaalimuutosten summa on nolla, $\sum \Delta V = 0$.

Sähkövirran suunta on pariston positiiviselta navalta kohti negatiivista napaa, eli kuvan kytkennässä myötäpäivään. Kun virtapiiri kierretään sähkövirran kulkusuunnassa siten että aloitetaan kytkentäkaavion oikeasta alakulmasta, saadaan Kirchhoffin jännitelaista yhtälö $U_{\text{paristo}} - U_{\text{vastus}} - U_{\text{lamppu}} = 0$.

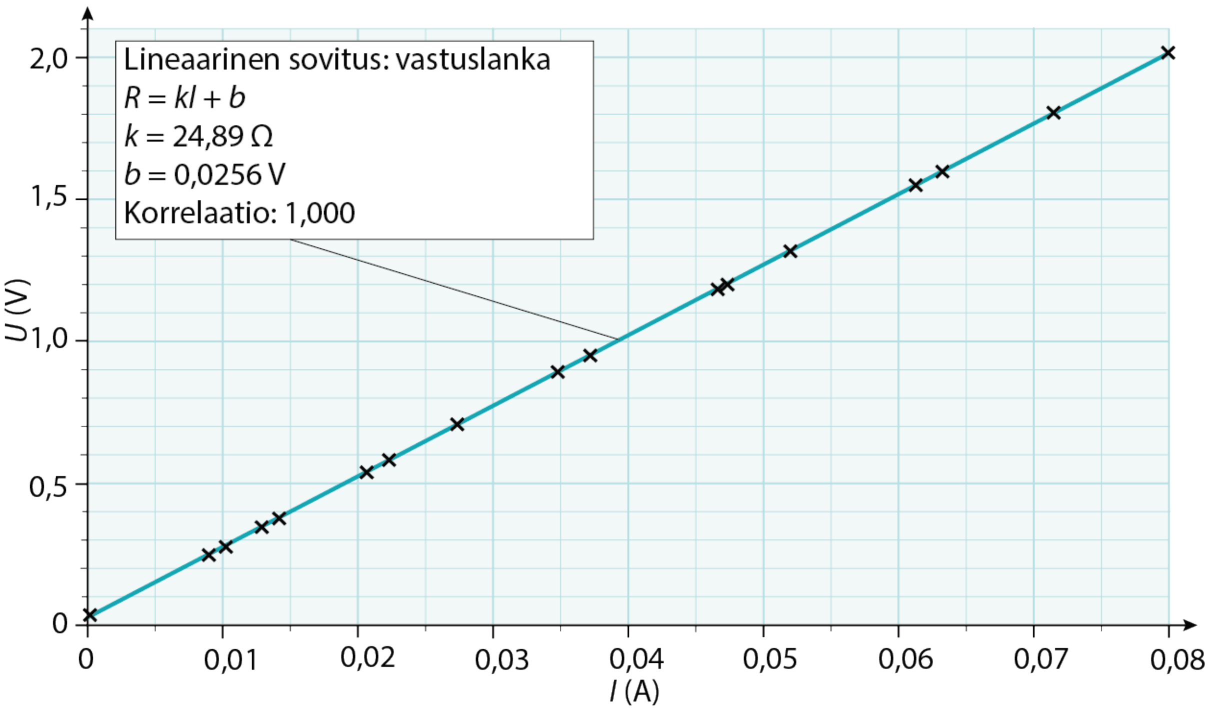
Lampun päiden välinen jännite on
$U_{\text{lamppu}} = U_{\text{paristo}} - U_{\text{vastus}} = 9{,}0\text{ V} - 5{,}5\text{ V} = 3{,}5\text{ V}$.

Tehtävä 12.3.

a)



b)



c) Ohmin lain mukaan vastuslangan päiden välinen jännite on $U = RI$. Vastuslangan resistanssi on (I, U) -koordinaatiston mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin. Vastuslangan resistanssi on $R = 24{,}89\ \Omega \approx 24{,}9\ \Omega$.

Tehtävä 12.4.

a) vastuksen resistanssi $R = 33\ \Omega$

Kuvaajan perusteella potentiaalit ovat

maadoituksen luona $V_0 = 0$ V,

ensimmäisen pariston jälkeen $V_1 = 3{,}0$ V,

toisen pariston jälkeen $V_2 = 6{,}0$ V,

lampun jälkeen $V_3 = 4{,}0$ V,

kolmannen pariston jälkeen $V_4 = 7{,}0$ V,

vastuksen jälkeen eli maadoituksen luona $V_0 = 0$ V.

Vastuksen kohdalla potentiaali laskee arvosta $V_4 = 7{,}0$ V arvoon $V_0 = 0$ V. Jännite vastuksen päiden välillä on siten $U_{\text{vastus}} = V_4 - V_0 = 7{,}0\ \text{V} - 0\ \text{V} = 7{,}0$ V.

Ohmin lain mukaan $U_{\text{vastus}} = RI$, joten sähkövirta vastuksessa on $I = \dfrac{U_{\text{vastus}}}{R} = \dfrac{7{,}0\ \text{V}}{33\ \Omega} = 0{,}212\,12\ \text{A} \approx 210\ \text{mA}.$

Koska virtapiiri on haarautumaton, kaikkialla virtapiirissä on yhtä suuri sähkövirta, 210 mA.

b) Lampun kohdalla potentiaali laskee arvosta $V_2 = 6{,}0$ V arvoon $V_3 = 4{,}0$ V. Jännite lampun päiden välillä on siten $U_{\text{lamppu}} = V_2 - V_3 = 6{,}0\ \text{V} - 4{,}0\ \text{V} = 2{,}0$ V.

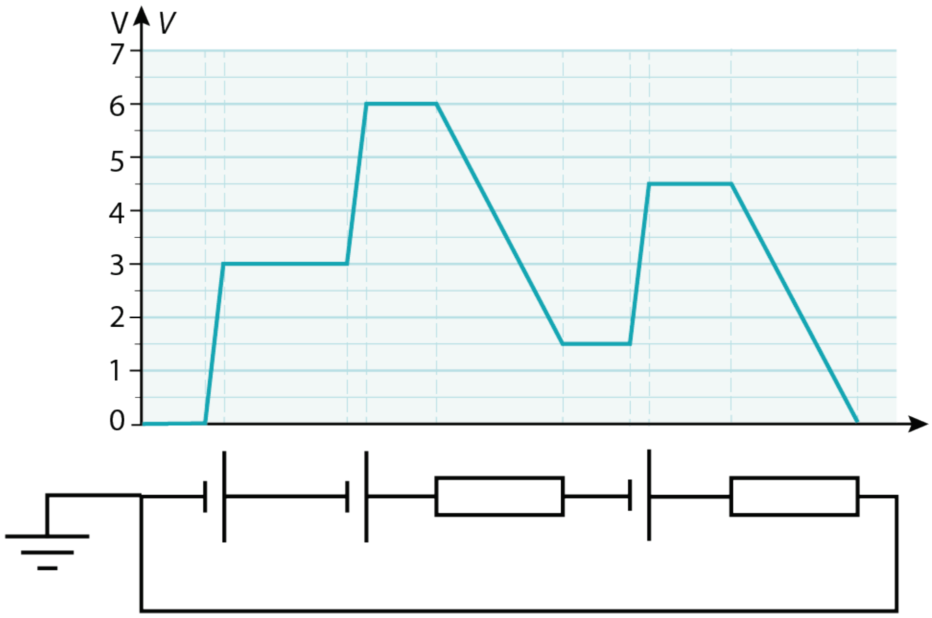
Lampun teho on
$P = UI = 2{,}0\ \text{V} \cdot 0{,}212\,12\ \text{A} = 0{,}424\,24\ \text{W} \approx 0{,}42\ \text{W}.$

c) Pariston napajännitteet ovat edelleen
$U_{\text{paristo}} = V_1 - V_0 = 3{,}0\ \text{V} - 0\ \text{V} = 3{,}0\ \text{V}$.

Kirchhoffin jännitelain mukaan suljetussa virtapiirissä potentiaalimuutosten summa on nolla, $\sum \Delta V = 0$. Kun lamppu vaihdetaan vastukseen, piirin resistanssi muuttuu. Silloin myös sähkövirta piirissä muuttuu. Koska vastukset ovat samanlaiset, vastusten päiden välisen jännitteet ovat Ohmin lain $U_c = RI_c$ mukaan yhtä suuret.

Kirchhoffin jännitelaista saadaan
$U_{\text{paristo}} + U_{\text{paristo}} - U_c + U_{\text{paristo}} - U_c = 0$ eli $3U_{\text{paristo}} = 2U_c$,
joten $U_c = \frac{3}{2}U_{\text{paristo}} = \frac{3}{2} \cdot 3{,}0\ \text{V} = 4{,}5\ \text{V}$.

Paristojen kohdalla potentiaali nousisi edelleen 3,0 V, mutta vastusten kohdalla potentiaali laskisi kummankin vastuksen kohdalla 4,5 V.



Tehtävä 12.5.

a) Lampun kirkkaus riippuu lampun tehosta. Lampun päiden välinen jännite on Ohmin lain perusteella $U = RI$, joten teho on $P = UI = RI \cdot I = RI^2$. Koska lamput ovat samanlaisia, niiden resistanssit ovat yhtä suuret. Siten kytkennän lamppujen kirkkaudet voidaan päätellä lampuissa kulkevien sähkövirtojen avulla. Mitä suurempi on lampun läpi kulkeva sähkövirta, sitä kirkkaammin lamppu valaisee.

   Lamppu A on kytketty rinnan kahden sarjassa olevan lampun B ja C kanssa.

   Lamput B ja C ovat yhtä kirkkaita, sillä sarjakytkennässä lamppujen läpi kulkeva sähkövirta on yhtä suuri.

   Rinnankytkennässä jännitteet ovat yhtä suuret. Lampun A haarassa resistanssi on pienempi kuin lamppujen B ja C haarassa. Silloin lampun A läpi kulkeva sähkövirta on suurempi kuin lamppujen B ja C läpi kulkeva sähkövirta. Siten lamppu A valaisee kirkkaammin kuin B tai C.

b) Jos lamppu A rikkoutuu, lamppu A sammuu, mutta muuta muutosta lamppujen kirkkauksissa ei tapahdu. Lamppujen B ja C päiden yli on edelleen sama jännite, lamppujen resistanssit ovat samat ja sähkövirta on yhtä suuri kuin aiemmin.

c) Jos lamppu B rikkoutuu, lamppu B sammuu, eikä sähkövirta ei enää kulje lamppujen B ja C haarassa, joten myös lamppu C sammuu. Lamppu A loistaa edelleen yhtä kirkkaasti, sillä lampun päiden välillä on edelleen sama jännite, ja lampun resistanssi on sama, joten sähkövirtakin on yhtä suuri kuin aiemmin.

d) Kytkimen sulkeminen oikosulkee jännitelähteen, jolloin sähkövirta kulkee kokonaisuudessa kytkinhaaran kautta, jonka resistanssi on hyvin pieni. Kaikki lamput sammuvat tällöin.

Tehtävä 12.6.

vastuslangan resistanssi R = 13,4 Ω

vastuslangan resistiivisyys $\rho = 4{,}9 \cdot 10^{-7}\ \Omega\text{m}$

vastuslangan halkaisija $d = 0{,}15\ \text{mm} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$

Vastuslangan poikkileikkaus on ympyrä, jonka poikkipinta-ala on

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Vastuslangan resistanssi $R = \rho\dfrac{l}{A} = \rho\dfrac{l}{\dfrac{\pi d^2}{4}} = \dfrac{4\rho l}{\pi d^2}.$

Ratkaistaan vastuslangan pituus.

$$l = \frac{\pi d^2 R}{4\rho} = \frac{\pi\left(1{,}5\cdot 10^{-4}\ \text{m}\right)^2 \cdot 13{,}4\ \Omega}{4\cdot 4{,}9\cdot 10^{-7}\ \Omega\text{m}} = 0{,}483\,2603\ \text{m} \approx 0{,}48\ \text{m}$$

Tehtävä 12.7.

a) Lähdejännite E on kuormittamattoman pariston napojen välinen jännite. Kun pariston läpi kulkee sähkövirta, pariston sisäinen resistanssi aiheuttaa Ohmin lain mukaan jännitehäviön R_sI. Tämän vuoksi kuormitetun pariston napojen välinen jännite eli napajännite U on pienempi kuin pariston lähdejännite.

b) pariston lähdejännite $E = 1{,}49$ V

pariston napajännite $U = 1{,}36$ V

sähkövirralla $I = 120$ mA $= 0{,}12$ A

Kuormitetun pariston napojen välinen jännite eli napajännite on $U = E - R_sI$.

Ratkaistaan tästä pariston sisäinen resistanssi.

$$R_s = \frac{E - U}{I} = \frac{1{,}49\text{ V} - 1{,}36\text{ V}}{0{,}12\text{ A}} = 1{,}083\,33\,\Omega \approx 1{,}1\,\Omega$$

Pariston sisäinen resistanssi on 1,1 Ω.

c) Paristo syöttää piiriin energiaa teholla
$P_{\text{paristo}} = EI = 1{,}49\ \text{V} \cdot 0{,}12\ \text{A} = 0{,}1788\ \text{W} \approx 0{,}18\ \text{W}.$

Vastuksen päiden välinen jännite on sama kuin pariston napajännite, joten pariston teho on
$P_{\text{vastus}} = UI = 1{,}36\ \text{V} \cdot 0{,}12\ \text{A} = 0{,}1632\ \text{W} \approx 0{,}16\ \text{W}.$

Vastuksen teho on pienempi kuin teho, jolla paristo syöttää piiriin energiaa.

Osa pariston tuottamasta energiasta muuntuu jo pariston sisällä mm. pariston sisäenergiaksi pariston sisäisen resistanssin vuoksi. Pariston ja vastuksen tehon erotus vastaa tehoa, jolla paristo mm. lämpenee sisäisen resistanssin vuoksi,

$$P_{R_s} = R_s I^2 = 1{,}083\,33\,\Omega \cdot (0{,}12\ \text{A})^2 = 0{,}0156\ \text{W} \approx 16\ \text{mW}.$$

Tehtävä 12.8.

jännitelähteen jännite U = 9,0 V

vastuksen 1 resistanssi R_1 = 470 Ω

vastuksen 2 resistanssi R_2 = 100 Ω

vastuksen 3 resistanssi R_3 = 220 Ω

a) Vastukset R_2 ja R_3 on kytketty sarjaan, jolloin niiden kokonaisresistanssi on
$R_{23} = R_2 + R_3$ = 100 Ω + 220 Ω = 320 Ω.

Vastukset R_1 ja R_{23} on kytketty rinnan, jolloin vastussysteemin kokonaisresistanssi on

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}}$$

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{470\,\Omega} + \frac{1}{320\,\Omega}\right)^{-1} = 190{,}3797\,\Omega \approx 190\,\Omega.$$

b) Vastus R_1 on kytketty rinnan jännitelähteen kanssa, joten vastuksen R_1 päiden välinen jännite eli vastuksen R_1 jännitehäviö U_1 on sama kuin jännitelähteen päiden välinen jännite U eli $U_1 = U = 9{,}0$ V. Ohmin lain mukaan saadaan vastuksen R_1 läpi kulkevaksi sähkövirraksi

$$U = R_1 I_1$$
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{9{,}0\ \mathrm{V}}{470\ \Omega} = 0{,}019\,1489\ \mathrm{A} \approx 19\ \mathrm{mA}.$$

Koska vastukset R_2 ja R_3 on kytketty sarjaan, vastusten läpi kulkee yhtä suuri sähkövirta I_2. Vastuksen R_{23} päiden välinen jännite on yhtä suuri kuin jännitelähteen jännite, koska ne on kytketty rinnan eli $U_{23} = U$. Ohmin lain voidaan ratkaista sähkövirta I_2.

$$U = U_{23}$$
$$U = R_{23} I_2$$
$$I_2 = \frac{U}{R_{23}} = \frac{9{,}0\ \mathrm{V}}{320\ \Omega} = 0{,}028\,125\ \mathrm{A} \approx 28\ \mathrm{mA}.$$

Sähkövirta ennen virtapiirin haarautumista on Kirchhoffin virtalain mukaan

$$I = I_1 + I_2 = 0{,}019\,1489\ \mathrm{A} + 0{,}028\,125\ \mathrm{A} = 0{,}047\,2739\ \mathrm{A} \approx 47\ \mathrm{mA}.$$

Tehtävä 12.9.

jännitemittarin jännite U_1 = 4,38 V

jännitemittarin lukema U_2 = 1,44 V

lampun jännitehäviö U_L = 1,02 V

virtamittarin A_2 lukema I_2 = 41 mA

virtamittarin A_3 lukema I_3 = 43 mA

a) Kirchhoffin virtalain mukaan mittarin A_1 läpi kulkeva sähkövirta eli mittarin lukema oli

$I_1 = I_2 + I_3$ = 41 mA + 43 mA = 84 mA.

b) Jännitemittarin lukema U_2 tarkoittaa virtapiirin rinnan kytkettyjen osien päiden välistä jännitettä. Jännitemittarin lukema U_2 on yhtä suuri kuin vastuksen R_2 ja lampun jännitehäviö $U_2 = U_R + U_{L1}$. Vastuksen R_2 jännitehäviö Ohmin lain mukaan on $U_R = R_2 I_2$. Vastuksen R_2 resistanssi on

$$U_2 = R_2 I_2 + U_{L1}$$
$$R_2 = \frac{U_2 - U_{L1}}{I_2} = \frac{1{,}44\ \text{V} - 1{,}02\ \text{V}}{0{,}041\ \text{A}} = 10{,}24\ \Omega \approx 10\ \Omega.$$

Kirchhoffin jännitelain mukaan rinnan kytketyt virtapiirin osat aiheuttavat yhtä suuret potentiaalimuutoksen

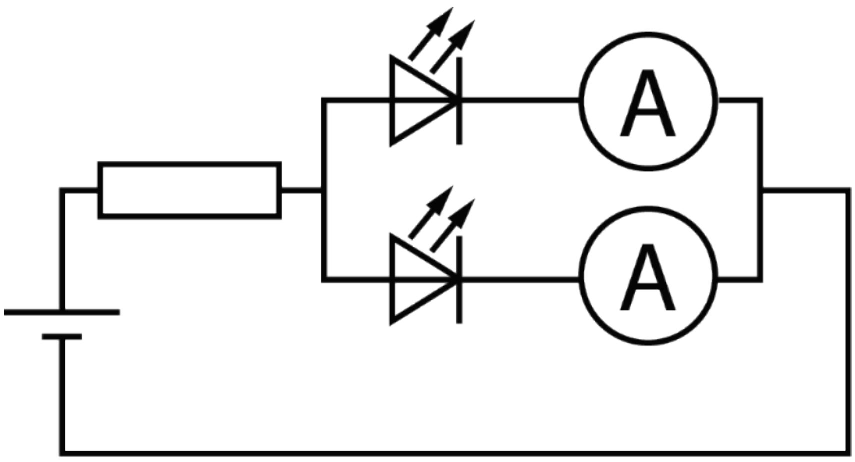
$U_1 - U_{R1} - U_2 = 0.$

Ohmin lain mukaan vastuksen R_1 aiheuttama jännitehäviö on $U_{R1} = R_1 I_1$. Vastuksen R_1 resistanssi on

$$U_1 - R_1 I_1 - U_2 = 0$$
$$R_1 = \frac{U_1 - U_2}{I_1} = \frac{4{,}38\ \text{V} - 1{,}44\ \text{V}}{0{,}084\ \text{A}} = 35\ \Omega.$$

Tehtävä 12.10.

a)



b) vastuksen resistanssi $R = 100\ \Omega$

Kuvan perusteella ylemmän ledin läpi kulkeva sähkövirta $I_1 = 3{,}86$ mA ja alemman ledin läpi kulkeva sähkövirta $I_2 = 3{,}82$ mA.

Jännitelähteen napajännite $U = 2{,}44$ V.

Kirchhoffin virtalain mukaan vastuksen läpi kulkeva sähkövirta

$I = I_1 + I_2$.

Molemmat ledit on kytketty sarjaan virtamittarien kanssa. Virtapiirin rinnan kytkettyjen osien päiden välinen jännite on yhtä suuri. Merkitään ledien ja virtamittarin aiheuttamaa jännitehäviötä symbolilla U_1. Kirchhoffin jännitelain mukaan virtapiirin potentiaalimuutosten summa on nolla, jolloin Ohmin lakia apuna käyttäen on voimassa

$U - RI - U_1 = 0$

Virtapiirin rinnan kytkettyjen osien päiden välinen jännite

$$\begin{aligned} U_1 &= U - R(I_1 + I_2) \\ &= 2{,}44\ \text{V} - 100\ \Omega \cdot (3{,}86 \cdot 10^{-3}\ \text{A} + 3{,}82 \cdot 10^{-3}\ \text{A}) \\ &= 1{,}672\ \text{V} \approx 1{,}67\ \text{V}. \end{aligned}$$

Virtamittari ei aiheuta juurikaan jännitehäviötä, joten molempien ledien päiden välinen jännite on $U_L = 1{,}67$ V.

Tehtävä 12.11.

akun lähdejännite $E = 13{,}14$ V

akun läpi kulkeva sähkövirta $I = 2{,}60$ A

akun napajännite 2,60 A:n sähkövirralla $U = 11{,}97$ V

akun sähkövirta latauksessa $I_L = 1{,}50$ A

a) Joulen lain mukaan akun tuottama teho
$P = EI = 13{,}14 \text{ V} \cdot 2{,}60 \text{ A} = 34{,}164 \text{ W} \approx 34{,}2 \text{ W}$.

b) Jännite ulkoisen vastuksen päiden välillä on sama kuin akun napajännite.

Ulkoisen vastuksen teho on silloin
$P_u = UI = 11{,}97 \text{ V} \cdot 2{,}60 \text{ A} = 31{,}122 \text{ W} \approx 31{,}1 \text{ W}$.

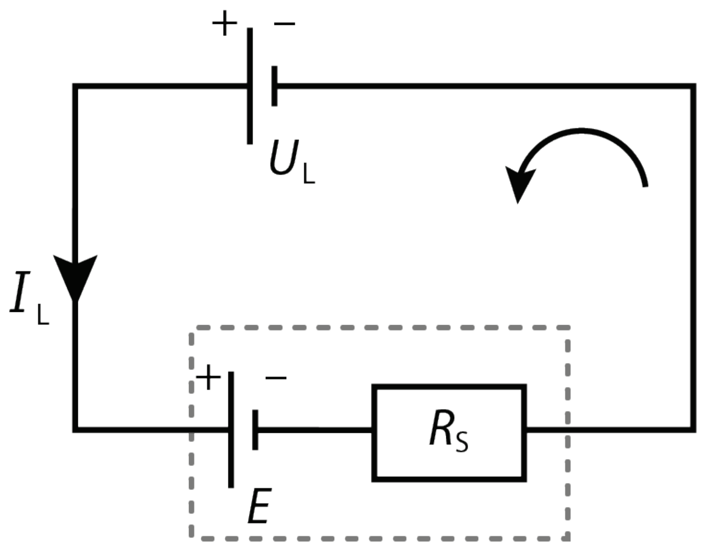
Akun sisäisen resistanssin vuoksi akku lämpenee teholla
$P_s = P - P_u = 34{,}164 \text{ W} - 31{,}122 \text{ W} = 3{,}042 \text{ W} \approx 3{,}04 \text{ W}$.

c) Selvitetään ensin ladattavan akun sisäinen resistanssi. Akun napajännite riippuu akun lähdejännitteestä ja sisäisestä resistanssista, $U = E - R_s I$.

Ratkaistaan akun sisäinen resistanssi.

$$R_s = \frac{E - U}{I} = \frac{13{,}14\ \text{V} - 11{,}97\ \text{V}}{2{,}60\ \text{A}} = 0{,}45\ \Omega.$$

Kun akkua ladataan, se kytketään rinnan lataavan jännitelähteen (laturin) kanssa.



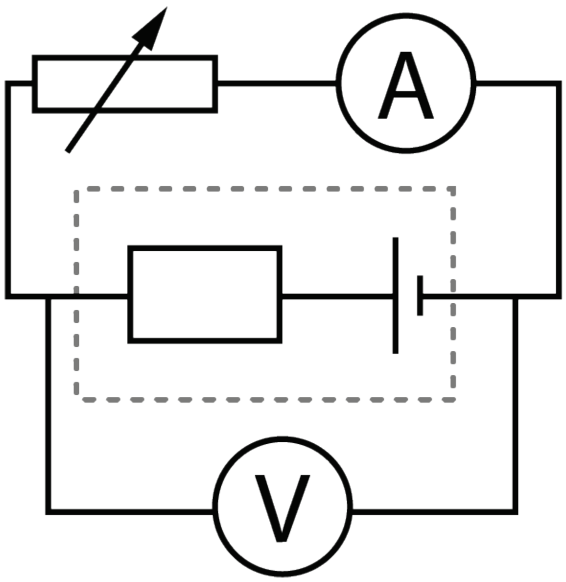
Kirchhoffin jännitelain mukaan suljetun virtapiirin potentiaalimuutosten summa on nolla $\sum \Delta V = 0$.

Saadaan $U_L - E - R_s I_L = 0$ eli akun napajännite on

$U_L = E + R_s I_L$
$\quad = 13{,}14\ \text{V} + 0{,}45\ \Omega \cdot 1{,}50\ \text{A} = 13{,}815 \approx 13{,}8\ \text{V}.$

Tehtävä 12.12.

a)



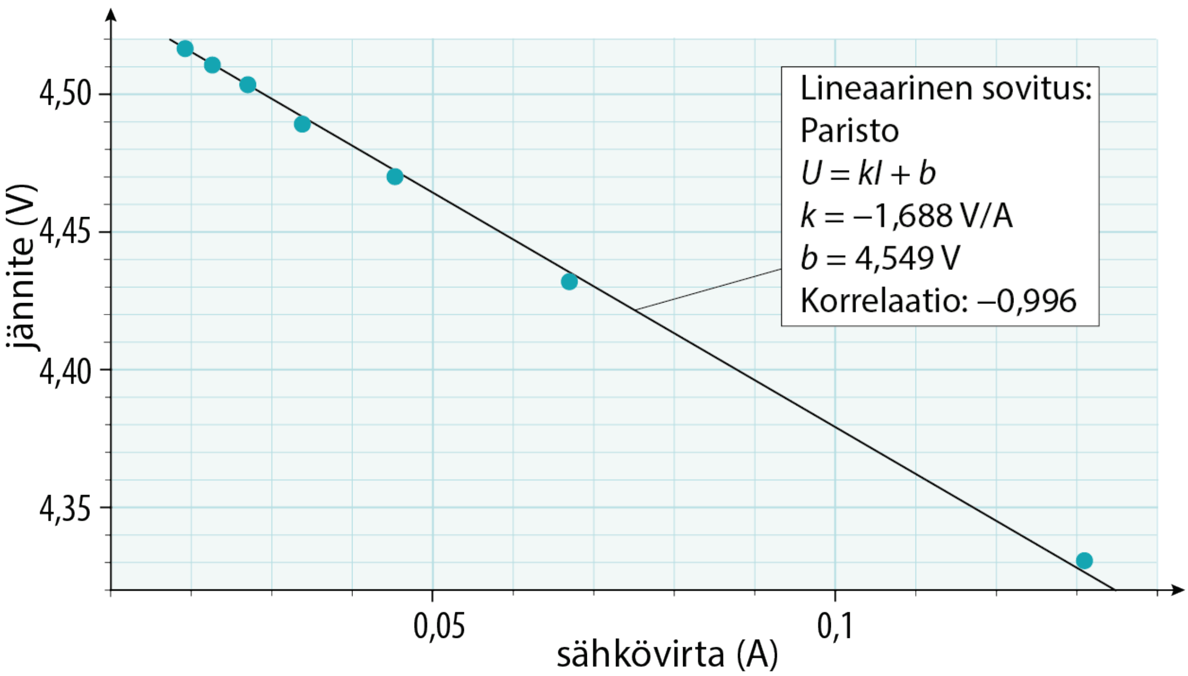
b) Jännitemittarilla mitattiin pariston päiden välistä jännitettä U. Tällöin on voimassa

$$U = E - U_{\mathrm{Rs}}.$$

Pariston sisäisen vastuksen aiheuttama jännitehäviö Ohmin lain mukaan on $U_{\mathrm{Rs}} = R_\mathrm{s}I$. Jolloin pariston päiden välinen jännite on

$$U = E - R_\mathrm{s}I.$$

Kun mittaustulokset esitetään (I, U)-koordinaatistossa, mittauspisteisiin sovitetun suoran kulmakerroin on $k = -R_\mathrm{s}$ ja suoran ja U-akselin leikkauskohdasta saadaan lähdejännite.



Pariston sisäinen resistanssi on $R_\mathrm{s} = -k = -(-1{,}688\ \Omega) \approx 1{,}69\ \Omega$.

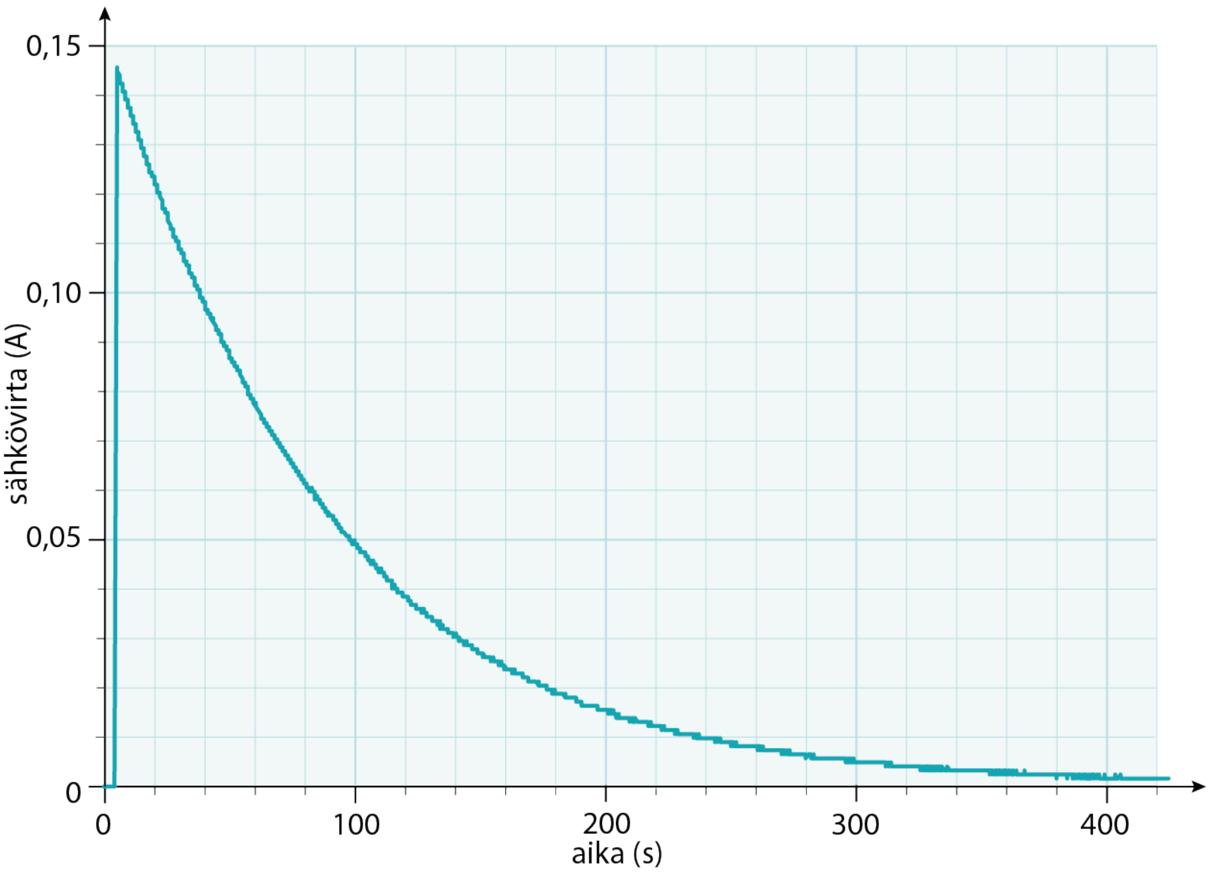
Pariston lähdejännite $E = 4{,}549\ \mathrm{V} \approx 4{,}55\ \mathrm{V}$.

c) Sisäinen resistanssi on paristolle ominainen suure. Kun paristo kytketään mittauksen jälkeen 1,2 kΩ:n vastukseen, pariston sisäinen resistanssi on edelleen sama kuin mittauksen aikana. Pariston sisäinen resistanssi on edellisen kohdan tuloksen perusteella $R_s = 1{,}7\ \Omega$.

Tehtävä 12.13.

vastuksen resistanssi R = 10,0 Ω

a)



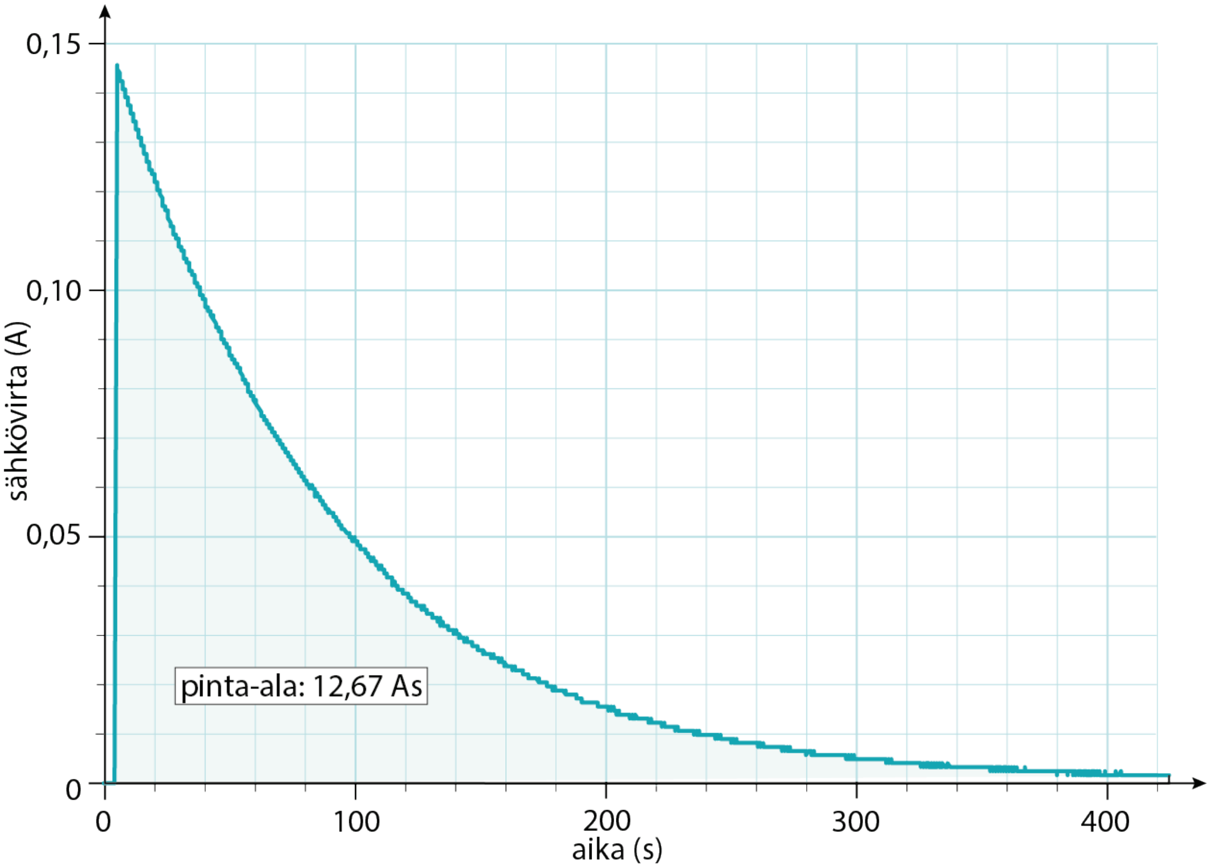
b) Kun ladattu kondensaattori kytketään vastukseen, kondensaattori alkaa purkautua. Kytkemishetkellä vastuksen läpi kulkee suurin virta. Mittausaineiston perusteella suurin sähkövirta kuvaajasta interpoloituna on $I = 0{,}145$ A.

Ohmin lain mukaan saadaan vastuksen aiheuttama jännitehäviö UR = RI. Kun kondensaattori kytketään vastukseen, komponentit ovat kytketty rinnan ja niiden päiden välinen jännite on yhtä suuri. Kondensaattorin jännite lataamisen aikana on

$U = UR = RI = 10{,}0\ \Omega \cdot 0{,}145\ \text{A} = 1{,}45\ \text{V}.$

c) Kondensaattorin latausjännitteeksi saatiin U = 1,45 V.

Kondensaattorin sähkövaraus on $Q = I\Delta t$.
Kondensaattorin sähkövaraus saadaan (t, I)-koordinaatiston kuvaajan ja t-akselin rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta.



Kuvaajan mukaan kondensaattorin sähkövaraus on Q = 12,67 C.

Kondensaattorin kapasitanssi on

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{12{,}67\,\mathrm{C}}{1{,}45\,\mathrm{V}} = 8{,}7379\,\mathrm{F} \approx 8{,}74\,\mathrm{F}.$$

d) Jos kondensaattorin varaus purettaisiin isomman vastuksen kautta, purkuvirran suurin arvo olisi Ohmin lain mukaisesti pienempi. Sähkövirran kuvaajan fysikaalinen pinta-ala olisi samansuuruinen. Kondensaattorin purkautuminen kestäisi pidempään kuin 10 ohmin vastuksen tapauksessa.

Tehtävä 12.14.

kondensaattorilevyjen säde r = 0,09 m

kondensaattorilevyjen etäisyys d = 0,0057 m

Levykondensaattorin kapasitanssi $C=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d}$, jossa ε_0 on sähkövakio, ε_r on väliaineen suhteellinen permittiivisyys, A on kondensaattorilevyjen pinta-ala ja d on kondensaattorilevyjen välinen etäisyys.

Ilmalle $\varepsilon_r = 1{,}0006$

a) Koska $Q = CU$ ja $C=\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d}$, saadaan kondensaattorin sähkövaraukseksi

$$Q=CU=\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d}\cdot U=\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{\pi r^2}{d}\cdot U$$

$$=1{,}0006\cdot 8{,}854\,187\,818\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\cdot\frac{\pi\cdot(0{,}09\,\mathrm{m})^2}{0{,}0057\,\mathrm{m}}\cdot 48\,\mathrm{V}$$

$$=1{,}898\,4996\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}\approx 1{,}9\,\mathrm{nC}.$$

Kondensaattorin energia

$$E=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0\frac{A}{d}U^2=\frac{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0\pi r^2U^2}{2d}$$

$$=\frac{1{,}0006\cdot 8{,}854\,187\,818\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\cdot\pi\cdot(0{,}09\ \mathrm{m})^2\cdot(48\ \mathrm{V})^2}{2\cdot 0{,}0057\,\mathrm{m}}$$

$$=45{,}563\,9896\,\mathrm{nJ}\approx 46\ \mathrm{nJ}.$$

b) Levyjen välinen etäisyys d = 0,025 m

Kondensaattorin sähkövaraus pysyy samana, koska sähkövarausta ei pääse siirtymään kondensaattorista pois. Ratkaistaan kondensaattorin uusi jännite.

$$Q = CU$$

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot U}{C_2} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} \cdot U}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{d_2}} = \frac{d_2}{d} \cdot U$$

Ratkaistaan kondensaattorin energia uuden jännitteen avulla.

$$E = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d_2} \left(\frac{d_2}{d} \cdot U \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8{,}854\,187\,818 \cdot 10^{-12} \, \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \cdot 1{,}0006 \cdot \frac{\pi \cdot (0{,}09\,\mathrm{m})^2}{0{,}025\,\mathrm{m}} \cdot \left(\frac{0{,}025\,\mathrm{m}}{0{,}0057\,\mathrm{m}} \cdot 48\,\mathrm{V} \right)^2$$

$$= 1{,}998\,421 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{J} \approx 200\,\mathrm{nJ}.$$

c) Kondensaattorin energia kasvaa. Energia kasvaa, koska kondensaattoriin tehdään työtä. Kondensaattorilevyjä siirretään kauemmaksi toisistaan ja samalla tehdään työtä sähkökentän aiheuttamaa voimaa vastaan.

Tehtävä 12.15.

virtapiirin sulakkeen maksimi sähkövirta I = 16 A

vedenkeittimen teho P_1 = 2,0 kW = 2 000 W

leivänpaahtimen teho P_2 = 850 W

mikroaaltouunin teho P_3 = 800 W

a) Koska laitteet on kytketty verkkojännitteeseen, laitteiden tehollinen vaihtojännitteen arvo on U = 230 V. Laitteiden kokonaissähköteho on kaikkien sähkötehojen summa.

$P = P_1 + P_2 + P_3 = 2\,000\text{ W} + 850\text{ W} + 800\text{ W} = 3\,650\text{ W}$

Kun kaikki laitteet ovat päällä yhtä aikaa, sulakkeen läpi kulkee suurin mahdollinen sähkövirta. Joulen lain mukaan $P = UI$.

Virtapiirissä sähkövirta on

$$I = \frac{P}{U} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{U} = \frac{2\,000\text{ W} + 850\text{ W} + 800\text{ W}}{230\text{ V}} = 15{,}869\,565\text{ A} \approx 16\text{ A}.$$

Koska keittiön pistorasia on kytkettynä 16 A:n sulakkeen kanssa samaan virtapiiriin, sulake kestää, vaikka laitteet ovat samaan aikaan päällä. Sulake voi hetkellisesti kestää suurempiakin sähkövirran arvoja kuin sulakkeeseen merkityn 16 A:n sähkövirran.

b) Vedenkeittimen sähköteho on $P_1 = U_R I_1$. Vedenkeittimen vastuksen aiheuttama jännitehäviö on $U_R = RI_1$. Vedenkeitin on kytketty vaihtojännitteeseen, jonka tehollinen arvo on U = 230 V, jolloin $U_R = U$. Vedenkeittimen vastuksessa kulkeva sähkövirta on

$$I_1 = \frac{U}{R}.$$

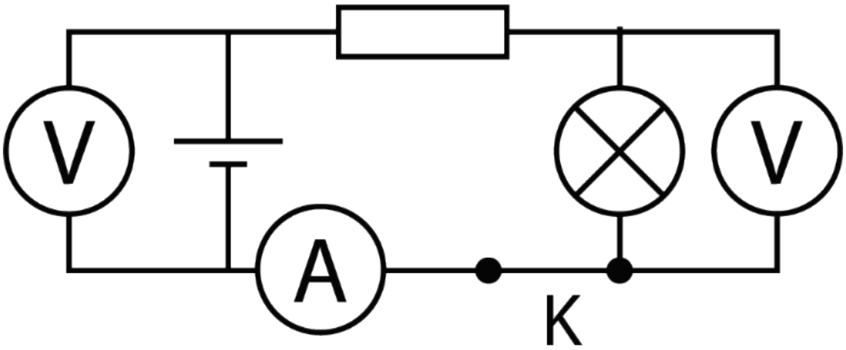
Sijoitetaan sähkövirta tehon yhtälöön. Vedenkeittimen lämmitysvastuksen resistanssiksi saadaan

$$P_1 = \frac{U^2}{R}$$

$$R = \frac{U^2}{P_1} = \frac{(230\text{ V})^2}{2\,000\text{ W}} = 26{,}45\,\Omega \approx 26\,\Omega.$$

Tehtävä 12.16.

a)



b) Kuvan perusteella

jännitelähteen jännite U_1 = 4,5 V

lampun päiden välinen jännite U_2 = 2,0 V

virtapiirin sähkövirta I = 0,027 A

Kirchhoffin jännitelain mukaan virtapiirissä potentiaalimuutosten summa $\Sigma V = 0$. Tällöin

$U_1 - U_2 - RI = 0$

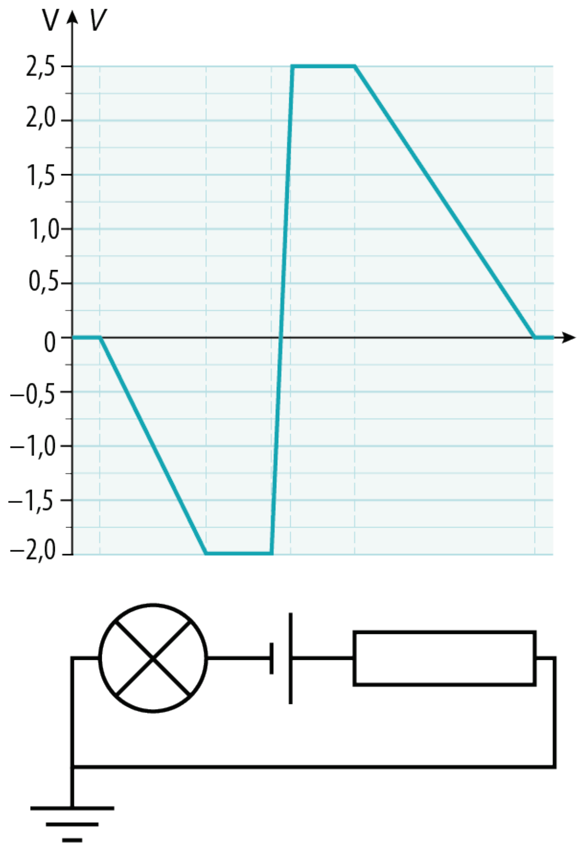
Vastuksen resistanssiksi saadaan

$$R = \frac{U_1 - U_2}{I} = \frac{4{,}5\ \text{V} - 2{,}0\ \text{V}}{0{,}027\ \text{A}} = 92{,}59\ \Omega \approx 93\ \Omega.$$

c) Pariston aiheuttama potentiaalin kasvu on $U_1 = 4{,}5$ V. Lampun aiheuttama potentiaalin pienenenemninen on $U_2 = 2{,}0$ V. Kirchhoffin jännitelain mukaan potentiaalimuutosten summa virtapiirissä on nolla, jolloin vastuksen aiheuttama potentiaalin pieneneminen on

$$U_3 = U_1 - U_2 = 4{,}5 \text{ V} - 2{,}0 \text{ V} = 2{,}5 \text{ V}.$$

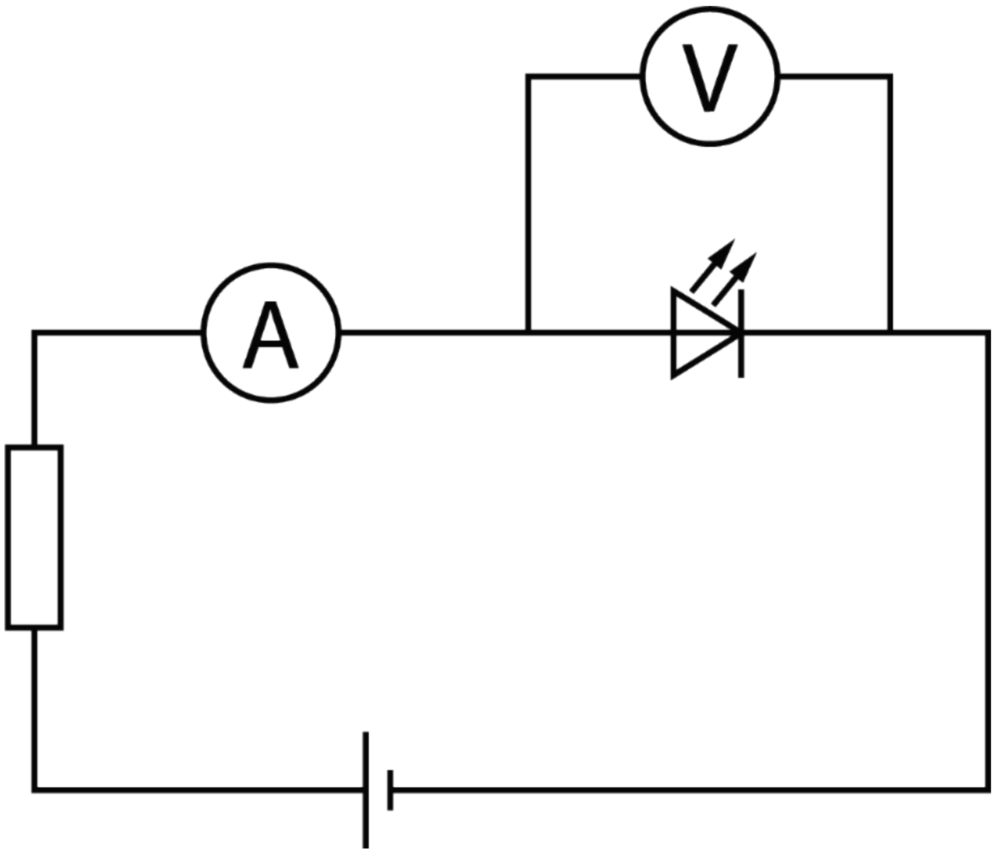
Maadoituskohdassa potentiaali on nolla, jolloin potentiaalikuvaaja on



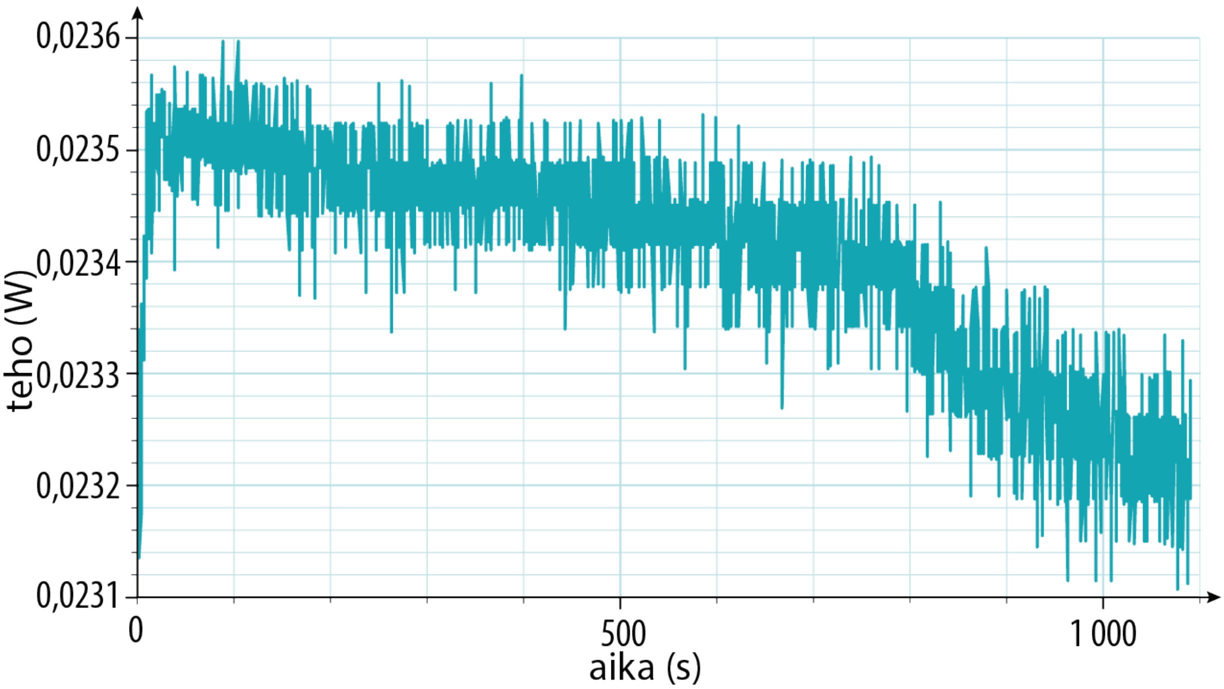
Tehtävä 12.17.

pariston napajännite alussa U = 4,73 V

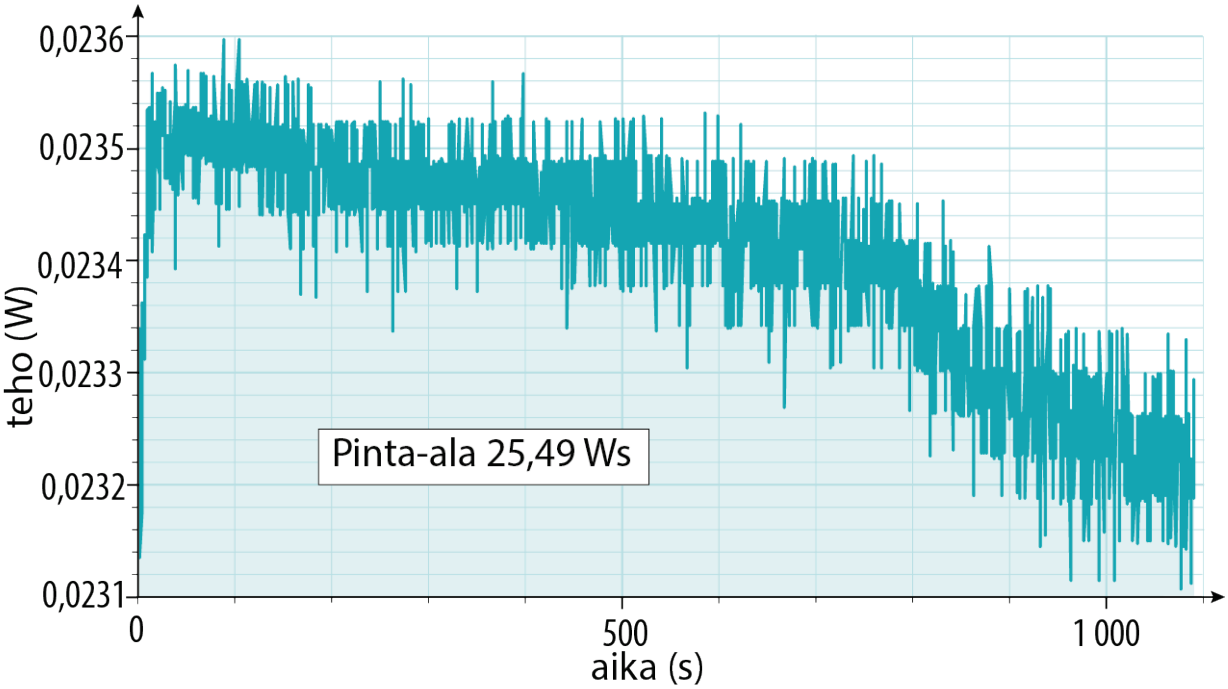
a)



b) Ledin sähköteho on $P_L = U_L I$. Lasketaan uusi sarake sähköteholle ja esitetään ledin sähköteho ajan suhteen.



c) Ledin paristolta vastaanottama energia on $E = Pt$. Energia saadaan (t, P)-koordinaatiston kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään energia.



Ledin paristolta vastaanottama energia on
$E = 25,49 \text{ J} \approx 25,5 \text{ J}$.

d) Kirchhoffin jännitelain mukaan virtapiirin potentiaalimuutosten summa on nolla, jolloin

$U - U_R - U_L = 0.$

Mittauksen alussa ledin päiden välinen jännite ja läpi kulkeva sähkövirta olivat suurimmillaan, joten näiden arvojen perusteella määritetään etuvastuksen resistanssi. Mittauksen alussa ledin päiden välinen jännite oli U_L = 1,930 V ja ledin läpi kulkeva sähkövirta I = 0,012 00 A. Koska komponentit on kytketty sarjaan, virtapiirissä kulkee kaikkialla yhtä suuri sähkövirta. Vastuksen läpi kulkeva sähkövirta on siis yhtä suuri kuin ledin läpi kulkeva sähkövirta. Vastuksen aiheuttama jännitehäviö on $U_R = RI$. Etuvastuksen resistanssiksi saadaan

$$R = \frac{U - U_L}{I} = \frac{4{,}73\ \text{V} - 1{,}93\ \text{V}}{0{,}0120\ \text{A}} = 233{,}33\ \Omega \approx 230\ \Omega.$$

Tehtävä 12.18.

a) Lamppujen sähköteho on sitä suurempi, mitä kirkkaammin lamppu valaisee. Joulen lain mukaan lampun sähköteho on $P = RI^2$. Mitä suurempi on lampun läpi kulkeva sähkövirta, sitä kirkkaammin lamppu valaisee.

   Kytkennän ylin lamppu on kirkkain, jolloin sen läpi kulkee suurin sähkövirta. Seuraavaksi kirkkaimmin valaisee toiseksi ylin lamppu eli sen läpi kulkee toiseksi suurin sähkövirta. Kaksi alinta lamppua valaisevat hyvin himmeästi, mutta liki pitäen yhtä kirkkaasti toisiinsa nähden. Näiden lamppujen läpi kulkee yhtä suuret sähkövirrat, mitkä ovat huomattavasti kahden ylimmän lampun sähkövirtoja pienempiä.

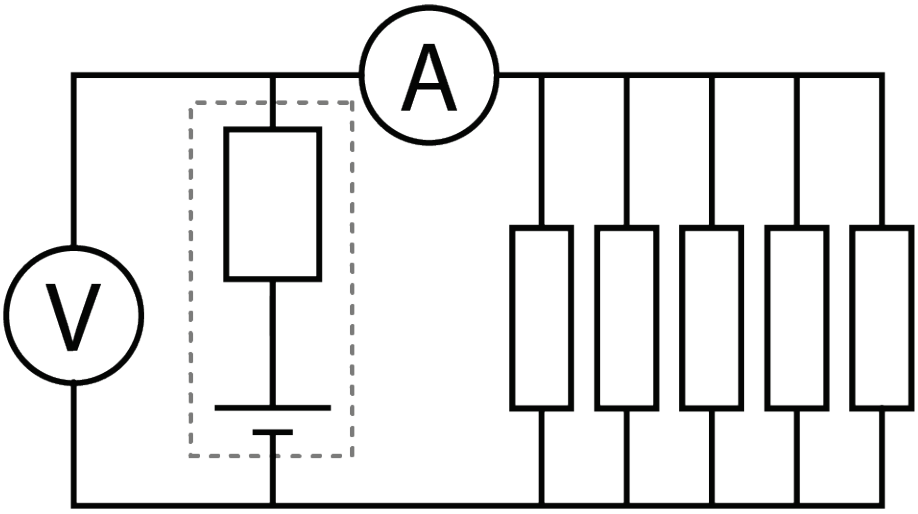
b) Kun alin lamppu kierretään auki, kaksi keskimmäistä lamppua valaisevat yhtä kirkkaasti eli niiden läpi kulkevat sähkövirrat ovat yhtä suuret. Ylin lamppu valaisee edelleen kirkkaimmin. Ylimmän lampun läpi kulkee tällöin suurin sähkövirta.

c) Kyseessä on kytkentä E.

Tehtävä 12.19.

a) Videolta havaitaan, että virtapiirin sähkövirta kasvaa sitä suuremmaksi, mitä enemmän virtapiiriin kytketään vastuksia. Koska virtapiirin sähkövirta kasvaa, kun jännitelähde pysyy samana, niin virtapiirin kokonaisresistanssin pitää pienentyä.

b)



c) Taulukoidaan sähkövirran ja jännitteen lukemat eri vastuskytkennöillä.

Sähkövirta (A)	**Jännite (V)**
0,0648	1,419
0,1916	1,378
0,3104	1,335
0,4168	1,298
0,5121	1,267

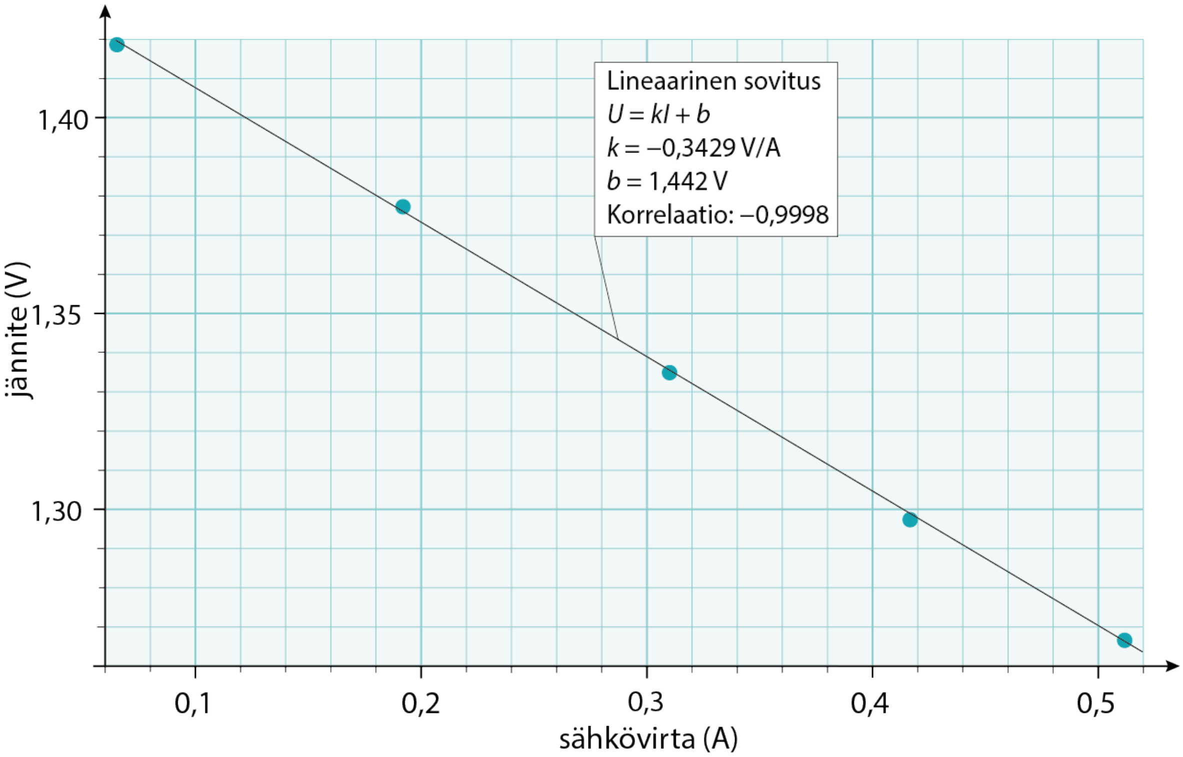
Jännitemittarilla mitattiin pariston päiden välistä jännitettä U. Tällöin on voimassa

$U = E - U_{\mathrm{Rs}}$.

Pariston sisäisen vastuksen aiheuttama jännitehäviö Ohmin lain mukaan on $U_{\mathrm{Rs}} = R_{\mathrm{s}}I$. Jolloin pariston päiden välinen jännite on

$U = E - R_{\mathrm{s}}I$.

Kun mittaustulokset esitetään (I, U)-koordinaatistossa, mittauspisteisiin sovitetun suoran kulmakerroin on $k = -R_{\mathrm{s}}$ ja suoran ja U-akselin leikkauskohdasta saadaan lähdejännite.



Pariston sisäinen resistanssi on
$R_s = -k = -(-0{,}3429\ \Omega) \approx 0{,}343\ \Omega$.

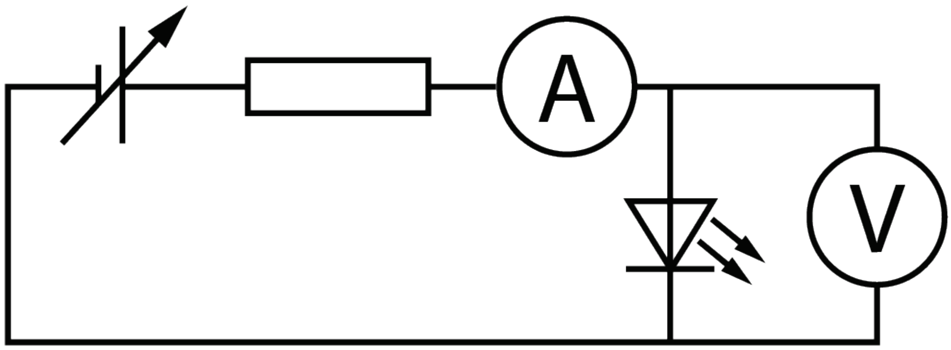
Pariston lähdejännite E = 1,442 V ≈ 1,44 V.

Tehtävä 12.20.

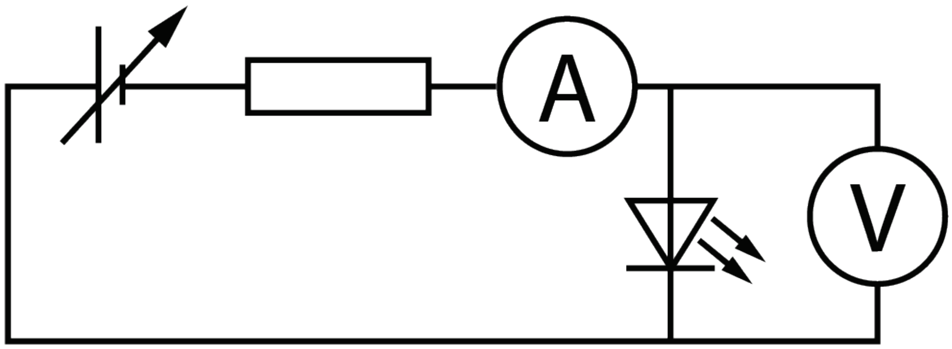
vastuksen resistanssi $R = 76\ \Omega$

a)

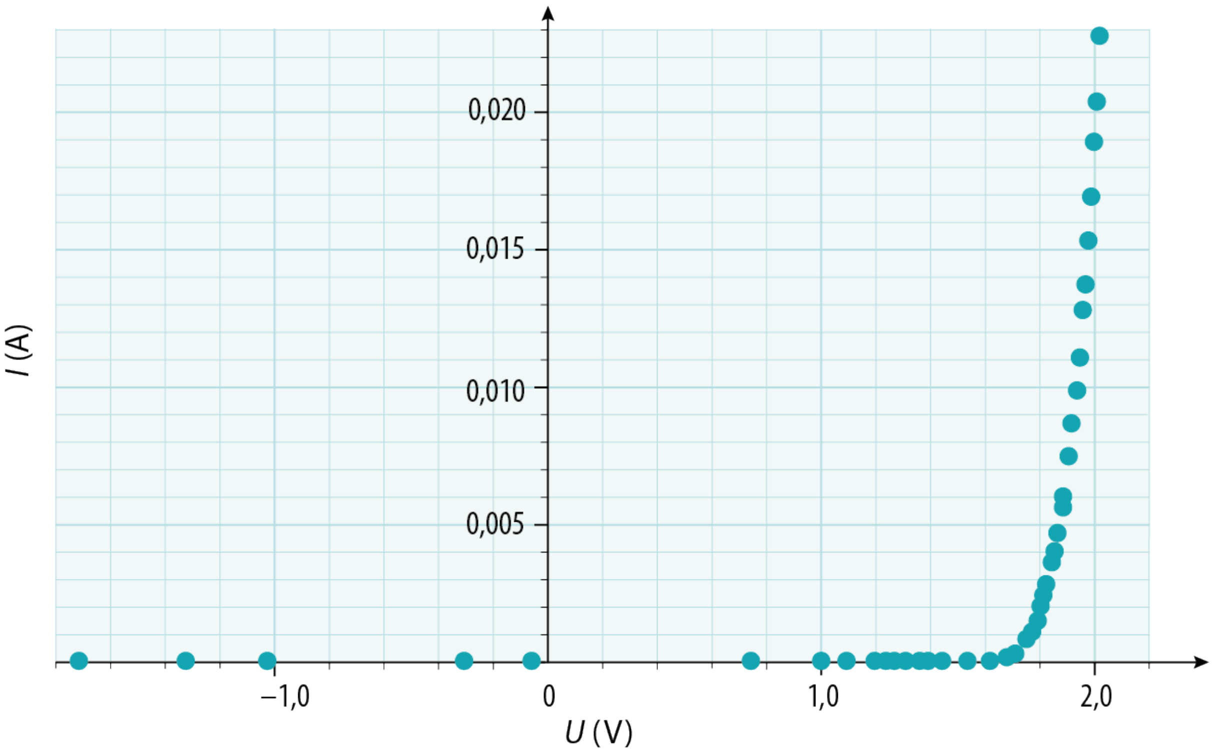
päästösuunta



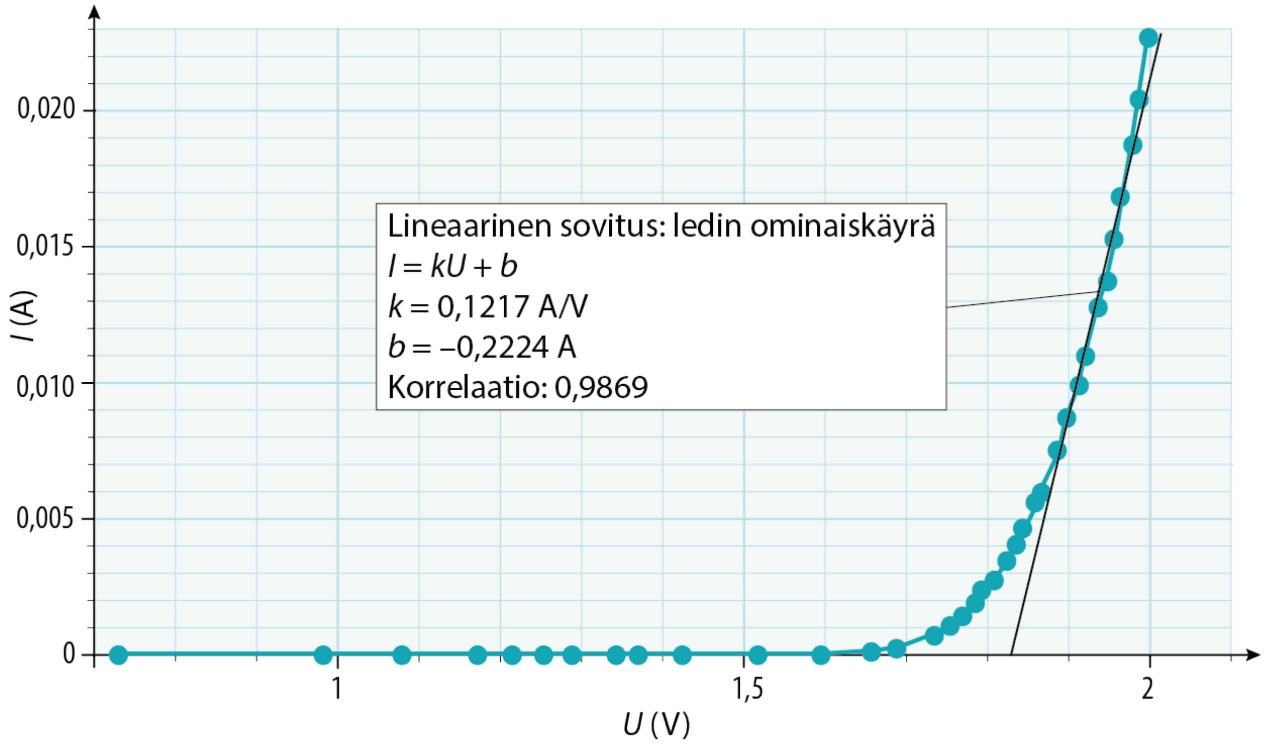
estosuunta



b) Ledin ominaiskäyrällä tarkoitetaan ledin läpi kulkevan sähkövirran riippuvuutta ledin päiden välisestä jännitteestä.



c) Ledin kynnysjännite saadaan sovittamalla ominaiskäyrän nousulle suora ja ekstrapoloimalla sovitetun suoran ja jänniteakselin leikkauskohta.



Ekstrapoloimalla saadaan ledin kynnysjännitteeksi U = 1,83 V.

d) ledin sähkövirta $I = 0{,}017$ A

Virtapiirin komponentit on kytketty sarjaan, jolloin virtapiirissä kulkeva sähkövirta on yhtä suuri kuin ledin läpi kulkeva sähkövirta. Kun ledin läpi kulki 17 mA:n sähkövirta, ledin jännitehäviö oli $U_\mathrm{L} = 1{,}97$ V. Kirchhoffin jännitelain ja Ohmin lain avulla ratkaistaan jännitelähteen jännite

$$U - RI - U_\mathrm{L} = 0$$

$$U = RI + U_L$$

$$U = 76\ \Omega \cdot 0{,}017\ \mathrm{A} + 1{,}97\ \mathrm{V} = 3{,}262\ \mathrm{V} \approx 3{,}3\ \mathrm{V}.$$

Tehtävä 12.21.

ledin jännite U_L = 3,4 V

jännitelähteen jännite U = 12 V

ledien lukumäärä n = 75

a) Led päästää sähkövirtaa lävitseen, kun led on kytketty päästösuuntaan. Sähkövirran tulee kulkea pisteestä A pisteeseen B. Sähkövirta kulkee virtapiirissä plusnavalta miinusnavalle, joten piste A kytketään jännitelähteen positiiviseen napaan.

b) ledin sähköteho P_L = 0,21 W

Lasketaan ledin läpi kulkeva sähkövirta sähkötehon avulla.

$$P_\mathrm{L} = U_\mathrm{L} I_\mathrm{L}$$

$$I_\mathrm{L} = \frac{P_\mathrm{L}}{U_\mathrm{L}} = \frac{0{,}21\ \mathrm{W}}{3{,}4\ \mathrm{V}} (= 0{,}061\,7647\ \mathrm{A}).$$

Koska ledit ja vastus on kytketty sarjaan, niiden läpi kulkee yhtä suuri sähkövirta. Jännitelähteen päiden välinen jännite on yhtä suuri kuin sarjaan kytkettyjen ledien ja vastuksen päiden välinen jännite. Vastuksen jännitehäviö saadaan Ohmin laista. Lasketaan, kuinka suuri vastuksen resistanssin tulee vähintään olla.

$$U = 3U_\mathrm{L} + RI_\mathrm{L} = 3U_\mathrm{L} + R\frac{P_\mathrm{L}}{U_\mathrm{L}}$$

$$R\frac{P_\mathrm{L}}{U_\mathrm{L}} = U - 3U_\mathrm{L}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{U_\mathrm{L}}{P_\mathrm{L}}(U - 3U_\mathrm{L}) = \frac{3{,}4\ \mathrm{V}}{0{,}21\ \mathrm{W}}(12\ \mathrm{V} - 3 \cdot 3{,}4\ \mathrm{V}) \\ &= 29{,}142\,857\ \Omega \approx 29\ \Omega \end{aligned}$$

HUOM! Laskun voi laskea myös välituloksien avulla. Sana *vähintään* pitää olla mainittu vastauksessa.

c) ledien käyttöaika t = 4,5 h = 16 200 s.

Jokainen led vastaanottaa energiaa 0,21 W:n teholla. Nauhan kokonaisteho on kaikkien ledien tehojen summa

$P = 75\ P_L$.

Ledit tarvitsevat energiaa käytön aikana

$$E = Pt = 75 \cdot 0{,}21\ \mathrm{W} \cdot 16\,200\ \mathrm{s} = 255\,150\ \mathrm{J}$$
$$= 0{,}070\,875\ \mathrm{kWh} \approx 0{,}071\ \mathrm{kWh}.$$

Tehtävä 12.22.

akkujen jännite U_1 = 12,8 V

aurinkopaneelin jännite U_2 = 16,5 V

sähkövirta I = 1,8 A

a) PWM-jännitesäädin säätää aurinkopaneelin jännitteen akun jännitteen tasolle. Paneeli lataa tällöin akkua teholla

$P = U_1 I = 12{,}8\ \text{V} \cdot 1{,}8\ \text{A} = 23{,}04\ \text{W} \approx 23\ \text{W}.$

b) Koska MPPT-jännitesäätimellä akuston latausteho on yhtä suuri kuin aurinkopaneelin tuottama teho, niin $P_1 = P_2$. Akkujen latausvirraksi saadaan

$$U_2 I_2 = U_1 I_1$$
$$I_1 = \frac{U_2 I_2}{U_1} = \frac{16{,}5\ \text{V} \cdot 1{,}8\ \text{A}}{12{,}8\ \text{V}} = 2{,}3203\ \text{A} \approx 2{,}3\ \text{A}.$$

c) Paneelien tuottama sähköteho on $P = UI$ eli teho riippuu akustolle syötetystä jännitteestä ja sähkövirrasta. PWM-jännitesäädin pitää paneelin jännitteen aina akuston jännitteen kanssa samana. Jos paneelit kytketään sarjaan, paneeleissa kulkee yhtä suuri sähkövirta ja paneelien kokonaisjännite on paneelien jännitteiden summa. Tämä ei muuta akkujen lataustehoa, sillä PWM-säädin pitää jännitteen samana kuin yhden paneelin tapauksessa ja sähkövirtakin on sama. Jos paneelit kytketään rinnan, pysyy jännite yhden paneelin jännitteen tasolla ja Kirchhoffin virtalain mukaan paneelien tuottama sähkövirta on molempien paneelien sähkövirtojen summa. Tällöin teho on kaksinkertainen yhteen paneeliin verrattuna.

MPPT-jännitesäädin muuttaa akun latausvirtaa, jos jännite kasvaa. Tällöin sekä rinnan, että sarjaan kytketyt paneelit lataavat akkua yhtä suurella sähköteholla. Jos sarjaan kytkettyjen paneelien jännite kaksikertaistuu, MPPT-säädin kaksinkertaistaa akulle syötetyn sähkövirran ja teho on myös kaksinkertainen. Vastaavasti kuin PWM-säätimen rinnankytkettyjen paneelien tapauksessa jännite on sama kuin yhden paneelin jännite, mutta sähkövirta on kaksinkertainen ja teho on tällöin myös kaksinkertainen.

Tehtävä 12.23.

a) Virtapiiri on haarautumaton (jännitemittarin läpi ei kulje sähkövirtaa), joten virtamittarin läpi kulkee yhtä suuri sähkövirta kuin vastuksen R_a läpi. Näin ollen kaikilla nollasta poikkeavilla vastuksen päiden välisen jännitteen U_a ja sähkövirran I arvoilla pätee Ohmin lain mukaisesti

$$U_a = R_a I$$

$$R_a = \frac{U_a}{I}.$$

Kun U_s = 5,00 V, niin

$$R_a = \frac{U_a}{I} = \frac{2{,}62\text{ V}}{0{,}0468\text{ A}} = 55{,}9829\,\Omega \approx 56{,}0\,\Omega.$$

b) Jännitelähde U_s ja paristo U_x on kytketty vastakkaisiin suuntiin. Sähkövirta piirissä lakkaa kulkemasta, kun $U_s - U_x = 0$.

Kokeilemalla havaitaan, että sähkövirta lakkaa, kun $U_s = 1{,}35$ V. Näin ollen pariston lähdejännite $U_x = 1{,}35$ V.

c) Kirchhoffin jännitelain ja Ohmin lain mukaan vastuksen R_b resistanssi on

$$U_s - R_b I - U_x - U_a = 0$$

$$R_b = \frac{U_s - U_x - U_a}{I}.$$

Kun $U_s = 5{,}00$ V, niin

$$R_b = \frac{5{,}00\ \mathrm{V} - 1{,}35\ \mathrm{V} - 2{,}62\ \mathrm{V}}{0{,}0468\ \mathrm{A}} = 22{,}0085\ \Omega \approx 22{,}0\ \Omega.$$

Tehtävä 12.24.

galvanometrin päiden välinen jännite U_G = 52 mV

virtapiirin osan sähkövirta I = 9,4 mA

galvanometrin suurin sähkövirta I_G = 1,0 mA

Galvanometri ja vastus on kytketty rinnan, joten niiden kaikkien päiden välinen jännite on yhtä suuri $U_G = U_R$. Kirchhoffin virtalain mukaan virtapiiriltä tuleva sähkövirta on yhtä suuri kuin galvanometrille ja vastukselle menevä sähkövirta

$I = I_G + I_R$.

Vastuksen kautta kulkeva sähkövirta on $I_R = I - I_G$.

Vastuksen aiheuttaman jännitehäviön mukaan vastuksen resistanssin pitää olla

$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U}{I - I_G} = \frac{52\,\text{mV}}{9{,}4\,\text{mA} - 1{,}0\,\text{mA}} = 6{,}190\,476\,\Omega \approx 6{,}2\,\Omega.$$

Tehtävä 12.25.

jännitteen jakajalle syötetty jännite U_{in} = 24,0 V

vastuksen resistanssi R_1 = 33 Ω

a) ulostulojännite U_{out} = 14,4 V

Tarkastellaan jännitteenjakajan virtapiiriä Kirchhoffin jännitelain perusteella, jolloin piirin potentiaalimuutosten summa on nolla

$U_{\text{in}} - U_{\text{R1}} - U_{\text{out}} = 0.$

Ohmin lain mukaan vastuksen R_1 aiheuttama jännitehäviö on $U_{\text{R1}} = R_1 I$. Saadaan

$U_{\text{in}} - R_1 I - U_{\text{out}} = 0.$

Piirissä kulkeva sähkövirta on

$$I = \frac{U_{\text{in}} - U_{\text{out}}}{R_1} = 0{,}2909\text{ A}.$$

Vastuksen R päiden välinen jännite on $U_{\text{out}} = RI$. Sijoitetaan saatu sähkövirta ja lasketaan vastuksen R resistanssi

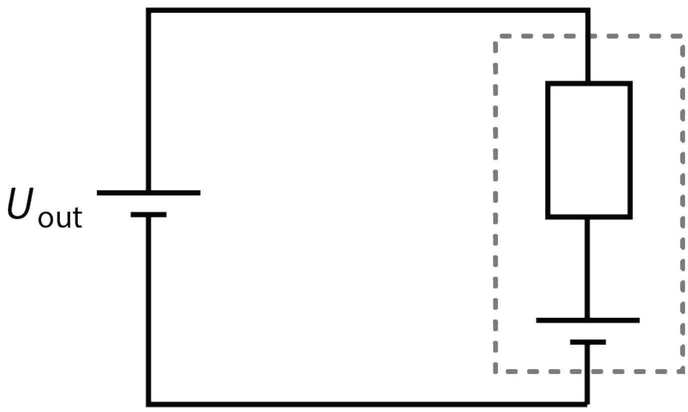
$$R = \frac{U_{\text{out}}}{I} = \frac{U_{\text{out}}}{\frac{U_{\text{in}} - U_{\text{out}}}{R_1}} = \frac{U_{\text{out}} R_1}{U_{\text{in}} - U_{\text{out}}} = \frac{14{,}4\text{ V} \cdot 33\,\Omega}{24{,}0\text{ V} - 14{,}4\text{ V}} = 49{,}5\,\Omega \approx 50\,\Omega.$$

b) akun napajännite E = 12,6 V

akun sisäinen resistanssi R_s = 3,2 Ω

akun latausaika t = 2,5 h

Kun akkua ladataan, akun plusnapa kytketään jännitteenjakajan kohtaan, jossa on korkeampi sähköinen potentiaali. Laaditaan akun lataamisen kytkentäkaavio.



Kirchhoffin jännitelain mukaan virtapiirin potentiaalimuutosten summa on nolla, jonka avulla voidaan määrittää latauskytkennän virtapiirissä kulkeva sähkövirta

$U_{out} - R_s I - E = 0.$

$$I = \frac{U_{out} - E}{R_s} = \frac{14{,}4\ \text{V} - 12{,}6\ \text{V}}{3{,}2\ \Omega} = 0{,}5625\ \text{A}.$$

Akun sähkövaraus kasvoi lataamisen aikana

$$Q = I\Delta t = \frac{U_{out} - E}{R_s}\Delta t = \frac{14{,}4\ \text{V} - 12{,}6\ \text{V}}{3{,}2\ \Omega} \cdot 2{,}5\ \text{h} = 1{,}406\,25\ \text{Ah} \approx 1{,}4\ \text{Ah}.$$

Tehtävä 12.26.

jännitelähteen jännite $U = 12\ \text{V}$

vastuksen resistanssi $R = 2{,}2\ \Omega$

vastuksen resistanssi $R_1 = 4{,}7\ \Omega$

vastuksen R_2 läpi kulkeva sähkövirta $I_2 = 0{,}53\ \text{A}$

a) Sähkövirta haarautuu virtapiirissä vastuksille R_1 ja R_2. Kirchhoffin virtalain mukaan haarautumiskohdassa

$I = I_1 + I_2$.

Vastukset R_1 ja R_2 ovat rinnan kytkettyjä, jolloin niiden aiheuttamat jännitehäviöt ovat yhtä suuret ja Ohmin lain mukaan jännitehäviöille on voimassa

$R_1 I_1 = R_2 I_2$.

Kirchhoffin jännitelain mukaan virtapiirin potentiaalimuutosten summa on nolla, jolloin

$U - RI - R_1 I_1 = 0$.

Ratkaistaan Kirchhoffin virtalaista sähkövirta I_1 ja sijoitetaan se jännitelain yhtälöön

$U - RI - R_1(I - I_2) = 0$.

Sähkövirraksi saadaan

$$U - RI - R_1 I + R_1 I_2 = 0$$
$$U - (R + R_1)I + R_1 I_2 = 0$$
$$(R + R_1)I = U + R_1 I_2$$
$$I = \frac{U + R_1 I_2}{R + R_1} = \frac{12\ \text{V} + 4{,}7\ \Omega \cdot 0{,}53\ \text{A}}{2{,}2\ \Omega + 4{,}7\ \Omega} = 2{,}100\,14\ \text{A} \approx 2{,}1\ \text{A}.$$

b) Määritetään 4,7 Ω vastuksen läpi kulkeva sähkövirta Kirchhoffin virtalaista 12.1. kohdan tulosta hyödyntäen $I_1 = I - I_2 = 2{,}10014\ \text{A} - 0{,}53\ \text{A} = 1{,}570\ 14\ \text{A}$.

Vastukset R_1 ja R_2 ovat rinnan kytkettyjä, jolloin niiden aiheuttamat jännitehäviöt ovat yhtä suuret. Ohmin lain mukaan jännitehäviöille on voimassa

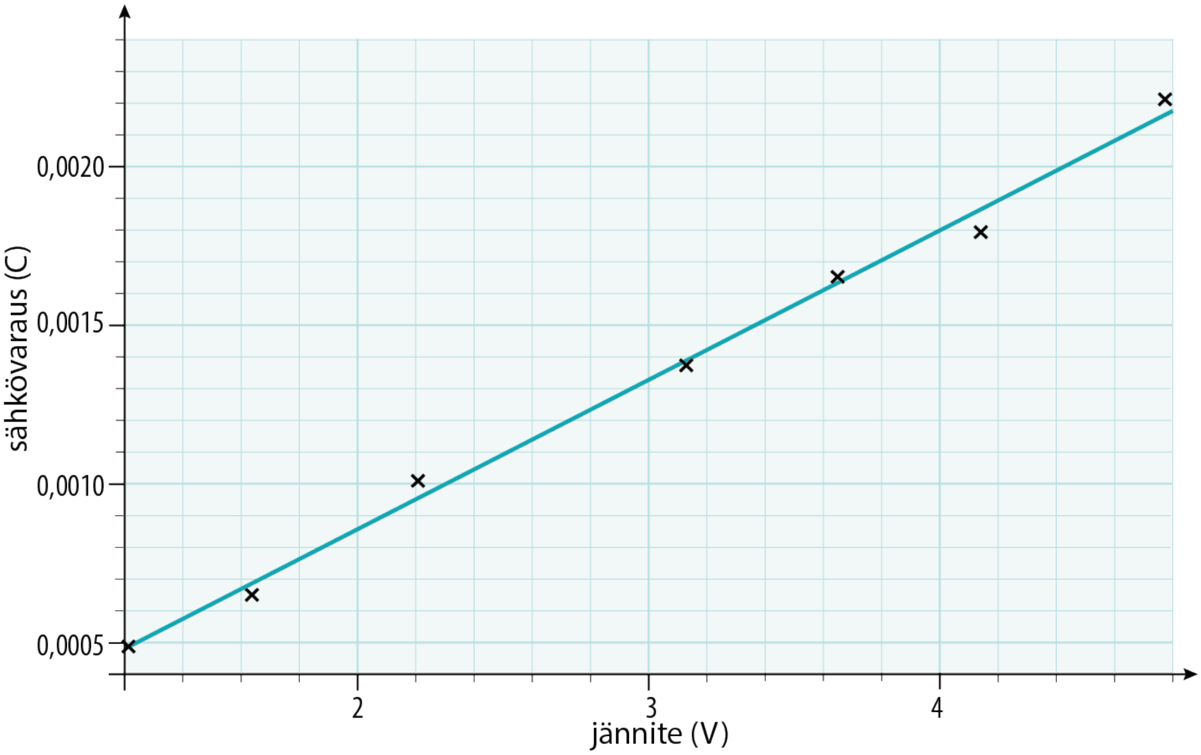
$R_1 I_1 = R_2 I_2$.

Vastuksen R_2 resistanssi on

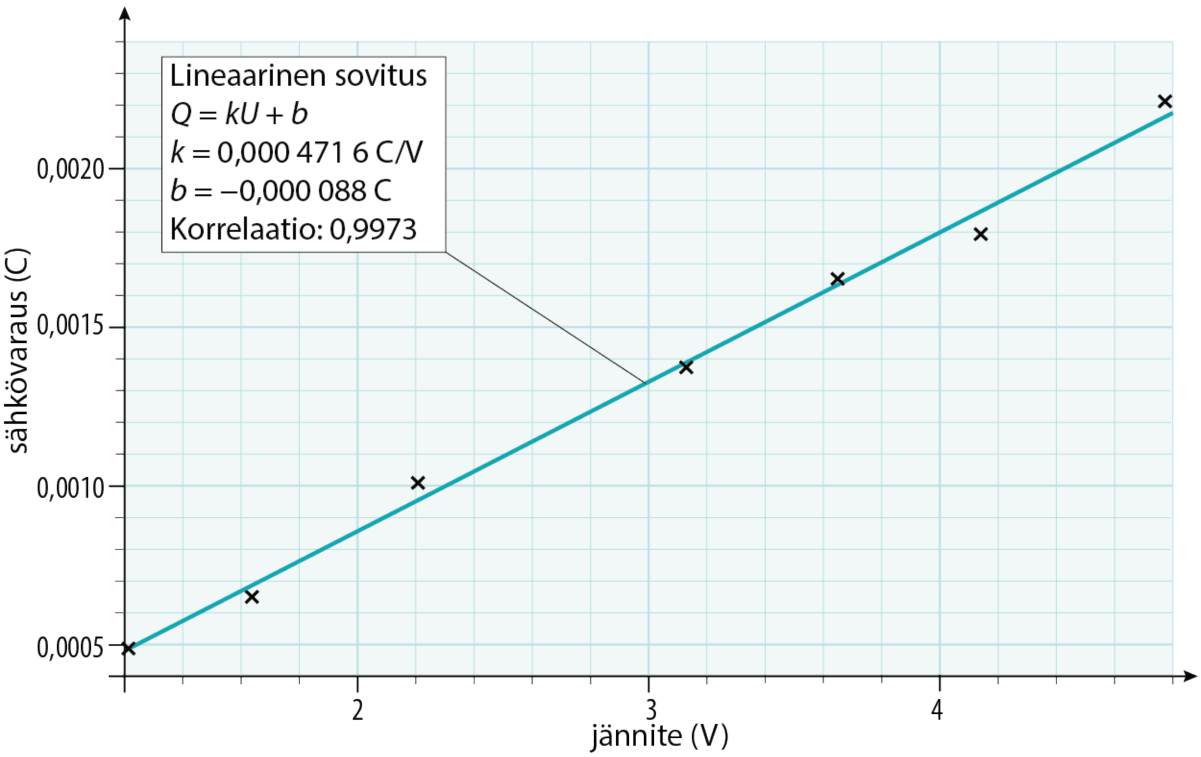
$$R_2 = \frac{R_1 I_1}{I_2} = \frac{4{,}7\ \Omega \cdot 1{,}570\,14\ \text{A}}{0{,}53\ \text{A}} = 13{,}9239\ \Omega \approx 14\ \Omega.$$

Tehtävä 12.27.

a)



b) Kondensaattorin sähkövaraus Q on suoraan verrannollinen latausjännitteeseen U eli $Q = CU$. Kun mittaustulokset esitetään (U, Q)-koordinaatistossa, kuvaaja on suora, jonka fysikaalinen kulmakerroin on kondensaattorin kapasitanssi.



Kondensaattorin kapasitanssi on
C = 0,000 4716 F ≈ 470 µF.

Tehtävä 12.28.

aurinkokennon jännite $U = 3{,}9\ \mathrm{V}$

a) Aurinkopaneelissa on 60 aurinkokennoa kytketty sarjaan. Aurinkopaneelin jännite on

$U_\mathrm{p} = 60U = 60 \cdot 3{,}9\ \mathrm{V} = 234\ \mathrm{V} \approx 230\ \mathrm{V}.$

b) Kun lehti putoaa kuvan mukaisesti paneelin päälle, ohitusdiodi on käytössä ja yhdessä paneelin 20 sarjaan kytketyn aurinkokennon osassa ei kulje sähkövirta ja se osa ei vaikuta paneelin jännitteeseen ja sähkövirtaan. Tällöin paneelin jännitteen ja sähkövirran tuottaa 40 sarjaan kytkettyä aurinkokennoa. Kennon jännite pienenee. Paneelin tuottama jännite on

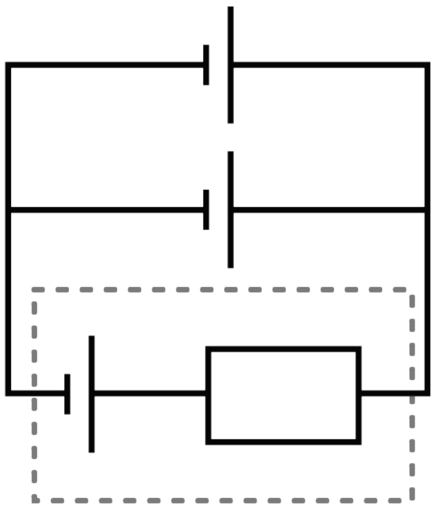
$U_\mathrm{p} = 40U = 40 \cdot 3{,}9\ \mathrm{V} = 156\ \mathrm{V} \approx 160\ \mathrm{V}.$

c) akun jännite mittarilla mitattuna U = 11,4 V

aurinkopaneelien jännite U_p = 16,8 V

akun sisäinen resistanssi R = 3,8 Ω

Laaditaan kytkentäkaavio



Kun akun jännite mitattiin yleismittarilla ennen kuin akku oli kytketty kiinni paneeleihin, kyseessä on akun lähdejännite.

Koska aurinkopaneelit on kytketty rinnan, paneelien päiden välinen jännite on sama. Kirchhoffin jännitelain mukaan virtapiirin potentiaalimuutosten summa on nolla, jolloin

$U - U_R - U = 0.$

Sisäisen resistanssin aiheuttama potentiaalin pieneneminen saadaan Ohmin lain avulla, jolloin $U_R = RI$. Tällöin virtapiirissä kulkeva sähkövirta on

$$I = \frac{U_p - U}{R}.$$

Paneelit tuottivat akulle energiaa teholla

$$P = 2P_p = 2U_p I = 2U_p \frac{U_p - U}{R} = 2 \cdot 16{,}8\text{ V} \cdot \frac{16{,}8\text{ V} - 11{,}4\text{ V}}{3{,}8\,\Omega} = 47{,}747\,3684\text{ W} \approx 48\text{ W}.$$

Tehtävä 12.29.

a) Piiri 1: Kahden rinnankytketyn lampun yhteinen resistanssi on pienempi kuin yksittäisen hehkulampun resistanssi. Virtapiirin resistanssi kasvaa, kun lampun P hehkulanka palaa poikki. Tällöin pariston lähdejännitteen pysyessä yhtä suurena virtapiirissä kulkeva sähkövirta pienenee.

   Piiri 2: Sarjakytkennässä lampun P hehkulangan katketessa virtapiiri katkeaa. Tällöin sähkövirta lakkaa kulkemasta virtapiirissä.

b) Piiri 1: Rinnankytkennässä polttimon Q napajännite on pariston napajännitteen suuruinen: $U = E - R_s I$. Lampun P hehkulangan palaessa poikki napajännite kasvaa, koska sähkövirran pienetessä pariston sisäinen jännitehäviö pienenee.

   Piiri 2: Sarjakytkennässä lampun Q napajännite pienenee nollaan volttiin, kun lampun P hehkulanka katkeaa ja sähkövirran lakkaa kulkemasta virtapiirissä.

c) Piiri 1: Paristosta otettu teho on $P = EI$, jossa E on pariston lähdejännite ja I on virtapiirin sähkövirta pariston kohdalla. Lampun P hehkulangan palaessa poikki pariston teho pienenee, koska sähkövirta pienenee.

   Piiri 2: Koska virtapiirissä ei kulje sähkövirtaa, pariston teho $P = 0$ W.

Tehtävä 12.30.

akun lähdejännite $E = 12$ V

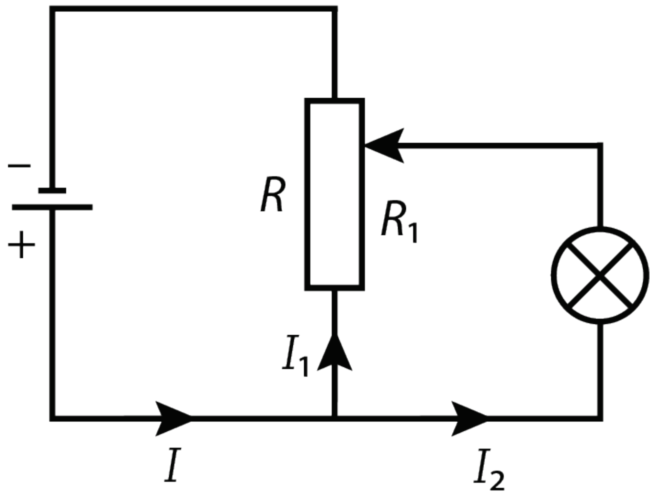
lampun napojen välinen jännite $U = 4{,}5$ V

säätövastuksen kokonaisresistanssi $R = 32\ \Omega$

säätövastuksen alemman osan resistanssi $R_1 = 28\ \Omega$

Koska säätövastuksen kokonaisresistanssi on vastuksen osien resistanssien summa, säätövastuksen ylemmän osan resistanssi on $R_2 = (32 - 28)\ \Omega = 4{,}0\ \Omega$.

Merkitään kytkentäkaavioon sähkövirrat I, I_1 ja I_2 sekä sähkövirtojen suunnat.



Lampun teho on $P_L = UI_2$ ja akusta otettu teho on $P_A = EI$.

Selvitetään virtapiirissä kulkevat sähkövirrat.

Lamppu ja vastuksen alempi osa on kytketty rinnan, joten niiden päiden yli on yhtä suuri jännite U. Vastuksen alemman osan päiden välinen jännite on Ohmin lain perusteella $U = R_1 I_1$, joten sähkövirta säätövastuksen alemmassa osassa on $I_1 = \dfrac{U}{R_1} = \dfrac{4{,}5\ \text{V}}{28\ \Omega} = 0{,}1607\ \text{A}$.

Kirchhoffin jännitelain $\Sigma \Delta V = 0$ mukaan $E - R_1 I_1 - R_2 I = 0$, josta $I = \dfrac{E - R_1 I_1}{R_2} = 1{,}875\ \text{A}$.

Kirchhoffin virtalain mukaan $I = I_1 + I_2$, joten
$I_2 = I - I_1 = 1{,}875\ \text{A} - 0{,}1607\ \text{A} = 1{,}7143\ \text{A}$.

Lampun tehon suhde akusta otettuun tehoon on

$$\frac{P_\text{L}}{P_\text{A}} \cdot 100\,\% = \frac{UI_2}{EI} \cdot 100\ \% = \frac{4{,}5\ \text{V} \cdot 1{,}7143\ \text{A}}{12\ \text{V} \cdot 1{,}875\ \text{A}} \cdot 100\ \% = 34\ \%.$$

Tehtävä 12.31.

a) Oletetaan, että varatun levykondensaattorin sähkökenttä on levyjen välissä homogeeninen ja häviävän pieni muualla. Kondensaattori irrotetaan varaamisen jälkeen jännitelähteestä, joten kondensaattorilevyillä oleva sähkövaraus ei muutu.

Ilmarakoon sijoitettu väliainelevy ei muuta sähkökentän suuntaa.

Sähkökentän voimakkuus ei muutu jäljelle jäävässä ilmaraossa.

i) Eristeen sisällä eristeen polarisoitumisen vuoksi sähkökentän voimakkuus heikkenee.

Jos ulkopuolisen sähkökentän voimakkuus on E_u, niin sähkökentän voimakkuus eristeessä on

$E_\mathrm{e} = \dfrac{E_\mathrm{u}}{\varepsilon_\mathrm{r}}$, missä ε_r on eristeen suhteellinen permittiivisyys.

ii) Johteessa sähkövarausten polarisaation takia sähkökentän voimakkuus on nolla.

b) Kondensaattorin sähkövaraus voidaan määrittää kapasitanssin ja jännitteen tulona. Ratkaistaan kondensaattorin kapasitanssi yhtälöstä

$$Q = CU$$

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Sähkökentän voimakkuus levyjen välissä

$E = \frac{U}{d}$, missä d on tarkastelupaikkojen välimatka sähkökentän suuntaisesti.

ratkaistaan levyjen välinen jännite.

$$U = Ed.$$

i) Eristelevyn tapauksessa sähkökenttä on ilmaraossa muuttumaton. Eristeessä sähkökentän voimakkuuden suuruus on pienempi kuin ilmaraossa.

Lasketaan levyjen välinen jännite. Eristeosan ja ilmaraon yli olevat jännitteet:

$U_1 + U_2 = E\frac{d}{2} + \frac{E}{\varepsilon_r}\frac{d}{2} = Ed\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_r}\right) = Ed\left(\frac{\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r}\right) < Ed$, koska $\varepsilon_r > 1$

Levyjen välinen jännite siis pienenee. Koska levyjen sähkövaraus ei muutu, kondensaattorin kapasitanssi kasvaa.

ii) Johdelevyn tapauksessa johteen sisällä sähkökentän voimakkuus on nolla. Sähkökentän voimakkuus on kuitenkin alkuperäisen suuruinen ilmaraossa, jonka paksuus on puolet levyjen välimatkasta. Näin ollen kondensaattorin jännite on puolet alkuperäisestä.

$$Q = CU$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

Levyjen sähkövaraus ei muutu. Koska levyjen välinen jännite puolittuu, kondensaattorin kapasitanssi kaksinkertaistuu.

Tehtävä 12.32.

käämin läpi kulkeva sähkövirta $I_K = 0{,}10$ mA

käämin resistanssi $R_K = 360\ \Omega$

a) Suurin mitattava sähkövirta $I = 100$ mA. Vastus kytketään rinnan mittarin käämin kanssa. Kirchhoffin virtalain mukaan on voimassa

$I = I_K + I_R$, missä I_R on vastuksen läpi kulkeva sähkövirta. Vastuksen läpi kulkevaksi sähkövirraksi saadaan

$$I_R = I - I_K.$$

Käämin päiden välinen jännite Ohmin lain mukaan $U_K = R_K I_K$. Koska vastus on kytketty rinnan käämin kanssa, vastuksen päiden välinen jännite on yhtä suuri kuin käämin päiden välinen jännite eli $U_R = U_K$. Vastuksen resistanssi on

$$RI_R = R_K I_K$$

$$R = \frac{R_K I_K}{I_R} = \frac{R_K I_K}{I - I_K} = \frac{360\ \Omega \cdot 0{,}10 \cdot 10^{-3}\ \text{A}}{100 \cdot 10^{-3}\ \text{A} - 0{,}10 \cdot 10^{-3}\ \text{A}} = 0{,}360\,36\ \Omega \approx 0{,}36\ \Omega.$$

b) Suurin mitattava jännite U = 1,0 V. Vastus kytketään mittarin käämin kanssa sarjaan. Kirchhoffin jännitelain mukaan käämin ja vastuksen päiden välisten jännitteiden summa on yhtä suuri kuin mitattava jännite eli

$U = U_K + U_R$.

Mittarin käämi ja vastus on kytketty sarjaan, joten niiden läpi kulkee yhtä suuri sähkövirta I_K Ohmin lain mukaan

$U_K = R_K I_K$ ja $U_R = R I_K$.

Ratkaistaan vastuksen suuruus

$$U = R_K I_K + R I_K$$

$$R = \frac{U - R_K I_K}{I_K} = \frac{1{,}0\ \mathrm{V} - 360\ \Omega \cdot 0{,}10 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}}{0{,}10 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}} = 9\,640\ \Omega \approx 9{,}6\ \mathrm{k}\Omega.$$

Tehtävä 12.33.

a) Sähkövirran suunta on jännitelähteestä kohti pistettä A eli suuremmasta potentiaalista pienempään potentiaaliin. Pisteen C ja jännitelähteen välillä sähkövirran suunta on edelleen kohti pienempää potentiaalia eli kohti jännitelähdettä. Nämä sähkövirrat ovat yhtä suuret, koska molemmissa tapauksissa on kyse osasata saman virtapiirin haarautumatonta osaa.

b) Kun pisteiden B ja D välillä ei ole sähkövirtaa, jännite niiden välillä on nolla, sillä pisteiden välillä ei ole potentiaalieroa.

c) Sähkövirta jakautuu pisteessä A vastuksen R_1 ja vastuksen R_2 kautta kulkevaan virtapiiriin osaan. Sähkövirta I_1 kulkee vastuksen R_1 läpi ja sähkövirta I_2 kulkee vastuksen R_2 läpi. Sähkövirta I_1 jatkaa säätövastuksen R_3 läpi ja sähkövirta I_2 tuntemattoman vastuksen R_x läpi, koska pisteiden B ja D välillä ei kulje sähkövirtaa.

Koska pisteillä B ja D on sama potentiaali, jännitteet U_{AB} ja U_{AD} ovat yhtä suuret. Ohmin lain mukaan pätee

$R_1 I_1 = R_2 I_2$.

Vastaavasti jännitteet U_{BC} ja U_{DC} ovat yhtä suuret. Ohmin lain mukaan pätee

$R_3 I_1 = R_x I_2$.

Jaetaan yhtälöt keskenään ja saadaan

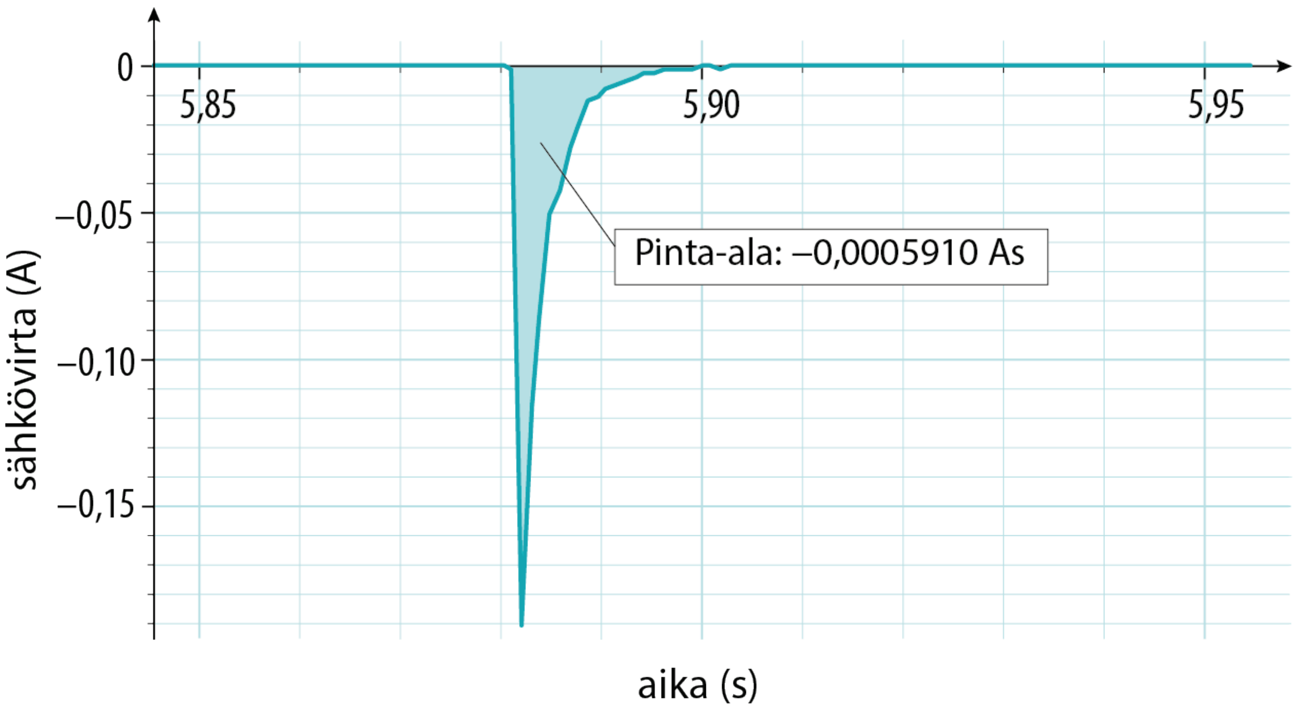
$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_x}.$$

Tuntemattoman vastuksen resistanssi on

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1}.$$

Tehtävä 12.34.

a) Kondensaattorin sähkövaraus Q saadaan määritettyä purkausvirran kuvaajan ja aika-akselin rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alan suuruudesta. Määritetään kondensaattorin sähkövaraus.



Kondensaattorin sähkövaraus Q = 0,000 5910 C.

Mittauksen perusteella kondensaattorin päiden välinen jännite purkuhetkellä oli U = 4,22 V.

Kondensaattorin kapasitanssi

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{0{,}0005910\,\text{C}}{4{,}22\,\text{V}} = 1{,}400\,47 \cdot 10^{-4}\,\text{F} \approx 140\,\mu\text{F}.$$

b) Kondensaattorin latausjännite ei muutu ja vastuksen resistanssi on sama. Koska latausjännite ja vastuksen resistanssi ei muutu, kondensaattorin purkausvirran suurin arvo pysyy samana, jolloin purkutilanteessa sähkövirran suurin arvo olisi sama kuin alkuperäisessä mittauksessa.

Kun kondensaattorin kapasitanssi kasvaa, kondensaattorin sähkövaraus kasvaa. Koska sähkövirran suurin arvo on sama, kondensaattorin purkautuminen kestää kauemmin kuin alkuperäisessä mittauksessa ja piikki levenee.

c) pariston lähdejännite E = 4,52 V

pariston sisäinen resistanssi R_s = 1,6 Ω

vastauksen resistanssi R = 33 Ω

Kun kondensaattori on täysin latautunut, kondensaattorille ei kulje sähkövirtaa, vaan kaikki sähkövirta kulkee vastuksen kautta.

Kirchhoffin jännitelain mukaan virtapiirin potentiaalimuutosten summa on nolla. Vastusten aiheuttamat jännitehäviöt saadaan Ohmin lain mukaan. Tällöin

$$E - R_s I - RI = 0.$$

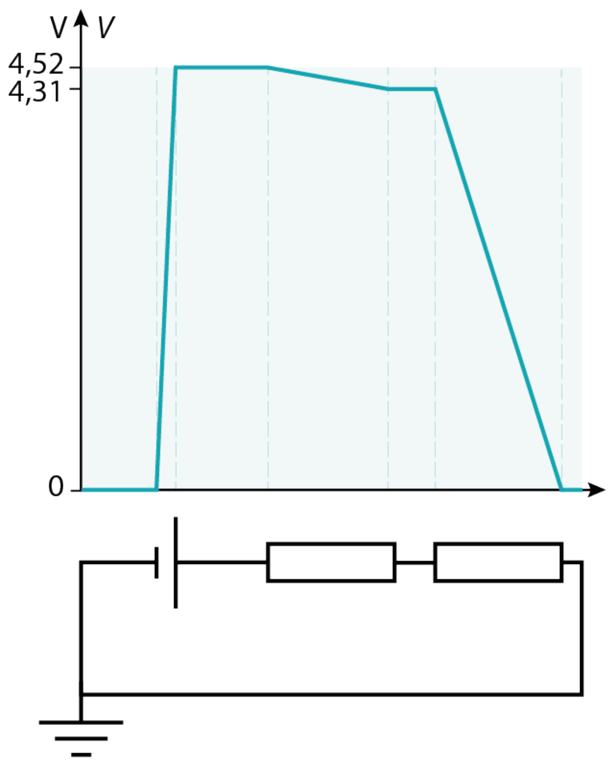
Virtapiirin sähkövirta on

$$I = \frac{E}{R_s - R} = \frac{4{,}52\ \text{V}}{1{,}6\ \Omega + 33\ \Omega} = 0{,}130\,6358\ \text{A}.$$

Sisäisen resistanssi aiheuttama potentiaalin pieneneminen on

$U_{Rs} = R_s I$ = 1,6 Ω · 0,1306358 A = 0,2090 V ≈ 0,21 V.

Vastuksen jälkeen potentiaali on nolla.



d) Jännitemittari näyttää pariston napajännitettä. Kun kytkin on kiinni, kondensaattori on latautunut ja vastuksen läpi kulkee sähkövirtaa. Tällöin sisäinen resistanssi aiheuttaa potentiaalin laskun (jännitehäviön) ja napajännite on pienempi kuin lähdejännite. Kun kytkin avataan, kondensaattori latautuu vielä vähän ja lopulta piirissä ei kulje sähkövirtaa. Tällöin jännitemittari näyttää lähdejännitettä. Jännitemittarin lukema siis kasvaa.

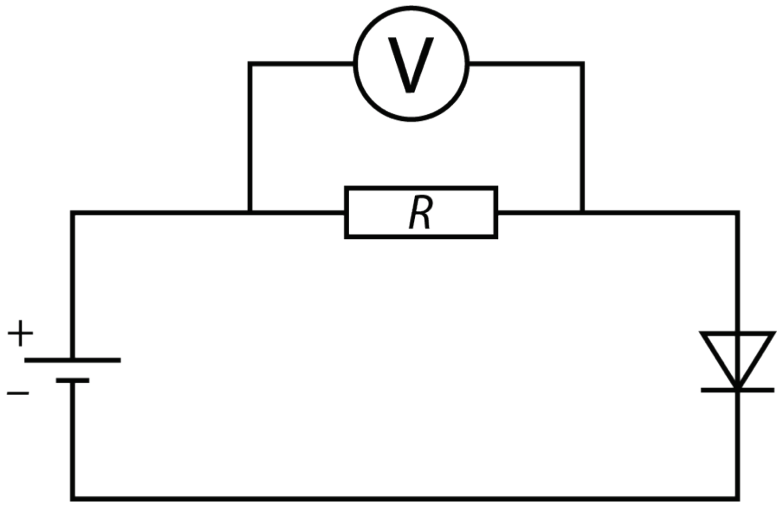
Syvennä

Tehtävä 12.35.

a) Diodi päästää lävitseen sähkövirtaa päästösuuntaan, kun diodin päiden välinen jännite on suurempi kuin diodille ominainen kynnysjännite. Jos diodi on kytketty estosuuntaan, ideaalinen diodi ei päästä sähkövirtaa lävitseen. Päästösuuntaan kytketyssä ideaalisessa diodissa jännitehäviö on kynnysjännitteen suuruinen, mikäli diodin läpi kulkee sähkövirtaa. Diodeja käytetään esimerkiksi jännitteen tasasuuntaukseen (Zener-diodeja referenssijännitteen luomiseen) ja ledejä merkkivaloina tai valaistuksessa.

b) Diodin ominaiskäyrä on diodin läpi kulkeva sähkövirta diodin jännitehäviön funktiona. Ominaiskäyrän mittauksessa pitää mitata diodin päiden välisiä jännitteitä vastaavia sähkövirtojen arvoja.

Rakennetaan kuvan mukainen virtapiiri, jossa on jännitelähde (jännite U), vastus (resistanssi R) ja diodi. Jännitemittarilla mitataan vastuksen jännitehäviö (mitattu jännite U_R), jotta saadaan määritettyä virtapiirin sähkövirta. Oletetaan, että jännitelähteen jännitettä ei tarvitse mitata. Jännitelähteen napajännitteen voisi tarvittaessa mitata kytkemällä jännitemittari jännitelähteen rinnalle.



Kuvassa diodi on kytkettynä päästösuuntaan. Mitataan sähkövirta eri jännitteen arvoilla väliltä 0 V – 5 V. Kytketään diodi estosuuntaan ja toistetaan mittaukset.

Koska jännitelähde, vastus ja diodi on kytketty sarjaan, näiden komponenttien läpi kulkee yhtä suuri sähkövirta. Virtapiirissä kulkeva sähkövirta saadaan Ohmin lain perusteella

$$I = \frac{U_R}{R}.$$

Diodin aiheuttama jännitehäviö on $U_D = U - U_R$. Estosuunnan kytkennässä jännitehäviöt merkitään negatiivisina. Esitetään saadut arvot taulukkona ja laaditaan (U_D, I)-kuvaaja.

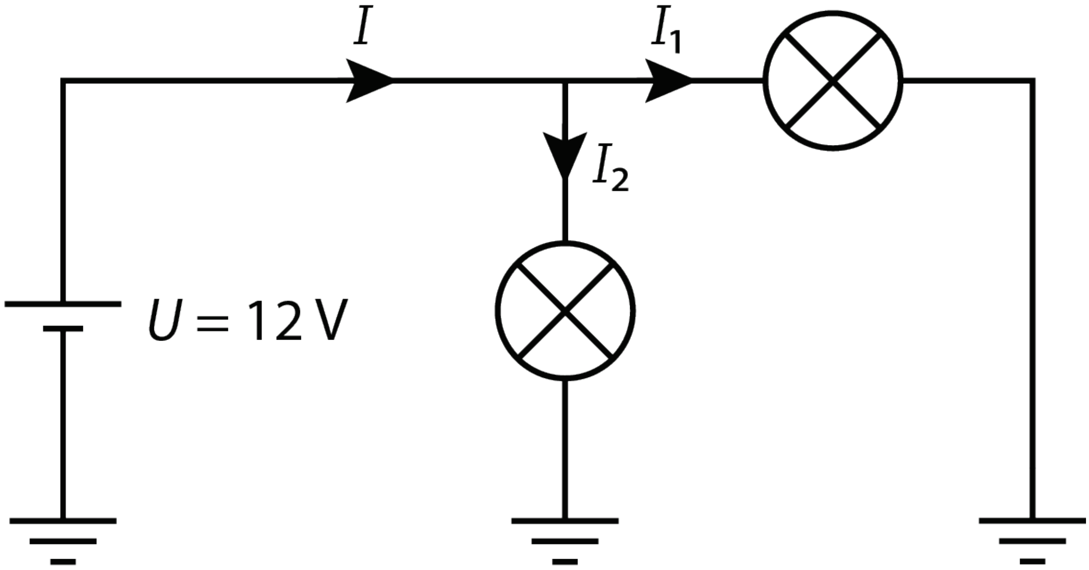
Ennakoitu tulos: Kun diodi on kytketty estosuuntaan, ominaiskäyrässä sähkövirta on lähes nolla, vaikka jännitelähteen jännitettä muutetaan. Kun diodi on kytkettynä päästösuuntaan, diodin läpi kulkeva sähkövirta on lähes nolla diodin kynnysjännitettä pienemmillä jännitteen arvoilla. Kun diodin päiden välinen jännite ylittää kynnysjännitteen, diodin läpi kulkeva sähkövirta kasvaa hyvin voimakkaasti jännitteen kasvaessa.

Tehtävä 12.36.

a) Sähkölaitteen suojamaadoituksessa laitteen runko kytketään suojamaadoitusjohtimeen, joka on kytketty maahan. Näin laitteen rungon ja maan välinen potentiaaliero eli jännite pysyy pienenä myös silloin, kun laite vikaantuu ja sen runko tulee jännitteiseksi. Jos suojamaadoitettu laite vikaantuu ja rikkinäinen johdin osuu laitteen runkoon, sähkövirta kulkee suojajohdinta pitkin maahan eikä ole vaaraksi laitteen käyttäjälle.

b) Maadoitetun laitteen runko on kytketty maahan. Maan potentiaali on 0 V, joten maadoitetun laitteen rungon potentiaali on sama kuin maan potentiaali eli 0 V.

c)



Jännitelähteestä eli akusta lähtee johdin, joka haarautuu ennen lamppuja. Lamput on kytketty rinnan. Molemmat lamput sekä akun miinusnapa on maadoitettu.

d) auton polttimon teho P = 4 W

polttimon jännitehäviö U = 12 V

polttimon sähköteho Joulen lain mukaan on $P_L = U_L I_L$. Lampun läpi kulkeva sähkövirta on

$$I_L = \frac{P_L}{U_L} = \frac{4\ \text{W}}{12\ \text{V}} = 0{,}3333\ \text{A}.$$

Koska auton polttimot ovat samanlaisia, kulkee polttimoihin yhtä suuret sähkövirrat eli $I_1 = I_2$.

Kirchhoffin virtalain mukaan sähkövirroille

$$I = I_1 + I_2 = 2I_L = \frac{2P_L}{U_L} = \frac{2 \cdot 4\ \text{W}}{12\ \text{V}} = 0{,}6666\ \text{A} \approx 0{,}7\ \text{A}.$$

e) Kun akusta lähtevä sähköjohto haaroitetaan, lamput on kytketty rinnan. Jos toinen lampuista menee rikki, toiselle lampulle kulkee edelleen sähkövirtaa. Jos johdin kytkettäisiin toisesta lampusta toiseen, lamput olisi kytketty sarjaan. Tällöin toisen lampun hajoaminen avaisi virtapiirin eikä sähkövirta pääsisi toiseen lamppuun. Tämä aiheuttaisi myös toisen lampun sammumisen ja vaikuttaisi liikenneturvallisuuteen.

Tehtävä 12.37.

a) Diodissa on kaksi elektrodia ja transistorissa on kolme elektrodia.

b) Ohmin lain mukaisesti $I = \frac{U}{R}$, jossa I on komponentin läpi kulkeva sähkövirta, U on komponentin päiden välinen jännite ja R on komponentin resistanssi. Jos komponentti noudattaa Ohmin lakia, komponentin läpi kulkeva sähkövirta on suoraan verrannollinen komponentin päiden väliseen jännitteeseen.

Kuvan 2 perusteella voidaan todeta, että jännite U_{GS} vaikuttaa transistorin sähkövirtaan I_{DS} ja jännitteeseen U_{DS}. Kun mitataan transistorin I_{DS}-sähkövirtaa jännitteen U_{DS} funktiona, sähkövirta I_{DS} kasvaa aluksi lineaarisesti jännitteen U_{DS} funktiona, mutta kun jännite U_{DS} suurenee, sähkövirran kasvu pienenee. Sanotaan, että virta saturoituu. Toisin sanoen mittauksista saadut tulokset eivät noudata Ohmin lakia.

c) Kun U_{DS} = 15 V, elektrodien D ja S välinen jännitehäviö on yhtä suuri kuin ulkoisen jännitelähteen jännite. Tämä tarkoittaa sitä, että piirin ulkoisen vastuksen ($R = 1{,}0 \cdot 10^3\ \Omega$) aiheuttama jännitehäviö on nolla. Tällöin piirissä sähkövirta on nolla. Toisin sanoen D- ja S-elektrodien välinen resistanssi on äärettömän suuri.

d) Transistorin kytkintoiminto perustuu siihen, että U_{GS}-jännitteen muutos aiheuttaa I_{DS}-sähkövirran muutoksen. Jotta transistoria voidaan käyttää kytkimenä, tilanteessa D- ja S- elektrodien välille on kytketty 5,0 V:n suuruinen jännite. Käyrästön perusteella havaitaan, että kun jännite U_{GS} = 0 V ja jännite U_{DS} = 5,0 V, sähkövirta I_{DS} on noin 2,0 mA. Kun hilajännite nostetaan lukemaan U_{GS} = 0,50 V, sähkövirta I_{DS} kasvaa arvoon 10,0 mA. Transistoria voidaan siis käyttää kytkimenä muuttamalla U_{GS}-jännitettä esimerkiksi välillä 0 V – 0,5 V.

e) G-elektrodille kytketyn tasajännitelähteen jännite $U_1 = 5{,}0\ \text{V}$

vaihtojännitesignaalin amplitudi $\Delta U_{AC} = 0{,}05\ \text{V}$

transistorin vahvistuskerroin $h = 6{,}0$

Koska U_{GS}-tasajännite on 0,50 V, kuormitussuoran ja U_{GS}-käyrän leikkauspisteessä $U_{DS} = 5{,}0\ \text{V}$. Antennipiiri aiheuttaa vaihtojännitesignaalin, jonka amplitudi on 0,05 V, eli U_{GS} vaihtelee 0,45 V:n ja 0,55 V:n välillä. Näin ollen $\Delta U_{GS} = 0{,}10\ \text{V}$. Kun transistorin vahvistuskerroin $h = 6{,}0$, aineiston perusteella
$\Delta U_{DS} = h \cdot \Delta U_{GS} = 6{,}0 \cdot 0{,}10\ \text{V} = 0{,}60\ \text{V}$.
Koska D- ja S- elektrodien välille on kytketty 5,0 V:n suuruinen jännite, jännite U_{DS} vaihtelee jaksollisesti välillä 4,70 V – 5,30 V.

Transistori vahvistaa pienen vaihtojännitesignaalin. Muutos jännitteessä U_{GS} aiheuttaa piirissä U_{DS}-jännitteen vaihtelun, joka on itseisarvoltaan suurempi kuin U_{GS}-jännitteen amplitudi.

13 Magneettikenttä ja varattu hiukkanen

Harjoittele

Tehtävä 13.1.

Oikeat vastaukset:

a) A

b) B

c) A

d) A

e) D

f) C

g) A

h) A

i) C

j) C

Tehtävä 13.2.

a) Sauvamagneetin ulkopuolella magneettikentän kenttäviivojen suunta on magneetin pohjoiskohtiolta kohti eteläkohtiota, joten magneettikentän suunta on pisteessä P oikealle.

b) Käämin oikean käden säännön perusteella magneettikentän suunta on kuvassa oikealle.

Tehtävä 13.3.

a) Suoran virtajohtimen oikean käden säännön mukaan pisteessä P magneettikentän suunta on katsojasta poispäin.

b) sähkövirran suuruus I = 330 mA = 0,33 A

magneettikentässä olevan johtimen osan pituus
l = 52 cm = 0,52 m

magneettivuon tiheys B = 0,20 T = 0,20 T

Kun suora johdin on kohtisuorassa ulkoisen magneettikentän suuntaa vastaan, johtimeen vaikuttava magneettinen voima on

$F_B = IlB = 0{,}33\ \text{A} \cdot 0{,}52\ \text{m} \cdot 0{,}20\ \text{T} = 0{,}03432\ \text{N} \approx 34\ \text{mN}.$

Voiman suunta on oikean käden säännön perusteella kuvassa vasemmalle.

Tehtävä 13.4.

mittarin etäisyys virtajohtimesta r

magneettivuon tiheys etäisyydellä r: B_1 = 23,2 µT

magneettivuon tiheys virralla I_2: B_2 = 35 µT

magneettivakio $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$.

a) Magneettivuon tiheys etäisyydellä r noudattaa lakia

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I.$$

Lasketaan virtajohtimen etäisyys mittarista.

$$r = \frac{\mu_0}{2\pi B_1} I_1 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}{2\pi \cdot 23{,}2\ \mu\text{T}} \cdot 10\ \text{A} = 0{,}086\,207\ \text{m} \approx 8{,}6\ \text{cm}.$$

b) Lasketaan sähkövirta, jolla magneettivuon tiheys on 35 µT.

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$$

$$I_2 = \frac{B_2}{\frac{\mu_0}{2\pi r}} = \frac{2\pi r B_2}{\mu_0} = \frac{2\pi \frac{\mu_0}{2\pi B_1} I_1 B_2}{\mu_0} = \frac{I_1 B_2}{B_1} = \frac{10\ \text{A} \cdot 35\ \mu\text{T}}{23{,}2\ \mu\text{T}} = 15{,}0862\ \text{A} \approx 15\ \text{A}$$

Tehtävä 13.5.

a) vasemmanpuoleisessa johtimessa kulkeva sähkövirta I_1 = 1,0 A

oikeanpuoleisessa johtimessa kulkeva sähkövirta I_2 = 2,0 A

johdinten välinen etäisyys r = 10,0 cm = 0,100 m

tarkasteltu johtimen pituus l = 0,94 m

tyhjiön permeabiliteetti $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \dfrac{\text{Vs}}{\text{Am}}$

Voiman suuruus on

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r} l = \frac{4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}{2\cancel{\pi}} \cdot \frac{1{,}0\ \text{A} \cdot 2{,}0\ \text{A}}{0{,}100\ \text{m}} \cdot 0{,}94\ \text{m} = 3{,}76 \cdot 10^{-6}\ \text{N} \approx 3{,}8\ \mu\text{N}.$$

Koska virta kulkee johtimissa samaan suuntaan, magneettisten voimien vuoksi johtimet vetävät toisiaan puoleensa. Vasemmanpuoleiseen johtimeen vaikuttavan voiman suunta on oikealle.

b) Vuorovaikutustilanteessa johtimiin vaikuttavat voimat ovat Newtonin III lain mukaan yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset. Oikeanpuoleiseen johtimeen vaikuttaa siten voima, jonka suuruus on 3,8 µN. Voiman suunta on vasemmalle.

Tehtävä 13.6.

Magneettisen voiman suunta voidaan päätellä oikean käden säännön avulla. Kun etusormi osoittaa hiukkasen etenemissuuntaan ja keskisormi magneettivuon tiheyden suuntaan, niin peukalo osoittaa positiivisesti varattuun hiukkaseen kohdistuvan magneettisen voiman suunnan.

a) Hiukkasen etenemissuunta on kuvassa ylöspäin ja magneettikenttä kuvasta ulos. Oikean käden säännön mukaan voima vaikuttaa kuvassa oikealle.

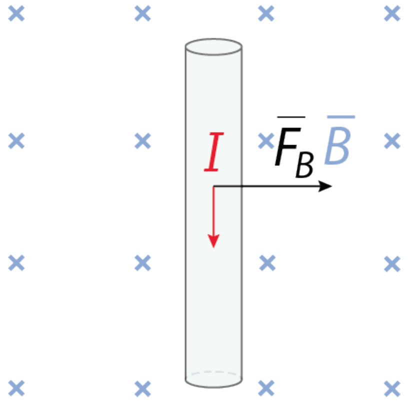
b) Hiukkasen etenemissuunta on kuvassa ylöspäin ja magneettikenttä kuvasta sisään. Oikean käden säännön mukaan voima vaikuttaisi vasemmalle, jos hiukkasella olisi positiivinen sähkövaraus. Hiukkasella on kuitenkin negatiivinen sähkövaraus, joten voiman suunta on oikealle.

c) Hiukkanen kulkee magneettikentän kenttäviivojen suuntaisesti, joten siihen ei kohdistu magneettista voimaa.

d) Hiukkasen etenemissuunnan magneettikenttään nähden kohtisuora komponentti on kuvassa oikealle ja magneettikenttä ylöspäin. Oikean käden säännön mukaan magneettinen voima vaikuttaa kuvasta ulospäin.

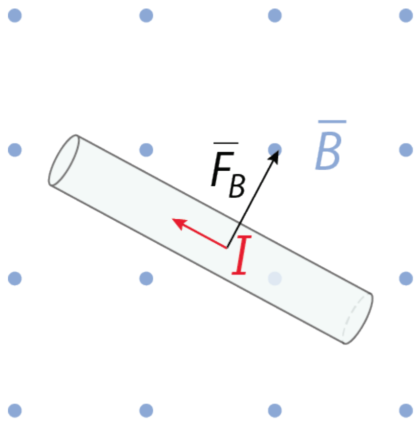
Tehtävä 13.7.

a)



$\overline{F}_B$ = virtajohtimeen kohdistuva magneettinen voima

b)



$\overline{F}_B$ = virtajohtimeen kohdistuva magneettinen voima

c) Koska sähkövirta ja magneettikenttä ovat samansuuntaiset, johtimeen ei kohdistu magneettista voimaa.

Tehtävä 13.8.

elektronin nopeus $v = 1{,}6 \cdot 10^6$ m/s

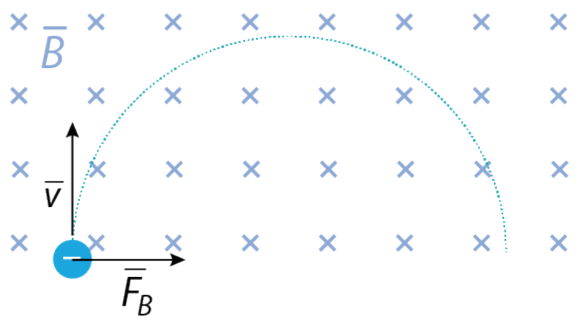
elektronin ympyräradan halkaisija $d = 0{,}120$ m

elektronin sähkövarauksen suuruus
$Q = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C

Elektronin ympyräradan säde $r = \frac{d}{2} = \frac{0{,}120}{2}\,\mathrm{m}.$

Magneettinen voima aiheuttaa elektronille tasaisen ympyräliikkeen, missä magneettisen voiman suunta on ympyräradan säteen suunnassa. Oikean käden säännön mukaan voidaan laatia elektronin voimakuvio ja määrittää magneettikentän suunta.

Magneettikentän suunta on katsojasta poispäin.



$\overline{F}_B$ = elektroniin kohdistuva magneettinen voima

Kun elektronin liike on tasaista ympyräliikettä, Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_{\text{n}}$. Elektroniin kohdistuu magneettinen voima ja Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa suunnat huomioituina

$$F_B = ma_{\text{n}}$$
$$QvB = m\frac{v^2}{r}$$
$$QB = m\frac{v}{r}.$$

Magneettikentän magneettivuon tiheys on

$$B = \frac{mv}{Qr} = \frac{9{,}109\,3837 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{6}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot \dfrac{0{,}120}{2}\,\text{m}} = 1{,}516 \cdot 10^{-4}\ \text{T} \approx 0{,}15\,\text{mT}.$$

Tehtävä 13.9.

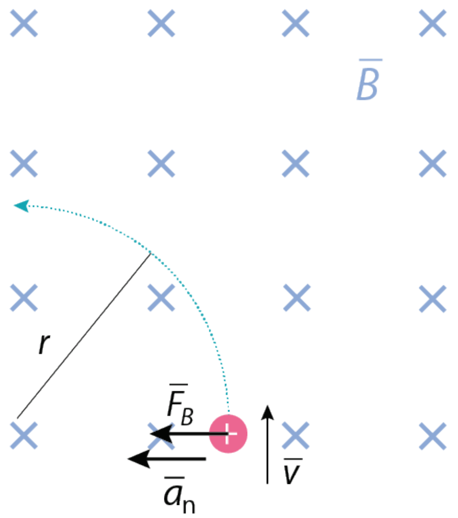
a) protonin energia E_k = 120 keV = 120 000 eV

protonin radan säde r = 86,6 mm = $86{,}6 \cdot 10^{-3}$ m

protonin sähkövaraus $Q = +e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C

protonin massa $m = 1{,}672\,6219 \cdot 10^{-27}$ kg

Protoni liikkuu magneettikentässä tasaisessa ympyräliikkeessä ympyrärataa. Tällöin Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö magneettikentässä olevalle protonille ympyräradan säteen suunnassa on $F_B = ma_\mathrm{n}$ eli $QvB = m\frac{v^2}{r}$.



Protonin nopeus saadaan liike-energian perusteella.

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{2E_{\mathrm{k}}}{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}}}{m}}$$

Magneettivuon tiheydeksi saadaan

$$B = \frac{mv}{Qr} = \frac{m}{er}\sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}}}{m}} = \sqrt{\frac{m^{\cancel{2}}}{e^2r^2}\frac{2E_{\mathrm{k}}}{\cancel{m}}} = \frac{\sqrt{2mE_{\mathrm{k}}}}{er}$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 1{,}672\,6219 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 120\,000\,\mathrm{eV} \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}}}{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 86{,}6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 0{,}578\,00\,\mathrm{T} \approx 0{,}58\,\mathrm{T}$$

b) Sähkökentässä sähköinen voima tekee protonille työn $W = QU = eU$. Työperiaatteen $W = \Delta E_{\mathrm{k}}$ mukaisesti sähköisen voiman tekemä työ muuttaa protonien liike-energiaa. Oletetaan, että protonit lähtevät käytännössä levosta. Silloin $W = E_{\mathrm{k}}$, josta kiihdytysjännitteeksi saadaan

$$W = E_{\mathrm{k}}$$

$$eU = E_{\mathrm{k}}$$

$$U = \frac{E_{\mathrm{k}}}{e} = \frac{120\,000\,\cancel{e}\mathrm{V}}{\cancel{e}} = 120\,000\,\mathrm{V} = 120\,\mathrm{kV}.$$

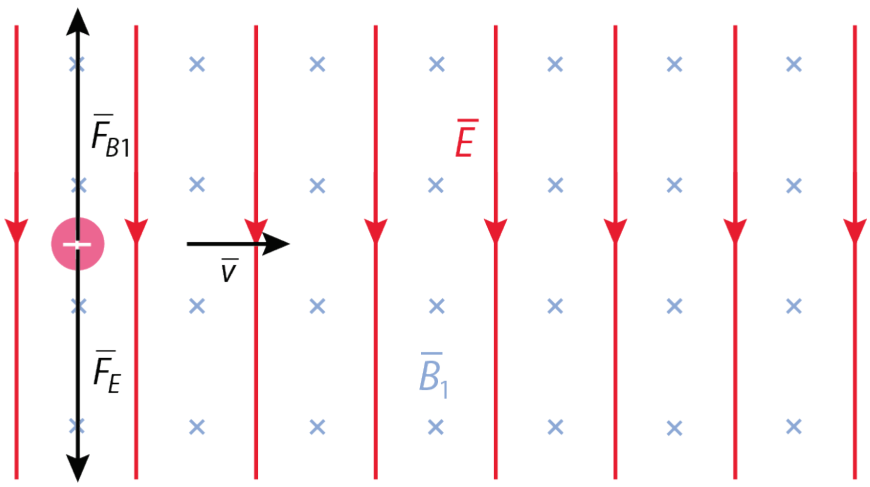
Tehtävä 13.10.

protonin sähkövaraus $Q = +e = +1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

a) protonin nopeus $v = 2{,}4 \cdot 10^6$ m/s

nopeudenvalitsimen magneettikentän magneettivuon tiheys $B_1 = 9{,}9 \cdot 10^{-3}$ T

Laaditaan nopeudenvalitsimessa liikkuvan protonin voimakuvio.



$\overline{F}_{B_1}$ = protoniin kohdistuva magneettinen voima

$\overline{F}_E$ = protoniin kohdistuva sähköinen voima

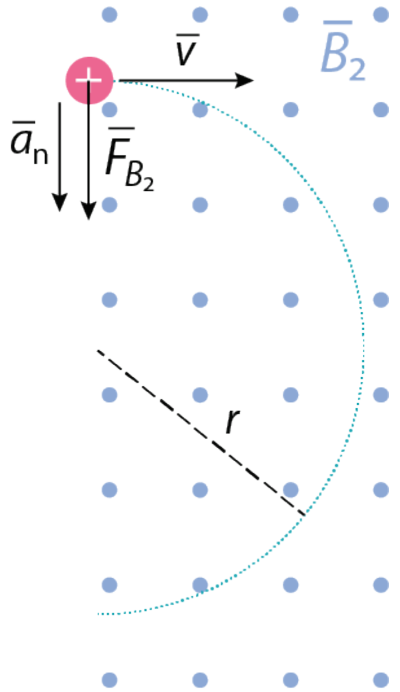
Protoni kulki suoraviivaisesti nopeudenvalitsimen läpi, jolloin Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Tällöin suunnat huomioituina

$$F_{B_1} - F_E = 0$$
$$QvB = QE$$
$$vB = E.$$

Nopeudenvalitsimen sähkökentän voimakkuus on

$$E = vB = 2{,}4 \cdot 10^6\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 9{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{T} = 23\,760\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \approx 24\ \frac{\text{kV}}{\text{m}}.$$

b) magneettivuon tiheys nopeudenvalitsimen jälkeen
B_2 = 140 mT = 0,140 T



$\bar{F}_{B_2}$ = protoniin kohdistuva magneettinen voima

Kun protoni liikkuu homogeenisessa magneettikentässä, protonin liike on tasaista ympyräliikettä, ja Newtonin II lain mukaan $\Sigma\bar{F} = m\bar{a}_\text{n}$.

Tarkastellaan suuntia ympyräradan säteen suunnassa, jolloin

$$F_{B_2} = ma_\mathrm{n}$$

$$QvB_2 = m\frac{v^2}{r}.$$

Ympyräradan säteeksi saadaan

$$r = \frac{mv}{QB_2} = \frac{1{,}672\,621\,9 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot 2{,}4 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 0{,}140\ \mathrm{T}} = 0{,}178\,966\ \mathrm{m} \approx 18\ \mathrm{cm}.$$

c) protonin ympyräradan säde syklotronissa r = 0,51 m

protonin liike-energia E_k = 4,6 MeV = 7,370 01 · 10^{-13} J

Protonin nopeus saadaan liike-energian avulla

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{k}}{m}}.$$

Protoni liikkui syklotronissa poikkeutushetkellä tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$. Syklotronin magneettikentän protoniin kohdistama magneettinen voima aiheuttaa protonin ympyräliikkeen. Tarkastellaan ympyräradan säteen suuntaa. Ratkaistaan Newtonin II lain avulla magneettivuon tiheys.

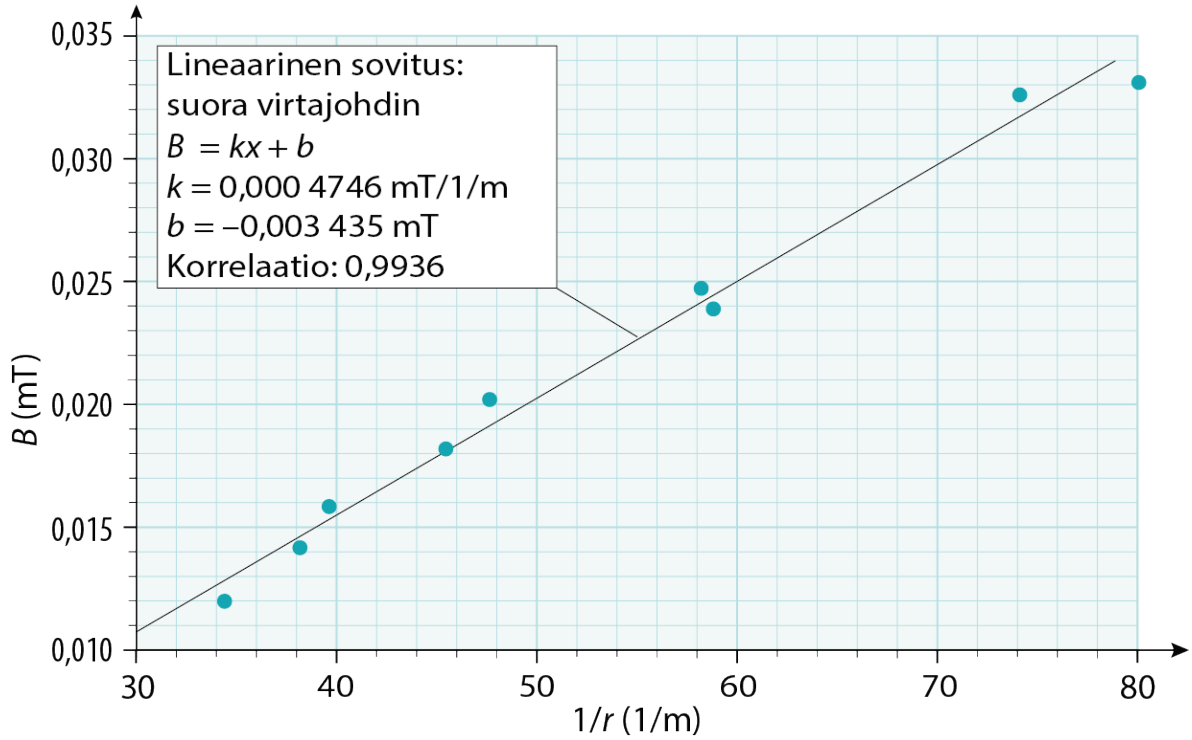
$$F_B = ma_\mathrm{n}$$
$$QvB = m\frac{v^2}{r}$$
$$QBr = m\sqrt{\frac{2E_\mathrm{k}}{m}}$$
$$B = \frac{\sqrt{2E_\mathrm{k}m}}{Qr} = \frac{\sqrt{2\cdot 7{,}370\,01\cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}\cdot 1{,}672\,6219\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}}{1{,}602\,176\,634\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}\cdot 0{,}51\,\mathrm{m}}$$
$$= 0{,}607\,669\ \mathrm{T} \approx 0{,}61\,\mathrm{cm}$$

Tehtävä 13.11.

a) Lasketaan uusi sarake $1/r$.

r **(m)**	***B*** **(mT)**	**1/*r*** **(1/m)**
13,5	0,032 751 464 1117	74,074 074 0741
17	0,024 011 229 9321	58,823 529 4118
22	0,018 335 937 0678	45,454 545 4545
26,2	0,014 086 913 7476	38,167 938 9313
29,1	0,011 937 011 4855	34,364 261 1684
12,5	0,033 203 124 2579	80
17,2	0,024 805 663 4857	58,139 534 88
21	0,020 239 257 3601	47,619 047 619
25,2	0,015 795 898 0844	39,682 539 6825

Esitetään mittaustulokset $\left(\dfrac{1}{r}, B\right)$-koordinaatistossa.



b) Koska $\left(\frac{1}{r}, B\right)$-koordinaatiston mittauspisteisiin voidaan sovittaa origon kautta kulkeva suora, anturin etäisyys johtimesta on kääntäen verrannollinen johtimen ympärille syntyneeseen magneettivuon tiheyteen.

c) Kun suorassa virtajohtimessa kulkee sähkövirta I, johtimen magneettivuon tiheys B etäisyydellä r johtimesta on $B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$,

jossa magneettivakio $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$.

$\left(\frac{1}{r}, B\right)$-koordinaatistoon merkittyihin mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin on $k = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$.

Määritetään fysikaalinen kulmakerroin.

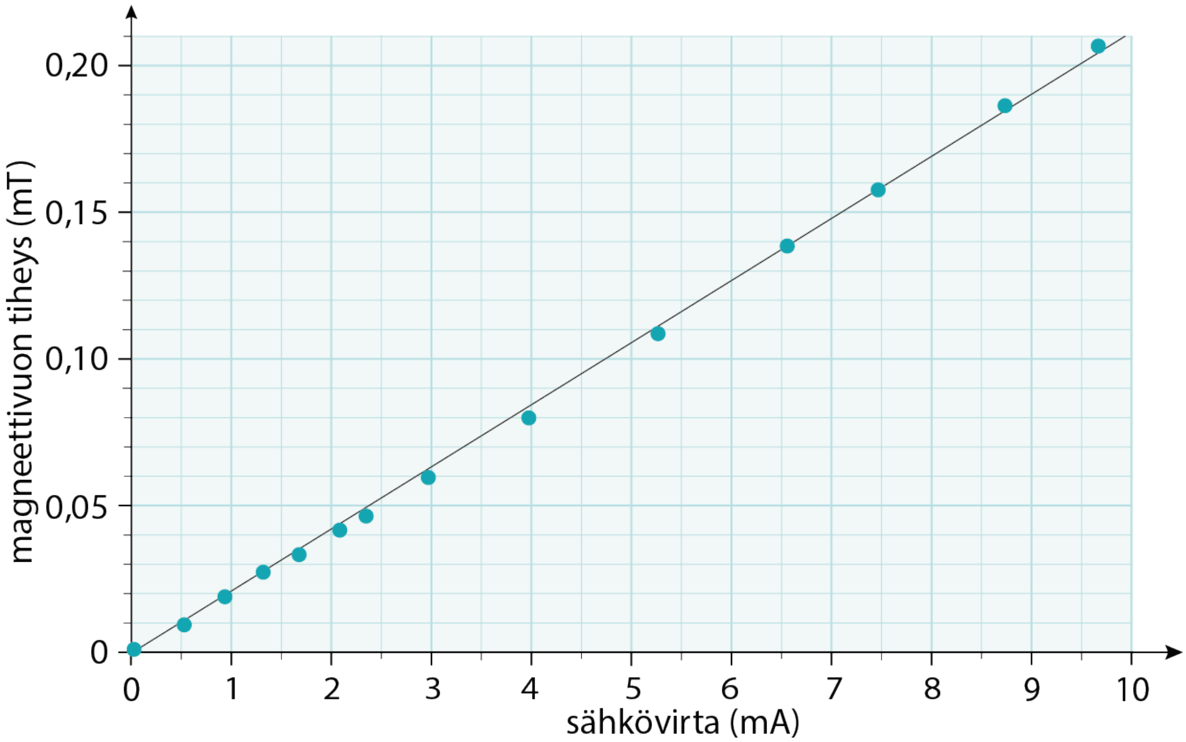
Fysikaalinen kulmakerroin $k = \frac{\mu_0 I}{2\pi} = 0{,}000\,4746 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Tm}$.

Johtimessa kulkeva sähkövirta on

$$I = \frac{2\pi k}{\mu_0} = \frac{2\pi \cdot 0{,}000\,4746 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Tm}}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}} = 2{,}373\ \mathrm{A} \approx 2{,}4\ \mathrm{A}.$$

Tehtävä 13.12.

a)



b) Taulukkokirjan mukaan käämin sisällä magneettivuon tiheys riippuu käämissä kulkevasta sähkövirrasta yhtälön $B = N\frac{\mu_0}{l}I$ mukaisesti.

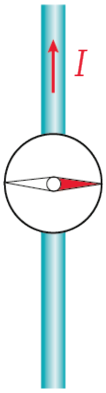
Mittausaineistoon voitiin sovittaa origon kautta kulkeva suora, eli käämin sisällä magneettivuon tiheys on suoraan verrannollinen käämissä kulkevaan sähkövirtaan. Tutkimus noudatti matemaattista mallia.

Tehtävä 13.13.

a) Koska magneettien pohjoiskohtiot ovat vastakkain, kumpaankin magneettiin vaikuttaa magneettinen voima, jonka suunta on poispäin toisesta magneetista. Koska ylempi magneetti pysyy paikallaan, Newtonin II lain mukaan $\sum\overline{F} = \overline{0}$. Ylempään magneettiin vaikuttaa magneetin paino alaspäin ja magneettinen voima ylöspäin. Voimien suunnat huomioituina $F - G = 0$ eli $F = G$. Ylempi magneetti pysyy paikallaan, koska magneettinen voima on yhtä suuri kuin ylemmän magneetin paino.

Magneettikentän voimakkuus on sitä pienempi, mitä kauempana magneetista ollaan. Kun magneetit ovat lähempänä toisiaan, magneettinen voima on suurempi kuin ylemmän magneetin paino. Tällöin magneettinen voima siirtää ylempää magneettia kauemmaksi alemmasta magneetista, jolloin magneettinen voima pienenee. (2 p) Ylempi magneetti siirtyy kohtaan, missä magneettinen hylkivä voima on yhtä suuri kuin paino.

b) Kun virtajohtimessa kulkee sähkövirta ylöspäin, johtimen ympärille syntyy magneettikenttä oikean käden säännön mukaan. Johtimen päällä magneettikentän suunta on vasemmalta oikealle. Kompassineula kääntyy magneettikentän suuntaisesti.



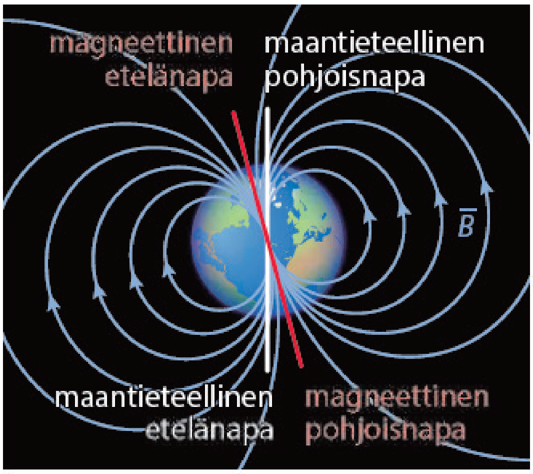
c) Oikean käden säännön mukaan vasemmanpuoleisen käämin sisälle syntyneen magneettikentän suunta on kuvassa oikealle.

Käämien magneettikentät vahvistavat toisiaan, kun magneettikenttien suunnat ovat samat eli kuvassa oikealle. Oikean käden säännön mukaan oikeanpuoleisessa käämissä sähkövirran pitää kulkea samaan suuntaan kuin vasemmanpuoleisessa käämissä.

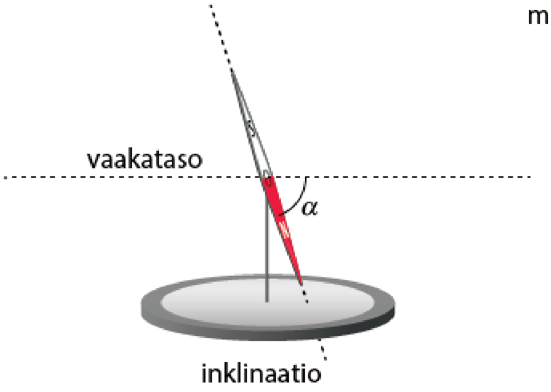
Tehtävä 13.14.

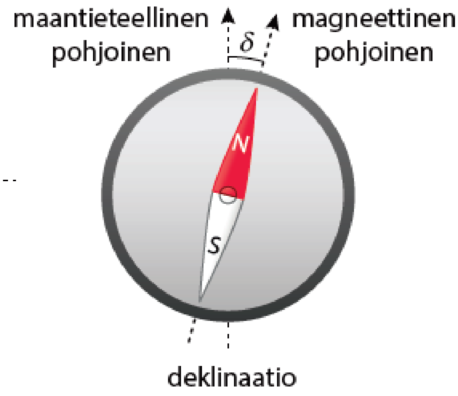
a) Maan magneettikenttä aiheutuu kiinteää ydintä ympäröivän sulan metallin liikkeestä. Sulan metallin mukana liikkuvat myös positiivisesti varautuneet metalli-ionit sekä negatiiviset ionit ja elektronit. Varausten liike eli sähkövirta synnyttää ympärilleen magneettikentän.

Maan magneettikenttä muistuttaa sauvamagneetin magneettikenttää. Maan magneettikentän eteläkohtio on maantieteellisen pohjoisnavan lähellä ja Maan magneettikentän pohjoiskohtio on Etelämantereella.



Maan magneettikenttä ei tule kohtisuorassa Maan pintaan nähden. Inklinaatiokulmaksi kutsutaan Maan magneettikentän suuntaa vaakatasoon nähden ja deklinaatiokulmaksi magneettikentän suunnan poikkeamaa maantieteellisen pohjoisen suunnasta. Inklinaatiokulma ja deklinaatiokulma ovat erilaisia eri kohdissa Maan pintaa.





b) Kosminen säteily sisältää avaruudesta, pääosin Auringosta tulevia suurenergiaisia hiukkasia, jotka osuvat Maahan. Osa kosmisesta säteilystä on varattuja hiukkasia ja osa sähkövaraukseltaan neutraaleja neutroneja. Neutronit eivät ole vuorovaikutuksessa Maan magneettikentän kanssa, vaan kulkevat Maan magneettikentässä suoraan. Avaruudesta tuleva kosminen säteily sisältää nopeita varattuja hiukkasia kuten protoneja, jotka vuorovaikuttavat Maan magneettikentän kanssa. Liikkuvat varatut hiukkaset kulkeutuvat maan magneettikentässä napojen läheisyyteen. Oikean käden säännön mukaisesti hiukkaset joutuvat spiraaliradoille Maan magneettikentän kenttäviivojen suuntaisesti. Navoilla hiukkaset osuvat ilmakehään ja virittävät yläilmakehän happiatomeja. Viritystilojen purkautumisten seurauksena näkyy revontulina. Osa kosmisen säteilyn protoneista osuu ilmakehän atomien ytimiin ja aiheuttaa ydinreaktioita.

Tehtävä 13.15.

a) Kun varattu hiukkanen liikkuu magneettikentässä, hiukkaseen vaikuttavan magneettisen voiman suunta voidaan päätellä oikean käden säännön avulla. Oikean käden säännön avulla pääteltynä hiukkasen A sähkövaraus on positiivinen, hiukkasen C sähkövaraus on negatiivinen ja hiukkasella B ei ole sähkövarausta. Jos hiukkasen sähkövaraus on nolla, hiukkaseen ei kohdistu magneettikentässä magneettista voimaa.

b) Kun varattu hiukkanen liikkuu tasaisessa ympyräliikkeessä ympyrärataa magneettikentässä, Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$. Tarkastellaan tilannetta hiukkasen ympyräradan säteen suunnassa.

$$F_B = ma_\mathrm{n}$$

$$QvB = m\frac{v^2}{r}$$

$$QB = m\frac{v}{r}$$

Kun varattu hiukkanen on ympyräradalla, hiukkasen ympyräradan säde on

$$r = \frac{mv}{QB}.$$

Mitä suurempi on hiukkasen massa *m*, sitä suurempi on hiukkasen ympyräradan säde. Toisaalta mitä suurempi on hiukkasen sähkövaraus *Q*, sitä pienempi on ympyräradan säde *r*.

Tehtävä 13.16.

a) Kun jännitelähde kytketään päälle, havaitaan, että tanko heilahtaa pois magneetin välistä ja on likimain paikallaan tangon ulkopuolella.

Kun jännitelähde kytketään päälle, tangossa alkaa kulkea sähkövirta. Tällöin tankoon kohdistuu magneettinen voima, joka heilauttaa tankoa sivulle. Lopulta tanko on tasapainossa, jolloin Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Tällöin tankoon kohdistuu johtimien tukivoima, tangon paino ja magneettinen voima. Voimien vektorisumma on nolla.

b) Videon perusteella tanko heilahtaa kuvassa oikealle. Tangossa kulkee sähkövirta katsojasta poispäin. Magneettikentän suunta oikean käden säännön mukaan on ylhäältä alaspäin.

c) Kun johtimien paikkaa vaihdetaan ja jännitelähde kytketään päälle, tanko heilahtaa vastakkaiseen suuntaan kuin alussa. Magneettikentän suunta oli alaspäin. Tankoon kohdistuvan magneettisen voiman suunta on oikean käden säännön mukaan tällöin heilahduksen suuntaan kuvassa vasemmalle.

Tehtävä 13.17.

alumiinitangossa kulkeva sähkövirta I = 1,3 A

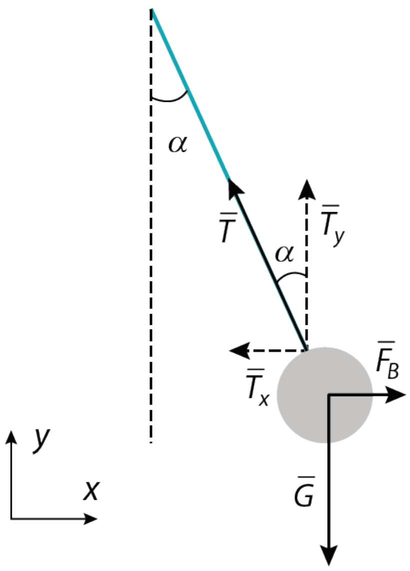
kulma pystysuunnan kanssa α = 18°

magneettikentässä olevan alumiinitangon
pituus l = 6,4 cm = 0,064 m

alumiinitangon massa m = 4,9 g = 0,0049 kg

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Sähkövirta kulkee johtimissa plusnavalta miinusnavalle. Jotta tanko pysyy kuvan mukaisessa kohdassa, tankoon kohdistuvan magneettisen voiman tulee olla oikealle. Laaditaan tankoon kohdistuva voimakuvio tangon päästä päin katsottuna. Sähkövirta kulkee kuvan sisään.



$\overline{F}_B$ = tankoon kohdistuva magneettinen voima

$\overline{G}$ = tangon paino

$\overline{T}$ = johtimien tankoon kohdistama tukivoima

Voimakuvion pisteytys:

Kuvaan on merkitty kaikki tilanteessa vaikuttavat voimavektorit oikeisiin suuntiin ja oikeille kohdilleen. Kappaleen painoa kuvaava vektori alkaa kappaleen painopisteestä.

Voimavektorien pituudet ovat oikein. Pystysuunnassa johtimen tukivoiman pystykomponenttia kuvaava vektori ja painoa kuvaava vektori ovat yhtä pitkiä. Vaakasuunnassa magneettista voimaa kuvaava vektori on yhtä pitkä kuin johtimen tukivoiman vaakakomponenttia kuvaava vektori. Voimat on nimetty listaan kuvion yhteyteen, ja kuvioon on merkitty nopeus- ja kiihtyvyysvektorit, jos niitä on.

b) Kun tangossa kulkee sähkövirta, tanko roikkuu johtimien varassa paikallaan ja johtimet muodostavat 18°:n kulman pystysuunnan kanssa. Newtonin II lain mukaan paikallaan olevalle tangolle $\Sigma\overline{F} = \overline{0}.$ Tarkastellaan vaaka- ja pystysuuntaisia voimia. Kun voimien suunnat huomioidaan,

vaakasuunnassa eli *x*-suunnassa: $F_B - T_x = 0$

pystysuunnassa eli *y*-suunnassa $G - T_y = 0$.

Tangon painolle $G = mg$. Esitetään johtimien tukivoiman komponentit kulman α avulla.

x: $F_B = T\sin\alpha$

y: $mg = T\cos\alpha$.

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä T ja sijoitetaan ylempään. Tankoon kohdistuva magneettinen voima on

$$F_B = mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = mg\tan\alpha.$$

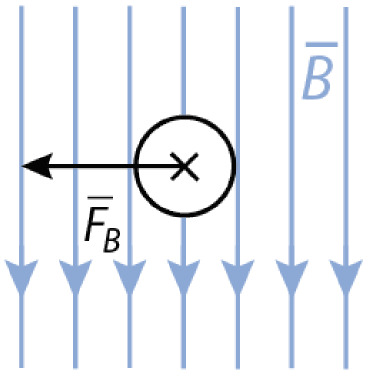
Kohtisuorassa suunnassa magneettikenttää vastaan olevaan tankoon kohdistuvan magneettisen voiman suuruus $F_B = IlB$. Magneettikentän magneettivuon tiheys on

$$B = \frac{mg\tan\alpha}{Il} = \frac{4{,}9\cdot 10^{-3}\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\tan 18^\circ}{1{,}3\,\text{A}\cdot 0{,}064\,\text{cm}} = 0{,}1877\,\text{T} \approx 0{,}19\,\text{T}.$$

c) Kun tangossa kulkee sähkövirta, tankoon kohdistuva magneettinen voima on $F_B = IlB$, missä l on tangon magneettikenttään vastaan oleva kohtisuora pituus. Kulman muutos ei vaikuta hevosenkenkämagneetin leveyteen.
Johtimen vaakasuuntainen pituus magneettikentässä on edelleen yhtä suuri. Tangon heilahduskulma on sama kuin ensimmäisessä kokeessa.

Tehtävä 13.18.

a) Magneettikentän suunta kuvassa on N-kohtiolta kohti S-kohtiota eli ylhäältä alaspäin. Sähkövirta kulkee johtimessa pisteestä A pisteeseen B. Tällöin oikean käden säännön mukaan tankoon kohdistuva magneettinen voima on vaakasuoraan suuntaa vasemmalle.

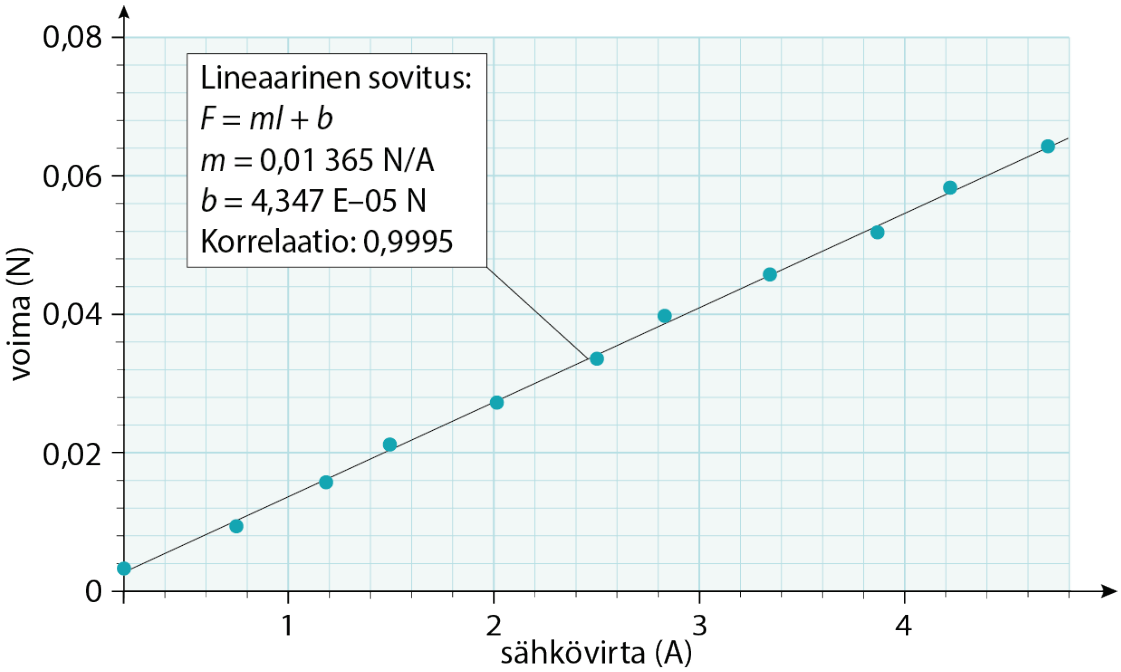


$\overline{F}_B$ = tankoon kohdistuva magneettinen voima

Sähkövirta *I* on kuvassa sisäänpäin eli tankoa katsotaan pisteestä A pisteeseen B.

(voimakuviota ei vaadita ratkaisuun)

b) Esitetään voima-anturin voima sähkövirran suhteen.



c) magneettikenttää vastaan kohtisuorassa olevan johdintangon pituus L = 4,8 cm.

Tankoon kohdistuva magneettinen voima on $F_B = ILB$, missä I on tangon läpi kulkeva sähkövirta, L on magneettikentässä olevan tangon magneettikenttää vastaan kohtisuora pituus ja B on magneettikentän magneettivuon tiheys.

Magneettikentän magneettivuon tiheys saadaan (I, F_B)-koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin

$k = BL$.

Edellisen kohdan perusteella sovitesuoran fysikaalinen kulmakerroin on

k = 0,013 65 N/A.

Magneetin magneettivuon tiheys on

$$B = \frac{k}{L} = \frac{0{,}01\,365\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}}}{0{,}048\,\mathrm{m}} = 0{,}284\,375\,\mathrm{T} \approx 0{,}28\,\mathrm{T}.$$

d) Merkitään tangon ja magneettivuontiheyden välistä kulmaa symbolilla α.

Kun tangon ja magneettivuontiheyden välinen kulma on α, tangon kohtisuora pituus magneettikenttään nähden on $L\cos\alpha$ ja tankoon kohdistuva magneettinen voima

$F_B = ILB\cos\alpha$.

Mitä suurempi on kulma α, sitä pienempi on termi $L\cos\alpha$. Kulman kasvattaminen siis pienentää magneettisen voiman suuruutta.

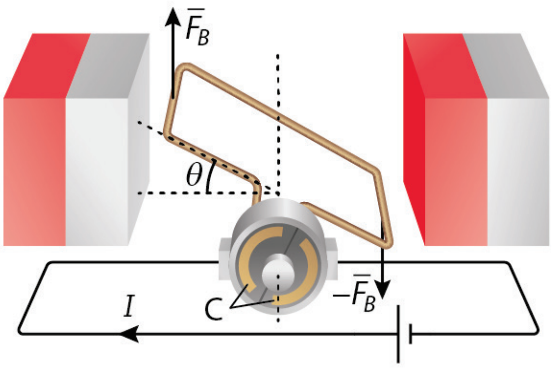
Tehtävä 13.19.

silmukan sivun pituus l = 4,0 cm

sähkövirran suuruus I = 510 mA

magneettivuon tiheys B = 8,1 mT

a)



Voimavektorit ovat vastakkaisiin suuntiin ja yhtä pitkiä.

b) Magneettikentän suunnalle kohtisuorassa oleviin johtimiin kohdistuu voima, joka pyörittää silmukkaa. Johtimeen kohdistuva momentti on voiman suuruus kerrottuna johtimen etäisyydellä kiertoakselista.

johtimeen kohdistuva voima $F_B = IlB$

johtimen etäisyys kiertoakselista $a = \frac{l}{2}\cos\theta$,

missä l on johdinsilmukan sivun pituus ja
kulma θ silmukan kiertokulma

Koska voima vaikuttaa samalla tavalla kahteen kohtaan silmukassa, silmukkaan vaikuttava kokonaismomentti

$$M_\mathrm{A} = 2 \cdot F_B \cdot a = 2 \cdot IlB \cdot \frac{l}{2}\cos\theta = Il^2 B\cos\theta.$$

Momentin suurin arvo saadaan kun

$\cos\theta = 1$ eli
$M_\mathrm{A} = Il^2 B = 0{,}51\ \mathrm{A} \cdot (0{,}04\ \mathrm{m})^2 \cdot 0{,}0081\ \mathrm{T} = 6{,}6096 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Nm} \approx 6{,}6\ \mathrm{\mu Nm}.$

c) Kun johdinsilmukka pyörii, kommutaattorin avulla magneettiset voimat muuttavat suuntaansa johtimeen nähden. Kuvan johdinsilmukan vasemmanpuoleisessa johtimessa magneettinen voima on aina ylöspäin, oikeanpuoleisessa johtimessa voima on aina alaspäin. Ilman kommutaattoria johdinsilmukka pyörähtäisi vain puoli kierrosta ja pysähtyisi siihen.

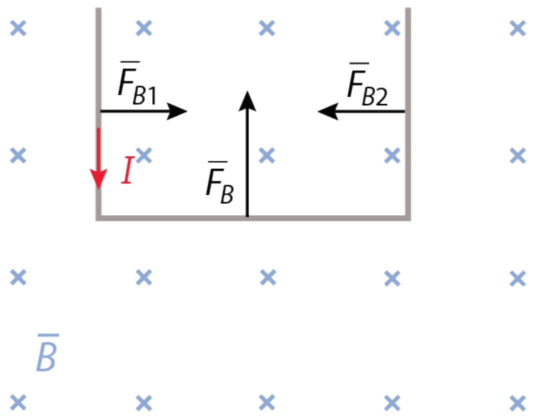
Tehtävä 13.20.

johtimessa kulkeva sähkövirta I = 2,72 A

punnuksen massa m = 4,28 g = 0,004 28 kg

magneettikentässä olevan vaakasuuntaisen johtimen pituus l = 86 mm

Käämin johdinsilmukat ovat kohtisuorassa suunnassa magneettikenttään nähden. Kun johdinsilmukan johtimessa alkaa kulkea sähkövirta, silmukan magneettikentässä oleviin johtimiin kohdistuu magneettinen voima $F_B = ILB$. Voiman suunta saadaan oikean käden säännöllä. Silmukan pystysuoriin johtimiin syntyvät magneettisen voimat kumoavat toisensa.



$\overline{F}_B$ = silmukan vaakasuoraan johtimeen kohdistuva magneettinen voima

$\overline{F}_{B1}$ = silmukan pystysuoraan johtimeen kohdistuva magneettinen voima

$\overline{F}_{B2}$ = silmukan pystysuoraan johtimeen kohdistuva magneettinen voima

Kun vaaka on tasapainossa, Newtonin II lain mukaan
$\sum\overline{F} = \overline{0}$.
Silmukan alaosan vaakasuoraan johtimeen on kohdistuttava yhtä suuri, mutta vastakkaissuuntainen voima, kuin punnuksen paino. Tällöin on voimassa

$F_B - mg = 0$

$ILB = mg$.

Koska käämi koostuu 25 silmukasta, silmukoiden magneettikentässä olevan vaakasuuntaisen johtimen pituus on $L = 25l$.

Jotta vaaka pysyy tasapainossa, magneettivuon tiheyden suuruus on oltava

$$B = \frac{mg}{25Il} = \frac{0{,}004\,28\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{25 \cdot 86 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \cdot 2{,}72\,\text{A}} = 7{,}179\,685 \cdot 10^{-3}\,\text{T} \approx 7{,}2\,\text{mT}.$$

Magneettisen voiman on oltava silmukan vaakasuorassa alajohtimessa ylöspäin. Tällöin oikean käden säännön mukaan magneettivuon tiheyden on oltava kuvassa sisäänpäin.

Tehtävä 13.21.

käämin kierrosten lukumäärä N = 100

silmukan sivun pituus L = 5,0 cm

sähkövirran suuruus I = 0,15 A

magneettivuon tiheys B = 14,0 mT

a) Käämin johtimiin, jotka ovat kohtisuorassa magneettikenttään nähden, kohdistuva voima $F_{\mathrm{B}} = ILB$.

Käämin magneettikentän suuntaisiin johtimiin ei kohdistu magneettista voimaa, joten ne eivät aiheuta momenttia.

Johtimen etäisyys kiertoakselista $a = \frac{L}{2}\cos\theta$, missä L on johdinsilmukan sivun pituus ja kulma θ silmukan kiertokulma.

Koska voima vaikuttaa samalla tavalla kahteen kohtaan silmukassa, silmukkaan vaikuttava kokonaismomentti

$$M_{\mathrm{A}} = ILB \cdot \frac{L}{2}\cos\theta + ILB \cdot \frac{L}{2}\cos\theta = IL^2B\cos\theta$$

Käämissä on 100 johdinsilmukkaa, joten momentti on $M_A = NIL^2B\cos\theta$.

Käämiin kohdistuva momentti on suurimmillaan, kun käämin kiertokulma $\theta = 0^\circ$, sillä $\cos\theta$ saa tällöin suurimman arvonsa.

$$M_\mathrm{A} = NIL^2 B\cos\theta = 100 \cdot 0{,}15\ \mathrm{A} \cdot (0{,}05\ \mathrm{m})^2 \cdot 0{,}014\ \mathrm{T} \cdot \cos(0^\circ) = 0{,}000\,525\ \mathrm{Nm} \approx 0{,}53\ \mathrm{mNm}$$

b) Momentin arvo on pudonnut 10 %:iin alkuperäisestä, kun kiertokulma on

$$M_\mathrm{A2} = \frac{M_\mathrm{Amax}}{10}$$

$$NIL^2 B\cos\theta = \frac{NIL^2 B}{10}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{10}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{10}\right) = 84{,}2608^\circ \approx 84^\circ.$$

Tehtävä 13.22.

nopeudenvalitsimen sähkökentän voimakkuus E = 160 V/m

nopeudenvalitsimen magneettivuon tiheys
B_1 = 31,3 mT = 0,0313 T

ilmaisimen magneettikentän magneettivuon tiheys
B_2 = 17,6 mT = 0,0176 T

ionin sähkövaraus $Q = +e = +1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

a) Ioni kulki suoraviivaisesti nopeudenvalitsimen läpi, jolloin Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Tällöin suunnat huomioituina

$$\begin{aligned} F_{B_1} - F_E &= 0 \\ QvB &= QE \\ vB &= E. \end{aligned}$$

Ionin nopeus oli

$$v = \frac{E}{B_1} = \frac{160\,\frac{\text{V}}{\text{m}}}{0{,}0313\,\text{T}} = 5\,111{,}82\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 5{,}1\,\frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

b) Nopeudenvalitsimen jälkeen varattu ioni tulee nopeutta vastaan kohtisuorassa olevaan magneettikenttään. Newtonin II lain mukaan

$\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$. Varattuun atomiin kohdistuu magneettinen voima ja Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa suunnat huomioituina

$$F_B = ma_{\mathrm{n}}$$
$$QvB = m\frac{v^2}{r}$$
$$QB = m\frac{v}{r}.$$

Ionin nopeuden suuruus ei muutu magneettikentässä, joten atomin massa oli

$$m = \frac{QB_2r}{v} = \frac{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 0{,}0176\ \mathrm{T} \cdot 0{,}171\ \mathrm{m}}{5\,111{,}82\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$
$$m = 9{,}432\,86 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg} \approx 9{,}43 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}.$$

c) Ilmaisimen magneettikenttä on kohtisuorassa ionin nopeutta vastaan. Newtonin II lain mukaan

$\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$. Varattuun atomiin kohdistuu magneettinen voima ja Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa suunnat huomioituina

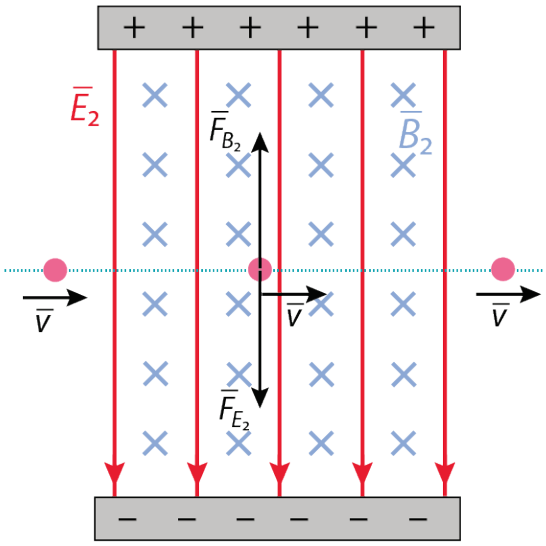
$$F_B = ma_\mathrm{n}$$
$$QvB = m\frac{v^2}{r}$$
$$QB = m\frac{v}{r}.$$

Varatun atomin ympyräradan säde on kääntäen verrannollinen magneettikentän magneettivuon tiheyteen. Magneettivuon tiheyden kasvattaminen pienentää ympyräradan sädettä.

Tehtävä 13.23.

a) Nopeudenvalitsimen sähkö- ja magneettikentissä varattuun hiukkaseen vaikuttaa sekä sähköinen voima että magneettinen voima. Sähköisen voiman suuruus on $F_E = QE$, jossa Q on hiukkasen sähkövaraus ja E on sähkökentän voimakkuus. Magneettisen voiman suuruus on $F_B = QvB$, jossa Q on hiukkasen sähkövaraus, v on hiukkasen nopeus, B on magneettikentän magneettivuon tiheys.

Jos nopeudenvalitsimessa etenee positiivinen hiukkanen, siihen vaikuttavan sähköisen voiman suunta on alaspäin ja magneettisen voiman suunta on ylöspäin seuraavan kuvan mukaisesti.



Jos nopeudenvalitsimessa etenee negatiivisesti varattu hiukkanen, siihen vaikuttavan sähköisen voiman suunta on ylöspäin ja magneettisen voiman suunta on alaspäin.

Kun ioni liikkuu kentissä vakionopeudella, ioniin kohdistuvat voimat ovat tarkalleen yhtä suuret, mutta vastakkaissuuntaiset. Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö ionille on $\sum \overline{F} = \overline{0}.$ Kun voimien suunnat huomioidaan, saadaan $F_E - F_B = 0,$ josta saadaan ionin nopeudeksi tilanteessa

$$\cancel{Q}E = \cancel{Q}vB$$
$$v = \frac{E}{B}.$$

Jos ionin nopeus on suurempi tai pienempi kuin edellä ratkaistu nopeus, ioni ei etene nopeudenvalitsimessa suoraviivaisesti. Riippuen siitä onko sähköinen voima vai magneettinen voima suurempi, ionin rata kaartuu joko alaspäin tai ylöspäin, eikä ioni silloin pääse kulkemaan nopeudenvalitsimen läpi.

b) Ne^+-ionien nopeus v = 230 km/s

sähkökentän voimakkuus E = 132 kV/m

Ne^+-ioniin vaikuttaa kuvan nopeudenvalitsimessa sähköinen voima alaspäin ja magneettinen voima ylöspäin. Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö Ne^+-ionille on $\sum \overline{F} = \overline{0}.$ Kun voimien suunnat huomioidaan, saadaan $F_E - F_B = 0,$ josta saadaan

$$\cancel{Q}E = \cancel{Q}vB$$
$$B = \frac{E}{v} = \frac{132\,000\ \text{V/m}}{230\,000\ \text{m/s}} = 0{,}5739\ \text{T} \approx 0{,}57\ \text{T}.$$

Tehtävä 13.24.

a) Kun kiihdytysjännitettä kasvatettiin, elektronin ympyräradan säde kasvoi. Kun elektronia kiihdytetään sähkökentässä, joka on muodostettu kahden yhden suuntaisen johdinlevyn väliin, sähköinen voima tekee työn ja kasvattaa elektronin liike-energiaa. Työperiaatteen mukaan $W = \Delta E_k$. Sähköisen voiman tekemä työ $W = QU$. Mitä suurempi on kiihdytysjännite, sitä suurempi on elektronin liike-energian muutos ja sitä suurempi on elektronin nopeus, kun se poistuu sähkökentästä.

Kun elektroni saapuu Helmholtzin kelojen väliseen magneettikenttään, elektroniin kohdistuu magneettinen voima nopeutta vastaan kohtisuorasti. Tällöin elektroni joutuu ympyräliikkeeseen. Newtonin II lain mukaan suunnat ympyräradan säteen suunnassa huomioituina

$$
\begin{aligned}
F_B &= ma_\mathrm{n} \\
QvB &= m\frac{v^2}{r} \\
QB &= m\frac{v}{r} \\
r &= \frac{mv}{QB}.
\end{aligned}
$$

Mitä suurempi on hiukkasen nopeus, sitä suurempi hiukkasen ympyräradan säde *r.*

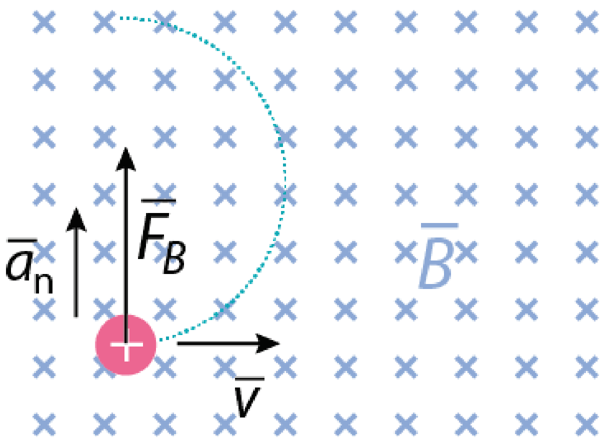
b) Mitä suurempi on Helmholtzin keloissa kulkeva sähkövirta, sitä suurempi on kelojen väliin syntyneen magneettikentän magneettivuon tiheys B. Ympyräradalla olevalle elektronille on a-kohdan perusteella voimassa

$$F_B = ma_\mathrm{n}$$
$$QvB = m\frac{v^2}{r}$$
$$QB = m\frac{v}{r}$$
$$r = \frac{mv}{QB}.$$

Magneettikentän magneettivuon tiheys ja kentässä liikkuvan elektronin ympyräradan säde ovat kääntäen verrannollisia. Mitä suurempi on magneettivuon tiheys eli mitä suurempi sähkövirta käämeissä kulki, sitä pienempi on ympyräradan säde.

Tehtävä 13.25.

a) Magnesiumionien sähkövaraus oli positiivinen. Kun ionit liikkuivat erottelevassa magneettikentässä, ionien liike oli tasaista ympyräliikettä. Laaditaan voimakuvio



$\bar{F}_B$ = ioniin kohdistuva magneettinen voima

Ionit kulkevat magneettikentässä tasaista ympyrärataa, jolloin Newtonin II lain mukaan säteen suunnassa magneettinen voima aiheuttaa ionille normaalikiihtyvyyden

$$F_B = ma_n$$
$$QvB = m\frac{v^2}{r}$$
$$QB = m\frac{v}{r}$$
$$QBr = mv.$$

Yhtälön mukaan ympyräradan säde on suoraan verrannollinen hiukkasen massaan, joten mitä suurempi on ionin massa, sitä suurempi on ympyräradan säde. Magnesiumin isotoopit massojen mukaan järjestettynä massaltaan suurimmasta pienimpään on ^{26}Mg, ^{25}Mg ja ^{24}Mg. Tällöin isotoopin ^{26}Mg ympyräradan säde on suurin ja ^{24}Mg pienin.

b) ionin sähkövarauksen suuruus
$Q = e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

ionin ympyräradan säde $r = 0{,}196$ m

magneettivuontiheys $B = 42{,}5$ mT

ionin massa $m = 3{,}9826 \cdot 10^{-26}$ kg

Tarkastellaan ionien kiihdyttämistä työperiaatteella, jossa kiihdyttävässä sähkökentässä sähköisen voiman tekemä työ oli yhtä suuri kuin ionin liike-energian muutos $W = \Delta E_\mathrm{k}$. Koska ionien nopeudet olivat ennen kiihdyttämistä kentän suunnassa likimain nolla, niin liike-energian muutos oli yhtä suuri kuin ionin liike-energia kiihdytettävän kentän jälkeen. Sähköisen voiman tekemä työ oli siis yhtä suuri kuin ionin liike-energia kiihdytyskentän jälkeen

$$QU = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kun ionit joutuivat poikittaiseen homogeeniseen erottelevaan magneettikenttään, ionit kulkivat likimain tasaista ympyrärataa ja Newtonin II lain mukaan hiukkaseen kohdistuva voima aiheutti hiukkaselle normaalikiihtyvyyden. Säteen suunnassa tarkasteltuna

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{B}} &= ma_n \\
QvB &= m\frac{v^2}{r} \\
QB &= m\frac{v}{r} \\
QBr &= mv.
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan tästä nopeus ja sijoitetaan se työn yhtälöön. Ratkaistaan kiihdytysjännitteen suuruus.

$$
QU = \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{Q^2B^2r^2}{m^{\cancel{2}}}
$$

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\frac{QB^2r^2}{m} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}602\,176\,634\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\cdot\left(0{,}0425\ \mathrm{T}\right)^2\cdot(0{,}196\ \mathrm{m})^2}{3{,}9826\ \cdot\ 10^{-26}\ \mathrm{kg}} \\
&= 139{,}5738\ \mathrm{V} \approx 140\ \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 13.26.

protonien sähkövaraus e = 1,602 176 634 · 10^{-19} C

magneettivuon tiheys B = 0,35 T

kammion säde r = 11,4 cm

a) Protonit tulevat magneettikenttään kenttää vastaan kohtisuoraan nopeudella v. Magneettikentässä protonit liikkuvat tasaisessa ympyräliikkeessä ja protoneihin vaikuttaa niihin magneettinen voima, jonka suuruus on $F_B = QvB$ ja jonka suunta on magneettikenttää ja ionin nopeusvektoria vastaan kohtisuorassa. Newtonin II lain mukaan protonin liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $F_\mathrm{B} = ma_\mathrm{n}$. Tällöin

$$QvB = m\frac{v^2}{r}$$

$$v = \frac{QBr}{m}.$$

Protonien liike-energiaksi saadaan

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{QBr}{m}\right)^2 = \frac{(QBr)^2}{2m}$$

$$= \frac{(1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0{,}35\ \mathrm{T} \cdot 0{,}114\ \mathrm{m})^2}{2 \cdot 1{,}672\,6219 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = 1{,}221\,63 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} \approx 76\,\mathrm{keV}.$$

Protonien energia on 1,2 · 10^{-14} J eli 76 keV.

b) Puolen jaksonajan $t=\frac{T}{2}$ aikana protoni kulkee ympyräradalla puoliympyrän

mittaisen matkan $s = \pi r$. Protonin nopeus on $v=\frac{s}{t}=\frac{\pi r}{\frac{T}{2}}=\frac{2\pi r}{T}=2\pi rf$.

Merkitään tämä yhtä suureksi edellisessä kohdassa saadun nopeuden kanssa, ja ratkaistaan taajuus.

$$2\pi rf=\frac{QBr}{m}$$

$$f=\frac{QB}{2\pi m}=\frac{1{,}602\,176\,634\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 0{,}35\ \mathrm{T}}{2\pi\cdot 1{,}672\,6219\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}=5{,}335\,81\cdot 10^{6}\,\mathrm{Hz}\approx 5{,}3\ \mathrm{MHz}$$

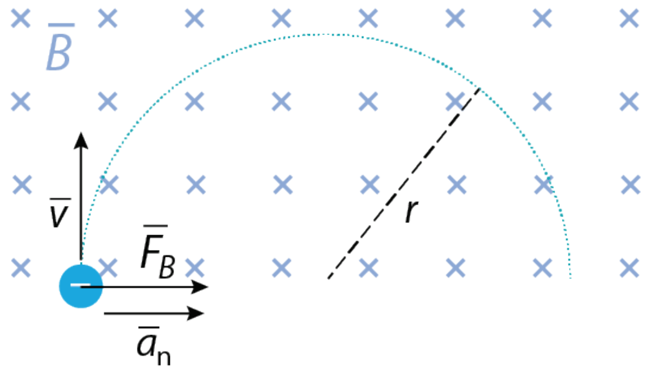
Syklotronitaajuus on 5,3 MHz.

Tehtävä 13.27.
syklotronin magneettikentän magneettivuon tiheys
$B = 1{,}48\ \text{T}$

ionin sähkövarauksen suuruus $Q = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$

H^--ionin massa $m = 1{,}675 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$

a)



$\overline{F}_B$ = ioniin kohdistuva magneettinen voima

b) Ioni kulkee syklotronin magneettikentässä tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_{\text{n}}$. Ioniin kohdistuu magneettinen voima ja Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa suunnat huomioituina

$$\begin{aligned} F_B &= ma_{\text{n}} \\ QvB &= m\frac{v^2}{r} \\ QB &= m\frac{v}{r}. \end{aligned}$$

Ioni kulkee puoliympyrän matkan $s = \pi r$ aikana, joka on puolet koko ympyräliikkeen jaksonajasta eli $t = T/2$. Ionin nopeus on

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\pi r}{\frac{T}{2}} = \frac{2\pi r}{T}.$$

Ionin kierrostaajuuden ja ympyräliikkeen jaksonajan välillä on voimassa

$f = \dfrac{1}{T}$, jolloin ionin nopeus on $v = 2\pi rf$. Jotta ionin nopeutta voidaan lisätä syklotronin sähkökentällä, sähkökentän taajuuden eli syklotronitaajuuden on oltava sama kuin ionin kierrostaajuuden.

Syklotronitaajuus saadaan ratkaistua yhdistämällä edellä olevat yhtälöt.

$$QB = m\frac{2\pi rf}{r}$$

$$f = \frac{QB}{2\pi m} = \frac{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1{,}48\ \text{T}}{2 \cdot \pi \cdot 1{,}675 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 22\,530\,842\ \text{Hz} \approx 22{,}5\ \text{MHz}$$

c) ionin liike-energia E_k = 4,6 MeV = 4,6 · 10^6 eV
= 4,6 · 10^6 · 1,602 176 634 · 10^{-19} J

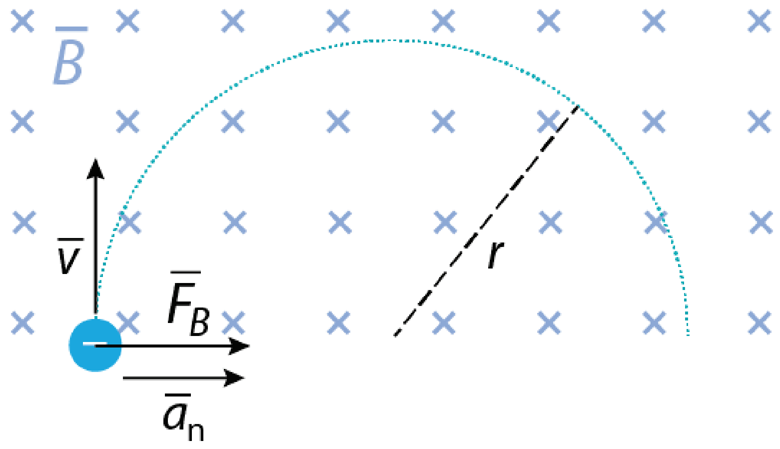
Ionin nopeus saadaan liike-energian avulla

$$E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_\text{k}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}6 \cdot 10^6 \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1{,}675 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} = 2{,}966\,482 \cdot 10^7\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3{,}0 \cdot 10^7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehtävä 13.28.

a) Ioniin kohdistuvan magneettisen voiman suunta saadaan oikean käden säännön perusteella.



$\overline{F}_B$ = ioniin kohdistuva magneettinen voima

b) syklotronitaajuus f = 25 MHz

ionin massa $m = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ kg

ionin sähkövarauksen suuruus
$Q = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C

Ioni kulkee syklotronin magneettikentässä ympyräliikkeessä, jolloin säteen suunnassa Newtonin II lain mukaisesti $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_n$. Ioniin kohdistuu magneettinen voima.

$F_B = ma_\mathrm{n}$

$$QvB = m\frac{v^2}{r}$$

$$QB = m\frac{v}{r}.$$

Ioni kulkee puoliympyrän matkan $s = \pi r$ aikana t, joka on puolet koko ympyräliikkeen jaksonajasta eli $t = T/2$.

Ionin nopeus on

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\pi r}{\frac{T}{2}} = \frac{2\pi r}{T}.$$

Ionin kierrostaajuuden ja ympyräliikkeen jaksonajan välillä on voimassa

$f = \dfrac{1}{T}$, jolloin ionin nopeus on $v = 2\pi rf$.

Jotta ionin nopeutta voidaan lisätä syklotronin sähkökentällä, sähkökentän taajuuden eli syklotronitaajuuden on oltava sama kuin ionin kierrostaajuus. Syklotronin magneettivuon tiheys saadaan ratkaistua yhdistämällä edellä olevat yhtälöt.

$$QB = m\frac{2\pi rf}{r}$$

$$QB = m2\pi f$$

$$B = \frac{2\pi mf}{Q} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1{,}675 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 25 \cdot 10^{6}\ \text{Hz}}{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 1{,}642\,193\,371\ \text{T} \approx 1{,}6\ \text{T}.$$

c) Elektronin ja H^--ionin sähkövaraukset ovat samanmerkkiset ja yhtä suuret. Edellisen kohdan mukaan syklotronin magneettivuon tiheyden ja syklotronitaajuuden välillä on voimassa

$$B = \frac{2\pi mf}{Q}.$$

Koska elektronin massa on pienempi kuin H^--ionin massa, yhtälön mukaan syklotronitaajuuden täytyy olla suurempi elektronin kiihdyttämisessä kuin H^--ionin kiihdyttämisessä, jos syklotronin magneettivuon tiheys on sama. Elektroneja ei siis voi kiihdyttää samalla taajuudella ja magneettivuon tiheydellä kuin H^--ioneja.

Tehtävä 13.29.

a) Protoniin vaikuttaa kuvan tilanteessa sähköinen voima, jonka suuruus on $F_E = QE$, jossa Q on hiukkasen sähkövaraus, E on sähkökentän voimakkuus. Sähköisen voiman suunta on oikealle. Koska sähkökenttä on homogeeninen, sähköisen voiman suuruus on kaikkialla sähkökentässä yhtä suuri, ja protoni saa vakiokiihtyvyyden voiman suuntaan oikealle. Protoni lähtee levosta ja päätyy suoraviivaiseen, tasaisesti kiihtyvään liikkeeseen kuvassa oikealle.

b) Protoniin vaikuttaa kuvan tilanteessa sähköinen voima, jonka suuruus on $F_E = QE$, jossa Q on hiukkasen sähkövaraus, E on sähkökentän voimakkuus. Sähköisen voiman suunta on oikealle. Koska sähkökenttä on homogeeninen, sähköisen voiman suuruus on kaikkialla sähkökentässä yhtä suuri, ja protoni saa vakiokiihtyvyyden voiman suuntaan oikealle. Koska protonilla on jo valmiiksi nopeus kuvassa ylöspäin, protonin rata alkaa kaartaa oikealle aivan kuten vaakasuuntaan heitetyn pallon lentorata kaartaa kohti maan pintaa. Protonin rata on paraabeli.

c) Magneettikentässä varattuun hiukkaseen vaikuttavan voiman suuruus on $F_B = QvB\sin\alpha$, jossa Q on hiukkasen sähkövaraus, v on hiukkasen nopeus, B on magneettikentän magneettivuon tiheys ja kulma α on hiukkasen nopeusvektorin ja magneettikentän suunnan välinen kulma. Koska elektronin nopeus on $v_0 = 0$ m/s, elektroniin ei vaikuta lainkaan magneettista voimaa. Elektroni jää paikalleen, jos muutkaan voimat eivät muuta sen liiketilaa.

d) Protonin nopeus on kohtisuorassa magneettikentän suuntaan nähden, joten protoniin vaikuttaa magneettinen voima, jonka suuruus on $F_B = QvB$, jossa Q on hiukkasen sähkövaraus, v on hiukkasen nopeus, B on magneettikentän magneettivuon tiheys. Voiman suunta on oikean käden säännön mukaan katsojasta poispäin. Voima on aina kohtisuorassa hiukkasen nopeuteen nähden. Kun protoni kaartaa voiman vaikutuksesta katsojasta poispäin, voiman suunta muuttuu. Protoni päätyy ympyräradalle.

e) Koska elektroni on alussa paikallaan, elektroniin ei aluksi vaikuta lainkaan magneettista voimaa. Elektroniin vaikuttaa kuitenkin sähköinen voima, jonka suuruus on vakio, $F_E = QE$, jossa Q on hiukkasen sähkövaraus, E on sähkökentän voimakkuus, ja jonka suunta on kuvassa vasemmalle. Voima aiheuttaa elektronille vakiokiihtyvyyden vasemmalle. Kun elektroni alkaa sähköisen voiman vaikutuksesta liikkua kuvassa vasemmalle, alkaa elektroniin vaikuttaa myös magneettinen voima, $F_B = QvB$, jossa Q on hiukkasen sähkövaraus, v on hiukkasen nopeus, B on magneettikentän magneettivuon tiheys. Magneettisen voiman suunta on kuvassa ylöspäin. Silloin elektronin rata kaartaa vasemmalle ja ylöspäin.

f) Elektroniin vaikuttaa kuvan tilanteessa sähköinen voima, jonka suuruus on $F_E = QE$, jossa Q on hiukkasen sähkövaraus, E on sähkökentän voimakkuus. Sähköisen voiman suunta on vasemmalle. Elektroni saa vakiokiihtyvyyden voiman suuntaan vasemmalle. Koska elektronin nopeus on yhdensuuntainen magneettikentän kanssa, elektroniin ei vaikuta lainkaan magneettista voimaa. Elektroni lähtee levosta ja päätyy suoraviivaiseen, tasaisesti kiihtyvään liikkeeseen kuvassa vasemmalle.

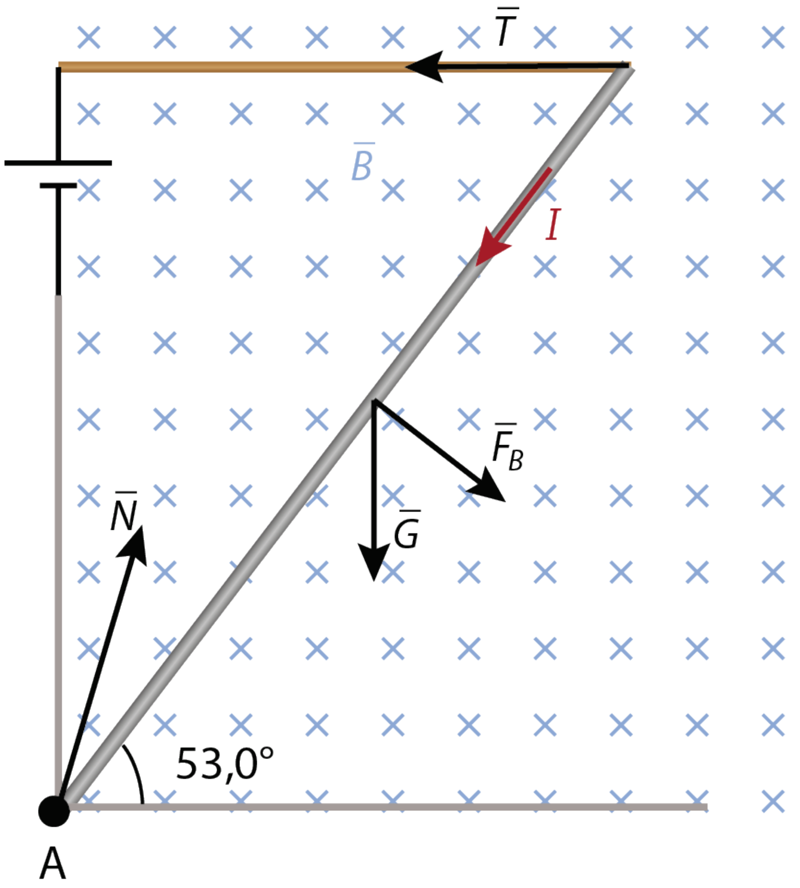
g) Protoniin vaikuttaa kuvan tilanteessa sähköinen voima, jonka suuruus on $F_E = QE$, jossa Q on hiukkasen sähkövaraus, E on sähkökentän voimakkuus. Sähköisen voiman suunta on oikealle. Sähköisen voiman vuoksi protonin liike kiihtyy kuvassa oikealle.

Koska protonin nopeus on kohtisuorassa magneettikentän suuntaan nähden, joten protoniin vaikuttaa myös magneettinen voima, jonka suuruus on $F_B = QvB$, jossa Q on hiukkasen sähkövaraus, v on hiukkasen nopeus ja B on magneettikentän magneettivuon tiheys. Voiman suunta on oikean käden säännön mukaan alkutilanteessa katsojasta poispäin. Magneettisen voiman vuoksi protoni päätyy ympyräradalle.

Sähköisen ja magneettisen voiman yhteisvaikutuksesta protoni päätyy spiraaliradalle, jossa protoni kiertää ympyrärataa, mutta siirtyy samalla koko ajan kiihtyvällä tahdilla enemmän oikealle.

Tehtävä 13.30.

a) Laaditaan alumiinitangon voimakuvio.



$\overline{G}$ = tangon paino

$\overline{N}$ = alumiininlevyn tankoon kohdistava pinnan tukivoima

$\overline{T}$ = kuparilangan tankoon kohdistama voima

$\overline{F}_B$ = tankoon kohdistuva magneettinen voima

b) tangon massa $m = 0,094$ kg

tangon pituus $L = 0,220$ m

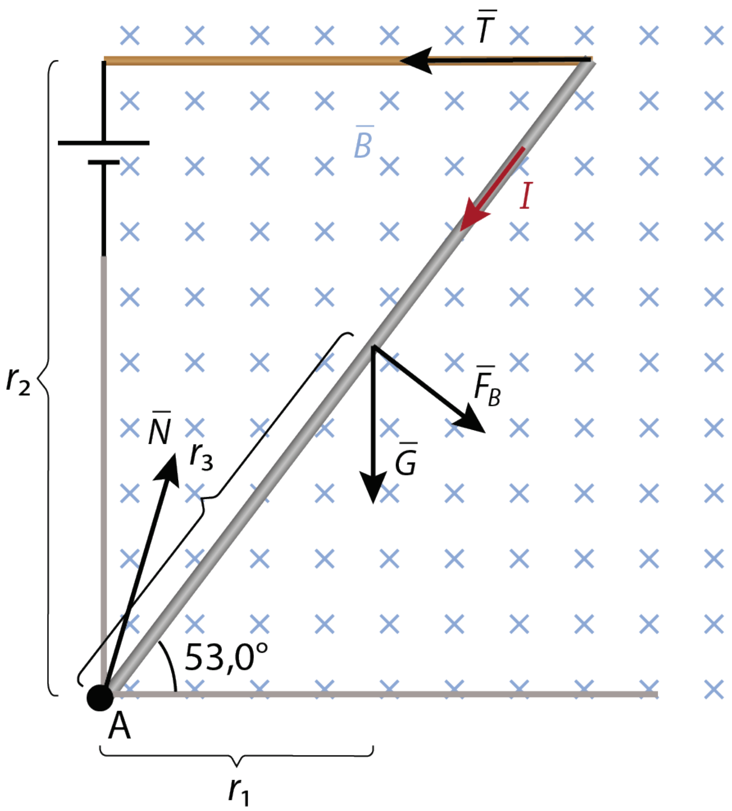
magneettivuon tiheys $B = 0,37$ T

tangon ja vaakatason välinen kulma $\alpha = 53,0°$

tangossa kulkeva sähkövirta $I = 2,6$ A

Tanko on tasapainossa etenemisen ja pyörimisen suhteen. Valitaan momentin tarkastelupisteeksi piste A. Tanko on tasapainossa pyörimisen suhteen, joten tankoon kohdistuvien momenttien summa on nolla eli $\Sigma M_A = 0$.

Merkitään voimakuvioon voimien kohtisuorat etäisyydet pisteestä A.



Sovitaan, että suunta vastapäivään on momentin positiivinen suunta. Momenttien summasta saadaan

$Tr_2 - Gr_1 - F_B r_3 = 0$.

Voimien kohtisuorille etäisyyksille voidaan kirjoittaa $r_1 = \frac{L}{2}\cos\alpha$, $r_2 = L\sin\alpha$ ja $r_3 = \frac{L}{2}$. Paino on $G = mg$. Sähkövirta kulkee tangon suuntaisesti eli kohtisuorassa magneettikenttää vastaan. Tällöin tankoon kohdistuva keskimääräinen magneettinen voima kohdistuu tangon keskikohtaan ja on suuruudeltaan $F_B = ILB$. Yhdistetään edelliset yhtälöt ja ratkaistaan, kuinka suuren voiman kuparilanka kohdistaa tankoon.

$$T\cancel{L}\sin\alpha - mg\frac{\cancel{L}}{2}\cos\alpha - ILB\frac{\cancel{L}}{2} = 0$$

$$\begin{aligned}
T\sin\alpha &= \frac{mg\cos\alpha}{2} + \frac{ILB}{2} \\
T &= \frac{mg\cos\alpha + ILB}{2\sin\alpha} \\
&= \frac{0{,}094\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\cos 53{,}0^\circ + 2{,}6\,\text{A}\cdot 0{,}220\,\text{m}\cdot 0{,}37\,\text{T}}{2\cdot\sin 53{,}0^\circ} \\
&= 0{,}479\,94\,\text{N} \approx 0{,}48\,\text{N}.
\end{aligned}$$

Tehtävä 13.31.

elektronin ympyräradan säde r = 0,040 m

elektronin sähkövarauksen suuruus
$Q = e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

a) Kun elektroni liikkui Helmholtzin kelojen väliin syntyneessä homogeenisessa magneettikentässä, elektroniin kohdistui koko ajan samansuuruinen magneettinen voima kohtisuoraan nopeutta vastaan. Elektroniin kohdistunut magneettinen voima aiheutti elektronille ympyräradan.

b) Kun elektroni liikkui Helmholtzin kelojen väliin syntyneessä homogeenisessa magneettikentässä, elektroni oli tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$. Elektroniin kohdistui magneettinen voima ja Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa suunnat huomioituina

$$\begin{aligned} F_B &= ma_\mathrm{n} \\ QvB &= m\frac{v^2}{r} \\ QB &= m\frac{v}{r}. \end{aligned}$$

Kun elektronia kiihdytettiin homogeenisessa sähkökentässä, elektroniin kohdistui sähköinen voima kentän suuntaa vastaan. Sähköinen voima teki työtä elektronille, jolloin työperiaatteen mukaan sähköisen voiman tekemä työ oli yhtä suuri kuin liike-energian muutos $W = \Delta E_\mathrm{k}$. Koska hiukkasen nopeus oli kentän alussa nolla, elektronin liike-energia oli myös nolla. Elektronin nopeus saadaan työperiaatteesta

$$QU = \frac{1}{2}mv^2.$$

Sijoitetaan ympyräliikkeestä saatu yhtälö työperiaatteen yhtälöön, jolloin

$$QU = \frac{1}{2}m\left(\frac{QBr}{m}\right)^2$$

$$QU = \frac{1}{2}m\frac{Q^2B^2r^2}{m^2}$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{QB^2r^2}{m}$$

$$2U = \frac{Q}{m}B^2r^2.$$

Yhtälön perusteella elektronin ympyräradan säteen neliö on suoraan verrannollinen kiihdytysjännitteeseen U. Jos magneettivuontiheys B, elektronin massa m ja sähkövaraus Q ovat vakioita, kiihdytysjännitteen pienentäminen pienentää ympyräradan sädettä.

c) Edellisen kohdan perusteella kiihdytysjännitteelle ja kiihdytysjännitteen ja kelojen väliin syntyneen magneettikentän magneettivuon tiheyden välillä oleva riippuvuus on

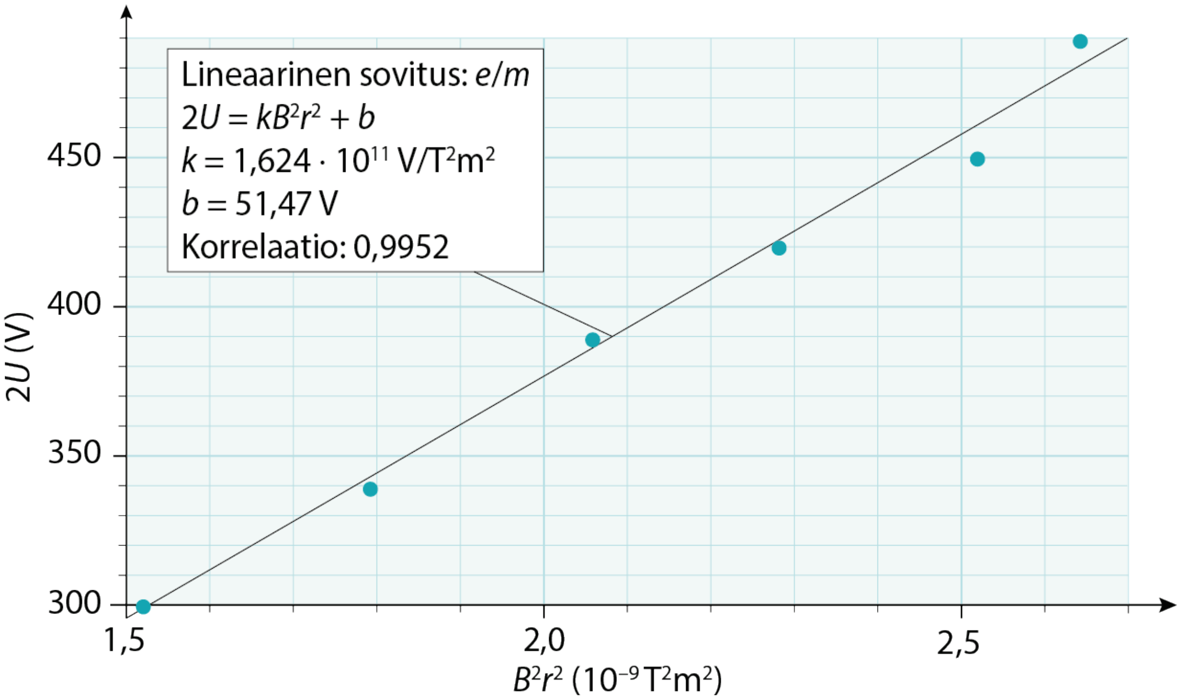
$$2U = \frac{Q}{m} B^2 r^2.$$

Koska $Q = e$, saadaan

$$2U = \frac{e}{m} B^2 r^2.$$

Elektronin ominaisvaraus saadaan (B^2r^2, $2U$)-koordinaatiston mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Lasketaan uuden sarakkeet ja muodostetaan kuvaaja.

2*U* (V)	**B^2r^2 (10^{-9} T^2m^2)**
300	1,521 748 89216
340	1,792 336 896
390	2,057 5296
420	2,282 851 95264
450	2,519 879 36256
490	2,642 782 464



Elektronin ominaisvaraus on

$$\frac{e}{m} = 162{,}4 \cdot 10^{9}\ \frac{\text{Vm}^2}{\text{T}^2} = 1{,}62 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{C}}{\text{kg}}.$$

Tehtävä 13.32.

Tuntemattoman ionin ominaisvaraus voidaan määrittää massaspektrometrillä. Massaspektrometrejä on useita erilaisia, jotka toimivat hieman eri tavoin. Toimintaperiaate on kuitenkin kaikilla lähes samanlainen.

Massaspektrometri koostuu ionilähteestä, kiihdyttävästä sähkökentästä, nopeudenvalitsimesta, ilmaisimen magneettikentästä ja ilmaisimesta.

Ionilähteessä tutkittavan näytteen atomit tai molekyylit saavat sähkövarauksen. Näytteen atomit tai molekyylit voidaan ionisoida esimerkiksi korkeaenergiaisen säteilyn tai elektronisuihkun avulla.

Nopeudenvalitsimessa sähkö- ja magneettikentät ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, ja ioniin vaikuttaa sähköinen voima $F_E = QE$ sekä magneettinen voima $F_B = QvB$. Kun ioni liikkuu tietyllä nopeudella, nämä ioniin kohdistuvat voimat ovat tarkalleen yhtä suuret. Ionin Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$, ja kun suunnat huomioidaan $F_{E_2} - F_{B_2} = 0$. Yhtälöstä voidaan ratkaista ionin nopeus nopeudenvalitsimen jälkeen.

$$\cancel{Q}E = \cancel{Q}vB_1$$

$$v = \frac{E}{B_1}$$

Nopeudenvalitsimesta tarvitaan siis tietoa sen sähkökentän voimakkuudesta ja magneettivuon tiheyden suuruudesta.

Ilmaisimen magneettikenttään saapuvat vain tietyllä nopeudella kulkevat hiukkaset. Ilmaisimen magneettikentässä hiukkaset joutuvat ympyräradalle. Määritetään ominaisvaraus eli sähkövarauksen ja massan suhde.

$$F_B = ma_\mathrm{n}$$

$$QvB_2 = m\frac{v^2}{r}$$

$$QB_2 = m\frac{v}{r}$$

$$\frac{Q}{m} = \frac{v}{rB_2}$$

Sijoitetaan nopeudenvalitsimen yhtälöstä hiukkasen nopeuden arvo.

$$\frac{Q}{m} = \frac{v}{rB_2} = \frac{E}{rB_1B_2}$$

Hiukkanen osuu massaspektrometrin ilmaisimelle. Osumakohdasta voidaan määrittää lentoradan säde *r*. Ominaisvarauksen määrittämiseksi pitää tuntua myös ilmaisimen magneettikentän magneettivuon tiheys B_2

Tuloksen luotettavuuteen vaikuttaa mittausvälineiden luotettavuus, tarkoituksenmukaisuus mittausaika ja mittaajan taidot.

Massaspektrometrin ominaisuudet kuten sähkö- ja magneettikenttien homogeenisuus, sähkö- ja magneettikenttiä mittaavien mittareiden tarkkuus ja ilmaisimen erotuskyky vaikuttavat mittaustuloksen tarkkuuteen.

Tehtävä 13.33.

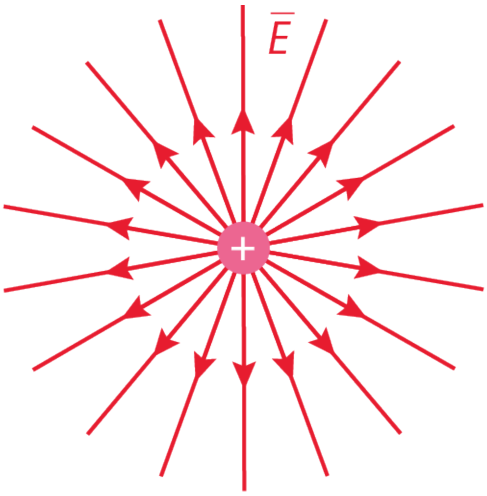
a) Kun sähkövaraus tai varaukset ovat paikallaan, varaukset aiheuttavat ympärilleen staattisen sähkökentän. Kun varaukset liikkuvat siten, että niiden liike aiheuttaa vakiona olevan sähkövirran, liikkuvat varaukset luovat staattisen magneettikentän. Esimerkiksi virtajohtimessa tai käämissä, jossa kulkee vakio sähkövirta, syntyy staattinen magneettikenttä. Staattinen magneettikenttä esiintyy myös ferromagneettisten aineiden alkeisalueissa.

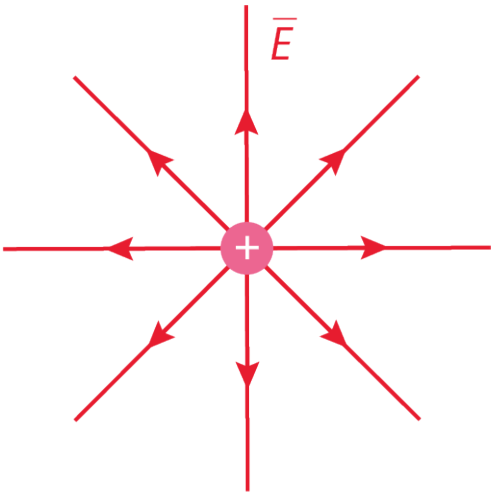
Sähkökenttä aiheuttaa varattuun hiukkaseen sähköisen voiman $F = QE$, jossa Q on sähkövarauksen suuruus ja E sähkökentän voimakkuus. Sähköisen voiman suunta on positiivisesti varatulle hiukkaselle sama kuin sähkökentän suunta ja negatiivisesti varatulle hiukkaselle vastakkaissuuntainen. Voiman suuruus ei riipu varatun hiukkasen liiketilasta.

Magneettikenttä aiheuttaa liikkuvaan varaukseen voiman $F = QvB\sin\alpha$, jossa Q on varauksen suuruus, v on varauksen nopeus, B on magneettivuon tiheys ja α on liikkeen suunnan ja magneettikentän suunnan välinen kulma. Voiman suunta saadaan oikean käden säännön mukaan. Magneettisen voiman suunta on vastakkainen positiivisesti ja negatiivisesti varatuille hiukkasille.

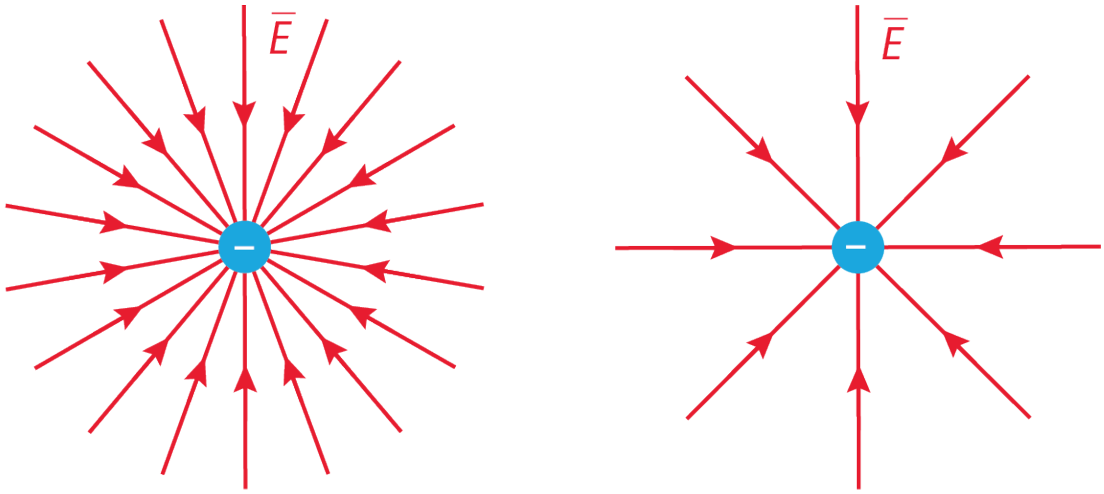
b) Sähkökentän kenttäviivat alkavat aina jostakin lähteestä. Pistemäisesti varatun hiukkasen ympärille syntyvä sähkökenttä alkaa varauksesta ja vaikuttaa äärettömän kauaksi. Magneettikentän kenttäviivat muodostavat suljettuja viivoja, joilla ei ole alku- eikä loppupistettä. Molempien kenttien kenttäviivaesityksessä viivojen tiheys kuvaa kentän voimakkuutta ja viivojen suunta ilmaisee kentän suunnan kyseisessä pisteessä.

Pistemäisen positiivisesti varatun hiukkasen ympärille aiheutuva sähkökenttä.

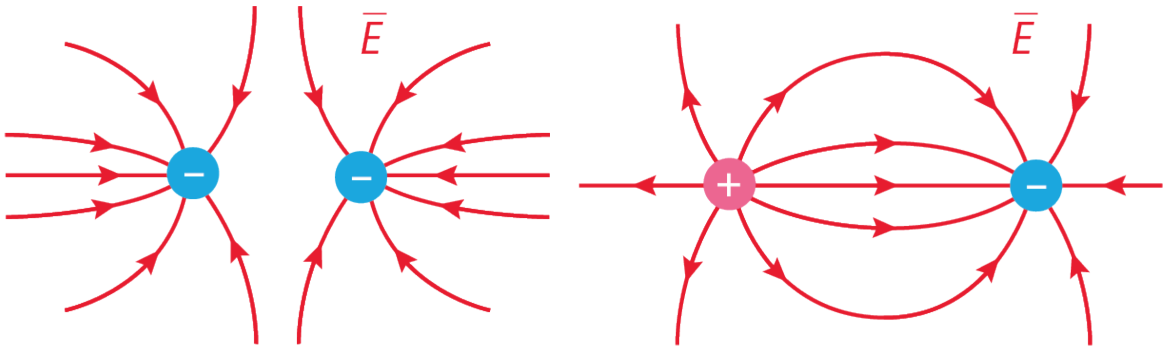




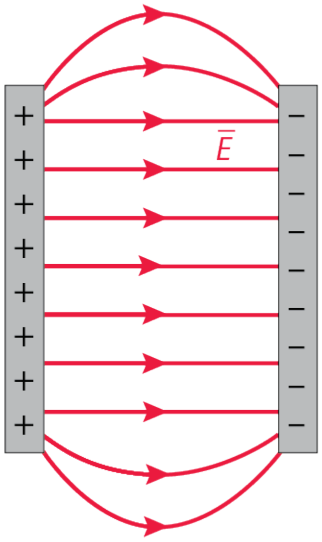
Vastaavasti negatiivisesti varatun hiukkasen ympärille syntynyt sähkökenttä.



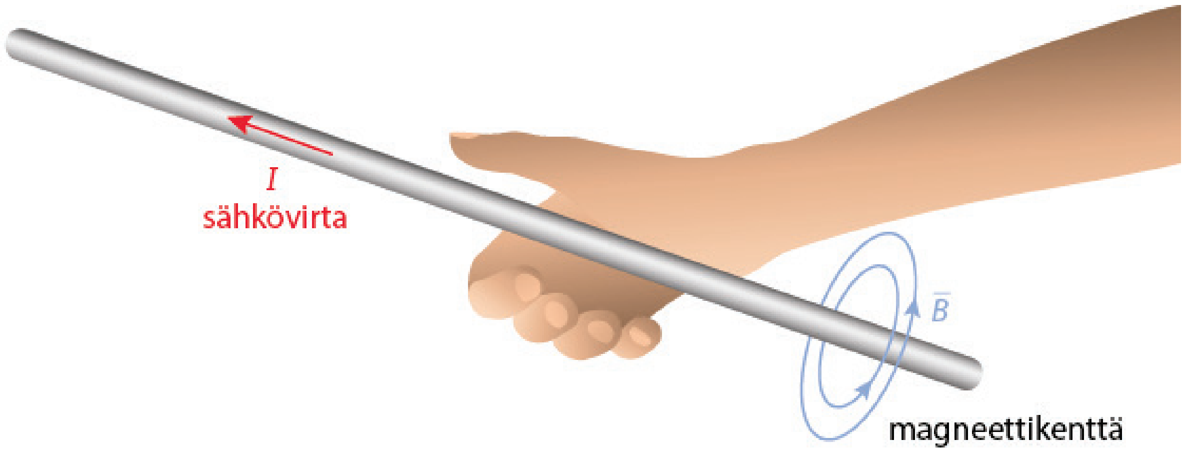
Kokonaissähkökentän muoto määräytyy sen perusteella, millaiset sähkövaraukset kentän aiheuttavat. Samanmerkkisesti varattujen hiukkasten ja eri merkkisesti varattujen hiukkasten muodostamat kokonaiskentät



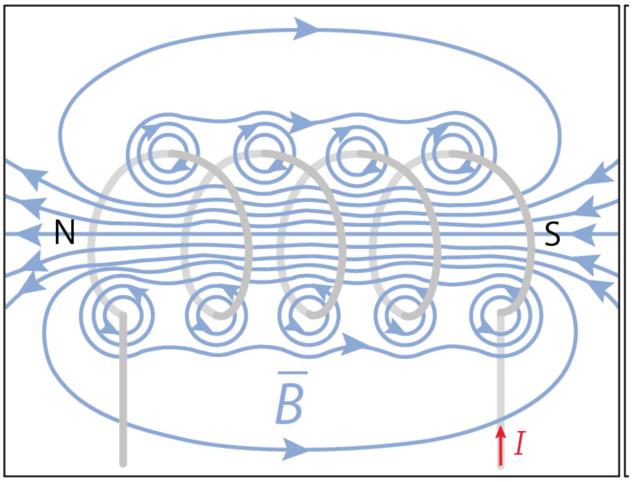
Yhdensuuntaisten varattujen levyjen välissä on homogeeninen sähkökenttä. Homogeenisen sähkökentän suunta ja sähkökentän voimakkuus ovat kaikkialla samat.



Suoran virtajohtimen ympärille syntynyt staattinen magneettikenttä, kun johtimessa kulkee vakio sähkövirta.



Käämiin aiheutunut magneettikenttä, kun käämissä kulkee vakio sähkövirta.



käämi

c) Sähkökentässä liikkuvaan varattuun hiukkaseen vaikuttaa sähkökentän suuntainen (positiivisesti varattu hiukkanen) tai sähkökentän suuntaa vastakkaiseen suuntaan (negatiivisesti varattu hiukkanen) oleva voima. Voiman suuruus riippuu vain hiukkasen sähkövarauksesta ja sähkökentän voimakkuudesta. Sähköinen voima aiheuttaa varatulle hiukkaselle kiihtyvyyden voiman suuntaan. Jos sähkökenttä on homogeeninen, sähköinen voima ja kiihtyvyys ovat vakioita. Tällöin hiukkanen on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä sähköisen voiman suuntaan. Hiukkasen nopeus siis muuttuu.

Lineaarikiihdyttimessä hyödynnetään sähkökentän aiheuttaman sähköisen voiman tekemää työtä. Sähköisen voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin hiukkasen liike-energian muutos eli $QU = \Delta E_{\mathrm{k}}$.

Magneettikentässä liikkuvaan hiukkaseen kohdistuu liikkeen suunnan ja magneettikentän suunnan määräämään tasoon nähden kohtisuorassa suunnassa vaikuttava voima. Magneettikenttä aiheuttaa liikkuvaan varaukseen voiman $F = QvB\sin\alpha$, jossa Q on varauksen suuruus, v on varauksen nopeus, B on magneettivuon tiheys ja α on liikkeen suunnan ja magneettikentän suunnan välinen kulma. Hiukkanen on kiihtyvässä liikkeessä magneettisen voiman suuntaan.

Jos homogeeninen magneettikenttä on kohtisuorassa hiukkasen nopeutta vastaan, hiukkaseen kohdistuva voima ja myös siitä aiheutuva kiihtyvyys on koko ajan kohtisuorassa hiukkasen nopeutta vastaan. Tällöin hiukkanen liikkuu tasaista ympyräliikettä.

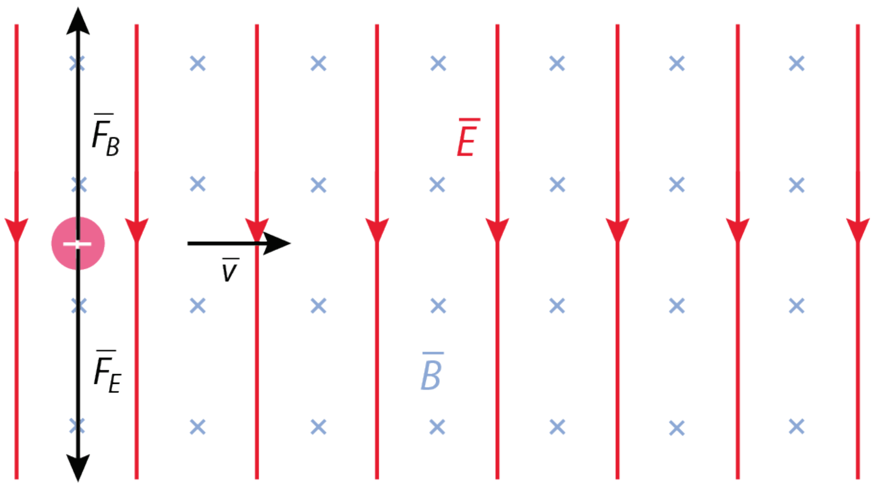
Syklotronissa hyödynnetään sekä sähkökenttää, että magneettikenttää hiukkasen nopeuden muutokseen. Sähkökenttä kasvattaa hiukkasen nopeutta ja siten myös liike-energiaa lineaarikiihdyttimen tavoin. Lisäksi syklotronissa hiukkanen liikkuu homogeenisessa magneetissa ympyrärataa. Tämä mahdollistaa hiukkaskiihdyttimelle pienen koon.

d) kiihdytysjännitte U = 120 000 V

ionin sähkövaraus $Q = 3e = 3 \cdot 1{,}602\,176 \cdot 10^{-19}$ C

magneettivuon tiheys on B = 0,035 T.

Kun varattu ioni liikkuu nopeusvalitsimen sähkö- ja magneettikentässä, ioniin kohdistuu sähköinen voima $F_\mathrm{E} = QE$ ja magneettinen voima $F_\mathrm{B} = QvB$. Ioni kulkee suoraan nopeusvalitsimen läpi. Kuva tilanteesta, jossa ioni liikkuu nopeusvalitsimessa



Tällöin Newtonin II lain mukaan ioniin kohdistuvien voimien summa on nolla eli suunna huomioituina

$F_\mathrm{E} - F_\mathrm{B} = 0.$

Sijoitetaan edellä olevat voimien yhtälöt ja saadaan

$QE - QvB = 0$

$E = vB.$

Lasketaan nopeus, jolla ionit saapuvat kiihdytyksen jälkeen nopeusvalitsimeen. Työperiaatteen mukaan sähköinen voima tekee työtä ja sähköisen voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin ionin liike-energian muutos eli $QU = \Delta E_{\mathrm{k}}$. Oletetaan, että ionien nopeus kiihdytyksen alussa oli nolla, joten myös ionin liike-energia alussa oli nolla. Tällöin työperiaatteen avulla voidaan ratkaista ionin nopeus.

$$E_{\mathrm{kl}} - E_{\mathrm{ka}} = QU$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = QU$$

$$v = \sqrt{\frac{2QU}{m}}$$

Sijoitetaan nopeuden lauseke sähkökentän voimakkuuden lausekkeeseen ja saadaan sähkökentän voimakkuuden suuruus.

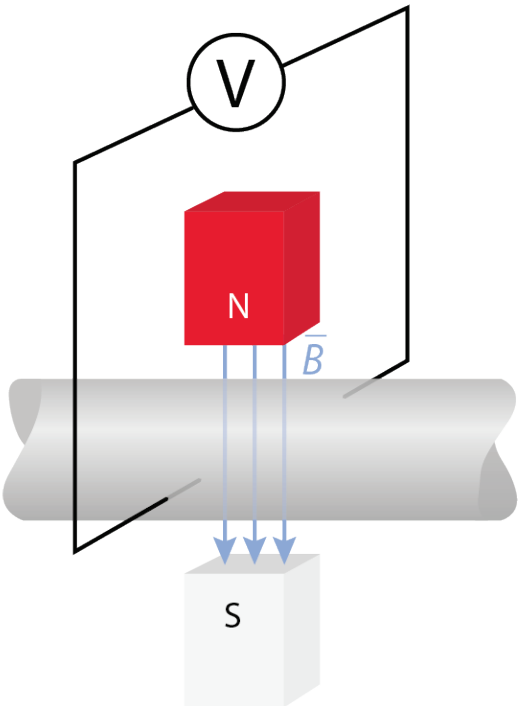
$$E = vB = \sqrt{\frac{2QU}{m}}B$$

$$E = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{C} \cdot 120\,000\ \mathrm{V}}{\left(39{,}962\,383 - 3 \cdot 5{,}4858 \cdot 10^{-4}\right) \cdot 1{,}660\,5402 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}} \cdot 0{,}035\ \mathrm{T}$$

$$E = 46\,147{,}495\ \mathrm{V/m} \approx 46\ \mathrm{kV/m}$$

Tehtävä 13.34.

a) Kun neste virtaa kuvan mukaisesti oikealle, vaikuttaa positiivisiin ioneihin oikean käden säännön mukaisesti voima, jonka suunta on kuvassa katsojasta poispäin. Vastaavasti negatiivisiin ioneihin vaikuttaa voima kohti katsojaa. Silloin putken etu- ja takaseinän välillä on potentiaaliero. Jännitemittarin elektrodit tulee kytkeä putken etu- ja takaseinän välille vaakasuuntaisesti.



b) Hallin jännite U_H = 0,58 mV = $0{,}58 \cdot 10^{-3}$ V

putken sisähalkaisija d = 8,0 mm = $8{,}0 \cdot 10^{-3}$ m

magneettivuon tiheys B = 450 mT= 0,450 T

Kun positiivinen ioni liikkuu liuoksen mukana nopeudella v, siihen vaikuttaa magneettikentän kohdalla voima $F_B = QvB$. Voiman vaikutuksesta positiiviset ionit siirtyvät putken etureunaan, ja putken etu- takareunan välillä voidaan mitata Hallin jännite.

Putkessa on silloin vaakasuuntainen sähkökenttä, joka vaikuttaa putkessa liikkuviin ioneihin voimalla

$F_E = QE = Q\frac{U_\mathrm{H}}{d}$.

Kun sähköinen voima on kasvanut yhtä suureksi kuin magneettinen voima, ioneja ei enää siirry sivusuunnassa, ja Hallin jännite vakiintuu tiettyyn arvoonsa. Silloin $\sum \overline{F} = \overline{0}$ ja $F_E = F_B$ eli

$$\cancel{Q}vB = \cancel{Q}E$$

$$vB = \frac{U_\mathrm{H}}{d}$$

$$v = \frac{U_\mathrm{H}}{Bd} = \frac{0{,}58 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V}}{0{,}450\ \mathrm{T} \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}} = 0{,}161\,11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Nesteen virtausnopeus oli mittauksen perusteella 0,16 m/s.

c) Kun sähkövirran suunta pysyy samana, positiiviset varauksenkuljettajat kulkevat sähkökentässä eri suuntaan kuin negatiiviset varauksenkuljettajat. Oikean käden säännön perusteella elektronit ja aukot pakkautuvat johdekappaleen samalle reunalle. Siksi negatiivisten elektronien ja positiivisten aukkojen aiheuttamat Hallin jännitteet ovat eri suuntaiset.

14 Sähkömagneettinen induktio

Harjoittele

Tehtävä 14.1.

Oikeat vastaukset:

a) A

b) B

c) C

d) C

e) B

f) A

g) B

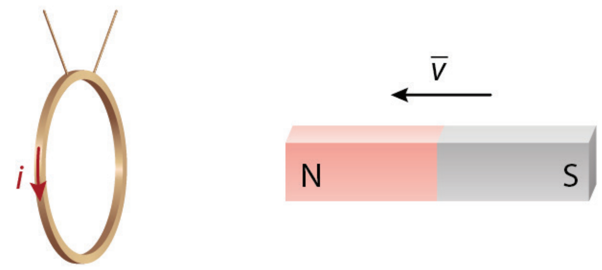
h) B

i) C

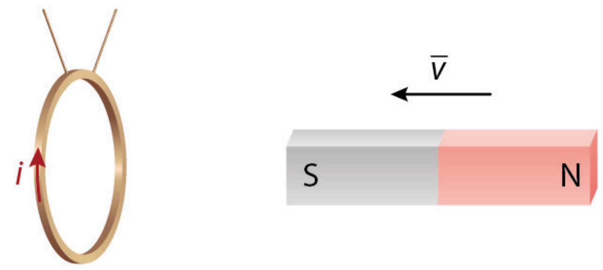
j) A

Tehtävä 14.2.

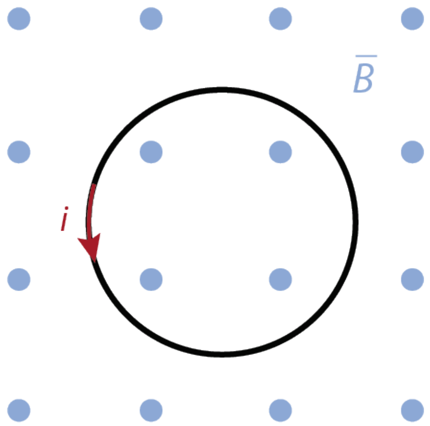
a) Sauvamagneetti lähestyy johdinsilmukkaa, jolloin magneettivuo silmukan läpi kasvaa. Silmukkaan indusoituu sähkövirta, joka Lenzin lain mukaan vastustaa magneettivuon muutosta. Silmukkaan indusoitunut sähkövirta kulkee oikean käden säännön mukaan silmukan etureunassa alaspäin.



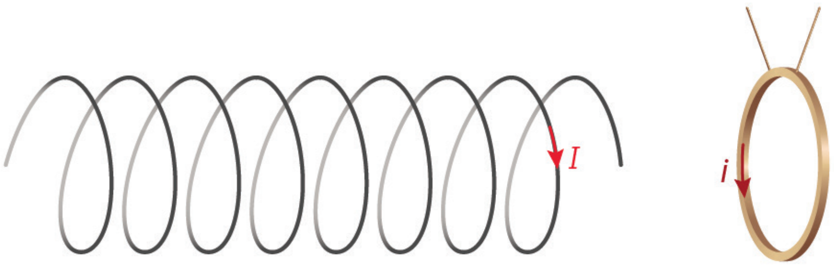
b) Sauvamagneetti lähestyy johdinsilmukkaa, jolloin magneettivuo silmukan läpi kasvaa. Silmukkaan indusoituu sähkövirta, joka Lenzin lain mukaan vastustaa magneettivuon muutosta. Silmukkaan indusoitunut sähkövirta kulkee oikean käden säännön mukaan silmukan etureunassa ylöspäin.



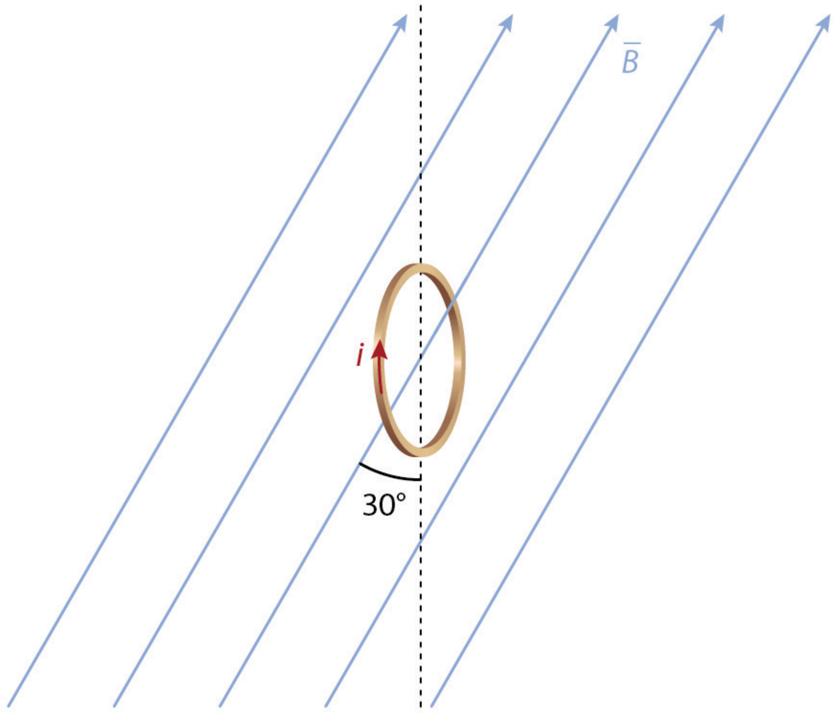
c) Magneettivuon tiheys pienenee, jolloin myös magneettivuo silmukan läpi pienenee. Silmukkaan indusoituu sähkövirta, joka Lenzin lain mukaan vastustaa magneettivuon muutosta. Silmukkaan indusoitunut sähkövirta kulkee oikean käden säännön mukaan vastapäivään.



d) Kun käämissä kulkeva sähkövirta pienenee, käämin magneettikentän magneettivuo myös pienenee. Käämissä kulkeva sähkövirta synnyttää käämiin magneettikentän oikean käden säännön mukaan kuvassa oikealle. Kun käämin magneettikentän magneettivuo pienenee, myös magneettivuo silmukan läpi pienenee. Lenzin lain mukaan silmukkaan indusoituu sähkövirta, joka pyrkii vastustamaan magneettivuon pienenemistä. Induktiovirran suunta voidaan päätellä oikean käden säännön avulla. Syntyneen virran suunta on mukaan silmukan etureunassa alaspäin.

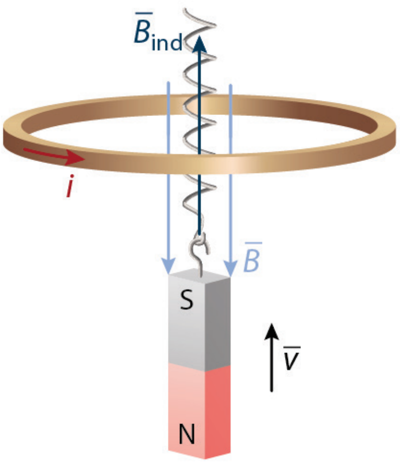


e) Kun magneettivuon ja silmukan välistä kulmaa aletaan kasvattaa, magneettivuo silmukan läpi kasvaa. Silmukkaan indusoituu sähkövirta, joka Lenzin lain mukaan vastustaa magneettivuon muutosta. Silmukkaan indusoitunut sähkövirta kulkee oikean käden säännön mukaan silmukan etureunassa ylöspäin.

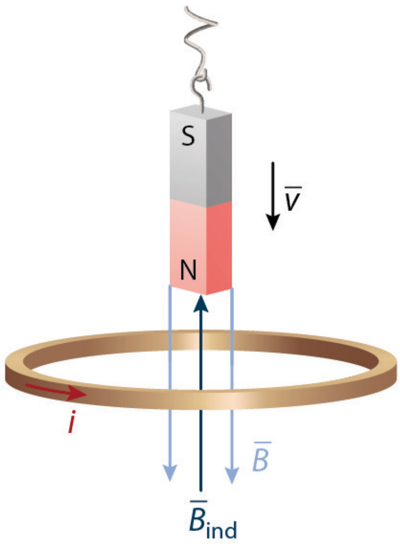


Tehtävä 14.3.

a) Kun magneetti liikkui ylöspäin silmukkaa kohti, magneettivuo silmukan läpi kasvoi ja silmukkaan indusoitui sähkövirta. Indusoituneen sähkövirran aiheuttama magneettikenttä pyrki vastustamaan magneettivuon muutosta. Induktiovirta kulki Lenzin lain mukaan silmukassa vastapäivään.



b) Kun magneetti liikkui alaspäin silmukkaa kohti, magneettivuo silmukan läpi kasvoi ja silmukkaan indusoitui sähkövirta. Indusoituneen sähkövirran aiheuttama magneettikenttä pyrki vastustamaan magneettivuon muutosta. Induktiovirta kulki Lenzin lain mukaan oli silmukassa vastapäivään.



Tehtävä 14.4.

magneettivuon tiheys alussa B_1 = 0,72 mT = 0,72 · 10^{-3} T

magneettivuon tiheys lopussa B_2 = 0 T

magneettivuon muutokseen kulunut aika Δt = 0,014 s

Silmukan pinta-ala A = 28,3 cm^2 = 28,3 · 10^{-4} m^2

Induktiolain mukaan silmukkaan indusoitunut jännite oli

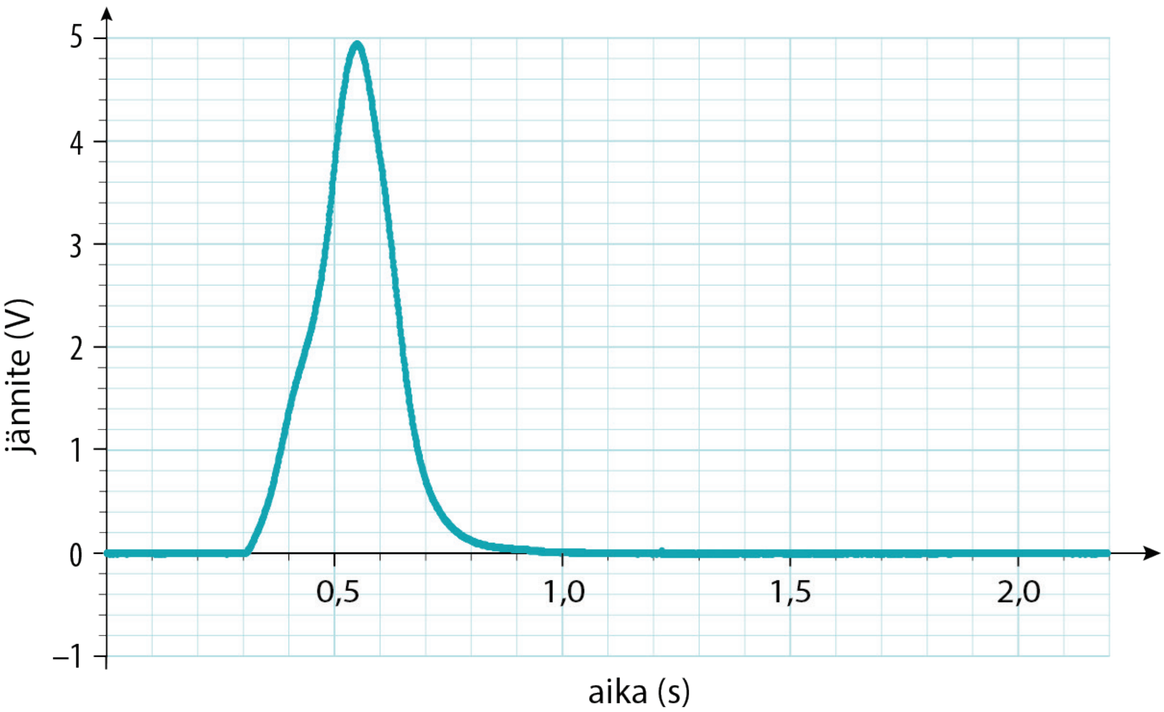
$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta BA}{\Delta t} = -\frac{(B_2 - B_1)A}{\Delta t}$$

$$= -\frac{(0\ \text{T} - 0{,}72 \cdot 10^{-3}\ \text{T}) \cdot 28{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{0{,}014\ \text{s}} = 1{,}4554 \cdot 10^{-4}\ \text{V} \approx 0{,}15\ \text{mV}$$

Lenzin lain mukaan induktiovirran suunta on aina sellainen, että induktiovirran vaikutukset vastustavat muutosta, joka aiheuttaa induktion. Kun magneettivuo silmukan keskellä heikkenee, syntyy induktiovirta, joka pyrkii ylläpitämään häviävää magneettikenttää. Induktiovirran aiheuttaman magneettikentän suunta on silloin alkuperäisen kentän suuntainen eli silmukan keskellä poispäin katsojasta. Oikean käden säännön perusteella sähkövirran suunta on silloin silmukassa myötäpäivään.

Tehtävä 14.5.

a)

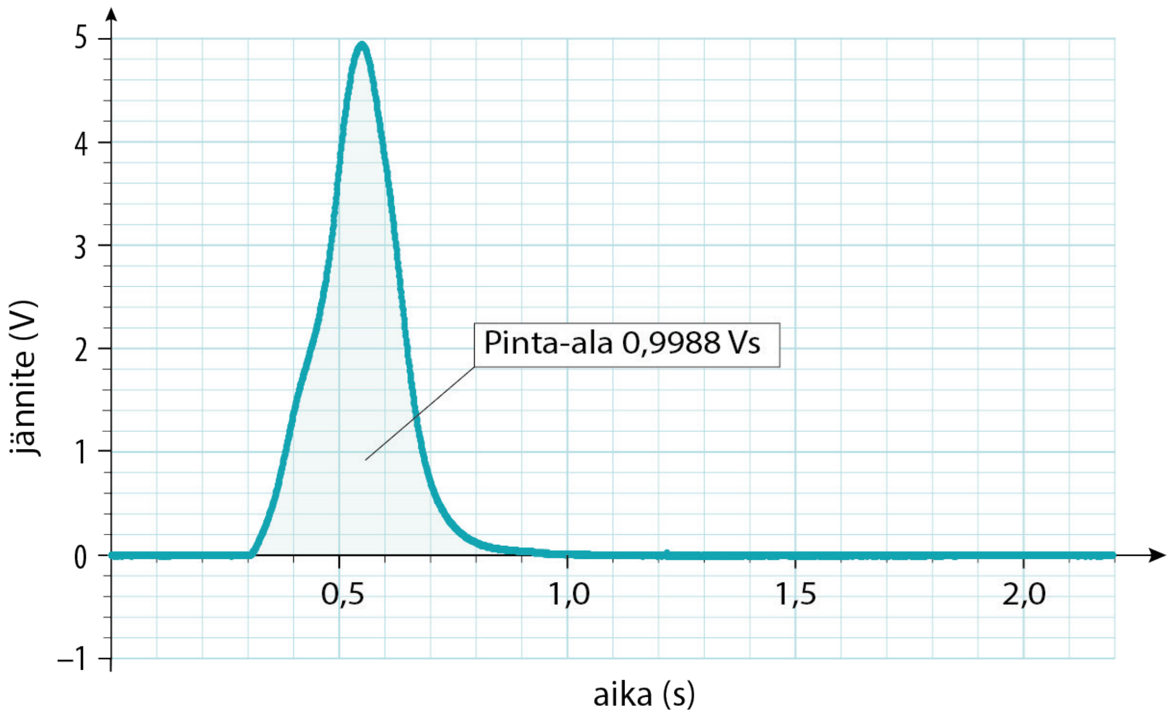


b) Alussa käämi oli paikallaan magneetin sisällä ja käämin jännite oli nolla. Kun sauvamagneetti alkoi liikkua, käämin läpi kulkeva magneettivuo muuttui ja käämin indusoitui induktiolain mukaan jännite $e = -N\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$.

Jännitteen etumerkki riippuu magneetin asennosta sekä jänniteanturin kytkennästä. Kun käämin läpi kulkeva magneettivuo ei enää muuttunut, käämin jännite pieneni nollaan.

c) Kun käämin läpi kulkeva magneettivuo muuttuu, käämiin indusoitunut jännite on $e = -N\dfrac{\Delta \Phi}{\Delta t}$. Käämin läpi kulkeva magneettivuo on $\Delta \Phi = -\dfrac{e\Delta t}{N}$.

Käämin magneettivuon muutos saadaan (t, e)-koordinaatiston kuvaajan ja aika-akselin rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta.



Käämin läpi kulkeva magneettivuon muutos oli

$\Delta\varphi = 0{,}9988\ \text{Wb} \approx 1{,}0\ \text{Wb}$.

Tehtävä 14.6.

a) Kun kevyeen tankoon kiinnitetty alumiinilevy laitettiin heilahtamaan kahden neodyymimagneetin välissä, alumiinilevyn heilahtelu vaimeni, kun levy liikkui magneettien väliin. Kun vastaava koe suoritettiin kampamaisella levyllä, levyn heilahtelun vaimeneminen kesti huomattavasti kauemmin. Kampamaisen levyn tapauksessa voidaan kuitenkin havaita, että heilahtelun amplitudi pienenee jokaisella heilahduskerralla.

b) Alumiinilevy on paramagneettista ainetta, joten levyyn vaikuttava magneettinen voima on erittäin pieni, jos levy on magneettien läheisyydessä paikallaan.

Kun alumiinilevy liikkuu neodyymimagneettien väliin, alumiinilevyn kohdalla magneettivuo kasvaa ja levyyn indusoitui pyörrevirtoja. Alumiinilevyssä kulkevat pyörrevirrat aiheuttavat magneettikentän, joka vastustaa magneettivuon muutosta. Pyörrevirtojen aiheuttama magneettikenttä on vastakkaissuuntainen neodyymimagneettien magneettikenttiin nähden.

Neodyymimagneettien magneettikentän ja alumiinilevyyn indusoituneiden pyörrevirtojen synnyttämän magneettikentän vuoksi alumiinilevyyn vaikuttaa magneettinen voima, joka on alumiinilevyn liikkeen suunnalle vastakkainen. Magneettinen voima hidastaa levyn liikettä ja levyn nopeus pienenee.

Sama hidastuminen tapahtuu, kun alumiinilevy liikkuu pois neodyymimagneettien välistä. Silloinkin magneettivuo muuttuu alumiinilevyn kohdalla, ja indusoituu pyörrevirtoja. Pyörrevirtojen aiheuttama magneettikenttä on samansuuntainen neodyymimagneetin magneettikentän kanssa. Alumiinilevyyn vaikuttaa magneettinen voima, joka on alumiinilevyn liikkeen suunnalle vastakkainen ja hidastaa alumiinilevyn liikettä.

Yhtenäiseen alumiinilevyyn syntyvät pyörrevirrat ovat suuria, jolloin magneettinen voima on myös suuri, ja levyn heilahtelu vaimenee tilanteessa nopeasti. Lopulta tangon ja statiivin välinen kitka pysäyttää levyn liikkeen.

Kun yhtenäisen alumiinilevyn tilalle vaihdetaan kampamainen alumiinilevy, kampamaiseen levyyn indusoituu samansuuntaisia pyörrevirtoja kuin yhtenäiseen alumiinilevyyn. Kampamaiseen levyyn syntyvät pyörrevirrat ovat huomattavasti pienempiä kuin yhtenäiseen alumiinilevyyn syntyvät pyörrevirrat. Tällöin magneettinen vuorovaikutus kampamaisen alumiinilevyn pyörrevirtojen synnyttämän magneettikentän ja magneettien magneettikentän välillä on huomattavasti pienempi kuin yhtenäisen alumiinilevyn tilanteessa. Pienemmän magneettisen voiman vuoksi kampamaisen alumiinilevyn vaimeneminen kestää huomattavasti kauemmin kuin yhtenäisen alumiinilevyn.

Tehtävä 14.7.

johdintangon pituus $l = 1{,}0$ m

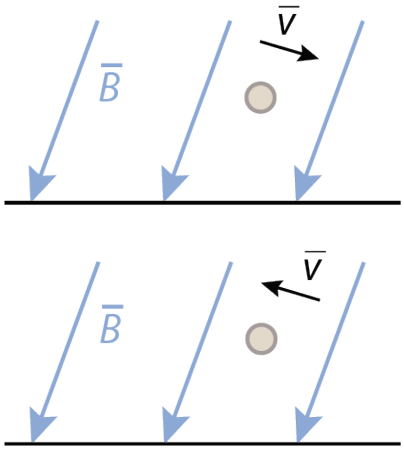
magneettivuon tiheys $B = 49\ \mu\text{T} = 49 \cdot 10^{-6}$ T

inklinaatiokulma $\alpha = 72°$

induktiojännite $e = 1{,}0\ \text{mV} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ V

Johdintankoon indusoituva jännite riippuu tangon pituudesta l, tangon nopeudesta v sekä magneettivuon tiheydestä B siten, että indusoituva jännite on suurimmillaan, kun tanko on kohtisuorassa kenttään nähden ja tanko liikkuu kenttää ja tangon pituutta vastaan kohtisuorassa suunnassa. Indusoituva jännite on $e = l_{\perp}v_{\perp}B_{\perp}$.

Pienin vaadittava nopeus saadaan siten tilanteessa, jossa tanko kohtisuorassa kenttään nähden, eli tangon pää on kohti katsojaa, ja tanko liikkuu magneettikenttää vastaan kohtisuoraan suuntaan eli joko kuvassa oikealle 18°:n kulmassa vaakasuunnasta alaspäin tai vasemmalle 18°:n kulmassa vaakasuunnasta ylöspäin.



Nopeuden suuruus on tällöin

$$e = lvB$$

$$v = \frac{e}{lB} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{V}}{1{,}0\ \text{m} \cdot 49 \cdot 10^{-6}\ \text{T}} = 20{,}408\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehtävä 14.8.

käämin pyörimistaajuus $f = \dfrac{504}{60\,\text{s}}$

käämin silmukan pinta-ala A = 2,4 cm^2

käämin silmukoiden lukumäärä N = 800

magneettikentän magneettivuon tiheys B = 0,38 T

a) Käämiin indusoituneen jännitteen suurin arvo eli huippuarvo oli

$$u_0 = NBA2\pi f = 800 \cdot 0{,}38\,\text{T} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{504}{60\,\text{s}} = 3{,}8507\,\text{V} \approx 3{,}9\,\text{V}.$$

b) Käämin indusoitunut jännite noudattaa yhtälöä

$$u(t) = u_0 \sin(2\pi f t) = NBA2\pi f \sin(2\pi f t)$$

$$= 800 \cdot 0{,}38\,\text{T} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{504}{60\,\text{s}} \cdot \sin(2\pi \cdot \frac{504}{60\,\text{s}} \cdot t)$$

$$= 3{,}8507\,\text{V} \cdot \sin(52{,}778\,756\,58\,\frac{1}{s} \cdot t)$$

$$\approx 3{,}85\,\text{V} \cdot \sin(52{,}8\,\frac{1}{\text{s}} \cdot t).$$

c) Jännite ajanhetkellä t = 45 s oli

$$u(t) = u_0 \sin(2\pi f t) = NBA2\pi f \sin(2\pi f t)$$

$$= 800 \cdot 0{,}38\,\text{T} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{504}{60\,\text{s}} \cdot \sin(2\pi \cdot \frac{504}{60\,\text{s}} \cdot 45\,\text{s})$$

$$= -2{,}211\,\text{V} \approx -2{,}2\,\text{V}.$$

Tehtävä 14.9.

a) Arvokilven mukaan valaisimen vaihtojännitteen taajuus f = 50 Hz.

b) Arvokilven mukaan valaisin kytketään sähköverkon vaihtojännitteeseen 230 V. Tämä tarkoittaa, että valaisimen jännitteen tehollisarvo on U = 230 V. Valaisimen huippujännitteen arvo on

$$u_0 = \sqrt{2}U = \sqrt{2} \cdot 230\ \text{V} = 325{,}26\ \text{V} \approx 325\ \text{V}.$$

c) Valaisimen sähköteho suurimmillaan on P = 38 W. Valaisimen sähkövirran tehollisarvo saadaan sähkötehon avulla

$$I = \frac{P}{U}.$$

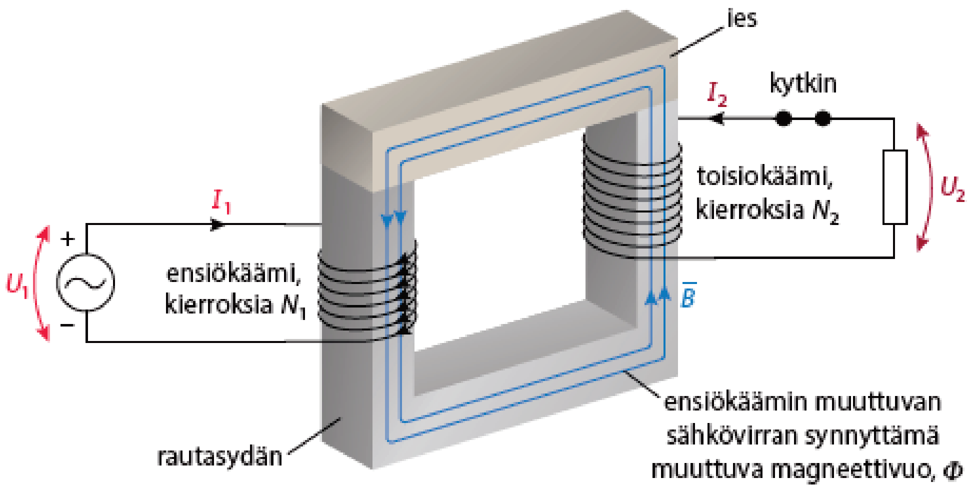
Vaihtovirran suuri arvo on vaihtovirran huippuarvo eli

$$i_0 = \sqrt{2}I = \sqrt{2}\frac{P}{U} = \sqrt{2} \cdot \frac{38\ \text{W}}{230\ \text{V}} = 0{,}233\,65\ \text{A} \approx 0{,}23\ \text{A}.$$

Tehtävä 14.10.

a) Muuntaja koostuu kahdesta käämistä, jotka on induktiivisesti kytketty. Induktiiivisessa kytkennässä toisen käämin synnyttämä magneettikenttä kulkee osittain tai kokonaan toisen käämin läpi. Ideaalitilanteessa kytkennässä molempien käämien läpi kulkee yhtä suuri magneettivuo, joten magneettivuon muutosnopeudet ovat käämeissä yhtä suuret.

Kun ensiökäämin napojen välinen jännite muuttuu, myös ensiökäämissä kulkeva sähkövirta muuttuu. Sähkövirran muutos muuttaa käämin ja rautasydämen läpäisevää magneettivuota. Koska sama magneettivuo läpäisee toisiokäämin, muutos indusoi toisiokäämiin induktiolain mukaisesti jännitteen.



Käämien johdinten kierrosten lukumäärät vaikuttavat induktiojännitteen suuruuteen. Kierrosten lukumäärän suhde on käämin muuntosuhde, ja ideaalisen muuntajan käämien jännitteet ja sähkövirrat riippuvat muuntosuhteesta $\frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2}$. Kierroslukujen sopivalla valinnalla muuntajan avulla voidaan siten alentaa tai kasvattaa jännitettä ja vastaavasti kasvattaa tai pienentää sähkövirtaa.

b) Muuntajan tehohäviöt johtuvat käämien johdinten resistanssista ja rautasydämeen indusoituvista pyörrevirroista.

Käämien johdinlankojen resistanssin vuoksi käämilanka lämpenee sähkövirran vaikutuksesta. Silloin osa virtapiiriin syötetystä energiasta muuntuu käämilankojen sisäenergiaksi, joka havaitaan lankojen lämpenemisenä.

Muuntajan sydän on usein valmistettu ohuista rautalevyistä. Kun rautasydämen kohdalla magneettivuo muuttuu, sydämeen indusoituu pyörrevirtoja. Jos sydän olisi valmistettu yhtenäisestä rautakappaleesta, pyörrevirrat olisivat vielä suurempia. Pyörrevirrat lämmittävät muuntajan sydäntä, ja osa käämin magneettikentän energiasta muuntuu sydämen sisäenergiaksi ja sydän lämpenee.

Lisäksi energiahäviöitä aiheutuu siitä, että muuntajan sydämen ferromagneettisen materiaalin magnetoitumissuunta muuttuu vaihtovirran taajuudella.

Tehtävä 14.11.

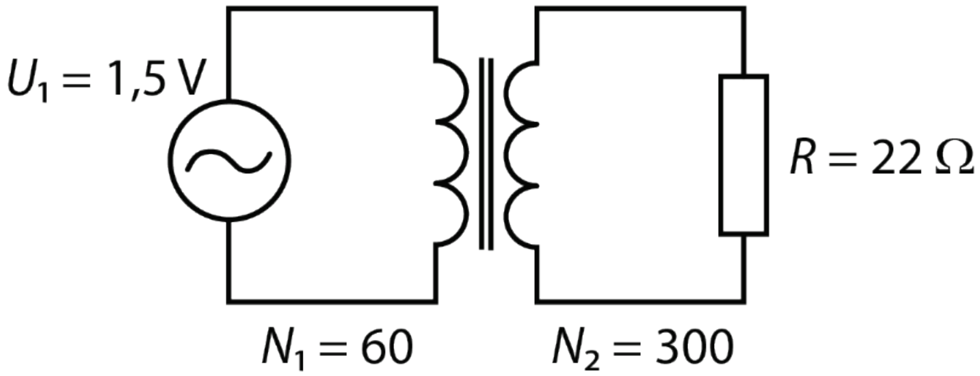
ensiökäämin kierrosten lukumäärä N_1 = 60

toisiokäämin kierrosten lukumäärä N_2 = 300

ensiöpuolen jännitteen tehollisarvo U_1 = 1,5 V

vastuksen resistanssi R = 22 Ω

a)



b) Ratkaistaan toisiopuolen jännitteen tehollisarvo muuntajan muuntosuhteesta.

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2}$$

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1}U_1 = \frac{300}{60} \cdot 1{,}5\ \text{V} = 7{,}5\ \text{V}$$

Toisiopuolen jännite on 7,5 V.

c) Muuntajan toisiopuolen käämin päiden välinen jännite on yhtä suuri kuin vastuksen päiden välinen jännite eli $U_2 = U_R$. Vastuksessa kulkeva sähkövirta saadaan Ohmin lain avulla.

$$U_2 = RI_2$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R}$$

Ensiöpuolen sähkövirta saadaan yhdistämällä edellinen tulos muuntosuhteeseen.

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = \frac{N_2}{N_1}\frac{U_2}{R}$$

Lasketaan toisiopuolen sähkövirran huippuarvo

$$i_{02} = \sqrt{2} I_2 = \sqrt{2}\frac{U_2}{R} = \sqrt{2} \cdot \frac{7{,}5\ \mathrm{V}}{22\ \Omega} = 0{,}4821\ \mathrm{A} \approx 0{,}48\ \mathrm{A}.$$

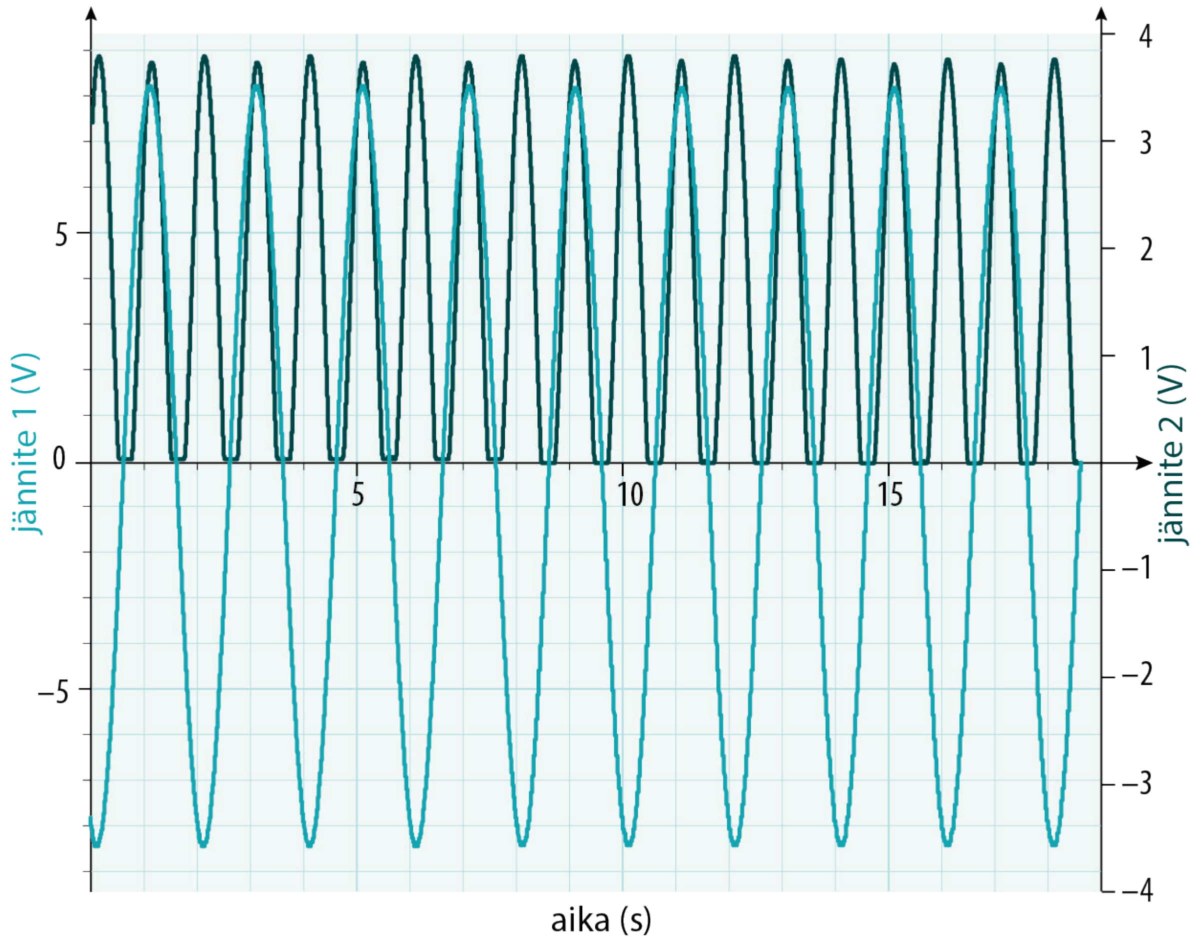
Lasketaan ensiöpuolen sähkövirran huippuarvo

$$i_{01} = \sqrt{2} I_1 = \sqrt{2}\frac{N_2}{N_1}\frac{U_2}{R} = \sqrt{2} \cdot \frac{300}{60} \cdot \frac{7{,}5\ \mathrm{V}}{22\ \Omega} = 2{,}410\,59\ \mathrm{A} \approx 2{,}4\ \mathrm{A}.$$

Muuntajassa kulkee vaihtovirta. Vaihtovirta saa arvot positiivisen ja negatiivisen huippuarvon väliltä. Ensiöpuolen sähkövirta on välillä −2,4 A … 2,4 A ja toisiopuolen on välillä −0,48 A … 0,48 A.

Tehtävä 14.12.

a)



b) Signaaligeneraattori jännite oli vaihtojännitettä, jonka napaisuus vaihteli jaksollisesti. Tasasuuntaussilta muutti vaihtojännitteen siten, että tasasuuntaussillan päiden välisen jännitteen napaisuus oli aina sama. Jos tasasuuntaussiltaan oli kytketty vastus, vastuksen napaisuus oli sama kuin tasasuuntaussillan napaisuus. Edellä olevan perustella jännite 1 oli signaaligeneraattorin jännite ja jännite 2 oli tasasuuntaussiltaan kytketyn vastuksen päiden välinen jännite.

c) Jännite 2 saa vain positiivisia arvoja. Tasasuuntaussilta aiheuttaa, että vastuksen päiden napaisuus pysyy koko ajan samana. Vastuksen päiden välisen jännitteen arvot ovat pienempiä kuin signaaligeneraattorin jännitteen arvot. Tasasuuntaussillassa olevat ledit aiheuttavat jännitehäviötä, mikä selittää vastuksen päiden välisen pienemmän jännitteen.

Tehtävä 14.13.

a) A

b) H

c) F

d) G

e) C

Tehtävä 14.14.

a) Kun magneetti putoaa kupariputken sisällä, kupariputken läpi kulkeva magneettivuo muuttuu ja kupariputkeen indusoituu pyörrevirtoja. Pyörrevirrat synnyttävät magneettikentän, joka Lenzin lain mukaan vastustaa magneettivuon muutosta. Tällöin putoavan magneetin magneettikentän ja pyörrevirtojen synnyttämän magneettikentän välille syntyy magneettinen vuorovaikutus, joka aiheuttaa putoavaan magneettiin liikettä vastakkaiseen suuntaan olevan voima.

b) kupariputken pituus s = 0,32 m

punnukseen vaikuttava magneettinen voima F = 0,118 N

magneetin korkeus alussa pöydän pinnasta h = 0,45 m

magneetin massa m = 0,0124 kg

putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s²

Kun punnus putosi kupariputken sisällä, punnukseen vaikutti keskimäärin koko putken matkan s magneettinen voima F punnuksen liikkeen suuntaa vastaan. Tarkastellaan punnuksen putoamista mekaniikan energiaperiaatteella.

$E_{p,1} + E_{k,1} - W = E_{p,2} + E_{k,2}$

Sovitaan potentiaalienergian nollatasoksi pöydän pinta. Kun punnus osui pöydän pintaan, punnuksen potentiaalienergia oli nolla. Punnus oli alussa paikallaan, jolloin tilanteen alussa punnuksen liike-energia oli nolla. Mekaniikan energiaperiaatteeksi saadaan

Kun punnus osui pöytään, punnuksen nopeus oli

$$mgh - Fs = \frac{1}{2}mv^2$$

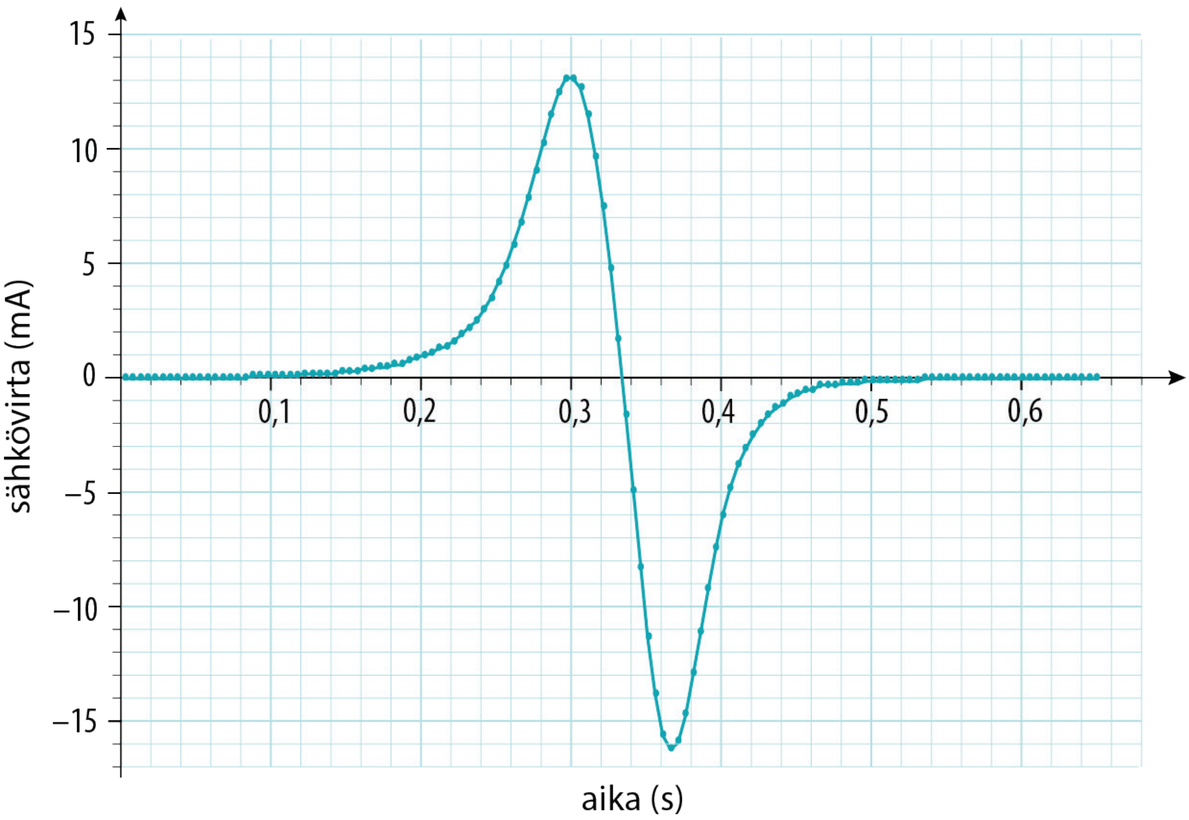
$$2mgh - 2Fs = mv^2$$

$$v = \sqrt{2\left(gh - \frac{Fs}{m}\right)} = \sqrt{2\cdot\left(9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}45\,\text{m} - \frac{0{,}118\,\text{N}\cdot 0{,}32\,\text{m}}{0{,}0124\,\text{kg}}\right)}$$

$$= 1{,}654\,89\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehtävä 14.15.

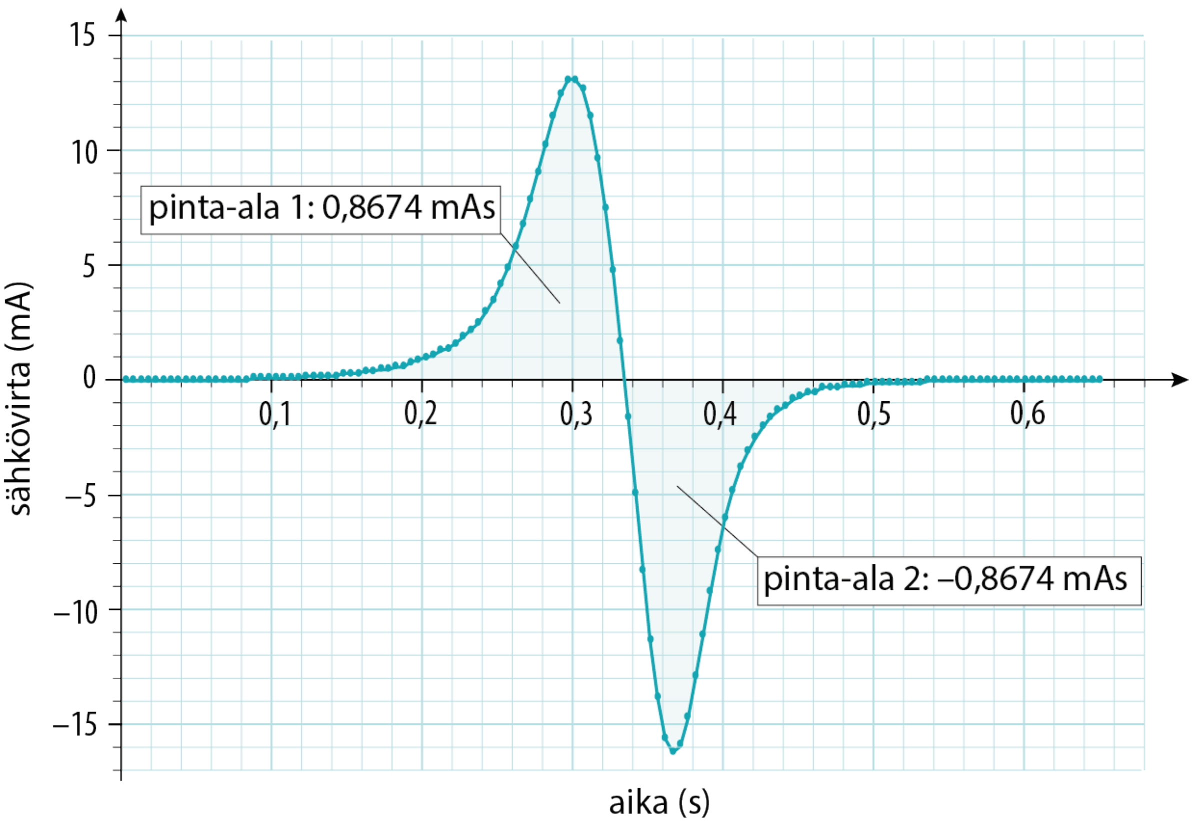
a)



Kun sauvamagneetti tulee käämin sisään, magneettivuo käämin läpi kasvaa. Muuttuva magneettivuo indusoi käämiin jännitteen induktiolain $e = -N\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ mukaisesti. Käämi on kytketty virta-anturiin, joten virtapiiri on suljettu. Olkoon käämin resistanssi R. Induktiojännite synnyttää Ohmin lain mukaan sähkövirran $i = \dfrac{e}{R}$. Piirissä kulkee sähkövirta, koska virtapiiri on suljettu ja käämin läpäisevä magneettivuo muuttuu.

b) Sähkövirta on johtimen poikkipinnan läpäisevä sähkövarausten määrä tietyssä aikayksikössä, jolloin sähkövaraus ΔQ ja sähkövirta I liittyvät toisiinsa yhtälön $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ mukaisesti. Sähkövaraus $\Delta Q = I\Delta t$, joka saadaan määrittämällä sähkövirran kuvaajan ja aika-akselin väliin jäävän alueen fysikaalinen pinta-ala.

Jaetaan pinta-alan määritys kahteen osaa. Määritetään ensin pinta-ala sähkövirran etumerkin vaihtumiseen asti ja saadaan sähkövarauksen muutos ΔQ_1. Tämän jälkeen määritetään pinta-ala sähkövirran etumerkin vaihtumisen jälkeen ja saadaan sähkövarauksen muutos ΔQ_2.



Varausten muutosten suuruudet ovat

$\Delta Q_1 = 0{,}8674$ mAs

$\Delta Q_2 = 0{,}8674$ mAs

Havaitaan, että varausten muutosten suuruudet ovat yhtä suuret.

Tehtävä 14.16.

a) Kun kytkin suljetaan, sähkövirta kulkee käämin läpi ja aiheuttaa käämin keskelle rautasydämeen magneettikentän. Koska alumiinirengas on asetettu käämin kanssa samalle akselille, magneettivuo kasvaa myös alumiinirenkaan keskellä. Muuttuva magneettivuo indusoi alumiinirenkaaseen sähkövirran, jonka suunta on Lenzin lain mukaisesti sellainen, että induktiovirran synnyttämä magneettikenttä vastusta magneettivuon kasvua.

Tällöin käämin rautasydämen kohdalla magneettikentän suunta on vastakkainen alumiinirenkaaseen induktiovirran vuoksi syntyvän magneettikentän kanssa. Käämin magneettikenttä ja alumiinirenkaaseen syntynyt magneettikenttä vuorovaikuttavat toistensa kanssa ja alumiinirenkaaseen vaikuttaa silloin magneettinen voima ylöspäin. Koska magneettinen voima on suurempi kuin renkaan paino, renkaaseen kohdistuva kokonaisvoima on ylöspäin ja rengas saa kiihtyvyyden ylöspäin.

b) Kun magneetti putoaa kupariputkessa, indusoituu kupariputkeen pyörrevirtoja, joiden suunta Lenzin lain mukaisesti on sellainen, että niiden synnyttämät magneettikentät vastustavat magneettikentän muutosta. Pyörrevirtojen synnyttämä magneettikenttä vuorovaikuttaa putoavan magneetin magneettikentän kanssa. Tällöin magneettiin kohdistuu ylöspäin magneettinen voima, joka pienentää putoavan magneetin kiihtyvyyttä. Eristeessä, kuten muovissa, pyörrevirtoja ei synny ja tällöin ei synny magneettista voimaa, joka pienentäisi putoavan muovinpalan kiihtyvyyttä. Muovinpalan kiihtyvyyden aiheuttaa muovinpalan paino, jolloin muovinpala putoaa putoamiskiihtyvyydellä, kun ilmanvastus on merkityksettömän pieni. Pyörrevirtojen vuoksi magneetin putoaminen kestää kauemmin sen pudotessa kupariputken läpi.

c) Kun magneetti lähestyy käämiä ja loittonee siitä, magneettivuo käämin sisällä ensin kasvaa ensin ja sitten pienenee. Magneettivuon muutos synnyttää kuvion mukaisen jännitteen. Kyseessä on sähkömagneettinen induktio. Käämin indusoituva jännite saadaan induktiolaista, $e = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$, jossa N on käämin kierrosten lukumäärä ja $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ on käämin läpäisevän magneettivuon muutosnopeus ajan suhteen.

Induktiolain mukaan jännite muuttuu vastakkaismerkkiseksi, kun magneetti on poistumassa käämistä. Kun magneetti on käämin keskellä, magneettivuo on suuri, mutta ei muutu, joten jännite on silloin nolla.

Magneetin putoamisliike on kiihtyvää liikettä, joten alussa magneetin nopeus on pienempi kuin lopussa, joten ensimmäinen piikki on leveämpi. Hitaampi nopeus aiheuttaa pienemmän magneettivuon muutosnopeuden, joten ensimmäisen piikin maksimijännite on pienempi, kuin magneetin poistuessa käämistä.

Tehtävä 14.17.

a) Kun uuni kytketään vaihtojännitteeseen, uunissa olevassa käämissä alkaa kulkea vaihtovirta. Kun käämissä kulkee vaihtovirta, käämissä kulkeva sähkövirta synnyttää käämiin muuttuvan magneettikentän. Uunin sisällä olevan kullan kohdalla magneettivuo muuttuu, jolloin kultaan indusoituu pyörrevirtoja. Pyörrevirrat aiheuttavat resistanssin vaikutuksesta kullan lämpenemistä.

b) Keraaminen materiaali ei ole johdemateriaalia, joten materiaaliin ei synny pyörrevirtoja, jotka aiheuttaisivat upokkaan lämpenemistä. Kullan sulamispiste normaalissa ilmanpaineessa on 1 083 °C. Keraaminen materiaali kestää hyvin kullan sulamispisteen lämpötiloja.

Tehtävä 14.18.

Vastaus A, 4 p

Alumiini on paramagneettinen materiaali, joten se ei juurikaan magnetoidu magneetin läheisyydessä. Koska alumiini on johdemateriaali, siihen voi muodostua pyörrevirtoja. Kun magneetti heilahtaa alumiinilevyn yläpuolelta, magneettivuo muuttuu (1 p) alumiinilevyn kohdalla ja alumiinilevyyn indusoituu pyörrevirtoja. (1 p) Pyörrevirrat aiheuttavat levyyn magneettikentän, joka Lenzin lain mukaisesti vastustaa magneetin aiheuttamaa magneettivuon muutosta. (1 p) Tällöin kun magneetti lähestyy levyä, levyyn muodostuu sähkömagneetti, jonka samanniminen napa on kohti heilurimagneettia. Heilurin magneetti ja levyn syntyvä magneetti hylkivät toisiaan. Kun heilurin magneetti etääntyy levystä, levyyn muodostuu sähkömagneetti, jonka eriniminen napa on kohti magneettia. Heilurin magneetti ja levyn syntyvä magneetti vetävät toisiaan puoleensa. Näin magneetin heilahtelu vaimenee jokaisella heilahduksella. (1 p)

Vastaus B, 0 p

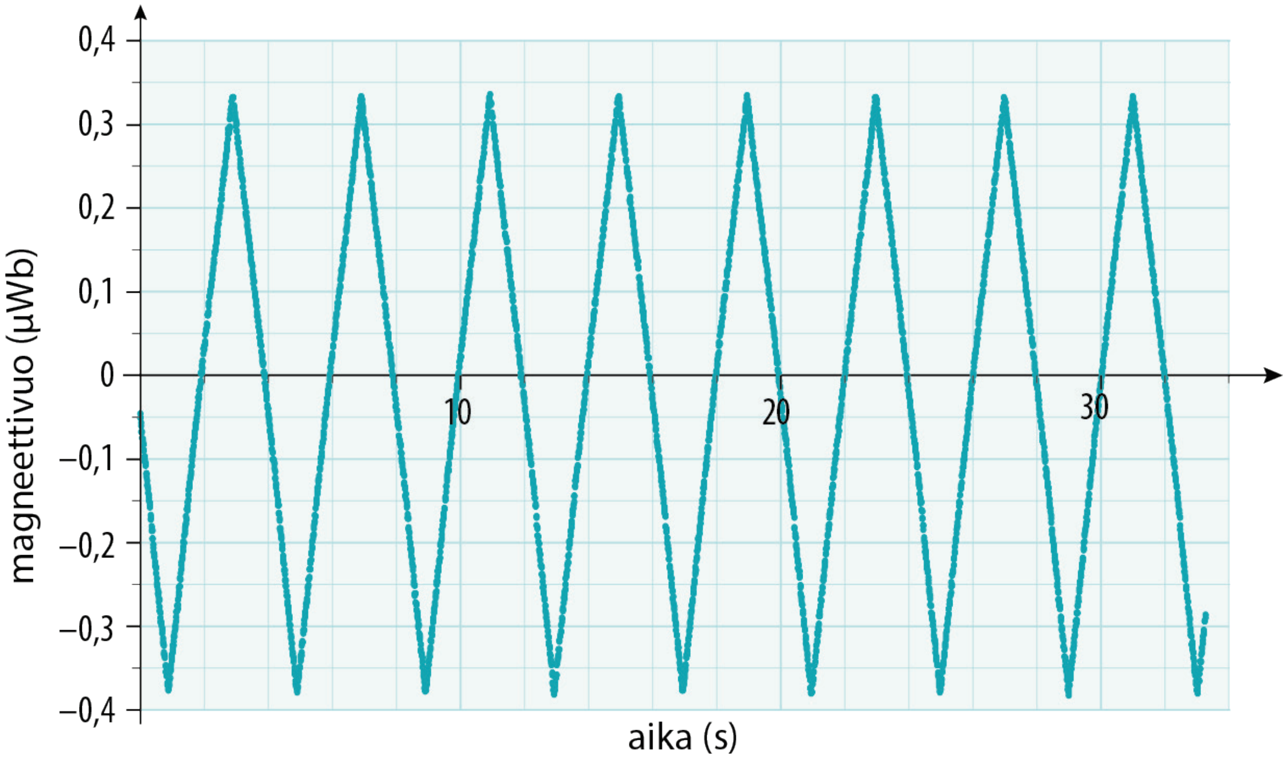
Alumiini on paramagneettinen materiaali, joka ulkoisessa magneettikentässä vahvistaa hieman magneettikenttää. Ferromagneettiset materiaalit vahvistavat ulkoista magneettikenttää voimakkaasti, ja diamagneettiset materiaalit heikentävät ulkoista magneettikenttää. Alumiinilevyssä rakenneosat asettuvat niin, että rakenneosien magneettimomentit osoittavat samaan suuntaan magneettikentän kanssa. Silloin magneetin ja alumiinilevyn välille muodostuu vuorovaikutus, jossa magneetti ja levy vetävät toisiaan puoleensa. Kun magneetti heilahtaa alumiinilevyn yläpuolelle, siihen kohdistuu voima, joka hidastaa magneetin liikettä. Silloin magneetin heilahtelu alumiinilevyn yläpuolella vaimenee selvästi jokaisella ohituskerralla.

Vastaus C, 2 p

Kun magneetti saatetaan heilahtelemaan, magneetti on muuttuvassa magneettikentässä alumiinilevyn kohdalla. Koska alumiini on johdemateriaali, siihen muodostuu tällöin pyörrevirtoja. (1 p) Indusoituvat pyörrevirrat ovat Lenzin lain mukaan sellaiseen suuntaan, että pyörrevirtojen vaikutukset vastustavat muutosta, joka aiheuttaa induktion. (1 p) Esimerkiksi magneettikentän heikkeneminen aiheuttaa induktiovirran, joka aiheuttaa ulkoista magneettikenttää vahvistavan magneettikentän. Pyörrevirtojen aiheuttamat magneettikentät vastustavat yläpuolella heiluvan magneetin magneettikentän muutosta, jolloin magneetti hidastuu jokaisella heilahduskerralla

Tehtävä 14.19.

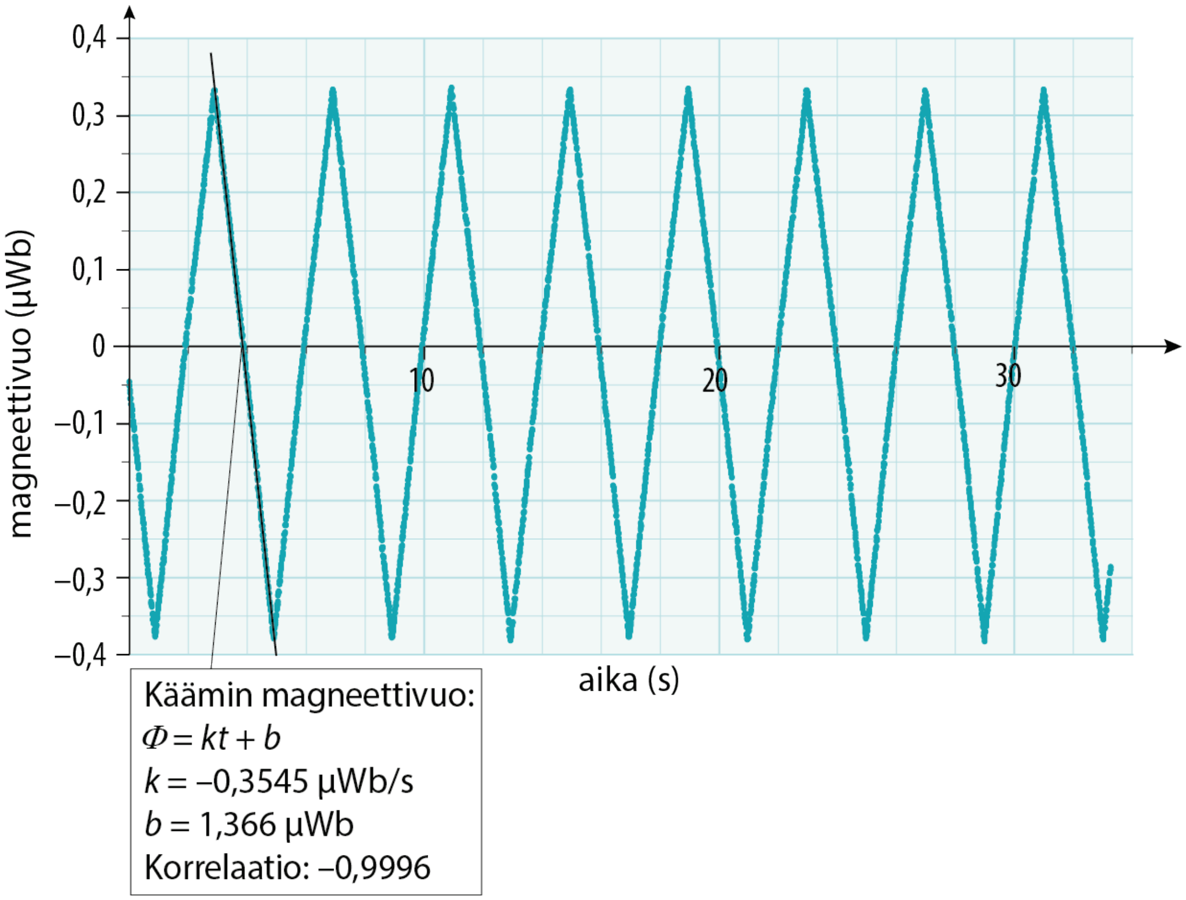
a) Esitetään magneettivuo eri ajanhetkillä.



b) Käämin magneettivuo muuttuu, jolloin käämiin indusoituu induktiojännite

$$e = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Käämin johdinsilmukan magneettivuon muutosnopeus $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ saadaan (t, Φ)-kuvaajalle laaditun tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta. Indusoituneen jännitteen suurin arvo saadaan ajanhetkellä, jolloin magneettivuon muutosnopeus on suurimmillaan eli kun kuvaaja laskee jyrkimmillään. Määritetään suurin magneettivuon muutosnopeus.

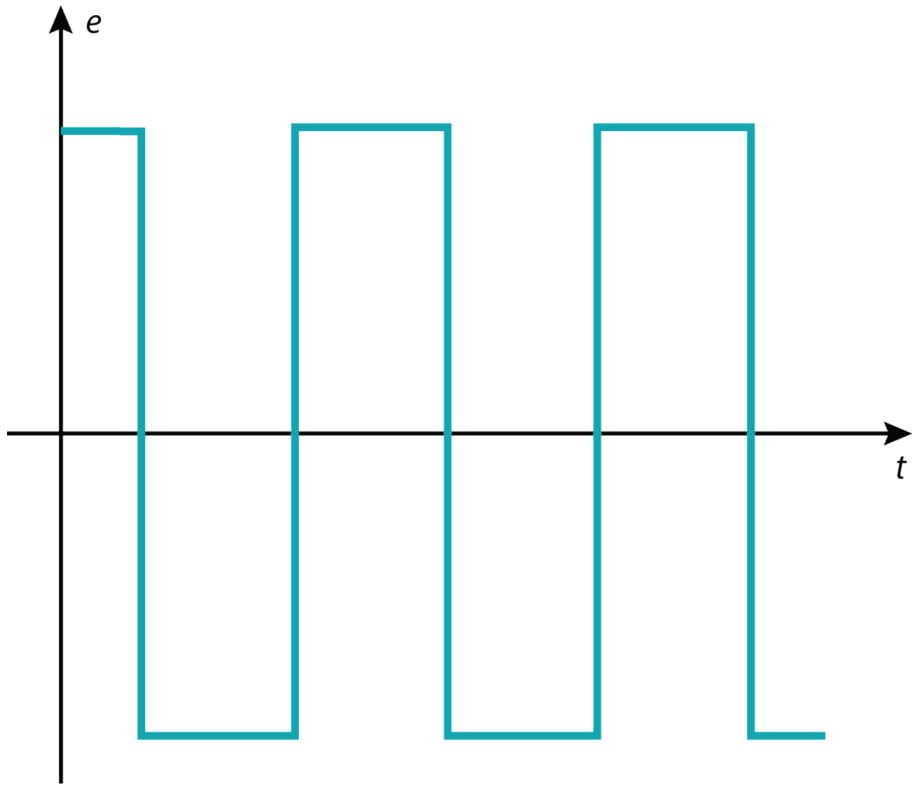


Magneettivuon suurin muutosnopeus on
$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -0{,}3545\,\frac{\mu\text{Wb}}{\text{s}}$.

Käämiin indusoitunut suurin jännite on

$$e = -N\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -600 \cdot \left(-0{,}3545\,\frac{\mu\text{Wb}}{\text{s}}\right) = 0{,}2127\,\text{mV} \approx 0{,}213\,\text{mV}.$$

c) Käämin magneettivuo muuttuu, jolloin käämiin indusoituu induktiojännite $e = -N\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$. Kun magneettivuon muutosnopeus on vakio, indusoitunut jännite on vakio. Kun magneettivuo kasvaa, indusoitunut jännite saa negatiivisia arvoja ja kun magneettivuo pienenee, indusoitunut jännite saa positiivisia arvoja. Hahmotellaan käämiin indusoituneen jännitteen kuvaaja.



d) Rauta on ferromagneettista ainetta, joka vahvistaa ulkoista magneettikenttää. Rautasydän ohjaa Helmholtzin kelojen väliin syntyneen magneettikentän käämin läpi, jolloin magneettivuo käämin kohdalla on suurempi kuin ilman rautasydäntä. Tällöin myös magneettivuon muutosnopeus käämin kohdalla on suurempi rautasydämen kanssa kuin ilman rautasydäntä. Koska käämin läpi kulkeva magneettivuon muutosnopeus on suurempi, käämiin indusoitunut jännite on myös suurempi induktiolain mukaan.

Tehtävä 14.20.

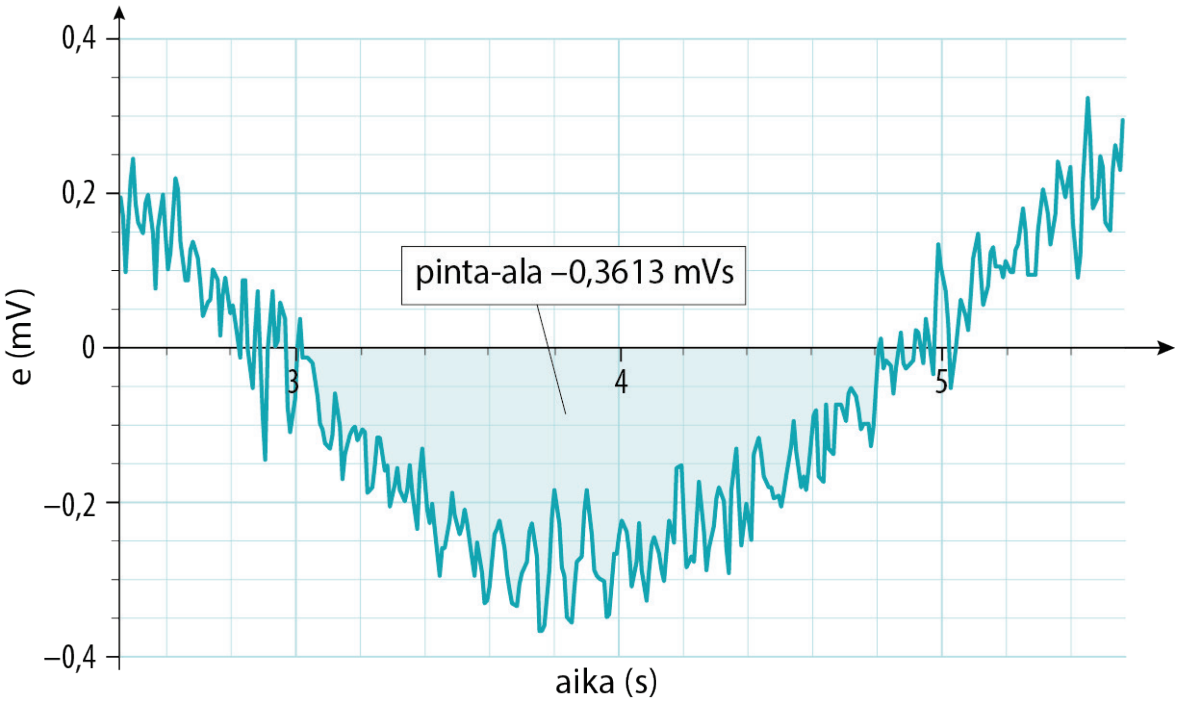
a) Kuvan 1 tilannetta vastaa kuvan 5 jännite.

Kuvan 2 tilannetta vastaa kuvan 6 jännite.

Kuvan 3 tilannetta vastaa kuvan 4 jännite.

b) Käämiin indusoitunut jännite on $e = -\dfrac{\Delta \Phi}{\Delta t}$. Käämin magneettivuon muutos on $\Delta \Phi = -e\Delta t$.

(t, e)-koordinaatiston kuvaajan ja aika-akselin jäävän alueen fysikaalinen pinta-ala on $e\Delta t$. Määritetään fysikaalinen pinta-ala aikavälillä 2,9 s – 4,9 s.



Fysikaalinen pinta-ala $e\Delta t = -0{,}3613\,\text{mVs}$.

Käämin magneettivuon muutos aikavälillä 2,9 s – 4,9 s

$\Delta \Phi = -e\Delta t = -(-0{,}3613\,\text{mVs}) \approx 0{,}361\,\text{mWb}$.

c) Rauta on ferromagneettista ainetta, joka vahvistaa käämin 1 magneettivuota. Kun rautasydän poistetaan, käämin 2 magneettivuon suurin arvo pienenee, sillä käämi 1 aiheuttaa pienemmän magneettivuon muutoksen käämiin 2.

Tehtävä 14.21.

johtimen pituus l = 0,29 m

johtimen nopeus v = 5,0 m/s

elektronin alkeisvaraus q = 1,602 176 634 · 10^{-19} C

magneettivuon tiheys B = 0,35 mN = 0,35 · 10^{-3} N

a) Johtimessa vapaaseen elektroniin kohdistuu magneettinen voima

$$\begin{aligned} F &= qvB\sin\alpha \\ &= 1{,}602\,176\,634\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\cdot 5{,}0\,\mathrm{m/s}\cdot 0{,}35\cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}\cdot \sin 90^\circ \\ &= 2{,}8038\cdot 10^{-22}\ \mathrm{N} \approx 2{,}8\cdot 10^{-22}\ \mathrm{N}. \end{aligned}$$

b) Magneettinen voima alkaa siirtää magneettikentässä liikkuvan johdetangon vapaita elektroneja, jolloin tankoon syntyy sähkökenttä. Sähkökenttä on suurimmillaan, kun vapaaseen elektroniin kohdistuvien voimien summa on nolla. Tämän avulla voidaan laskea johdetankoon syntyneen sähkökentän voimakkuus.

$$\begin{aligned} F_B &= F_E \\ \cancel{q}vB\sin\alpha &= \cancel{q}E \\ E &= vB\sin\alpha \\ &= 5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 0{,}35\cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}\cdot \sin 90^\circ = 1{,}75\cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \approx 1{,}8\cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

c) Johtimen päiden välinen jännite voidaan laskea johtimen sähkökentän avulla.

Sähkökentän voimakkuus on $E = \frac{U}{d}$, joten

$$E = \frac{e}{l}$$

$$e = El = 1,75 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 0,29\,\text{m} = 5,075 \cdot 10^{-4}\ \text{V} \approx 0,51\,\text{mV}.$$

Tehtävä 14.22.

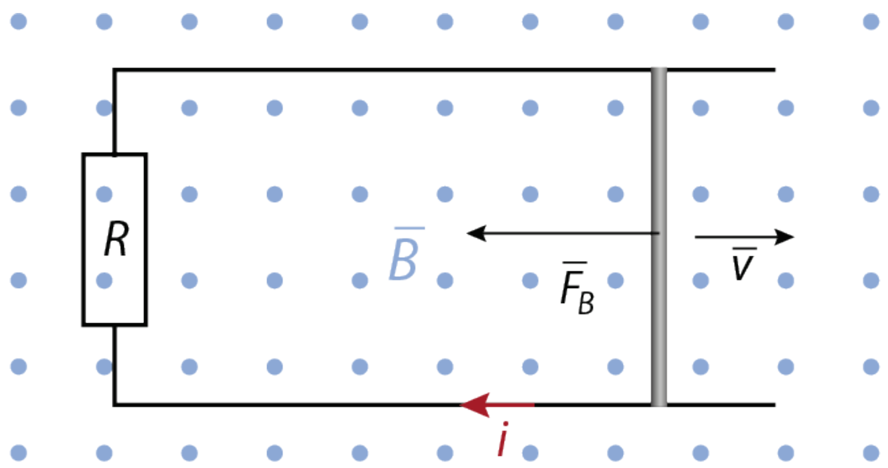
magneettivuon tiheys B = 0,55 T

johdetangon pituus l = 0,052 m

vastuksen resistanssi R = 3,2 Ω

sähkövirran suuruus I = 5,6 mA

a) Induktiovirran aiheuttama voima on liikesuuntaa vastaan. Sähkövirran kulkusuunta oikean käden säännön mukaisesti



b) Vastuksen napojen välinen jännite on yhtä suuri kuin johtimen päiden välinen jännite

$$e = Ri = 3{,}2\,\Omega \cdot 0{,}0056\,\text{A} = 17{,}92\,\text{mV} \approx 18\,\text{mV}.$$

c) Koska johdin kulki vakionopeudella, johtimeen kohdistuvan magneettisen voiman suuruus oli yhtä suuri kuin johdinta vetävä voima.

Tankoa vedettiin voimalla

$$F = F_{\mathrm{B}} = ilB\sin\alpha = 0{,}0056\,\mathrm{A}\cdot 0{,}052\,\mathrm{m}\cdot 0{,}55\,\mathrm{T}\cdot \sin 90^\circ = 0{,}160\,16\,\mathrm{mN} \approx 0{,}16\,\mathrm{mN}.$$

d) Virtapiiri muodostaa magneettikentässä olevan johdesilmukan, jonka pinta-ala kasvaa, kun tankoa vedetään. Mitä suuremmalla nopeudella tankoa vedetään, sitä suurempi on silmukan kohdalla olevan magneettivuon muutosnopeus $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$. Silmukkaan indusoitunut jännite on $e = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$. Mitä suurempi on magneettivuon muutosnopeus, sitä suurempi on silmukkaan indusoitunut jännite. Mitä suurempi on silmukkaan indusoitunut jännite, sitä suurempi on silmukassa kulkeva sähkövirta. Siis mitä suuremmalla nopeudella silmukkaa vedetään, sitä suurempi sähkövirta virtapiiriin indusoituu.

Tehtävä 14.23.

magneettivuon tiheys $B = 0{,}98$ T

silmukan pituus $x = 245$ mm $= 0{,}245$ m

silmukan leveys $y = 55$ mm $= 0{,}055$ m

konstantaanin resistiivisyys $\rho = 49 \cdot 10^{-8}$ Ωm

langan poikkileikkauksen pinta-ala
$A = 0{,}52\ \text{mm}^2 = 0{,}52 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2$

vetonopeus $v = 3{,}5$ m/s

Kun silmukkaa vedetään pois magneettikentästä, magneettivuo silmukan läpi pienenee. Silmukkaan indusoituu jännite ja sähkövirta. Induktiolain mukaan silmukkaan indusoitunut jännite oli $e = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{B\Delta A}{\Delta t}$.

Aluksi silmukka oli puoliksi magneettikentässä, jolloin silmukan pinta-ala oli $A = \frac{xy}{2}$. Lopuksi silmukka oli kokonaan magneettikentän ulkopuolella, jolloin magneettikentässä olevan silmukan pinta-alan muutos oli $\Delta A = 0 - \frac{xy}{2} = -\frac{xy}{2}$.

Silmukkaa vedettiin vakionopeudella, jolloin silmukka poistui kokonaan magneettikentästä ajassa $\Delta t = \frac{\frac{x}{2}}{v} = \frac{x}{2v}$.

Kun pinta-ala ja silmukan poistumisaika magneettikentästä sijoitetaan indusoituneen jännitteen yhtälöön, saadaan
$e = -\dfrac{B\left(-\dfrac{xy}{2}\right)}{\dfrac{x}{2v}} = Byv.$

Induktiovirran suuruus saadaan Ohmin lain avulla,
$i = \dfrac{e}{R} = \dfrac{Byv}{R}$, jossa R on silmukkajohtimen resistanssi,
$R = \rho\dfrac{l}{A} = \rho\dfrac{2\cdot(x+y)}{A}.$

Induktiovirran i vuoksi silmukan y-suuntaiseen, magneettikentässä olevaan sivuun vaikuttaa silmukan liikkeelle vastakkaissuuntainen voima, jonka suuruus on $F_B = iyB$.

Kun silmukka liikkuu vakionopeudella ulos magneettikentästä, silmukan liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Silmukkaa on siten vedettävä vakiovoimalla F, jonka suuruus saadaan liikeyhtälöstä, $F - F_B = 0$ eli $F = F_B$. Kun silmukka vedetään ulos magneettikentästä, silmukka liikkuu matkan $\dfrac{x}{2}$ ja tehty työ on

$$W = F\cdot\frac{x}{2} = iyB\cdot\frac{x}{2} = \frac{Byv}{R}\cdot yB\cdot\frac{x}{2} = \frac{B^2y^2v}{\rho\dfrac{2\cdot(x+y)}{A}}\cdot\frac{x}{2} = \frac{B^2y^2vAx}{4\rho(x+y)}$$

$$= \frac{(0{,}98\ \mathrm{T})^2\cdot(0{,}055\ \mathrm{m})^2\cdot 3{,}5\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 0{,}52\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2\cdot 0{,}245\,\mathrm{m}}{4\cdot 49\cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}\cdot(0{,}245\ \mathrm{m} + 0{,}055\ \mathrm{m})} = 0{,}002\,203\ \mathrm{J} \approx 2{,}2\ \mathrm{mJ}$$

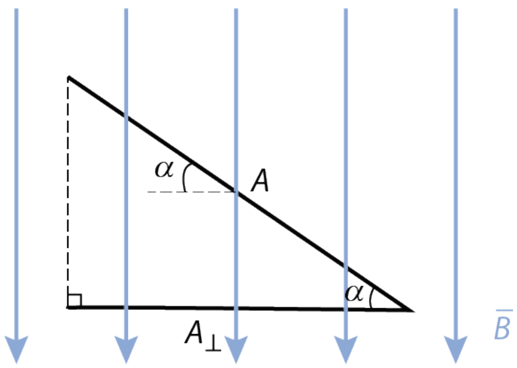
Silmukan vetämisessä tehty työ on 2,2 mJ.

Tehtävä 14.24.

a) Homogeenisessa magneettikentässä pyörivään silmukkaan indusoituu jännite induktiolain mukaisesti. Kun silmukka pyörii, magneettivuo silmukkaan nähden muuttuu. Magneettivuo määritellään magneettivuon tiheyden B ja magneettikenttää vastaan kohtisuoran pinta-alan $A_{\perp}$ tulona $\Phi = BA_{\perp}$. Kun silmukka pyörii magneettikentässä, silmukan kohtisuora pinta-ala magneettikenttään nähden muuttuu jatkuvasti.

Muuttuva magneettivuo indusoi jännitteen silmukan napojen välille induktiolain $e = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ mukaisesti.

b) Silmukan pinta-alan kohtisuora projektio magneettikenttään nähden voidaan laskea yhtälöllä $A_\perp = A\cos\alpha$, missä kulma α on silmukan kiertymä kohtisuorasta suunnasta.



Magneettivuon lauseke saadaan muotoon $\Phi = BA\cos\alpha$. Kiertymä voidaan laskea yhtälöllä $\alpha = 2\pi ft$.

Induktiolaki voidaan kirjoittaa muodossa

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(BA\cos\alpha\right)}{dt} = -\frac{d\left(BA\cos\left(2\pi ft\right)\right)}{dt}.$$

Funktion derivaatasta tulee $e = BA2\pi f \cdot \sin\left(2\pi ft\right)$.

Jännitteen arvo on vakio kerrottuna sinifunktiolla eli jännite on sinimuotoista.

Tehtävä 14.25.

testikäämin kierrosten lukumäärä N = 3 600

testikäämin poikkileikkausneliön sivun pituus a = 42 mm

a) Kuvaajan perusteella testikäämin läpäisevän magneettivuon muutosnopeus on vakio. Induktiolain mukaisesti testikäämiin indusoituu jännite

$$e=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=-NA\frac{\Delta B}{\Delta t}=-Na^2\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

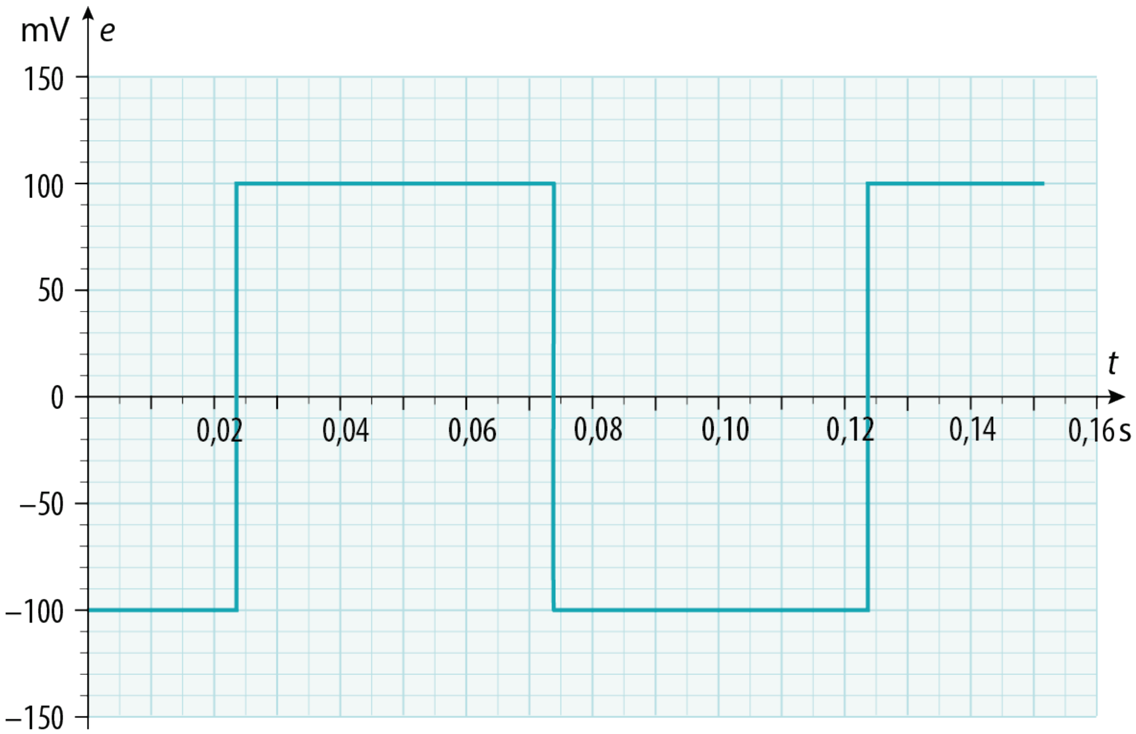
Magneettivuon tiheyden muutosnopeus $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ selvitetään kuvaajan lineaaristen osien avulla. Kuvaaja on symmetrinen t-akselin suhteen ja lineaaristen osien kulmakertoimien itseisarvot ovat yhtä suuria.

Lasketaan indusoituvan jännitteen suuruus yhdellä magneettivuon tiheyden muutosnopeuden arvolla.

$$e=-NA\frac{\Delta B}{\Delta t}=-3\,600\cdot(0{,}042\,\text{m})^2\frac{\left(-0{,}32\cdot10^{-3}\text{ T}-0{,}28\cdot10^{-3}\text{ T}\right)}{\left(0{,}070\,\text{s}-0{,}032\,\text{s}\right)}$$

$$=100{,}269\,47\cdot10^{-3}\text{ V}\approx100\,\text{mV}$$

Jännitteen kuvaaja:



b) Kun testikäämiä käännetään niin, että sen akseli muodostaa α = 65°:een kulman kenttäkäämien, testikäämin läpäisevä magneettivuo pienenee kertoimen cos α verran.

Magneettivuo on $\Delta\Phi = \Delta BA_{\perp} = \Delta Ba \cdot a\cos\alpha = \Delta Ba^2 \cos\alpha$.

Indusoituvan jännitteen suuruus on

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -NA_{\perp}\frac{\Delta B}{\Delta t} = -Na^2\cos\alpha\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$= -3\,600 \cdot (0{,}042\,\text{m})^2 \cdot \cos 65^\circ \cdot \frac{\left(-0{,}32 \cdot 10^{-3}\ \text{T} - 0{,}28 \cdot 10^{-3}\ \text{T}\right)}{\left(0{,}070\,\text{s} - 0{,}032\,\text{s}\right)}$$

$$= 42{,}375\,71 \cdot 10^{-3}\ \text{V} \approx 42\,\text{mV}.$$

Tehtävä 14.26.

a) Sauvamagneetin magneettikenttä on käämin kohdalla vaakasuorassa. Magneettikenttä pyörii käämin mukana. Tällöin käämin läpäisevä magneettivuo muuttuu jaksottaisesti. Käämiin syntyy induktiolain $e = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = e_0 \sin(2\pi f t)$ mukainen induktiojännite.

b) käämin kierrosten lukumäärä N = 300

silmukan sivun pituus x = 0,042 m

Käämin indusoitunut jännite on
$u = u_0 \sin(2\pi f t) = NBA2\pi f \sin(2\pi f t)$. Koska
$-1 \leq \sin(2\pi f t) \leq 1$, jännitteen suurin arvo on jännitteen huippuarvo $u_0 = NBA2\pi f$. Kuvaajasta määritettynä huippujännitteen suuruus on u_0 = 16,5 mV. Määritetään kuvaajasta viiden jakson avulla jaksonaika $T = \frac{1{,}06\ \mathrm{s}}{5}$.

Pyörimistaajuus $f = \frac{1}{T} = \frac{5}{1{,}06\ \mathrm{s}}$.

Magneettivuon tiheys on

$$B = \frac{u_0}{NA2\pi f} = \frac{u_0}{Nx^2 2\pi f}$$

$$= \frac{0{,}0165\ \mathrm{V}}{300 \cdot (0{,}042\ \mathrm{m})^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{5}{1{,}06}\frac{1}{\mathrm{s}}} = 1{,}052\,01 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T} \approx 1{,}1\ \mathrm{mT}.$$

c) Käämin napoihin indusoitunut jännite on $u = u_0 \sin \alpha$.

i) Jännite saavuttaa maksimiarvonsa, kun magneettivuon muutosnopeus on suurin. Magneettivuon muutosnopeus on suurin, kun magneetti on kohtisuorassa käämiin nähden. Tämä vastaa kuvaa C.

ii) Indusoitunut jännite on nolla, kun $\sin \alpha = 0$ eli

kun $\alpha = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Tämä vastaa kuvaa A.

Tehtävä 14.27.

käämin kierrosluku *N* = 300

taajuus *f* = 8,0 Hz

vastuksen resistanssi *R* = 10 Ω

vastuksen lämmitysteho *P* = 7,5 W

käämin silmukan pinta-ala *A* = 0,10 m^2

a) Vastuksen läpi kulkeva sähkövirta saadaan määritettyä vastuksen lämmitystehon avulla.

$$P = UI = RI^2$$

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{7{,}5\ \text{W}}{10\ \Omega}} = 0{,}866\,0254\ \text{A} \approx 0{,}87\ \text{A}$$

b) Generaattorin päiden välinen jännite on yhtä suuri kuin vastusten päiden välinen jännite. Jännitteen huippuarvo voidaan määrittää jännitteen tehollisarvon avulla.

$$u_0 = \sqrt{2}U = \sqrt{2}RI = \sqrt{2}R\sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{2PR} = \sqrt{2 \cdot 7{,}5\,\mathrm{W} \cdot 10\,\Omega} = 12{,}247\,448\,71\,\mathrm{V} \approx 12\,\mathrm{V}$$

c) Magneettivuon tiheys voidaan määrittää, kun tiedetään generaattorin pyörivän käämin huippujännite.

Generaattorin tuottama jännite $e = -NBA2\pi f \cdot \sin(2\pi ft)$.

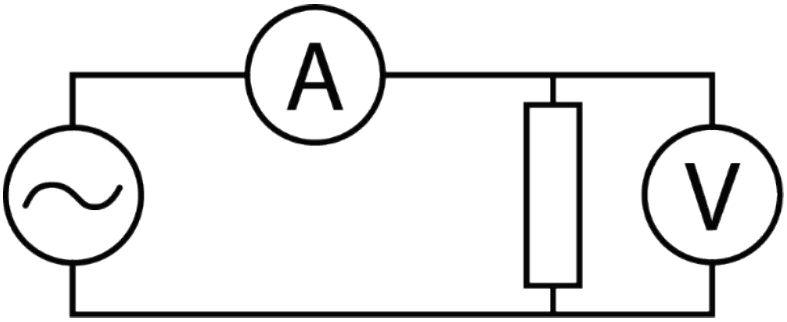
Huippujännitteen arvo $u_0 = NBA2\pi f$. Sijoitetaan huippujännitteen yhtälö arvon tilalle ja ratkaistaan magneettivuon tiheys.

$$\sqrt{2PR} = NBA2\pi f$$

$$B = \frac{\sqrt{2PR}}{NA2\pi f} = \frac{\sqrt{2 \cdot 7{,}5\,\mathrm{W} \cdot 10\,\Omega}}{300 \cdot 0{,}10\,\mathrm{m}^2 \cdot 2\pi \cdot 8{,}0\,\mathrm{Hz}} = 0{,}008\,121\,8417\,\mathrm{T} \approx 8{,}1\,\mathrm{mT}$$

Tehtävä 14.28.

a)



b) Vaihtojännitteen jaksonaika saadaan määrittämällä keskiarvo 12 jakson ajasta.

$$T = \frac{14{,}61\,\text{s}}{12}.$$

Vaihtojännitteen taajuus $f = \frac{1}{T} = \frac{12}{14{,}61\,\text{s}} = 0{,}821\,355\,\frac{1}{\text{s}} \approx 0{,}82\,\text{Hz}.$

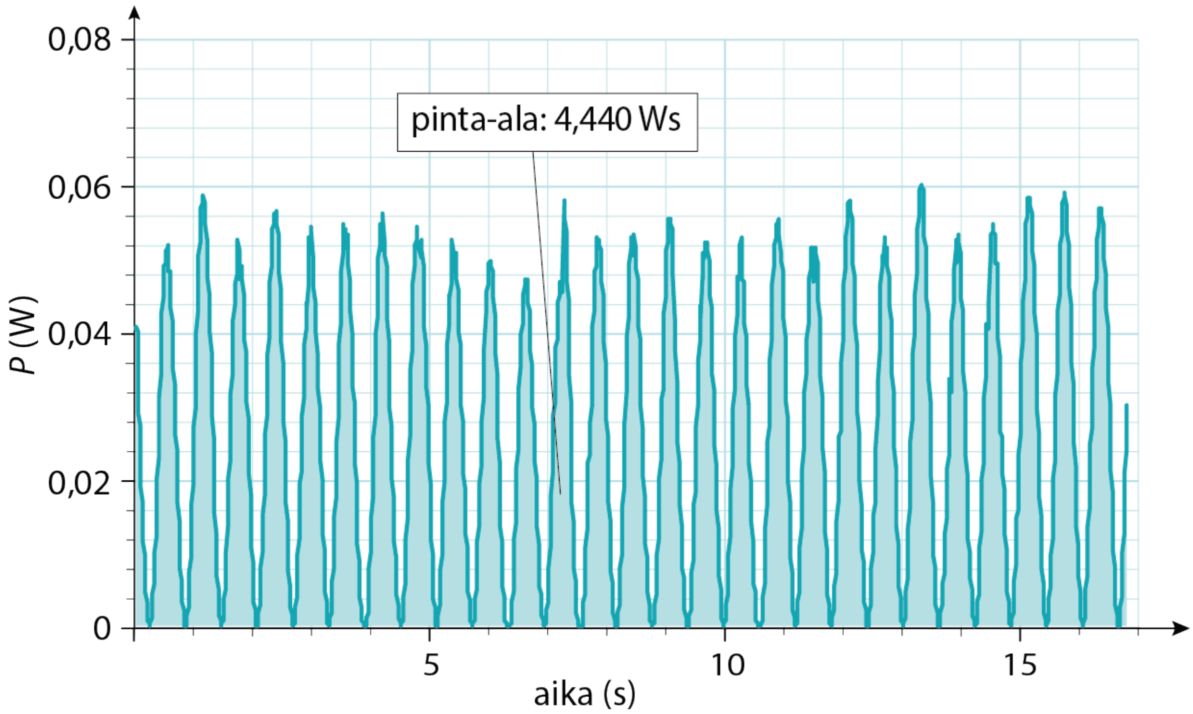
Vaihtovirran taajuus on sama kuin vaihtojännitteen taajuus eli 0,82 Hz.

c) Vaihtojännitteen tehollinen arvo on $U = \frac{u_0}{\sqrt{2}}$ ja vaihtoviran tehollinen arvo $I = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$. Määritetään vaihtojännitteen ja -virran huippuarvot jännitteen ja sähkövirran kuvaajista u_0 = 2,23 V ja i_0 = 0,22 A.

Vastus ottaa virtapiiriltä energiaa keskimäärin teholla

$$P = UI = \frac{u_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i_0}{\sqrt{2}} = \frac{u_0 i_0}{2} = \frac{2{,}23\,\text{V} \cdot 0{,}22\,\text{A}}{2} = 0{,}2453\,\text{W} \approx 0{,}25\,\text{W}.$$

d) Signaaligeneraattori syötti virtapiiriin energiaa yhtä paljon kuin vastus vastaanotti. Vastuksen vastaanottama energia on $E = Pt$, mikä saadaan määritettyä (t, P)-koordinaatiston kuvaajan ja aika-akselin rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Lasketaan uusi tehon sarake ja määritetään mittauksen aikana vastuksen signaaligeneraattorilta vastaanottama energia.



Signaaligeneraattorin virtapiiriin tuottama energia oli yhtä suuri kuin vastuksen vastaanottama energia $E = 4{,}440\ \text{Ws} \approx 4{,}4\ \text{J}$.

Tehtävä 14.29.

a) Muuntajaa käytetään vaihtovirtalähteen napajännitteen muuntamiseen suuremmaksi tai pienemmäksi. Muuntajassa on kaksi käämiä, joilla on yhteinen rautasydän. Rautasydämessä oleva jaksottaisesti muuttuva magneettivuo on yhteinen muuntajan kummallekin käämille. Toisiokäämiin indusoituu induktiolain mukaan jännite, jolloin jännitteet ensiö- ja toisiokäämissä ovat

$e_1 = -N_1 \dfrac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ ja $e_2 = -N_2 \dfrac{\Delta \Phi}{\Delta t}$, jossa N_1 ja N_2 ovat johdinkierrosten lukumäärät ensiö- ja toisiokäämissä. Kun käämien resistanssit ovat pienet eli ideaalisen muuntajan tapauksessa, ensiö- ja toisiokäämien päiden väliset jännitteet ovat $u_1 = e_1$ ja $u_2 = e_2$, ja muuntajan muuntosuhteeksi saadaan

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

b) Muuntajien tehonhukka aiheutuu muuntajan käämien johtimien resistanssista, rautasydämeen indusoituvista pyörrevirroista ja raudan magnetoitumisen jatkuvasta vaihtelusta. Nämä kaikki aiheuttavat muuntajan sisäenergian kasvua.

c) Sähkövirta antaa mahdollisuuden energiansiirtoon. Energiansiirron hukkateho kasvaa ja hyötysuhde pienenee sähkövirran kasvaessa. Johtimissa tapahtuvalle hukkateholle on voimassa $P = UI = RI^2$. Mitä pidempi matka on voimalaitoksen ja kuluttajan välillä, sitä enemmän energiaa muuntuu johtimien sisäenergiaksi eli sitä enemmän syntyy hukkaenergiaa. Suurimmaksi hukkatehoksi muodostuu yleensä siirtojohtimien resistanssista aiheutuva tehonkulutus. Siirrossa kannattaa käyttää mahdollisimman suuria jännitteitä. Muuntajien avulla voimalaitosten tuottama jännite voidaan kasvattaa siirtoa varten korkeammaksi ja pienentää kotitalouksien käyttöön sopivaksi kuluttajalle turvalliselle tasolle.

d) hyötyteho P = 15 kW

siirtomatka s = 75 km

alumiinijohtimen resistiivisyys pituusyksikköä kohden ρ = 0,065 Ω/km

tehollinen napajännite tilanteessa 1 U_1 = 21 kV

tehollinen napajännite tilanteessa 2 U_2 = 400 V

Vastauksessa tarkastellaan yksinkertaistettua tilannetta, jossa oletetaan sähkövirran kulkevan vain yhtä johdinta pitkin. Oikeasti johtimia on useampi.

Ensiö- ja toisiopuolen tehot P_1 ja P_2 ovat yleensä likimain yhtä suuret, eli $P_1 = U_1 I_1 = U_2 I_2 = P_2$. Muuntajan hyötysuhde on $\eta = \frac{P_{\text{anto}}}{P_{\text{otto}}}$, missä P_{anto} on toisiopuolen antama teho ja P_{otto} ensiöpuolen ottama teho. Siirtolinjaan tarvitaan meno- ja paluujohdin, eli kaksi 75 km:n pituista johdinta, Siirtolinjan kokonaisresistanssiksi saadaan $R = l\rho_l = 150\,\text{km} \cdot 0{,}065\,\Omega/\text{km} = 9{,}75\,\Omega.$

$I = \frac{P}{U}$, joten sähkövirroiksi saadaan

$$I_1 = \frac{P_1}{U_1} = \frac{15\,\text{kW}}{21\,\text{kV}} = 0{,}714\,2857\,\text{A} \text{ ja}$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2} = \frac{15\,\text{kW}}{0{,}400\,\text{kV}} = 37{,}5\,\text{A}.$$

Siirtojohtimien resistanssista aiheutuu Joulen lain mukaan hukkateho $P = RI^2$.

Ottoteho on yhtä suuri kuin tuottotehon ja hukkatehon summa. Lasketaan hyötysuhteet molemmille jännitteille.

$$\eta_1 = \frac{P_{\text{anto}}}{P_{\text{otto\_1}}} = \frac{P_{\text{anto}}}{P_{\text{anto}} + P_{\text{hukka\_1}}} = \frac{P_{\text{anto}}}{P_{\text{anto}} + RI_1^2}$$

$$= \frac{15\,\text{kW}}{15\,\text{kW} + 9{,}75\,\Omega \cdot \left(\frac{15\,\text{kW}}{21\,\text{kV}}\right)^2}$$

$$= 0{,}999\,6685 \approx 99{,}97\,\%$$

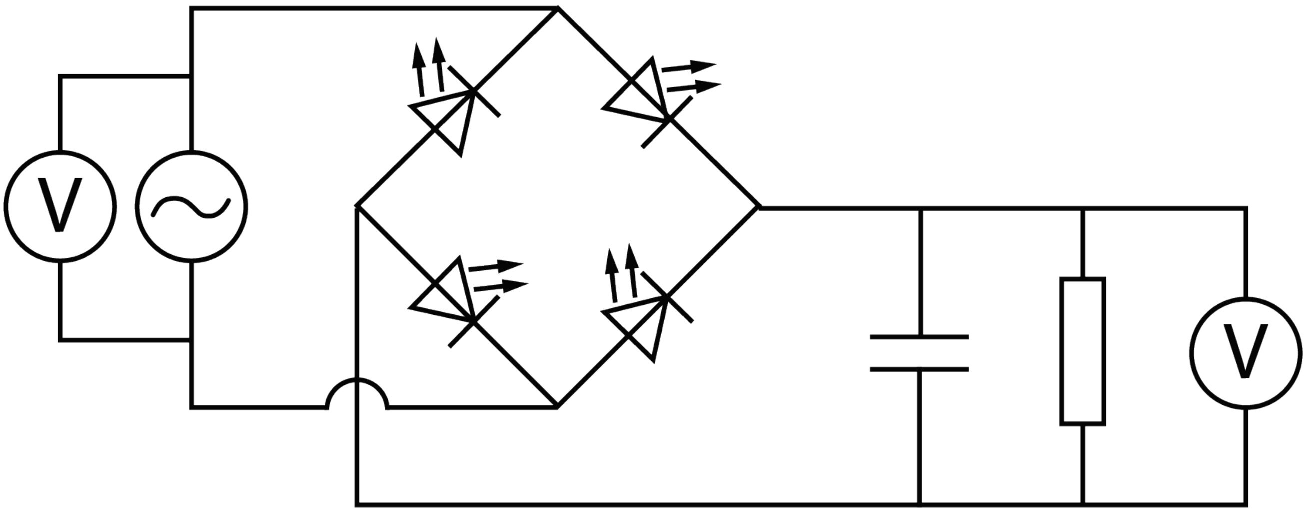
$$\eta_2 = \frac{P_{\text{anto}}}{P_{\text{otto\_2}}} = \frac{P_{\text{anto}}}{P_{\text{anto}} + P_{\text{hukka\_1}}} = \frac{P_{\text{anto}}}{P_{\text{anto}} + RI_2^2}$$

$$= \frac{15\,\text{kW}}{15\,\text{kW} + 9{,}75\,\Omega \cdot \left(\frac{15\,\text{kW}}{0{,}4\,\text{kV}}\right)^2}$$

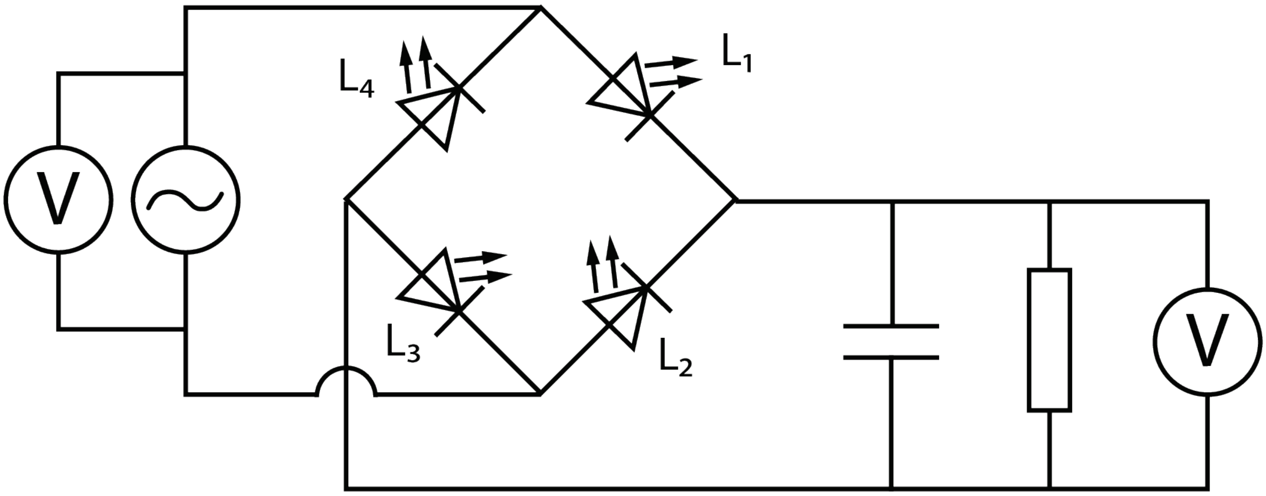
$$= 0{,}522\,4489 \approx 52{,}2\,\%$$

Tehtävä 14.30.

a)



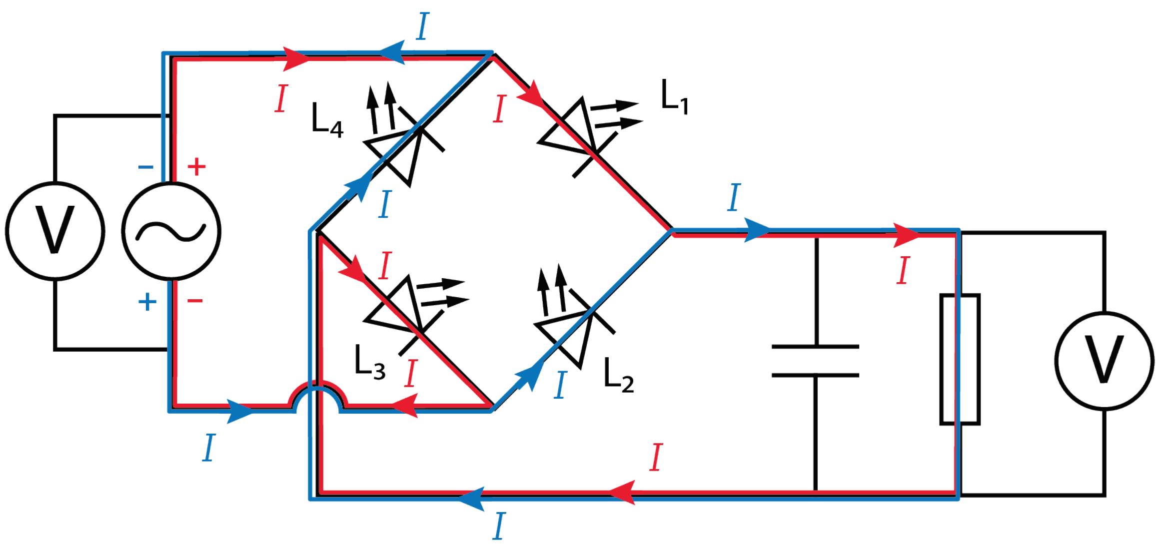
b) Nimetään ledit tunnuksilla L_1, L_2, L_3 ja L_4.



Videon perusteella havaitaan, että saman aikaan valaisee ledit L_1 ja L_3 sekä L_2 ja L_4. Led valaisee, kun sen päiden välinen jännite on riittävän suuri ja ledin läpi kulkee tällöin sähkövirtaa.

Led päästää lävitseen sähkövirtaa vain päästösuuntaan. Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa vaihtojännitelähteessä positiivisena napana oli jännitelähteen ylempi napa. Tällöin sähkövirta kulki niiden ledien kautta, jotka olivat päästösuunnassa. Havainnollistetaan sähkövirran kulkua punaisella reitillä kytkentäkaaviossa. Led L_2 oli kytketty estosuuntaan. Ledin L_4 sähköinen potentiaali ledin jälkeen oli suurempi kuin ledin L_3, ja siksi sähkövirta kulki ledin L_3 kautta.

Tarkastellaan kytkennän tilannetta vaihtojännitteen puolen vaiheen jakson jälkeen, jolloin vaihtojännitelähteen napaisuus oli kääntynyt. Tällöin sähkövirta kulki sinisen reitin mukaisesti.

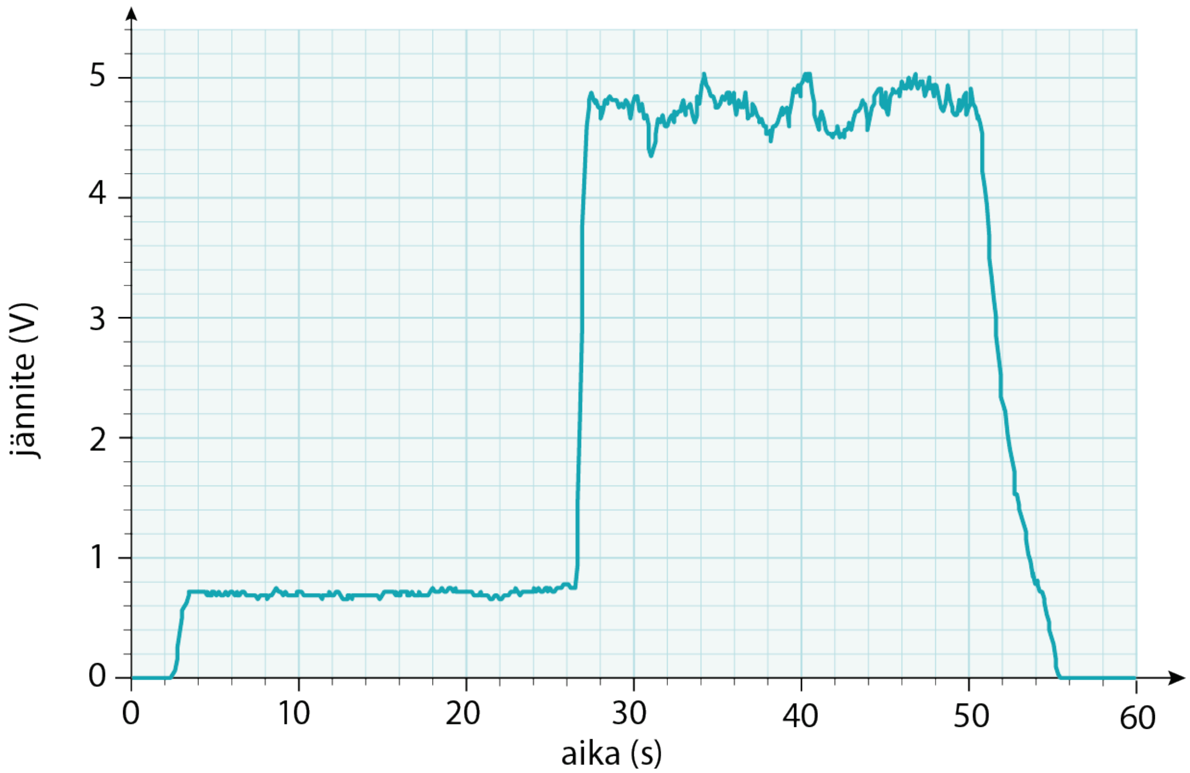


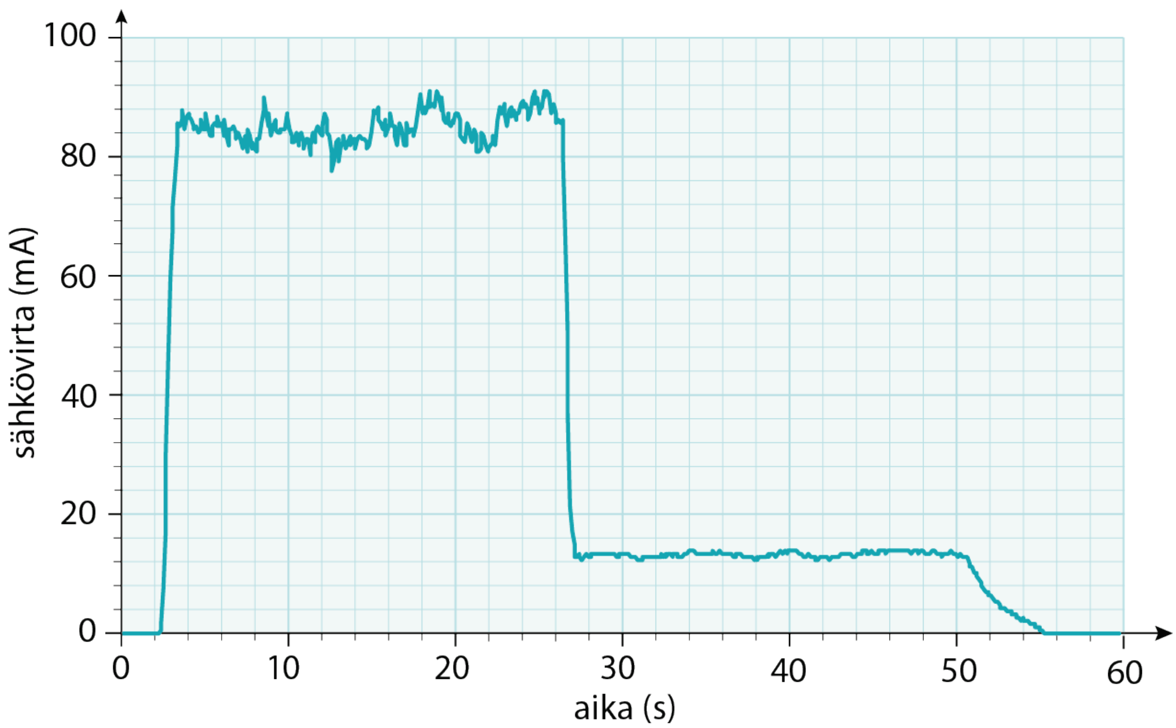
Havaitaan, että sähkövirta kulki samaan aikaan ledien L_1 ja L_3 läpi. Puolen jaksonajan kuluttua sähkövirta kulki samaan aikaan ledien L_2 ja L_4 läpi, jolloin vastaavat ledit valaisivat samanaikaisesti.

c) Kun kondensaattori kytkettiin kytkentään, havaittiin, että jännitteen huippuarvo pieneni ja jännitteen vaihtelut pienenivät. Kondensaattori latautui ja purkautui vuorotellen. Kun vastuksen jännite alkoi pienentyä, kondensaattori purki sähkövaraustaan virtapiirille. Vastaavasti, kun vastuksen jännite kasvoi, kondensaattori latautui. Tämä kondensaattorin vuorotellen tapahtuva latautuminen ja purkautuminen pienensi ja tasasi vastuksen jännitettä.

Tehtävä 14.31.

a)

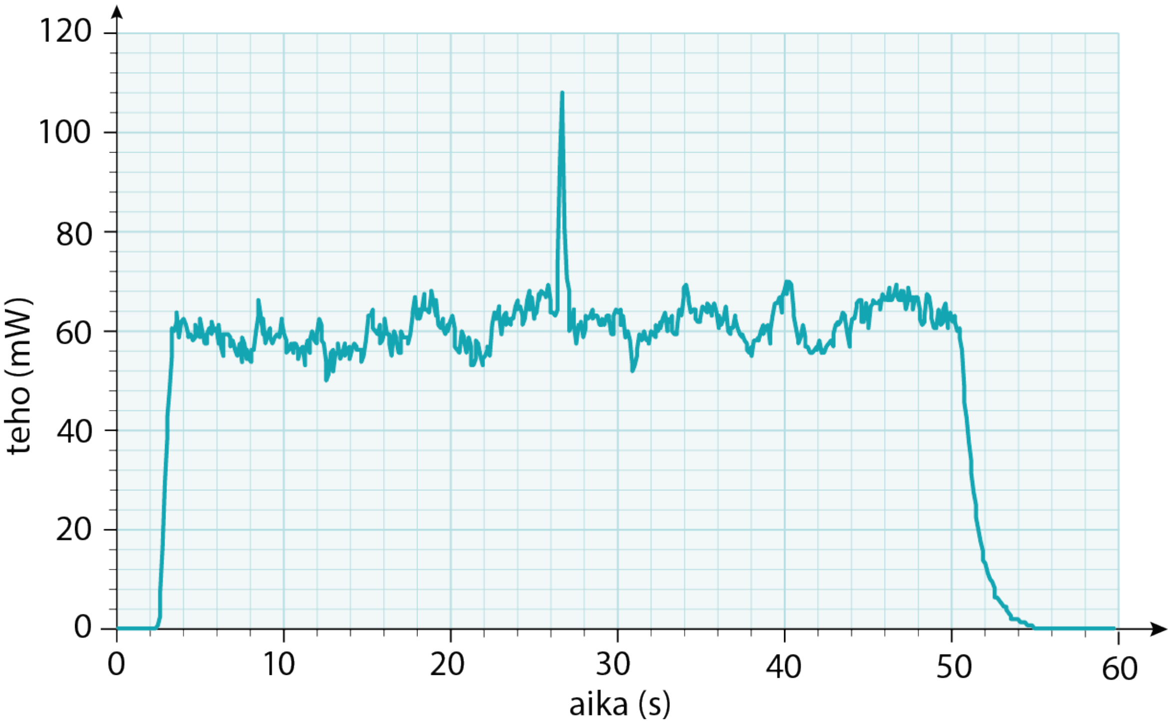




Jännitteen kuvaajan perusteella havaitaan, että generaattorin jännite on koko ajan likimain sama, kun kuorma ei muutu. Generaattorin jännitteen tasasuuntaaja muuttaa generaattorin tuottaman vaihtojännitteen likimain tasajännitteeksi.

b) Mittausaineiston perusteella havaitaan, että kun kuormaa kasvatetaan, generaattorin napojen välinen jännite kasvaa ja generaattorin sähkövirta pienenee.

c) Generaattorin sähköteho on $P = UI$. Lasketaan uusi sarake ja laaditaan kuvaaja.



Tehon kuvaajasta havaitaan, että teho pysyy koko ajan lähes vakiona. Kuvaajan piikin kohdalla vastuksen resistanssin arvoa muutettiin. Piikki johtuu virtapiirin käämien itseinduktiosta.

Tehtävä 14.32.

a) Käämien akselit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, tällöin käämin 1 vaihtovirran synnyttämä magneettivuo ei indusoi jännitettä käämiin 2.

b) Käämin 1. muuttuva magneettikenttä indusoi lähelle tuotuun metalliesineeseen pyörrevirtoja. Pyörrevirrat aikaansaavat muuttuvan magneettikentän, joka lävistää myös käämin 2. Tällöin käämiin 2 indusoituu jännite, joka havaitaan jännitemittarissa.

c) Mitä parempi metallin sähkönjohtavuus on sitä suurempia pyörrevirtoja siihen voi syntyä. Tällöin myös syntyvä magneettivuo kasvaa ja samoin käämiin 2 syntyvä induktiojännite.

Tehtävä 14.33.

lämmittimen teho P = 75 W

a) kudosnesteen massa m_1 = 0,0011 kg

höyrystyneen kudosnesteen massa m_2 = 0,000 40 kg

kudosnesteen lämpötila ennen lämmittämistä T_1 = 37 °C

kudosnesteen ominaislämpökapasiteetti
c = 4 190 J/(kgK)

kudosnesteen ominaishöyrystymislämpö
r = 2 260 000 J/kg

Tarkastellaan kudosnestettä veden ominaisuuksilla. Kun kudosnestettä lämmitetään, kudosnesteen lämpötila nousee veden kiehumispisteeseen eli 100 °C:een. Kudosnesteen lämpötilan muutos
ΔT = (100 − 37) °C = 63 °C = 63 K.

Kun kudosnestettä lämmitetään ja höyrystetään lämmittimellä, lämmittimen luovuttama energia on yhtä suuri kuin kudosnesteen lämpenemisen ja höyrystymisen vastaanottama energia.

$E = Q_1 + Q_2 = cm_1\Delta T + rm_2$

Lämmittimen luovuttaman energian ja tehon välillä on voimassa *E* = *Pt*, jossa *P* on lämmittimen teho ja *t* on lämmitysaika. Lämmitysajaksi saadaan

$$t = \frac{E}{P} = \frac{cm_1\Delta T + rm_2}{P}$$

$$= \frac{4\,190\,\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 0{,}0011\,\text{kg} \cdot 63\,\text{K} + 2\,260\,000\,\frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 0{,}000\,40\,\text{kg}}{58\,\text{W}} = 20{,}5925\,\text{s} \approx 21\,\text{s}.$$

b) tehollinen sähkövirta kudoksessa *I* = 0,45 A

Lämmittimen lämmitysteholle pätee *P* = *UI*, jossa *U* on lämmittimen vaihtojännitteen tehollinen arvo ja *I* on tehollinen virta kudoksessa. Tehollinen jännite kudoksessa on *U* = *P*/*I.* Kudoksen tehollinen jännite on yhtä suuri kuin lämmittimen tehollinen jännite. Koska kyseessä on sinimuotoinen vaihtojännite, niin tehollinen jännite on $U = \frac{u_0}{\sqrt{2}}$. Jännitteen huippuarvo on

$$u_0 = \sqrt{2}U = \sqrt{2}\frac{P}{I} = \sqrt{2} \cdot \frac{58\,\text{W}}{0{,}45\,\text{A}} = 182{,}276\,\text{V} \approx 180\,\text{V}.$$

c) tehollinen sähkövirta kudoksessa *I* = 0,45 A

Kudoksen resistanssi saadaan edellisen Ohmin lain avulla

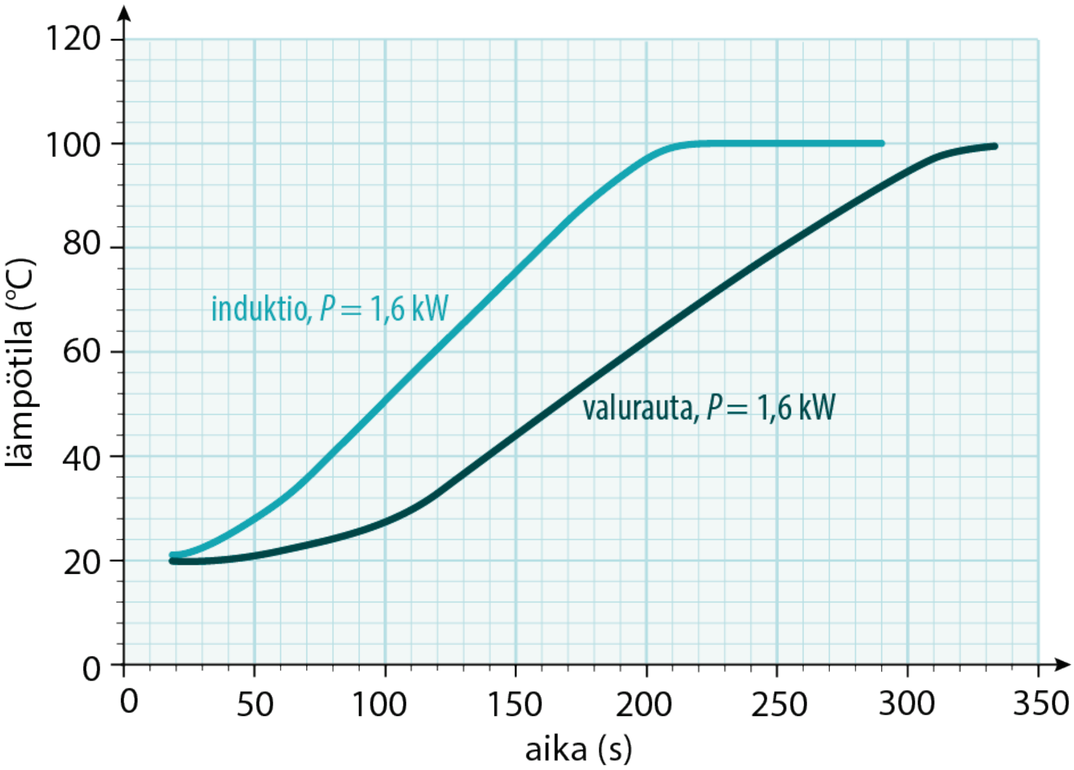
$$R = \frac{U}{I} = \frac{\frac{P}{I}}{I} = \frac{P}{I^2} = \frac{58\,\text{W}}{(0{,}45\,\text{A})^2} = 286{,}419\,75\,\Omega \approx 290\,\Omega.$$

Tehtävä 14.34.

a) Kun halutaan vertailla keittolevyjen energiatehokkuutta, kuumennetaan molemmilla keittolevyillä vettä ja mitataan, kuinka nopeasti vesi lämpenee suhteessa levyn käyttämään sähkötehoon. Mitattavat asiat ovat veden lämpötila sekä keittolevyn ottama sähköteho tai sähköenergia.

Sähköenergian voi mitata kWh-mittarilla ja sähkötehon joko tehomittarilla tai mittaamalla virran ja jännitteen suuruudet kuumennuksen aikana. Jotta mittauksien tuloksia voidaan vertailla, kokeen alkutilanne täytyy vakioida. Molemmissa kokeissa veden määrä sekä veden, lämmitysastian ja lieden alkulämpötilat sekä käytetyt astiat tulee olla samat. Myös ulkoisten olosuhteiden, kuten ympäristön lämpötilan tulee olla vastaavat kaikissa mittauksissa.

b) Induktiokeittolevystä energiaa siirtyy veteen suuremmalla teholla kuin valurautalevystä. Induktiolevyä käyttämällä veden lämpötila nousee samassa ajassa enemmän kuin valurautalevyä käyttämällä.



c) Induktiokeittolevy on energiatehokkaampi kuin valurautakeittolevy. Induktiokeittolevy lämmittää suoraan keittoastiaa eikä suurta rautakappaletta, kuten valurautainen keittolevy, joten lämmitettävien kappaleiden (keittolevy + kattila + vesi) kokonaislämpökapasiteetti on pienempi ja näin ollen energiaa tarvitaan vähemmän. Induktiokeittolevyn keraaminen pinta on huono lämmönjohde, joten kattilasta siirtyy johtumalla vain vähän energiaa induktiolevyn keraamiseen pintaan vedenlämmityksen aikana. Induktiokeittolevy ei myöskään lämpene veden kiehumispistettä kuumemmaksi, kun valurautalevyn lämpötila nousee huomattavasti veden lämpötilaa korkeammaksi. Valurautalevyn sen sijaan tulee olla huomattavasti yli 100-asteinen, jotta lämpöä siirtyisi keittoastiaan riittävän nopeasti. Tämä lisää valurautakeittolevyn energiantarvetta. Mitä viileämpänä keittolevy pysyy vettä keitettäessä, sitä vähemmän siitä säteilee ja johtuu energiaa hukkaan ympäristöön. Induktiokeittolevy siis säteilee energiaa vähemmän ympäristöön kuin valurautakeittolevy.

Tehtävä 14.35.

a) Kitka voidaan jättää pois tarkastelusta, koska pyörrevirtajarrussa jarrutuksen aiheuttavat kappaleet eivät kosketa toisiaan, eikä kappaleiden välillä ole näin ollen tukivoimia.

b) Pyörrevirtajarrussa on paikallaan oleva staattori, johon on kiinnitetty magneetteja, jotka yleensä ovat induktiokäämejä. Rengasakseliin on kiinnitetty metallilevyjä, jotka pyörivät staattorin magneettikentässä.

c) Pyörrevirtajarrussa jarruttavan voiman suuruus *F* riippuu suoraan verrannollisesti roottorilevyn nopeudesta *v* eli $F \sim \frac{vB^2}{R}$. Toisin sanoen, jos ajoneuvo on paikallaan, voima on nolla eikä pyörrevirtajarru toimi.

d) Magneettinen potentiaalienergia on vektorien pistetulo $E_\text{p} = =\overline{m} \cdot \overline{B}$, jossa $\overline{m}$ on pyörrevirran aiheuttama magneettinen momentti ja $\overline{B}$ on staattorin magneettivuon tiheys. Pistetulo saa suurimman skalaarisen arvonsa, kun magneettinen momentti ja magneettivuo ovat samansuuntaiset. Pienimmän arvonsa pistetulo saa, kun vektorit ovat vastakkaissuuntaiset. Koska magneettisen potentiaalienergian kaavassa on miinusmerkki, suurin potentiaalienergia saavutetaan, kun magneettinen momentti on vastakkaissuuntainen magneettivuohon nähden. Toisin sanoen pistetulo voidaan kirjoittaa cos-termin avulla

$$E_\text{p} = \overline{m} \cdot \overline{B} = -mB\cos(\overline{m}, \overline{B})$$
$$\cos(\overline{m}, \overline{B}) = 1, \text{ kun } (\overline{m}, \overline{B}) = 0^\circ$$
$$\cos(\overline{m}, \overline{B}) = -1, \text{ kun } (\overline{m}, \overline{B}) = 180^\circ.$$

TAI

$$E_\text{p} = \overline{m} \cdot \overline{B} = -mB\cos\theta$$
$$\cos\theta = 1, \text{ kun } \theta = 0^\circ$$
$$\cos\theta = -1, \text{ kun } \theta = 180^\circ.$$

Jos magneettinen momentti ja magneettivuo ovat samansuuntaiset, $\cos\theta = 1.$ Jos vektorit ovat vastakkaissuuntaiset, $\cos\theta = -1.$ Potentiaalienergia saa suurimman mahdollisen arvonsa, kun vektorit ovat vastakkaisuuntaiset.

e) Kun roottorin metallilevy pyörii staattorin magneettikentässä, levyyn indusoituu säännöllisesti pyörrevirtoja, jotka suurentavat sekä roottorin sisäenergiaa että magneettista potentiaalienergiaa. Pyörrevirrat suurentavat roottorilevyn lämpötilaa. Pyörrevirrat aiheuttavat levyyn myös magneettisia momentteja. Magneettisten momenttien suunta suhteessa on roottorin magneettikenttään nähden sellainen, että magneettisen momenttien potentiaalienergia kasvaa ja pienenee vuorotellen, kun metallilevy pyörii. Kun kaikkien muodostuneiden magneettisten momenttien potentiaalienergiat lasketaan yhteen, koko magneettinen potentiaalienergia suurenenee. Ajoakselin pyörimiseen liittyvää liike-energiaa muuntuu siis osittain magneettiseksi potentiaalienergiaksi.

15 Kvantittuminen ja aalto-hiukkasdualismi

Harjoittele

Tehtävä 15.1.

Oikeat vastaukset:

a) C

b) B

c) D

d) C

e) A

f) C

g) B

h) A

i) C

j) B

k) A

l) C

Tehtävä 15.2.

a) fotonin aallonpituus λ = 1,9 mm = 0,0019 m

valonnopeus $c = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s

Planckin vakio
$h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ Js $\approx 4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}$ eVs

Fotonin energia jouleina on

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{Js} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}0019\,\text{m}}$$

$$= 1{,}0455 \cdot 10^{-22}\ \text{J} \approx 1{,}0 \cdot 10^{-22}\ \text{J}$$

ja elektronivoltteina

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}0019\,\text{m}}$$

$$= 6{,}5255 \cdot 10^{-4}\ \text{eV} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{eV.}$$

b) metallin irrotustyö W_0 = 3,9 eV

elektronien maksimiliike-energia $E_{k,\ max1}$ = 2,8 eV

Kyseessä on valosähköinen ilmiö, jossa fotoni luovuttaa energiansa elektronille.

Elektronin liike-energian suurin mahdollinen arvo on se, mitä fotonin luovuttamasta energiasta jää irrotustyön jälkeen jäljelle. Kun fotonin taajuus on f, irtoavien elektronien maksimiliike-energia on $E_{k,\ max1} = hf - W_0$, josta $f = \dfrac{E_{k,max1} + W_0}{h}$.

(Valon taajuus on siten

$$f = \frac{E_{k,\,max1} + W_0}{h} = \frac{2{,}8\ \text{eV} + 3{,}9\ \text{eV}}{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs}} \approx 1{,}62 \cdot 10^{15}\ \text{Hz.})$$

Kun fotonin taajuus on $2f$, irtoavien elektronien maksimiliike-energia on $E_{k,\ max2} = h2f - W_0$. Sijoitetaan tähän edellä saatu taajuus.

$$\begin{aligned} E_{k,max2} &= 2hf - W_0 = 2\cancel{h} \cdot \frac{E_{k,max1} + W_0}{\cancel{h}} - W_0 = 2\left(E_{k,max1} + W_0\right) - W_0 \\ &= 2E_{k,max1} + 2W_0 - W_0 = 2E_{k,max1} + W_0 = 2 \cdot 2{,}8\ \text{eV} + 3{,}9\ \text{eV} = 9{,}5\ \text{eV} \end{aligned}$$

Elektronien maksimiliike-energia on 9,5 eV.

Tehtävä 15.3.

valon nopeus $c = 2{,}997\ 924\ 58 \cdot 10^8$ m/s

elektronin massa $m_e = 9{,}109\ 3837 \cdot 10^{-31}$ kg

laservalon aallonpituus $\lambda = 632$ nm

Planckin vakio
$h = 6{,}626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}$ Js ≈ $4{,}135\ 667\ 697 \cdot 10^{-15}$ eVs

alkeisvarauksen suuruus $e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

a) Fotonin liikemäärä voidaan määrittää yhtälöstä

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}}{632 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}$$
$$= 1{,}048\,428\,82 \cdot 10^{-27}\ \text{kgm/s} \approx 1{,}05 \cdot 10^{-27}\ \text{kgm/s}.$$

b) Lasketaan elektronin nopeus liikemäärän yhtälöstä

$$p = m_e v$$
$$v = \frac{p}{m_e}.$$

Merkitään elektronin liikemäärä yhtä suureksi ja sijoitetaan fotonin liikemäärän lauseke elektronin nopeuden yhtälöön. Elektronin nopeus on

$$v = \frac{h}{\lambda m_e} = \frac{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}}{632 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot 9{,}109\,3837 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}$$
$$= 1\,150{,}932\,77\ \text{m/s} \approx 1\,150\ \text{m/s}.$$

c) Lasketaan fotonin energia

$$E_\mathrm{f} = hf = \frac{hc}{\lambda}$$
$$= \frac{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{632 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}$$
$$= 3{,}143\,110\,53 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 1{,}961\,775\,292\,\mathrm{eV}.$$

Lasketaan elektronin liike-energia

$$E_\mathrm{e} = \frac{1}{2} m_\mathrm{e} v^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 9{,}109\,3837 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot \left(1\,150{,}932\,77\,\mathrm{m/s}\right)^2$$
$$= 6{,}033\,355\,44 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{J} = 3{,}765\,724\,272 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{eV}.$$

Verrataan fotonin energiaa elektronin liike-energiaan

$$\frac{E_\mathrm{f}}{E_\mathrm{e}} = \frac{3{,}143\,110\,53 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{6{,}033\,355\,44 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{J}} = 520\,955{,}6.$$

Jos fotonilla ja elektronilla on sama liikemäärä, fotonin energia on 520 000-kertainen elektronin liike-energiaan verrattuna.

Tehtävä 15.4

laserin valon aallonpituus λ = 1 064 nm = $1\,064 \cdot 10^{-9}$ m

valonnopeus $c = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}$ m/s

Planckin vakio
$h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ Js $\approx 4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}$ eVs

laserin teho P = 15 kW = 15 000 W

a) Yhden fotonin energia on $E = hf$. Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $c = f\lambda$, jossa c on valonnopeus, f on valon taajuus ja λ on valon aallonpituus. Koska valon taajuus on $f = \dfrac{c}{\lambda}$, fotonin energia on jouleina

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$= \frac{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{Js} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\,064 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}$$

$$= 1{,}866\,960\,39 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \approx 1{,}867 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Fotonin energia elektronivoltteina

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$= \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\,064 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}$$

$$= 1{,}165\,265\,023\ \text{eV} \approx 1{,}165\ \text{eV}.$$

b) aika t = 1,0 ps = $1{,}0 \cdot 10^{-12}$ s

Laser lähettää ajassa t energian $E_L = Pt$, joka on yhtä suuri kuin laserin emittoimien fotonien energioiden summa. Jos fotoneja on N kappaletta, niiden energia yhteensä on NE.

Ratkaistaan fotonien lukumäärä N.

$$E_L = NE$$

$$Pt = N\frac{hc}{\lambda}$$

$$N = \frac{Pt\lambda}{hc}$$

$$= \frac{15\,000\ \text{W} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \text{s} \cdot 1\,064 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{Js} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$= 8{,}034\,450\,042 \cdot 10^{10} \approx 8{,}0 \cdot 10^{10}$$

Laser lähettää pikosekunnissa noin 80 miljardia fotonia.

c) aika t = 1,0 s

Yhden fotonin liikemäärä voidaan määrittää yhtälöstä

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}}{1\,064 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 6{,}227\,509\,54 \cdot 10^{-28}\ \text{kgm/s}.$$

Sekunnissa laser lähettää N fotonia. Lasketaan fotonien lukumäärä sekunnissa.

$$E_{\text{L}} = NE$$

$$Pt = N\frac{hc}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{Pt\lambda}{hc} \\ &= \frac{15\,000\ \text{W} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \text{s} \cdot 1\,064 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{Js} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ &= 8{,}034\,450\,042 \cdot 10^{10} \approx 8{,}0 \cdot 10^{10} \end{aligned}$$

Lasketaan fotonien kokonaisliikemäärä eli fotonien lukumäärä kerrottuna yhden fotonin liikemäärällä.

$$\begin{aligned} p_{\text{kok}} &= Np_{\text{fotoni}} \\ &= \frac{Pt\lambda}{hc} \cdot \frac{h}{\lambda} = \frac{Pt}{c} \\ &= \frac{15\,000\ \text{W} \cdot 1{,}0\ \text{s}}{2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ &= 5{,}003\,461\,428 \cdot 10^{-5}\ \text{kgm/s} \approx 5{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{kgm/s} \end{aligned}$$

Tehtävä 15.5.

a) Valosähköisessä ilmiössä fotonin energia $E_f = hf$ siirtyy elektronin irrotustyöksi W_0 ja irronneen elektronin liike-energiaksi E eli $hf = E + W_0$. Elektronin suurin mahdollinen liike-energia on $E = hf - W_0$.

Planckin vakio saadaan (f, E)-koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Kuvaajan perusteella Planckin vakio on

$h = 4{,}299 \cdot 10^{-15}$ eV/1/s $\approx 4{,}3 \cdot 10^{-15}$ eVs.

Valokennon puolijohdemateriaalin irrotustyö saadaan sovitesuoran ja E-akselin leikkauskohdan avulla eli sovitesuoran vakiotermistä.

$-W_0 = -2{,}098$ eV

$W_0 = 2{,}098$ eV $\approx 2{,}1$ eV

b) Rajataajuus eli taajuus, jolla elektronit irtoavat valokennon materiaalista saadaan kuvaajan f-akselin ja sovitesuoran leikkauskohdasta. Tällöin fotonin energia siirtyy kokonaan irrotustyöhön. Saadaan $hf_0 = W_0$.

Rajataajuus on

$$f_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{2{,}098\,\text{eV}}{4{,}299 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs}} = 4{,}880\,20 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} \approx 4{,}88 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}.$$

Tehtävä 15.6.

a) elektronien kiihdytysjännite U = 680 V

elektronien massa $m = 9{,}109\,3837 \cdot 10^{-31}$ kg

Planckin vakio $h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ Js

Sähkökentässä sähköisen voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin elektronin liike-energian muutos, $W = \Delta E_k$. Elektronit saavat käytännössä sähkökentässä liike-energian, joka on sähköisen voiman tekemän suuruinen $E_k = eU$.

Elektronien nopeudeksi saadaan

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

De Broglien aallonpituus on

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2eU}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{2m^{\cancel{2}}eU}{\cancel{m}}}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

$$= \frac{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}109\,3837 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 680\text{V}}}$$

$$= 4{,}703\,13 \cdot 10^{-11}\ \text{m} \approx 47\,\text{pm}$$

b) Hiukkasen de Broglien aallonpituus on kääntäen verrannollinen hiukkasen liikemäärään, $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$. Jos hiukkasilla on yhtä suuret nopeudet, sillä hiukkasella, jonka massa on pienempi, on suurempi de Broglien aallonpituus. Koska elektronin massa on pienempi kuin neutronin massa, elektronin de Broglien aallonpituus on tilanteessa suurempi.

c) Kun elektronisuihku kulkee kaksoisraon läpi, ilmaisimella havaitaan jonkin ajan kuluttua samanlainen diffraktiokuvio kuin esimerkiksi laserin valon kulkiessa kaksoisraon läpi. Keskelle syntyy intensiteettimaksimi. Intensiteettimaksimin molemmille puolille syntyy symmetrisesti kuviot, joissa välillä on kohtia, joissa ei juurikaan ole hiukkasia, ja välillä kohtia, joissa on paljon hiukkasia. Tämä koe osoittaa, että elektronisuihku käyttäytyy kuten valo eli hiukkasilla on myös aaltoluonne.

Tehtävä 15.7.

a) Laserin tuottama valo on monokromaattista, eli siinä on vain tiettyä aallonpituutta. Lisäksi laserin tuottamat fotonit ovat samanvaiheisia, jolloin laserin valon intensiteetti on huomattavan suuri verrattuna muihin vastaaviin valonlähteisiin.

b) emittoituneen fotonin aallonpituus λ_B = 1,152 µm

valonnopeus c = 2,997 924 58 · 10^8 m/s

Planckin vakio h = 4,135 667 697 · 10^{-15} eVs

Heliumin ja neonin energiatilojen E_5 ja E_3 energiat ovat yhtä suuret. Emittoituneen fotonin energia on yhtä suuri kuin energiatilojen välinen energiaero eli $E_f = \Delta E$. Fotonin energialle on voimassa $E_f = \dfrac{hc}{\lambda}$.

Tällöin $\dfrac{hc}{\lambda} = \Delta E$.

Energiatason E_2 energia saadaan emittoituneen fotonin ja energiatason E_3 energian avulla.

$$\frac{hc}{\lambda_B} = E_3 - E_2$$

$$E_2 = E_3 - \frac{hc}{\lambda_2} = 19{,}8\,\text{eV} - \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{1{,}152 \cdot 10^{-6}\,\text{m}}$$
$$= 18{,}723\,748\,\text{eV}.$$

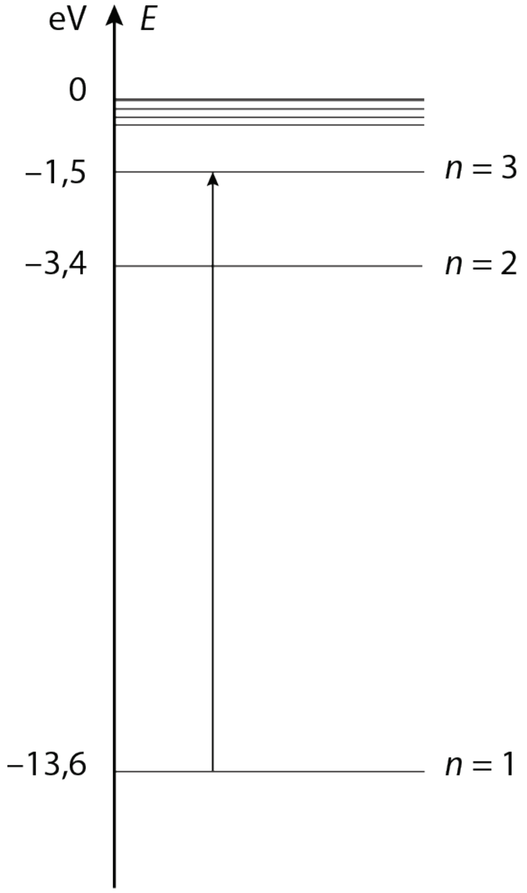
Kun Neonin viritystila purkautuu energiatasolta E_5 tasolle E_2, laserin emittoiman fotonin aallonpituus saadaan energiatasojen energiaerotuksen avulla.

$$\frac{hc}{\lambda_A} = E_5 - E_2$$

$$\lambda_A = \frac{hc}{E_5 - E_2} = \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{20{,}65\,\text{eV} - 18{,}723\,748\,\text{eV}}$$
$$= 6{,}436\,55 \cdot 10^{-7}\,\text{m} \approx 643{,}7\,\text{nm}.$$

Tehtävä 15.8.

a) Lisätään energiatasokaavioon virittymistä kuvaava nuoli perustilalta n = 1 viritystilalle n = 3.

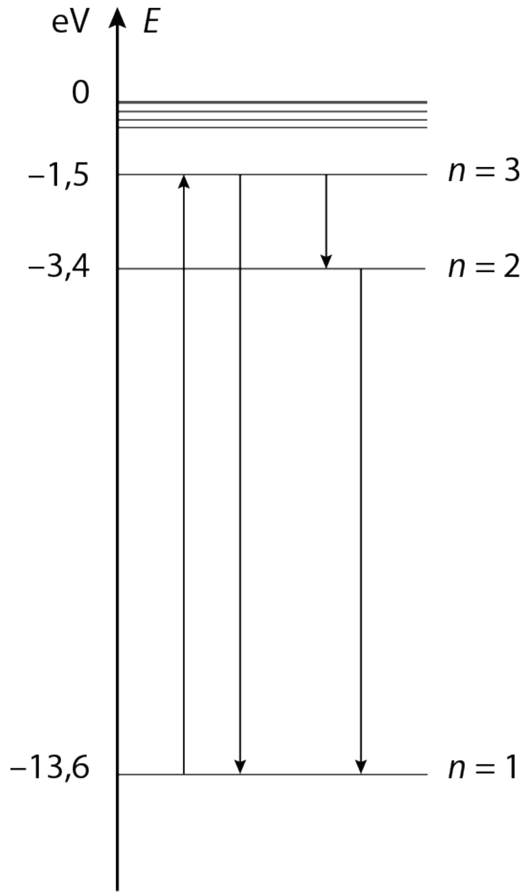


b) Atomi voi virittyä, jos atomi vastaanottaa sopivan suuruisen energian. Atomi voi vastaanottaa energian esimerkiksi fotonilta tai atomiin törmäävältä elektronilta tai joltakin toiselta hiukkaselta.

c) valonnopeus $c = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s

Planckin vakio $h = 4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}$ eVs

Vetyatomi voi palata toiselta viritystilalta suoraan perustilalle tai vaihtoehtoisesti viritystila voi purkautua välitilan eli ensimmäisen viritystilan kautta. Merkitään eri vaihtoehdot energiatasokaavioon.



Atomin emittoiman fotonin energia vastaa kahden energiatilan energioiden erotusta,

$E_\gamma = E_m - E_n$, jossa E_m sekä E_n ovat energiatilojen m ja n energiat ja $m > n$.

Ratkaistaan tämän perusteella fotonin aallonpituus.

$$\frac{hc}{\lambda} = E_m - E_n$$

$$\lambda = \frac{hc}{E_m - E_n}$$

Kun atomin viritystila purkautuu suoraan tilalta m = 3 tilalle n = 1, saadaan fotoni, jonka aallonpituus on

$$\lambda = \frac{hc}{E_3 - E_1} = \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-1{,}5\ \text{eV} - (-13{,}6\ \text{eV})}$$
$$= 1{,}024\,663 \cdot 10^{-7}\ \text{m} \approx 100\ \text{nm}.$$

Tämä säteily voidaan luokitella ultraviolettisäteilyksi.

Kun atomin viritystila purkautuu välitilan kautta, muodostuu kaksi fotonia.

Viritystilan purkautuessa tilalta m = 3 tilalle n = 2, saadaan fotoni, jonka aallonpituus on

$$\lambda = \frac{hc}{E_3 - E_2} = \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-1{,}5\ \text{eV} - (-3{,}4\ \text{eV})}$$
$$= 6{,}525\,48 \cdot 10^{-7}\ \text{m} \approx 650\ \text{nm}.$$

Tämä säteily on näkyvää valoa, joka aistitaan punaisena.

Viritystilan purkautuessa tilalta m = 2 tilalle n = 1, saadaan fotoni, jonka aallonpituus on

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-3{,}4\ \text{eV} - (-13{,}6\ \text{eV})}$$

$$= 1{,}215\,53 \cdot 10^{-7}\ \text{m} \approx 120\ \text{nm}.$$

Tämä säteily voidaan luokitella ultraviolettisäteilyksi.

Tehtävä 15.9.

a) Atomin 1s-, 2s-, 2p-orbitaalit ovat täydet. Atomissa on yhteensä 10 elektronia. Koska atomissa on yhtä monta protonia ja elektronia, alkuaineen järjestysluku $Z = 10$ eli kyseessä on alkuaineiden jaksollisen järjestelmän perusteella neon Ne.

b) Kaavion perusteella 4s täyttyy ennen kuin tila 3d.

Tila 3d sijaitsee ylempänä kuin tila 4s, joten minimienergiaperiaatteen mukaan atomin energiatila pienenee enemmän, kun tila 4s täytyy ensin.

c) Jos 3d-orbitaali on täynnä, myös orbitaalit 4s, 3p, 3s, 2p, 2s ja 1s ovat täyttyneet. Lasketaan elektronien määrä.

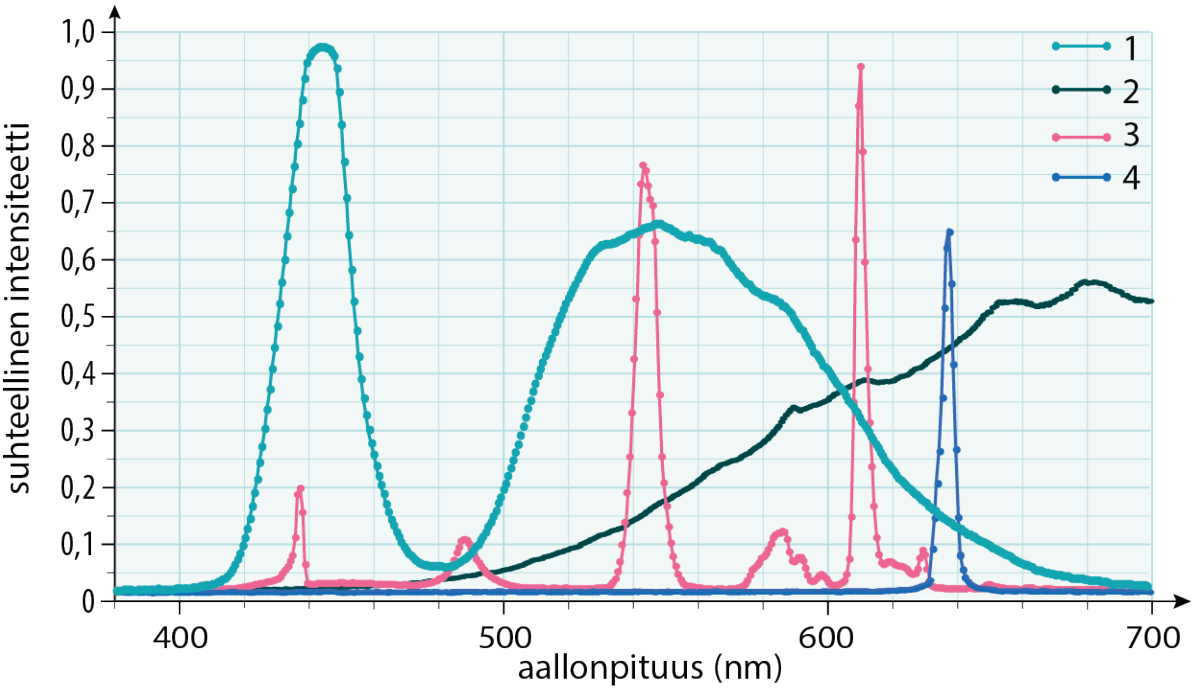
3d: 10 elektronia, 4s: 2 elektronia, 3p: 6 elektronia, 3s: 2 elektronia, 2p: 6 elektronia, 2s: 2 elektronia ja 1s: 2 elektronia. Yhteensä elektroneja on siis 30. Kyseessä on alkuaine, jonka järjestysluku on 30 eli sinkki Zn.

Tehtävä 15.10.

Thomsonin atomimallissa positiivisesti varautuneen ytimen ja negatiivisesti varautuneiden elektronien sähkövaraus on jakautunut koko atomiin. Tällöin atomin sisällä sähkökenttä on melko pieni ja atomi aiheuttaa vain hyvin pienen sähköisen voiman varattuun alfahiukkaseen ja hiukkasen sirontakulma on hyvin pieni. Rutherfordin mallissa atomin lähes koko massa oli keskittynyt pieneen positiivisesti varautuneeseen ytimeen. Tällöin positiivisesti varautunut ydin aiheuttaa suuren sähköisen voiman varautuneeseen alfahiukkaseen ja hiukkanen siroaa suuressa kulmassa tulosuuntaansa nähden. Näin ollen kuvan A atomi esittää Thomsonin ja kuva B Rutherfordin atomimallin atomia.

Tehtävä 15.11.

a)



b) Kaikki spektrit ovat näkyvän valon alueella ja spektrit ovat emissiospektrejä.

c) Kynttilän tuottaman valon spektri on jatkuva, joten *suhteellinen intensiteetti 2* on kynttilän valon tuottama spektri.

Laserin tuottama valo on koherenttia, joten laserin tuottaman valon spektrissä näkyy vain yksi selvä piikki ja näin ollen suhteellinen intensiteetti 4 on laserin tuottaman valon spektri.

Loisteputkilampun pinnalla oleva fluoresoiva aine tuottaa näkyvää valoa. Kun fluoresoivan aineen atomit ovat virittyneet ja viritystilat purkautuvat, atomit emittoivat vain tiettyjä aallonpituuksia. Suhteellinen intensiteetti 3 on loisteputkilampun tuottaman valon spektri.

Valkoisen ledin lähettämä valo syntyy, kun puolijohteen viritystilat purkautuvat ja viritystilojen purkautumisen yhteydessä emittoituu fotoneja, joilla on tietyn suuruinen energia. Tällöin emissiospektrissä on vain tiettyjä aallonpituuksia eli spektri ei ole jatkuva spektri. Suhteellinen intensiteetti 1 on ledin tuottaman valon spektri.

d) Planckin vakio h = 4,135 667 697 · 10^{-15} eVs

valonnopeus c = 299 792 458 m/s

Määritetään kuvaajan perusteella laserin emittoimien fotonien aallonpituus: λ = 648 nm. Fotonin energia on

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$= \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{648 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}$$

$$= 1{,}9133\ \text{eV} \approx 1{,}91\ \text{eV}.$$

Tehtävä 15.12.

a) Röntgenputkessa syntyy säteilyä, kun elektronisuihku kohtaa metallianodin ja elektronien liike hidastuu. Röntgenputkessa katodin ja anodin välissä oleva sähkökenttä aiheuttaa katodilta irronneisiin elektroneihin sähköisen voiman. Sähköinen voima tekee työtä ja kasvattaa elektronien liike-energiaa. Kun kiihdytetyt elektronit kohtaavat anodimateriaalin metalliatomit, elektronit joutuvat hidastuvaan liikkeeseen. Hidastuvassa liikkeessä oleva elektroni emittoi sähkömagneettista säteilyä. Spektrin jatkuva osa aiheutuu hidastuvassa liikkeessä olevan elektronin emittoimasta säteilystä. Tätä säteilyä kutsutaan jarrutussäteilyksi.

Kun röntgenputkessa kiihdytetyt elektronit törmäävät anodimateriaalin metalliatomien sisäkuorien elektroneihin, atomi virittyy. Spektrissä näkyvät piikit syntyvät, kun viritystilat purkautuvat ja emittoituu sähkömagneettista säteilyä. Tätä säteilyä kutsutaan ominaissäteilyksi. Viritystilojen purkautumisten energiat ovat kullekin atomille ominaisia ja siksi myös emittoituneiden fotonien aallonpituudet ovat kullekin atomille ominaisia.

b) Röntgendiffraktiolla voidaan tutkia kiteisen aineen rakennetta, koska röntgensäteilyn aallonpituus on samaa suuruusluokkaa kuin kiteisen aineen atomien väliset etäisyydet. Kun röntgensäteilyä ohjataan materiaaliin, jolla on säännöllinen kiderakenne, havaitaan varjostimena toimivalla valokuvauslevyllä tai puolijohdeilmaisimella interferenssimaksimeja. Kide toimii kolmiulotteisena hilana.

Röntgendiffraktiossa interferenssimaksimit muodostuvat suuntiin, joissa kiteen kahdesta eri atomitasosta sironneiden aaltojen matkaero on aallonpituuden monikerta. Tästä ehdosta saadaan Braggin laki $2d \sin \theta = k\lambda$, jossa d on kiteen atomitasojen välimatka, θ on säteilyn kulkusuunnan ja atomitason välinen kulma, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ on interferenssimaksimin kertaluku ja λ on säteilyn aallonpituus tai hiukkasen de Broglien aallonpituus.

Tehtävä 15.13.

röntgensäteilyn energia E = 1,49 keV

kulma, jossa säteily osui kiteeseen θ = 49°

Planckin vakio h = 4,135 667 697 · 10^{-15} eVs

valonnopeus c = 299 792 458 m/s

Kyseessä oli ensimmäisen kertaluvun diffraktiomaksimi, joten k = 1.

Röntgensäteilyn aallonpituus saadaan säteilyn energian avulla

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E}.$$

Kun säteily osui kiteiseen aineeseen, ilmaisimelle syntyi interferenssimaksimeja Braggin lain mukaan $2d\sin\theta = k\lambda$. Yhdistämällä edellä olevat yhtälöt saadaan atomitasojen välinen etäisyys.

$$\frac{2d\sin\theta}{k} = \frac{hc}{E}$$

$$d = \frac{khc}{2\sin\theta E}$$

$$= \frac{1 \cdot 4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot \sin 49^\circ \cdot 1{,}49 \cdot 10^{3}\ \text{eV}}$$

$$= 5{,}512\,77 \cdot 10^{-10}\ \text{m} \approx 5{,}5\ \text{Å}$$

Tehtävä 15.14.

a) Valon hiukkasluonteen todistavat esimerkiksi:

Valosähköinen ilmiö. Valosähköisessä ilmiössä havaittiin metallilevyn varauksen purkautuvan, kun sitä säteilytetään suurienergisella valolla. Ilmiön havaitsi 1887 Heinrich Hertz. Albert Einstein selitti ilmiön 1905 ja sai siitä fysiikan Nobelin 1921.

Comptonin sironta. Comptonin sironta on ilmiö, jossa fotoni luovuttaa osan energiastaan elektronille. Fotonin energia pienenee ja elektroni saa liike-energiaa. Ilmiön havaitsi Arthur Compton vuonna 1922. Hänelle myönnettiin havainnoistaan fysiikan Nobel vuonna 1927.

b) Hiukkasten aaltoluonne oli Louis de Broglien hypoteesi, jonka hän esitti vuonna 1923. Hypoteesi osoittautui oikeaksi. Hiukkasen aaltoluonteen todistavat kokeet ovat esimerkiksi:

Elektronien kaksoisrakokoe. Kun elektronisuihku ohjataan kaksoisrakoon, muodostuu kaksoisraon takana olevalle varjostimelle diffraktiokuvio, joka todistaa elektronin aaltoluonteen.

Davissonin ja Germerin koe. Vuosina 1923–1927 Clinton Davisson ja Lester Germer kohdistivat elektronisuihkun nikkelikiteeseen. Kiteestä sironnut elektronisuihku muodosti ilmaisimelle diffraktiokuvion, joka muistutti kiteeseen osuvan röntgensäteilyn aiheuttamaa diffraktiokuviota.

Tehtävä 15.15.

tulevan fotonin aallonpituus λ_1 = 10,20 Å

sironneen fotonin aallonpituus λ_2 = 10,25 Å

Planckin vakio
h = 6,626 070 15 · 10^{-34} Js ≈ 4,135 667 697 · 10^{-15} eVs

elektronin massa m = 9,109 3837 · 10^{-31} kg

Kun fotoni osuu elektroniin, liikemäärä säilyy. Sovitaan tulevan fotonin liikemäärän suunta positiiviseksi, jolloin liikemäärän säilymislaille on voimassa

$p_1 = -p_2 + p_e$

Fotonien liikemäärä on $p = \frac{h}{\lambda}$ ja elektronin liikemäärä $p_e = mv$. Liikemäärän säilymislain perusteella voidaan määrittää elektronin nopeus sironnan jälkeen.

$$\frac{h}{\lambda_1} = -\frac{h}{\lambda_2} + mv$$

$$mv = \frac{h}{\lambda_1} + \frac{h}{\lambda_2}$$

$$v = \frac{h}{m}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

Elektronin liike-energia on

$$E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{h}{m}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\right)^2 = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)^2$$

$$= \frac{\left(6{,}626\,070\,15\cdot 10^{-34}\text{ Js}\right)^2}{2\cdot 9{,}109\,3837\cdot 10^{-31}\text{ kg}}\cdot\left(\frac{1}{10{,}20\cdot 10^{-10}\text{ m}}+\frac{1}{10{,}25\cdot 10^{-10}\text{ m}}\right)^2$$

$$= 9{,}220\,015\cdot 10^{-19}\text{ J} \approx 9{,}220\cdot 10^{-19}\text{ J} = 5{,}755\text{ eV}.$$

Jos tehtävä ratkaistaan toteamalla energian ja liikemäärän säilymislait ja laskemalla ainoastaan fotonin energian muutoksesta elektronin liike-energia, saadaan hieman eri tulos. Tämä johtuu fotonien aallonpituuksien karkeasta tarkkuudesta.

$$E_\text{k} = E_1 - E_2$$

$$= \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = hc\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)$$

$$= 6{,}626\,070\,15\cdot 10^{-34}\text{ Js}\cdot 299\,792\,458\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\left(\frac{1}{10{,}20\cdot 10^{-10}\text{ m}}-\frac{1}{10{,}25\cdot 10^{-10}\text{ m}}\right)$$

$$= 9{,}499\,980\cdot 10^{-19}\text{ J} \approx 9{,}500\cdot 10^{-19}\text{ J} = 5{,}929\text{ eV}.$$

Tehtävä 15.16.

a) Perusvuorovaikutukset ovat sähkömagneettinen vuorovaikutus, gravitaatiovuorovaikutus, heikko vuorovaikutus ja vahva vuorovaikutus. Sähkömagneettinen vuorovaikutuksen seurauksena on syntynyt atomeja, jossa negatiivisesti varatut elektronit kiertävät positiivisesti varattua ydintä. Vahvan vuorovaikutuksen seurauksena protonit ja neutronit ovat muodostaneet ytimiä. Gravitaatiovuorovaikutuksen seurauksena maailmankaikkeudessa olevasta vedystä ja heliumista on syntynyt tähtiä. Heikko vuorovaikutus aiheuttaa beetahajoamisen. Beetahajoamisen yhteydessä syntyy uusia isotooppeja eli maailmankaikkeuteen on syntynyt uusia atomeja.

b) Auringossa tapahtuu ydinreaktioita, joissa syntyy energiaa ja uusia hiukkasia. Auringosta poistuu jatkuvasti aurinkotuulen mukana hiukkasia sitä ympäröivään avaruuteen. Jos Aurinko olisi antimateriaa, myös aurinkotuulen hiukkaset olisivat antimateriaa. Kun aurinkotuulen hiukkaset osuvat esimerkiksi satelliitteihin tai muuhun materiaan, ei tapahdu annihilaatiota. Annihilaatio tapahtuisi, jos Auringosta tulevat hiukkaset olisivat antimateriaa. Tämä osoittaa, että Aurinko ei ole antimateriaa.

c) Laskennallisesti määritettynä kappaleen ratanopeus on kääntäen verrannollinen kappaleen etäisyyteen galaksin keskustasta. Tämän perusteella galaksin ulkolaidalla kappaleiden ratanopeuksien tulisi pienentyä.

On havaittu, että galaksien uloimmat osat liikkuvat suuremmalla nopeudella kuin mitä galaksien tähtien massoista lasketut ennusteet antavat. Tämän perusteella galaksissa on oltava pimeää ainetta, jonka massa vaikuttaa erityisesti galaksien ulompien osien liikkeeseen.

Tehtävä 15.17.

a) Kaoni sisältää ylös- eli u-kvarkin ja outo- eli s-kvarkin antihiukkasen eli $\bar{\mathrm{s}}$-kvarkin. Kaonin rakenne on siis $\mathrm{u}\bar{\mathrm{s}}$

b) Koska kaoni koostuu kvarkista ja antikvarkista, kaoni on mesoni.

c) Kaonin sähkövaraus saadaan kvarkkien sähkövarausten summana. u-kvarkin sähkövaraus on $Q_{\mathrm{u}} = \frac{2}{3}e$ ja

s-kvarkin antihiukkasen sähkövaraus on $Q_{\bar{\mathrm{s}}} = \frac{1}{3}e$.

Kaonin varaus $Q_{\mathrm{K}} = Q_{\mathrm{u}} + Q_{\bar{\mathrm{s}}} = \frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e = e.$

d) Kyseisen kaonin antihiukkanen koostuu kaonin sisältämien hiukkasten antihiukkasista eli rakenne on $\bar{\mathrm{u}}\mathrm{s}$. Antihiukkasen sähkövaraus on vastakkaismerkkinen hiukkasen sähkövaraukselle, joten kyseisen kaonin antihiukkasen sähkövaraus on $-e$

e) kaonin massa $m_{\mathrm{K}} = 493{,}7\ \mathrm{MeV/c^2}$

u-kvarkin massa $m_{\mathrm{u}} = 2{,}3\ \mathrm{MeV/c^2}$

antioutokvarkin $m_{\mathrm{s}} = 95\ \mathrm{MeV/c^2}$.

Verrataan kaonissa olevien alkeishiukkasten massojen summaa kaonin massaan.

$$\frac{m_{\mathrm{u}} + m_{\mathrm{s}}}{m_{\mathrm{K}}} = \frac{2{,}3\,\mathrm{MeV}/c^2 + 95\,\mathrm{MeV}/c^2}{493{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2} = 0{,}197\,083 \approx 19\,\%$$

f) Luonnossa olevat pysyvät hiukkaset koostuvat elektronin perheen hiukkasista. Koska kaoni koostuu u-kvarkista ja $\bar{s}$-kvarkista, kaoni ei ole pysyvä.

Tehtävä 15.18.

Auringon massa $M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg

Linnunradan tähtien massa $M_\mathrm{t} = 4{,}6 \cdot 10^{10}\ M_\odot$

Linnunradan halkaisija
d = 200 000 valovuotta = $1{,}892\,146 \cdot 10^{21}$ m

a) Tarkastellaan galaksin ulkolaidalla olevaa tähteä, jonka massa on m, ja joka on galaksin keskipisteestä etäisyydellä r. Kappaleen radan sisäpuolelle jäävän galaksin tähtien massa on M_t. Yksittäisen tähden massa on hyvin pieni verrattuna galaksin tähtien massaan.

Lasketaan Linnunradan tähtien massa

$$M_\mathrm{t} = 4{,}6 \cdot 10^{10} M_\odot = 4{,}6 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} = 9{,}149 \cdot 10^{40}\mathrm{kg}.$$

Kappale päätyy tasaiseen ympyräliikkeeseen gravitaatiovoiman vaikutuksesta. Voiman ja kiihtyvyyden suunnat ovat kohti ympyräradan keskipistettä. Ratkaistaan kappaleen ratanopeus Newtonin II lain mukaisesta liikeyhtälöstä.

$$F_g = ma_n$$

$$\gamma \frac{\cancel{m} M_t}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$v^2 = \gamma \frac{M_t}{r}$$

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M_t}{r}} = \sqrt{\gamma \frac{2M_t}{d}}$$

$$v = \sqrt{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{2 \cdot 9{,}149 \cdot 10^{40}\ \text{kg}}{1{,}892\,146 \cdot 10^{21}\ \text{m}}}$$

$$= 80\,339{,}172\,004\ \text{m/s} \approx 80{,}3\ \text{km/s}$$

b) Laskennallisesti kappaleen ratanopeus on $v = \text{vakio} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$ eli kappaleen nopeus on kääntäen verrannollinen kappaleen etäisyyteen galaksin keskustasta. Tämän perusteella galaksin ulkolaidalla kappaleiden ratanopeuksien tulisi pienentyä.

Mitatun tuloksen perusteella ulkoreunalla olevan tähden nopeus on huomattavasti suurempi kuin teoreettisesti lasketun arvon. Tämän perusteella tähtien massa on vain pieni osa Linnunradan kokonaismassasta. Linnunradan massa koostuu tähtien massan lisäksi esimerkiksi mustista aukoista, tähtien välisestä pölystä ja kaasusta, planeetoista ja etenkin pimeästä aineesta. Pimeän aineen massa on huomattavan suuri osa Linnunradan massasta.

Sovella

Tehtävä 15.19.

laserin valon aallonpituus λ = 266 nm

pulssin kesto t = 20 ns

yhden valopulssin energia E = 6,0 mJ

valonnopeus c = 2,997 924 58 · 10^8 m/s

Planckin vakio h = 4,135 667 697 · 10^{-15} eVs

alumiinin irrotustyö W_0 = 4,28 eV

Laser tuottaa pulsseja 50 Hz:n taajuudella, eli sekunnissa laser tuottaa n = 50 pulssia.

a) Laserin yhden valopulssin energia koostuu N kappaleesta fotoneja. Tällöin

   $E = NE_\mathrm{f}$.

   Yhden fotonin energia on $E_\mathrm{f} = \frac{hc}{\lambda}$. Fotonien lukumäärä saadaan ratkaistua valopulssin ja fotonien energian avulla.

$$E = NE_\mathrm{f}$$

$$E = N\frac{hc}{\lambda}$$

$$N = \frac{E\lambda}{hc} = \frac{6{,}0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}\cdot 266\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}{6{,}626\,070\,15\cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}\cdot 2{,}997\,924\,58\cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}} = 8{,}034\,45\cdot 10^{15} \approx 8{,}0\cdot 10^{15}$$

Laser tuottaa pulsseja 50 Hz:n taajuudella, jolloin sekunnissa pulssien määrä on n = 50. Laserin valoteho saadaan sekunnissa tuotetun energian avulla.

$$P = \frac{nE}{t} = \frac{50 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{J}}{1\ \text{s}} = 0{,}30\ \text{W}.$$

b) alumiinin irrotustyö W_0 = 4,28 eV

Fotonin energia siirtyy tilanteessa elektronin irrotustyöksi ja elektronin liike-energiaksi eli $E_\text{f} = W_0 + E_{\text{k, max}}$. Koska fotonin energia on $E_\text{f} = hf$ ja aaltoliikkeen perusyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $c = f\lambda$, niin

$$hf = W_0 + E_{\text{k,max}}$$

$$\frac{hc}{\lambda} = W_0 + E_{\text{k,max}}.$$

Ratkaistaan suurin energia, jonka elektroni voi saada.

$$E_{\text{k,max}} = \frac{hc}{\lambda} - W_0 = \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs} \cdot 299\,792\,458\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{266 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 4{,}28\ \text{eV}$$

$$= 0{,}381\,06\ \text{eV} \approx 0{,}381\ \text{eV}.$$

c) Laser ja led tuottavat molemmat sähkömagneettista säteilyä. Sekä laserin että ledin tuottaman säteilyn spektrit ovat epäjatkuvia eli spektreissä esiintyy vain tiettyjä aallonpituuksia. Laserin tuottamassa säteilyssä on vain yhtä aallonpituutta, mutta valkoisen ledin tuottamassa säteilyssä on useita eri aallonpituuksia. Laser tuottaa säteilyä pulsseina, mutta led tuottaa säteilyä koko ajan.

Tehtävä 15.20.

a) Valosähköisessä ilmiössä riittävän lyhytaaltoinen sähkömagneettinen säteily, kuten UV-valo, voi irrottaa elektroneja metallin pinnasta. Ilmiön täydellinen selittäminen ei onnistunut klassisen fysiikan ja valon aaltomallin avulla. Einstein selitti valosähköisen ilmiön toteamalla, että valo koostuu hiukkasista eli fotoneista, joiden energia on kvantittunut. Metallipintaan osuva fotoni voi irrottaa pinnasta elektronin vain, jos fotonin energia on riittävän suuri.

Kun fotoni osuu metallin pintaan, fotonin energia siirtyy metallin pinnassa olevalle elektronille. Fotonin energia on $E = hf$, missä h on Planckin vakio ja f on säteilyn taajuus. Osa fotonin energiasta siirtyy elektronin irrottamiseen ja osa siirtyy elektronin liike-energiaksi. Elektronin irrottamiseen tarvittava energia on erilainen eri materiaaleissa. Tarvittavaa energiaa kutsutaan irrotustyöksi, W_0. Suurin mahdollinen liike-energia, jonka elektroni voi tilanteessa saada on siten $E_{k,\,max} = hf - W_0$.

Einsteinin tulkinnan mukaan valolla on dualistinen luonne. Aiemmin valon oli osoitettu olevan aaltoliikettä, mutta valosähköisen ilmiön selitys edellytti, että valolla ja säteilyllä on myös hiukkasominaisuuksia. Tulkinta johti yleiseen sähkömagneettista säteilyä ja hiukkassäteilyä koskevaan teoriaan aalto-hiukkasdualismista sekä kvanttifysiikan kehittymiseen.

b) UV-valon aallonpituus λ = 280 nm

vastajännite U_0 = 2,2 V

Sähkökentässä sähköisen voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin elektronin liike-energian muutos, $W = \Delta E_k$. Kun elektronit pysähtyvät sähkökentässä, vastajännitteestä voidaan päätellä valokennosta irtoavien elektronien liike-energia suurimmillaan,

$E_{k,max} = eU_0$ = 2,2 eV.

Valosähköilmiössä osa fotonin energiasta $E = hf$ siirtyy elektronin irrotustyöhön W ja osa siirtyy elektronin liike-energiaksi E_k. Elektronin liike-energian suurin mahdollinen arvo on $E_{k,max} = hf - W_0$.

Irrotustyö on

$$W_0 = hf - E_{k,max} = \frac{hc}{\lambda} - E_{k,max}$$

$$= \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{280 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 2{,}2\ \text{eV} = 2{,}2280\ \text{eV} \approx 2{,}2\ \text{eV}.$$

Irrotustyön avulla voidaan päätellä raja-aallonpituus, joka fotonilla pitää olla, jotta se juuri ja juuri kykenee irrottamaan elektronin. Tilanteessa elektronin liike-energia on nolla eli $hf - W_0 = 0$.

$$W_0 = hf$$

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W_0} = \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2{,}2280\,\text{eV}}$$

$$= 5{,}564\,80 \cdot 10^{-7}\ \text{m} \approx 556\,\text{nm}.$$

Pisin aallonpituus, jolla kenno toimii, on noin 556 nm, joka on näkyvän valon aallonpituusalueella.

Tehtävä 15.21.

valonnopeus tyhjiössä $c = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s

a) Valosähköisessä ilmiössä fotonin energia $E = hf$ siirtyy elektronin irrotustyöksi W_0 ja irronneen elektronin liike-energiaksi E_k eli $hf = E_{k,\,max} + W_0$. Elektronin suurin mahdollinen liike-energia on $E_{k,\,max} = hf - W_0$.

Mittauksessa elektronien liike on hidastuvaa, kun sähkökentän suuntaan liikkuvaan elektroniin kohdistuu sähköinen voima. Kun elektroni on kulkenut sähkökentän matkan, elektronin nopeus on lopuksi hetkellisesti nolla ja myös elektronin liike-energia on nolla. Elektronien liike-energian muutos on $\Delta E_k = E_{k,\,max} - 0 = E_{k,\,max}$. Sähköisen voiman tekemä työ muuttaa elektronin liike-energiaa, joten $E_{k,\,max} = QU$. Elektronin sähkövarauksen suuruus on e, jolloin $E_{k,\,max} = eU$.

Aallonpituutta λ = 376 nm vastaava taajuus saadaan aaltoliikkeen perusyhtälön avulla, eli

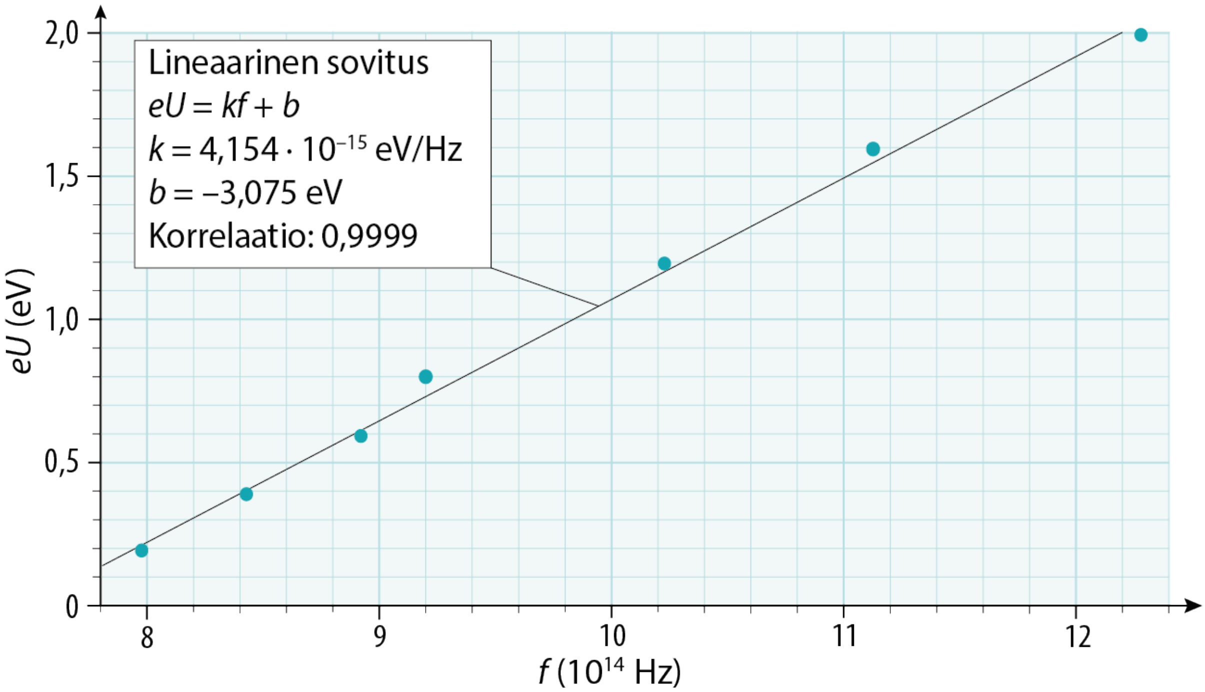
$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{299\,792\,458\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{366 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} \approx 8{,}191 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}.$$

Lasketaan muita aallonpituuksia vastaavat arvot ja merkitään ne taulukkoon.

λ (nm)	***U* (V)**	***f* ($\cdot 10^{14}$ Hz)**	***eU* (eV)**
376	0,20	7,973	0,20
356	0,40	8,421	0,40
336	0,60	8,922	0,60
326	0,80	9,196	0,80
293	1,2	10,23	1,2
265	1,6	11,13	1,6
244	2,0	12,29	2,0

Yhtälön $eU = hf - W_0$ perusteella valon taajuuden ja elektronien suurimman liike-energian välillä on lineaarinen riippuvuus.

Esitetään mittaustulokset (f, eU)-koordinaatistossa ja sovitetaan mittausaineistoon suora.



Suoran fysikaalinen kulmakerroin on Planckin vakio, joka on mittauksen perusteella
$h = 4{,}154 \cdot 10^{-15}$ eVs $\approx 4{,}2 \cdot 10^{-15}$ eVs.

b) Edellisen kohdan perusteella $eU = hf - W_0$. Tällöin sovitesuoran vakiotermi b kuvaa termiä $-W_0$. Metallin irrotustyö on

$W_0 = 3{,}075$ eV $\approx 3{,}1$ eV.

Kun tulosta verrataan taulukkokirjan antamiin arvoihin, todetaan, että metalli oli kalsiumia, sillä kalsiumin irrotustyö on 3,10 eV

c) Koska kuvaajan suoran fysikaalinen kulmakerroin on Planckin vakio, suoran jyrkkyys ei muutu. Kuparin irrotustyö on 4,84 eV, joten suora leikkaa pystyakselin alempana kuin nykyinen suora.

Tehtävä 15.22.

a) Kahdella eri alkuaineella ei ole samanlaisia spektrejä, sillä spektriviivat ovat peräisin fotoneista, jotka emittoituvat tai absorboituvat atomin viritystilan muuttuessa. Koska kunkin eri alkuaineen atomilla on erilainen elektronipilven rakenne, atomin energiatilat ovat jokaiselle atomille erilaiset. Tietty alkuaine voi emittoida tai absorboida vain tietyn aallonpituuden ja taajuuden fotoneja.

b) Saman alkuaineen emissio- ja absorptiospektrin spektriviivat ovat täsmälleen samoilla kohdilla, koska emissiospektriviivat ovat peräisin atomin viritystilan purkautumisesta, ja absorptiospektriviiva on peräisin atomin virittymisestä. Energiatilojen erotukset ovat molemmissa tilanteissa samat, joten emittoituvien ja absorboituvien fotonien aallonpituudet ja taajuudet ovat samat.

c) Kun spektrejä mitataan, kaikki viivat eivät ole yhtä voimakkaita, koska jotkin energiatilojen muutokset ovat todennäköisempiä kuin toiset. Voimakkaimmat spektriviivat liittyvät usein atomin perustilaan.

Tyypillisesti emissiospektrissä esiintyy enemmän viivoja, koska emissiospektri muodostuu tavalla, jossa on enemmän vaihtoehtoja. Atomi voi virittyä usealle eri viritystilalle, ja viritystila voi purkautua monella eri tavalla, jolloin syntyy erilaisia fotoneja.

Absorptiospektri syntyy, kun fotoni virittää atomin. Koska viritystilat ovat tyypillisesti hyvin lyhytikäisiä, todennäköisyys sille, että fotoni kohtaisi virittyneen atomin on paljon pienempi kuin kohtaaminen sellaisen atomin kanssa, joka on perustilalla. Siten absorptiospektrissä esiintyy lähinnä viivoja, jotka liittyvät atomin virittymiseen perustilalta jollekin korkeammalle viritystilalle. Spektriviivat, jotka liittyvät korkeampien viritystilojen välisiin siirtymiin ovat epätodennäköisiä.

Tehtävä 15.23.

Kun uv-valo osuu valkoiseen paperiin, havaitaan, että violetin värinen valo heijastuu paperin pinnasta. Valo on sähkömagneettista aaltoliikettä, joka heijastuu rajapinnassa, ja heijastunut valo noudattaa heijastumislakia. Valon aallonpituus ei muutu heijastumisen yhteydessä.

Kun valo kohdistettiin viivoittimeen, havaittiin, että valon väri muuttui vihertäväksi. Kyseessä on fluoresenssi-ilmiö. Lampun tuottama uv-valo virittää viivoittimen atomeja. Kun atomien viritystilat purkautuvat yhden tai useamman välitilan kautta, kyseessä on fluoresenssi. Koska viritystilan purkautuminen tapahtuu välitilan kautta, emittoituneen säteilyn energia on pienempi kuin viivoittimeen saapuneen valon energia. Tällöin emittoituneen säteilyn aallonpituus on pidempi kuin uv-valon aallonpituus ja siksi viivoittimesta tullut väri näyttää vihreältä.

Kun uv-valolla valaistaan viivoittimen paperin puoleista päätä, havaitaan, että viivoittimen toisesta päästä tulee valoa. Kyseessä on valon kokonaisheijastuminen. Viivoittimen taitekerroin on suurempi kuin ilman. Kun valo tulee riittävän suuressa kulmassa viivoittimen ja ilman rajapintaan, valo kokonaisheijastuu rajapinnassa. Lopulta valo tulee ulos viivoittimen sivusta.

Tehtävä 15.24.

a) Elektronimikroskoopin toiminta perustuu elektronisuihkun aaltoluonteen hyödyntämiseen. Elektronisuihku kiihdytetään sähkökentän avulla, jolloin ne saavuttavat suuren nopeuden. Elektronien de Broglien aallon aallonpituus on 1 Å:n kokoluokkaa eli noin 10^{-10} m. Kun ainetta tutkitaan mikroskoopilla, aineen pinnasta sironneen aallon avulla voidaan muodostaa kuva tutkittavasta kohteesta. Mitä pienempi aallonpituus on, sitä parempi on mikroskoopin erotuskyky. Elektronimikroskoopin avulla voidaan tutkia rakenteita, jotka ovat merkittävästi näkyvän valon aallonpituutta pienempiä.

Läpäisyelektronimikroskoopissa elektronisuihku ohjataan ohuen näytteen läpi, ja muodostuvien diffraktiokuvioiden avulla voidaan muodostaa kuva näytteestä. Elektronimikroskooppia käytetään materiaalifysiikassa näytteiden kemiallisen koostumuksen ja kiderakenteen analysointiin.

b) Planckin vakio h = 6,626 070 15 · 10^{-34} Js

elektronin massa m_e = 9,109 3837 · 10^{-31} kg

rautasulfidikiteen atomitasojen välinen välimatka
d = 5,43· 10^{-10} m

säteilyn kulkusuunnan ja atomitason välinen kulma
θ = 52°

Elektronien de Broglien aallonpituus on

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Ratkaistaan aallonpituus Braggin laista $2d\sin\theta = k\lambda$.

$$2d\sin\theta = k\lambda$$

$$\lambda = \frac{2d\sin\theta}{k}$$

Merkitään aallonpituudet yhtä suuriksi ja ratkaistaan elektronien nopeus.

$$\frac{2d\sin\theta}{k} = \frac{h}{mv}$$

$$v = \frac{kh}{2md\sin\theta}$$

Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun maksimi, joten
k = 2.

Elektronin energia voidaan ratkaista elektronin nopeudesta, koska $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$, joten

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m\left(\frac{kh}{2md\sin\theta}\right)^2 = \frac{1}{8m}\left(\frac{kh}{d\sin\theta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8\cdot 9{,}109\,3837\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}\left(\frac{2\cdot 6{,}626\,070\,15\cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{5{,}43\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}\cdot \sin(52^\circ)}\right)^2$$

$$= 1{,}316\,221\,92\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} \approx 8{,}2\ \mathrm{eV}.$$

Tehtävä 15.25.

tulevan fotonin aallonpituus λ_1 = 91 pm

aallonpituuden muutos 1,8 %

Planckin vakio
h = 6,626 070 15 · 10^{-34} Js ≈ 4,135 667 697 · 10^{-15} eVs

elektronin massa m = 9,109 3837 · 10^{-31} kg

valon nopeus c = 2,997 924 58 · 10^{8} m/s

Sironneen fotonin aallonpituus λ' = 1,018λ.

Ratkaistaan sirontakulma

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{(1{,}018\lambda - \lambda)mc}{h} = 1-\cos\theta$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{0{,}018\lambda mc}{h}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{0{,}018\lambda mc}{h}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(1 - \frac{0{,}018 \cdot 91 \cdot 10^{-12}\ \text{m} \cdot 9{,}109\,3837 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}}\right)$$

$$= 71{,}040\,43^\circ \approx 71^\circ.$$

Tehtävä 15.26.

a) Vetyatomin energiatilat saadaan likimäärin yhtälöstä $E_n = -\dfrac{13{,}6\,\text{eV}}{n^2}$. Määritetään perustilan, 1. viritystilan ja 2. viritystilan energiat.

Perustilalla $n = 1$

$$E_n = -\frac{13{,}6\,\text{eV}}{n^2} = -\frac{13{,}6\,\text{eV}}{1^2} = -13{,}6\,\text{eV}.$$

1. viritystilalla $n = 2$

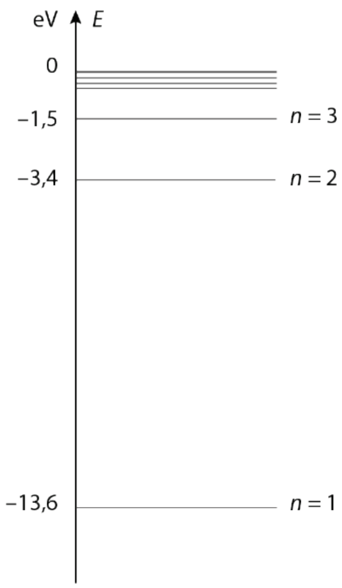
$$E_n = -\frac{13{,}6\,\text{eV}}{n^2} = -\frac{13{,}6\,\text{eV}}{2^2} = -3{,}4\,\text{eV}.$$

2. viritystilalla $n = 3$

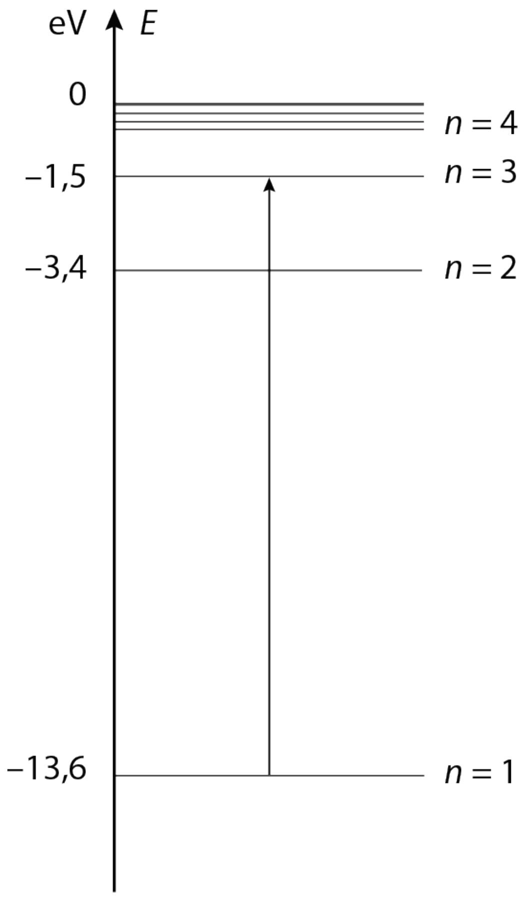
$$E_n = -\frac{13{,}6\,\text{eV}}{n^2} = -\frac{13{,}6\,\text{eV}}{3^2} \approx -1{,}5\,\text{eV}.$$

Ionisoituneen vetyatomin energiatila on 0 eV.

Laaditaan vetyatomin energiatasokaavio.



b) Vetyatomin toisen viritystilan ja perustilan energioiden erotus on



$$E = E_3 - E_1 = -\frac{13{,}6\ \text{eV}}{3^2} - \left(-\frac{13{,}6\ \text{eV}}{1^2}\right)$$
$$= -1{,}5111\ \text{eV} - (-13{,}6\ \text{eV}) = 12{,}089\ \text{eV} \approx 12{,}1\ \text{eV}.$$

Jos fotonin energia on yhtä suuri kuin energiatilojen välinen energiaero, fotoni virittää atomin. Kun fotonin energia on E = 12,1 eV, energia riittää virittämään atomin perustilalta toiselle viritystilalle.

Viritystila voi purkautua 1. viritystilalle ja sieltä edelleen perustilalle tai suoraan 2. viritystilalta perustilalle. Lasketaan emittoituneiden fotonien energia eri viritystilojen purkautumisissa.

2. viritystilalta 1. viritystilalle:

$E = E_3 - E_2 = -1{,}5\text{ eV} - (-3{,}4\text{ eV}) = 1{,}9\text{ eV}$

1. viritystilalta perustilalle:

$E = E_2 - E_1 = -3{,}4\text{ eV} - (-13{,}6\text{ eV}) = 10{,}2\text{ eV}$

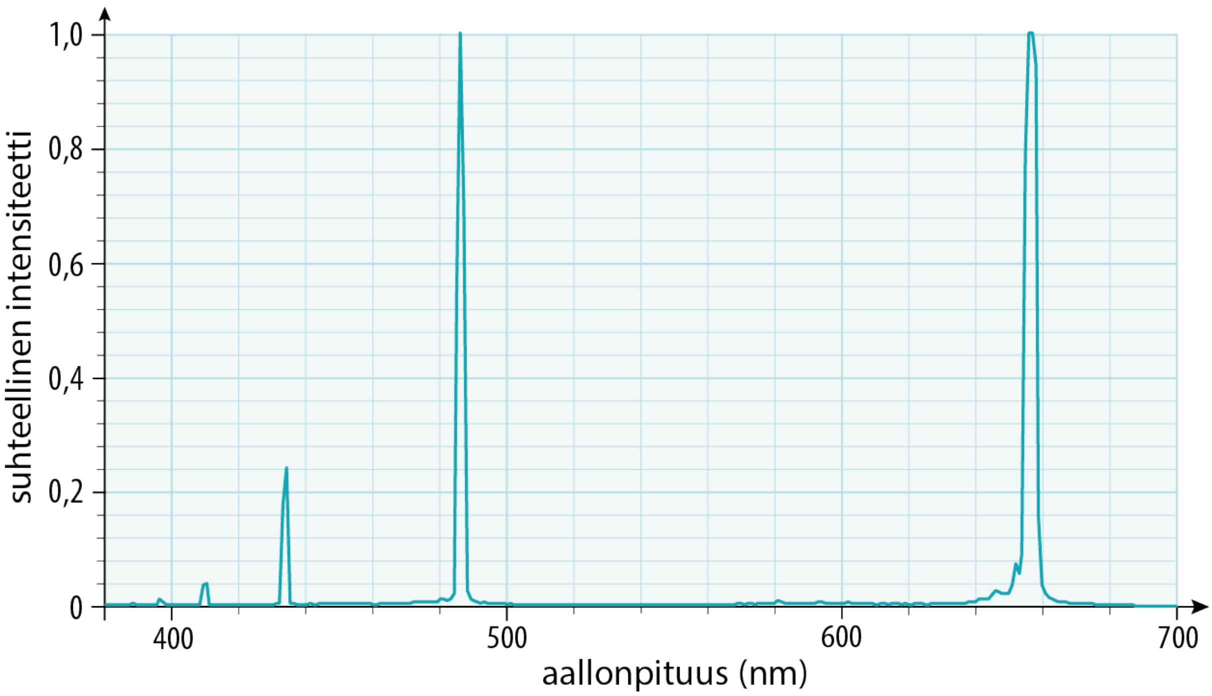
2. viritystilalta perustilalle:

$E = E_3 - E_1 = -1{,}5\text{ eV} - (-13{,}6\text{ eV}) = 12{,}1\text{ eV}$

Vetykaasun lähettämässä spektrissä voidaan havaita fotoneiden energioita 12,1 eV, 10,2 eV ja 1,9 eV.

Tehtävä 15.27.

a)



Koska spektrissä on vain tiettyjä aallonpituuksia, kyseessä on epäjatkuva spektri. Spektri syntyy, koska kaasupurkausputki emittoi valoa, joten spektri on emissiospektri.

b) valonnopeus c = 2,997 924 58 · 10^8 m/s

Planckin vakio h = 4,135 667 697 · 10^{-15} eVs

Fotonin energialle on voimassa $E_\mathrm{f} = \dfrac{hc}{\lambda}$. Mitä suurempi on fotonin aallonpituus, sitä pienempi on fotonin energia. Määritetään spektristä aallonpituus sen piikin kohdalta, jolla on suurin aallonpituus, λ_max = 656 nm. Aallonpituutta vastaava energia on

$$E_\mathrm{f,min} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{eVs} \cdot 299\,792\,458\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{656 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}$$
$$= 1{,}8900\ \mathrm{eV} \approx 1{,}89\ \mathrm{eV}.$$

c) Mittausaineiston perusteella pienienergiaisimman fotonin aallonpituus on $\lambda_{\max}$ = 656 nm. Taulukkokirjan perusteella vedyn H_α-viivan aallonpituus on 656,2 nm, joka vastaa mittausaineiston pienienergiaisimman fotonin aallonpituutta. Koska kyseessä on näkyvän valon spektri, viritystila purkautuu 1. viritystilalle. Pienienergiaisin fotoni syntyy, kun viritystila purkautuu viritystilalta 2 viritystilalle 1.

Vedyn energiatasojen energiat saadaan yhtälöllä

$E_n = -R_\mathrm{H}\dfrac{hc}{n^2}$, jossa R_H on Rydbergin vakio vedylle eli $R_\mathrm{H} = 1{,}096\,7758 \cdot 10^7$ 1/m.

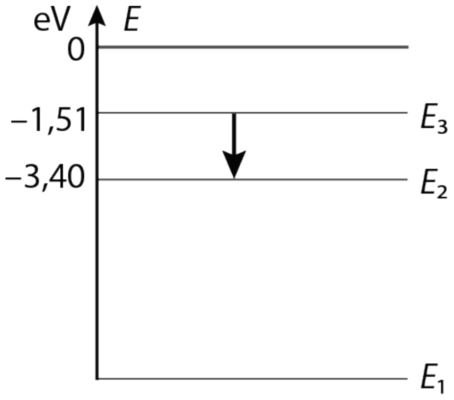
Lasketaan 1. viritystilan energia, eli n = 2.

$$\begin{aligned}
E_2 &= -R_\mathrm{H}\frac{hc}{n^2} \\
&= -1{,}096\,7758 \cdot 10^7\,\frac{1}{\mathrm{m}} \cdot \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{eVs} \cdot 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}}{2^2} \\
&= -3{,}399\,57\,\mathrm{eV} \approx -3{,}40\,\mathrm{eV}.
\end{aligned}$$

Lasketaan 2. viritystilan energia, eli n = 3.

$$\begin{aligned}
E_3 &= -R_\mathrm{H}\frac{hc}{n^2} \\
&= -1{,}096\,7758 \cdot 10^7\,\frac{1}{\mathrm{m}} \cdot \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{eVs} \cdot 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}}{3^2} \\
&= -1{,}510\,92\,\mathrm{eV} \approx -1{,}51\,\mathrm{eV}.
\end{aligned}$$

Kuvataan viritystilojen purkautuminen energiatasokaaviolla.



Tehtävä 15.28.

Planckin vakio $h = 4{,}135\ 667\ 697 \cdot 10^{-15}$ eVs

valonnopeus $c = 299\ 792\ 458$ m/s

elektronin sähkövarauksen suuruus
$e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C

a) Röntgensäteily on lyhytaaltoista, ionisoivaa sähkömagneettista säteilyä.

b) Röntgensäteilyä voi syntyä, kun varatut hiukkaset joutuvat kiihtyvään liikkeeseen. Röntgensäteilyä voi myös emittoitua, kun atomin energiatila muuttuu. Sairaaloissa ja tutkimuskäytössä röntgensäteilyä tuotetaan röntgenputkella, syklotronilla tai synkrotronilla. Säteilyä syntyy myös avaruudessa, kun materiaa (varattuja hiukkasia) syöksyy mustaan aukkoon.

Röntgensäteily voi syntyä, kun elektroni on kiihtyvässä liikkeessä. Esimerkiksi röntgenputkessa anodiin törmäävät elektronit hidastuvat ja lähettävät jarrutussäteilyä, jonka spektri on jatkuva. Röntgenputkesta saatavan säteilyn spektrissä näkyy terävinä piikkeinä myös anodimetallin ominaissäteily. Ominaissäteilyä syntyy, kun röntgenputkella kiihdytetty elektroni osuu anodimateriaalin elektroniin ja atomi virittyy. Kun atomin viritystila purkautuu, atomi emittoi fotonin, jonka energia on yhtä suuri kuin viritystilan ja perustilan energioiden erotus.

Ominaissäteilyn spektriviivat ovat kullekin anodimetallille ominaisia. Matalilla kiihdytysjännitteillä ominaissäteilyä ei synny, kun elektronien energia ei riitä virittämään anodiaineen atomeja.

c) Kuvasta luetaan pienin aallonpituus, joka voidaan röntgenputkella tuottaa, λ_{min} = 60 pm. Vastaava kvantin energia on $E_{\text{max}} = \dfrac{hc}{\lambda_{\text{min}}}$.

Kvantin energia on yhtä suuri kuin röntgenputken sähkökentän tekemä työ eli $W = E_{\text{max}}$ eli $eU = \dfrac{hc}{\lambda_{\text{min}}}$.

Lasketaan kiihdytysjännite

$$\begin{aligned}
eU &= \frac{hc}{\lambda} \\
U &= \frac{hc}{e\lambda} \\
&= \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \cancel{e}\text{Vs} \cdot 299\,792\,458\ \text{m/s}}{\cancel{e} \cdot 60 \cdot 10^{-12}\ \text{m}} \\
&= 20\,664{,}033\,073\ \text{V} \approx 21\ \text{kV}.
\end{aligned}$$

d) Kuvasta luetaan K_α-piikin aallonpituus $\lambda_{K\alpha}$ = 154 pm. Lasketaan aallonpituutta vastaava taajuus.

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{c}{\lambda} \\ &= \frac{299\,792\,458\,\text{m/s}}{154 \cdot 10^{-12}\ \text{m}} = 1{,}946\,70 \cdot 10^{18}\,\text{Hz} \end{aligned}$$

Moseleyn kaavasta ratkaistaan

$$\begin{aligned} Z - 1 &= \sqrt{\frac{f}{2{,}48 \cdot 10^{15}\,\text{Hz}}} = \sqrt{\frac{1{,}946\,70 \cdot 10^{18}\,\text{Hz}}{2{,}48 \cdot 10^{15}\,\text{Hz}}} = 28{,}017\,16 \\ Z &= 29. \end{aligned}$$

Anodi on kuparia.

e) Sädehoidossa röntgensäteilyä kohdistetaan tuhottavaan syöpäsoluun. Säteily ionisoi syöpäsoluja ja näin tuhoaa niitä.

Röntgenkuvauksessa eri aineet absorboivat röntgensäteilyä eri tavoin. Tällöin filmille muodostuu kuva, jossa eri materiaalit erottuvat toisistaan. Läpivalaisuun perustuvaa röntgenkuvausta voidaan hyödyntää esimerkiksi lääketieteessä luiden kuvaamiseen tai tullissa matkatavaroiden läpivalaisussa.

Aineen rakenteen tutkimus voidaan tehdä esimerkiksi röntgendiffraktiolla, jossa aineen pintakerroksista sironneet röntgensäteilyn fotonit interferoivat vahvistavasti. Kun tutkitaan Braggin lain avulla röntgensäteilyn sironnassa syntyviä interferenssikuvioita saadaan määritettyä esimerkiksi atomien välinen etäisyys kidehilassa.

Röntgensäteilyä voidaan hyödyntää, kun määritetään alkuaineanalyysi röntgenfluoresenssin avulla. Röntgensäteilyllä viritetään tutkittavan aineen atomeja ja tutkitaan aineen lähettämän fluoresenssispektrin perusteella, millä aallonpituuksilla aine emittoi säteilyä. Säteilyn spektri on kullekin alkuaineelle ominainen ja spektrin perusteella voidaan määrittää aineen sisältämiä atomeja ja molekyylejä.

Tehtävä 15.29.

a) Hiukkasella sekä sähkömagneettisella aaltoliikkeellä kummallakin on sekä aalto- että hiukkasominaisuus. Hiukkaselle sekä sähkömagneettiselle säteilylle pätee $p = \frac{h}{\lambda}$, jossa p on liikemäärä ja λ on aallonpituus ja h Planckin vakio.

b) i) Sähkömagneettisen säteilyn aaltoluonne ilmenee esimerkiksi, kun

1) valo taipuu raossa,

2) valo kulkee hilan läpi ja hilan läpi kulkeneet aallot interferoivat, jolloin syntyy diffraktiokuvio.

Sähkömagneettisen säteilyn hiukkasluonne ilmenee esimerkiksi

1) valosähköisessä ilmiössä, jossa sähkömagneettisen säteilyn fotoni irrottaa metallista elektroneja.

2) Comptonin sironnassa, jossa sähkömagneettinen säteily siroaa aineesta siten, että säteilyn aallonpituus kasvaa ja aineesta irtoaa elektroni. Ilmiö voidaan mallintaa vapaan elektronin ja fotonin kimmoisana törmäyksenä, jossa energia ja liikemäärä säilyvät.

3) kun fluoresoivalle pinnalle syntyy jälki fotonin osuessa siihen.

4) annihilaatiossa syntyy kaksi gammakvanttia, jotka lähtevät vastakkaisiin suuntiin liikemäärän säilymislain mukaisesti. Fotonilla pitää olla liikemäärä.

5) sähkömagneettisen säteilyn osuessa pintaan siihen kohdistuu paine. Tätä voidaan hyödyntää esimerkiksi avaruudessa säteilypurjeessa.

ii) Hiukkasen aaltoluonne ilmenee esimerkiksi, kun

1) hiukkassuihku kulkee kaksoisraon läpi, jolloin elektronit interferoivat ja syntyy

diffraktiokuvio.

2) elektronit siroavat kiteestä, jolloin sironneet elektronit interferoivat ja muodostavat

diffraktiokuvion.

Hiukkasen hiukkasluonne ilmenee esimerkiksi

1) hiukkasten välisissä törmäyksissä, joita voidaan mallintaa Newtonin mekaniikalla,

2) kun elektronisuihku käyttäytyy sähkö- ja magneettikentässä, kuten negatiivisesti varatut hiukkaset.

Tehtävä 15.30.

emittoituneen valon aallonpituus λ = 557,7 nm

Planckin vakio h = 6,626 070 15 · 10^{-34} Js

valonnopeus c = 2 997 924 58 m/s

a) Revontulien spektri on emissiospektri ja epäjatkuva viivaspektri, koska revontulien spektrissä esiintyvät vain tietyt aallonpituudet.

b) Revontulien spektrissä erottuvat selvimmin aallonpituudet 400 nm (violetti), 440 nm (sininen), 555 nm (vihreä) ja kaksi spektriviivaa noin 630 nm:n alueella (punainen).

Kynttilänvalon spektri on jatkuva spektri. Molemmat spektrit ovat emissiospektrejä ja molemmissa spektreissä on näkyvän valon aallonpituuksia.

c) Fluoresenssi on ilmiö, jossa atomin viritystila purkautuu perustilalle yhden tai useamman välitilan kautta välittömästi ja syntyy näkyvää valoa.

Revontulet syntyvät aurinkotuulen seurauksena, kun aurinkotuulen varatut hiukkaset osuvat ilmakehän yläosissa oleviin happiatomeihin ja typpimolekyyleihin ja virittävät niitä.

Kun viritystilat purkautuvat välitilan tai -tilojen kautta, emittoituvien fotonien energiat ovat pienempiä kuin absorboituvat energiat. Jos viritystilat purkautuvat välittömästi, kyseessä on fluoresenssi.

d) Kun happiatomin viritystila purkautuu, atomin energiatilojen välinen energiaero on yhtä suuri kuin emittoituneen fotonin energia $\Delta E = E_\mathrm{f}$. Fotonin energialle on voimassa

$$E_\mathrm{f} = \frac{hc}{\lambda}.$$

Tällöin energiatilojen välinen energiaero on

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js} \cdot 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{557{,}7 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}$$
$$= 3{,}561\,853\,787 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} \approx 2{,}22\ \mathrm{eV}.$$

Tehtävä 15.31.

syklotronin magneettivuon tiheys B = 0,88 T

protonin ympyräradan säde r = 0,35 m

Planckin vakio $h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ Js

protonin sähkövarauksen suuruus
$Q = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C

Protoni kulkee syklotronin magneettikentässä tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$.
Protoniin kohdistuu magneettinen voima ja
Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa suunnat huomioituina

$$\begin{aligned} F_B &= ma_{\mathrm{n}} \\ QvB &= m\frac{v^2}{r} \\ QB &= m\frac{v}{r}. \end{aligned}$$

Protonin nopeus, kun elektroni poistuu syklotronista

$$v = \frac{QrB}{m}.$$

Protoniin liittyvä de Broglien aallonpituus

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\cancel{m}\dfrac{QrB}{\cancel{m}}} = \frac{h}{QrB}$$

$$= \frac{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 0{,}35\,\mathrm{m} \cdot 0{,}88\,\mathrm{T}} = 1{,}342\,75 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m} \approx 13\ \mathrm{fm}.$$

Tehtävä 15.32.

a) Hiukkasfysiikan standardimallin perushiukkasia ovat kvarkit ja leptonit.

Kvarkkeja on kuusi kappaletta, ylös-, alas-, outo-, lumo-, pohja- ja huippu- eli u-, d-, s-, c-, b- ja t- kvarkit. Samoin leptoneita on kuusi kappaletta, elektroni, elektronin neutriino, myoni, myonin neutriino, tau ja taun neutriino eli e, ν_e, μ, ν_μ, τ, ν_τ.

Lisäksi hiukkasfysiikan standardimalliin kuuluvat kvarkkien ja leptonien antihiukkaset. Hiukkasen ja antihiukkasen massat ovat yhtä suuret, mutta esimerkiksi sähkövaraukset ja magneettimomentit ovat vastakkaiset.

b) Standardimalli selittää alkeishiukkasten välisen sähkömagneettisen vuorovaikutuksen, vahvan vuorovaikutuksen ja heikon vuorovaikutuksen. Alkeishiukkasten välinen vuorovaikutus tapahtuu välittäjähiukkasten avulla. Sähkömagneettisen vuorovaikutuksen välittäjähiukkanen on fotoni, vahvan vuorovaikutuksen välittäjähiukkasia ovat gluonit ja heikon vuorovaikutuksen välittäjähiukkasia ovat W- ja Z-bosonit.

Neljäs perusvuorovaikutus eli gravitaatiovuorovaikutus ei ole mukana standardimallissa.

c) Standardimallin mukaan Higgsin kenttä ulottuu kaikkialle avaruudessa. Mitä voimakkaammin hiukkanen vuorovaikuttaa Higgsin kentän kanssa, sitä suurempi on hiukkasen massa. Massaton hiukkanen, kuten fotoni, ei vuorovaikuta Higgsin kentän kanssa lainkaan.

d) Koska neutriinot ovat leptoneita, vahva vuorovaikutus ei vaikuta neutriinoihin. Neutriinoilla ei ole sähkövarausta, joten myöskään sähkömagneettinen perusvuorovaikutus ei vaikuta neutriinoihin. Neutriinon hyvin pienen massan vuoksi gravitaatiovuorovaikutus on neutriinon tapauksessa hyvin heikko. Pääasiassa vain heikko vuorovaikutus vaikuttaa neutriinoihin.

Neutriinojen tutkiminen on vaikeaa siksi, että neutriinot vuorovaikuttavat lähinnä heikon vuorovaikutuksen kautta. Neutriinoja on siten hyvin vaikea havaita. Jotta todennäköisyys vuorovaikutukselle kasvaisi, neutriinoilmaisimet ovat kooltaan hyvin suuria.

Higgsin hiukkasen tutkiminen on haastavaa, koska Higgsin hiukkasen massa on melko suuri. Massan ja energian ekvivalenssin $E = mc^2$ mukaan energiasta voi syntyä massallisia hiukkasia. Higgsin hiukkasen tapauksessa energiaa on kuitenkin oltava valtavan paljon, joten Higgsin hiukkasia voidaan tuottaa vain kaikista suurienergisimmilla hiukkaskiihdyttimillä. Lisäksi todennäköisyys Higgsin hiukkasen muodostumiseen hiukkastörmäyksissä on melko pieni. Silloin Higgsin hiukkasen tuottama signaali voi peittyä muiden tavanomaisempien hiukkasten signaalin alle. Lisäksi Higgsin hiukkanen on hyvin lyhytikäinen.

Tehtävä 15.33.

a) Newtonin II lain mukaan gravitaatiovoima aiheuttaa tähdelle normaalikiihtyvyyden.

$$F_g = ma_n$$

$$\gamma \frac{\cancel{m} M_0}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$v^2 = \gamma \frac{M_0}{r}$$

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M_0}{r}}$$

b) Nopeuden neliön lausekkeeksi a-kohdasta

$$F_\mathrm{g} = ma_\mathrm{n}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m} M(r)}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$v^2 = \gamma \frac{M(r)}{r}.$$

Ratkaistaan *M(r)*

$$F_\mathrm{g} = ma_\mathrm{n}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m} M(r)}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$M(r) = \frac{v^2 r}{\gamma}.$$

jossa v on mittaustuloksista saatava vakio $v \approx 150$ km/s. Laki pätee myös kirkkaana näkyvän osan rajalla

$$v^2 = \gamma \frac{M_0}{r_0}$$

$$\frac{v^2}{\gamma} = \frac{M_0}{r_0},$$

joten massan riippuvuus säteestä voidaan kirjoittaa muotoon

$$M(r) = \frac{M_0}{r_0} \cdot r.$$

c) a-kohdassa saatu tulos ennustaa, että jos galaksin massasta suurin osa on kirkkaana näkyvässä osassa, tähtien kiertonopeuksien pitäisi olla kirkkaana näkyvän osan ulkopuolella kääntäen verrannollisia galaksin keskustasta mitatun etäisyyden neliöjuureen, $v \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$.

Näin ei mittaustulosten perusteella ole.

b-kohdassa saatu mittaustuloksiin perustuva massajakautuma ei voi aiheutua kirkkaana näkyvän osan ulkopuolella kiertävistä tähdistä, koska niitä on hyvin harvassa.

Näin ollen galaksiin täytyy tähtien lisäksi kuulua pimeää ainetta. Galaksin kokonaismassa M_{tot} on vähintään etäisyydellä r = 30 kpc kiertävän tähden radan sisään jäävä massa.

$$M(r) = \frac{v^2}{\gamma} \cdot rQ = Ne$$

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{5{,}45 \cdot 10^{-18}\,\text{C}}{1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\text{C}} = 34{,}016 \approx 34$$

$$= \frac{(150\,000\,\text{m/s})^2}{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2} \cdot 30\,000 \cdot 3{,}085\,68 \cdot 10^{16}\text{m}$$

$$= 3{,}120\,89 \cdot 10^{41}\text{kg} \approx 3{,}1 \cdot 10^{41}\text{kg}$$

Toisaalta kokonaismassalle on voimassa

$$M_{\text{tot}} = \frac{M_0}{6\,\text{kpc}} \cdot 30\,\text{kpc} = 5M_0.$$

$M_0 = 0{,}2M_0$ eli galaksin näkyvän osan massa on vain 20 % galaksin kokonaismassasta.

Tehtävä 15.34.

a) Synkrotronisäteilylähteen edut verrattuna tavalliseen röntgenputkeen ovat suuri sähkömagneettisen säteilyn intensiteetti ja laaja spektri, josta sopiva aallonpituus voidaan valita.

b) Synkrotronin varastoringissä syntynyt sähkömagneettinen säteily ohjataan optisten laitteiden avulla mittauslinjoihin, joissa se edelleen kohdistetaan tutkittaviin näytteeseen. Synkrotronisäteilyä voidaan käyttää esimerkiksi tutkittavan aineen virittämiseen. Synkrotronisäteilyn avulla voidaan tutkia esimerkiksi aineiden rakenteita ja kemiallisia reaktioita.

c) Elektronitykin ja lineaarikiihdyttimen avulla elektronit kiihdytetään lähes valonnopeuteen ennen kuin ne ohjataan varastorinkiin, joka on tyhjiöputki. Ringissä on taivutusmagneetteja, joiden avulla elektronit saadaan kaareutuvaan liikkeeseen. Ringin suorilla osuuksilla voi olla myös usean magneettien sarjoja, jotka ohjaavat elektronit sin-aallon kaltaiseen liikkeeseen magneettisarjan kohdalla. Synkrotronisäteilyä syntyy kaareutuvassa liikkeessä. Synkrotronisäteilyn syntyminen tarkoittaa, että elektronit menettävät liike-energiaansa, joka kompensoidaan vaihtuvan sähkökentän välittämällä kiihdytyksellä, energialla.

d) Ringin kaarteissa elektronit lähettävät sähkömagneettista säteilyä intensiteetillä [W/m^2], joka on verrannollinen

$$\Delta Q = \frac{150 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A} \cdot 2{,}8\ \mathrm{s}}{2} = 210 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{C} = 210\,\mathrm{mC}. I \sim \frac{\left(E_\mathrm{k} / m_\mathrm{e} c^2 \right)^4}{r^2},$$

jossa E_k on elektronien liike-energia, me on elektronin lepomassa, c on valonnopeus ja r on elektronin kaareutuvan radan säde. Koska magneettisarjan aiheuttaman aaltomaisen radan kaareutuvuussäde voidaan säätää pienemmäksi kuin elektronin radan kaareutuvuussäde taivutusmagneetin kohdalla ($r_\mathrm{sarja} < r_\mathrm{taivutus}$), intensiteetti on suurempi magneettisarjalle. Fotonivuo [fotonien lukumäärä / m^{2}s] saadaan kun intensiteetti [W/m^2] = [J/m^{2}s] jaetaan fotonin energialla [J]. Kun tarkastellaan fotonivuon suuruutta samalla fotonin energialla, magneettisarja tuottaa suuremman fotonivuon kuin taivutusmagneetti.

Tehtävä 15.35.

a) LIGO mittaa suoraan painovoima-aaltojen aiheuttamaa ilmiötä eli suhteellista venymää järjestelmässä kulkevien valonsäteiden kulkemassa matkassa. Vuoden 1974 havainnossa nähtiin pulsarien menettävän energiaa, mutta havainto ei sulje pois sitä mahdollisuutta, että tämä energia poistuu jollakin muulla tavalla kuin painovoima-aaltoina.

b) Auringon massa $M = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg

valon nopeus $c = 2,99792458 \cdot 10^{8}$ m/s

energian poistumisaika $t = 0,015$ s

Auringon säteilyteho on $P = 3,9 \cdot 10^{26}$ W.

Kun kappaleet yhdistyivät, energiaa vapautui kolmen Auringon massan verran, eli

$$E = mc^2$$

$$E = 3Mc^2 = 3 \cdot 1,989 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \cdot \left(2,997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 5,362\,872 \cdot 10^{47}\ \text{J}.$$

Tämä energia määrä poistui nopeasti, 0,015 sekunnissa. Teho on energia jaettuna ajalla, eli

$$P = \frac{E}{t} = \frac{5,362\,872 \cdot 10^{47}\ \text{J}}{0,015\,\text{s}} = 3,5752 \cdot 10^{49}\ \text{W} \approx 3,6 \cdot 10^{49}\ \text{W}.$$

Kun tehoa verrataan Auringon tehoon, saadaan

$$\frac{3,5752 \cdot 10^{49}\ \text{W}}{3,9 \cdot 10^{26}\ \text{W}} = 0,9167 \cdot 10^{23} \approx 1 \cdot 10^{23}.$$

Gravitaatioaaltojen teho vastaa 10^{23} Auringon tehoa.

c) Kun kappaleet kiertävät toisiaan, ajanhetkellä 0,35 s niiden välinen etäisyys on $4R_S$ eli neljä Schwarzschildin sädettä. Aineiston mukaan kappaleelle, jonka massa on noin 62 Auringon massaa, Schwarzschildin säde on noin 180 km. Toisiaan kiertävien kappaleiden välinen etäisyys on näin ollen vain noin 700 km. Tämä sulkee pois tavalliset tähdet ja valkoiset kääpiöt, sillä niiden säteet ovat paljon tätä etäisyyttä suurempia. Kappaleet voisivat olla neutronitähtiä, mutta niiden massat eivät voi olla 30 kertaa Auringon massan suuruisia, kuten LIGO havaitsi. Kappaleiden on siis oltava mustia aukkoja.

16 Radioaktiivisuus

Harjoittele

Tehtävä 16.1.

a) C

b) A

c) C

d) A

e) B

f) C

g) C

h) D

i) A

j) D

Tehtävä 16.2.

a) Sidosenergia on se teoreettinen energia, joka vapautuu, kun ydin muodostuu vapaista nukleoneista.
Tina-120-ydintä voidaan merkitä $^{120}_{50}\text{Sn}$.

protonien lukumäärä on $Z = 50$

neutronien lukumäärä $N = A - Z = 120 - 50 = 70$

protonin massa $m_\text{p} = 1{,}007\,2765$ u

neutronin massa $m_\text{n} = 1{,}008\,6649$ u

elektronin massa $m_\text{e} = 5{,}485\,7991 \cdot 10^{-4}$ u

tina-120 atomin massa $m_{\text{Sn-120}} = 119{,}902\,200$ u

Tina-120-ytimen sidosenergia on

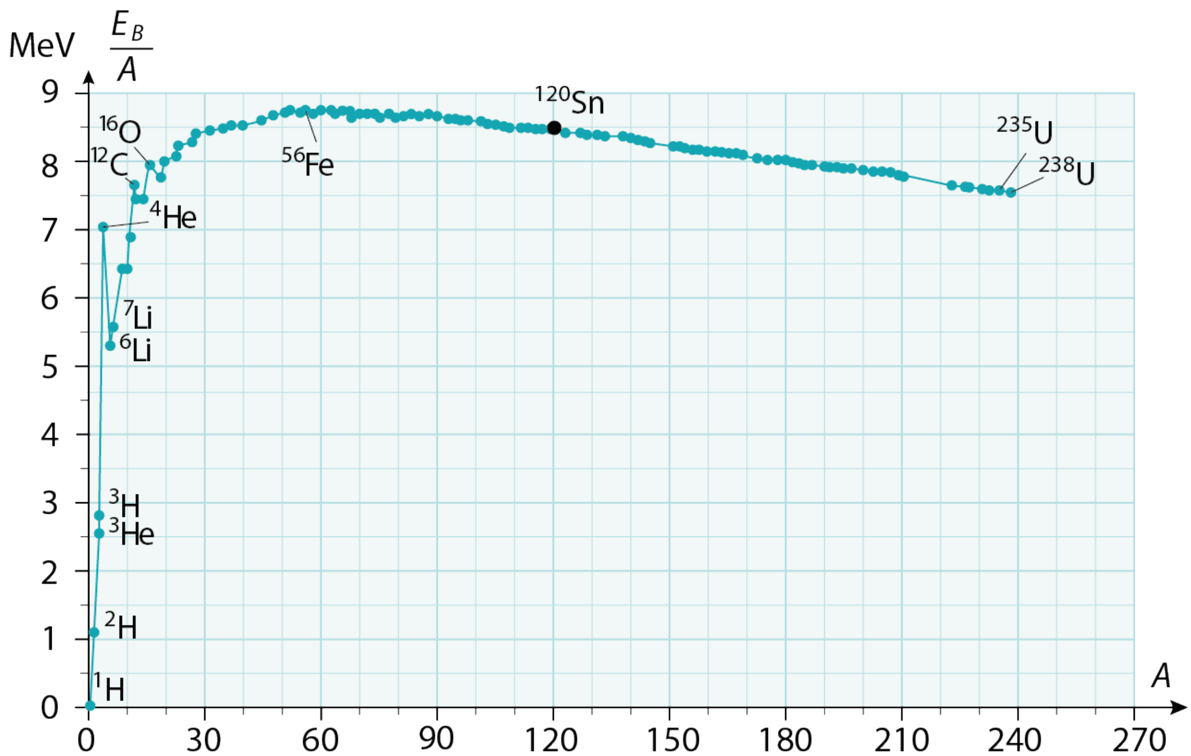
$$\begin{aligned}
E_\text{B} &= \Delta mc^2 \\
&= \left(Zm_\text{p} + Nm_\text{n} + Zm_\text{e} - m_{\text{Sn-120}}\right)c^2 \\
&= \left(50 \cdot 1{,}007\,2765\ \text{u} + 70 \cdot 1{,}008\,6649\,\text{u} + 50 \cdot 5{,}485\,7991 \cdot 10^{-4}\ \text{u} - 119{,}902\,200\,\text{u}\right)c^2 \\
&= 1{,}095\,596\,996\,\text{u} \cdot c^2 \quad \Big\| \; 1\ \text{u} = 931{,}494\,102\,\text{MeV}/c^2 \\
&= 1{,}095\,596\,996\,\text{u} \cdot 931{,}494\,102\,\frac{\text{MeV}}{\cancel{c^2}} \cdot \cancel{c^2} \\
&= 1\,020{,}542\,139\,\text{MeV} \\
&\approx 1\,020\,\text{MeV}.
\end{aligned}$$

b) Tina-120-ytimen massaluku on A = 120

Tina-120-ytimen sidososuus on

$$b = \frac{E_\mathrm{B}}{A} = \frac{\Delta mc^2}{A} = \frac{\left(Zm_\mathrm{p} + Nm_\mathrm{n} + Zm_\mathrm{e} - m_\mathrm{Sn\text{-}120}\right)c^2}{A}$$
$$= \frac{1\,020{,}542\,139\,\mathrm{MeV}}{120}$$
$$= 8{,}504\,517\,829\,\mathrm{MeV}$$
$$\approx 8{,}50\,\mathrm{MeV}.$$

c) Merkitään tina-120 sidososuuskäyrälle.



^{120}Sn-ydin sijaitsee sidososuuskäyrällä korkeammalla kuin ^{12}C-ydin. ^{120}Sn-ytimen sidososuus on suurempi kuin ^{12}C-ytimen.

^{120}Sn-ytimessä nukleonien välillä on voimakkaampi vuorovaikutus kuin ^{12}C-ytimessä.

Tehtävä 16.3.

a) β^+-hajoamisessa emoytimen protoni muuttuu neutroniksi, jolloin samalla emittoituu positroni ja neutriino. Positroni on elektronin antihiukkanen. Natriumisotooppi ^{22}Na on β^+-aktiivinen.

Na-ytimen hajoamisreaktio on $^{22}_{11}\text{Na} \rightarrow {}^{22}_{10}\text{Ne} + \text{e}^+ + \nu$.

b) Tapahtuu annihilaatio, jolloin syntyy kaksi gammakvanttia: $\text{e}^+ + \text{e}^- \rightarrow 2\gamma$.

c) Ydin sieppaa elektronin elektroniverhon sisimmältä kuorelta. Tällöin elektroni reagoi protonin kanssa atomin ytimessä niin, että syntyy neutroni ja neutriino.

^{127}Xe:n ytimen hajoamisreaktio on $^{127}_{54}\text{Xe} + \text{e}^- \rightarrow {}^{127}_{53}\text{I} + \nu$.

Tehtävä 16.4.

säteilyn puoliintumispaksuus vedessä $x_{1/2}$ = 0,0715 m

säteilyn puoliintumispaksuus lyijyssä $x_{1/2}$ = 0,0042 m

a) Merkitään alkuperäistä intensiteettiä kirjaintunnuksella I_0. Kun gammasäteily on kulkenut vesikerroksen läpi, jonka paksuus vastaa puoliintumispaksuutta, säteilyn intensiteetti on $I = \frac{1}{2}I_0$.

Gammasäteilyn intensiteetti pienenee väliaineessa yhtälön $I = I_0e^{-\mu x}$ mukaisesti. Ratkaistaan säteilyn heikennyskerroin vedessä puoliintumispaksuutta apuna käyttäen.

$$\frac{1}{2}\cancel{I_0} = \cancel{I_0}e^{-\mu_v x_{1/2}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\mu_v x_{1/2}}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -\mu_v x_{1/2}$$

$$\mu_v = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-x_{1/2}} = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0{,}0715\,\text{m}} = 9{,}694\,366\,\frac{1}{\text{m}} \approx 9{,}69\,\frac{1}{\text{m}}$$

b) Lasketaan matka, jossa säteilyn intensiteetti pienenee kymmenesosaan alkuperäisestä.

$$\frac{1}{10}\cancel{I_0} = \cancel{I_0} e^{-\mu_v x}$$

$$\frac{1}{10} = e^{-\mu_v x}$$

$$\ln\frac{1}{10} = -\mu_v x$$

$$x = \frac{\ln\frac{1}{10}}{-\mu_v} = \frac{\ln\frac{1}{10}\cdot x_{1/2}}{\ln\frac{1}{2}} = \frac{\ln\frac{1}{10}\cdot 0{,}0715\,\text{m}}{\ln\frac{1}{2}} = 23{,}751\,79\,\text{cm} \approx 23{,}8\,\text{cm}$$

c) Määritetään puoliintumispaksuuden avulla heikennyskerroin lyijylle.

$$\frac{1}{2}\cancel{I_0} = \cancel{I_0}e^{-\mu_{\mathrm{Pb}}x_{\mathrm{Pb}_{1/2}}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\mu_{\mathrm{Pb}}x_{\mathrm{Pb}_{1/2}}}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -\mu_{\mathrm{Pb}}x_{\mathrm{Pb}_{1/2}}$$

$$\mu_{\mathrm{Pb}} = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-x_{\mathrm{Pb}_{1/2}}} = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0{,}0042\,\mathrm{m}} = 165{,}035\,043\,\frac{1}{\mathrm{m}} \approx 165{,}04\,\frac{1}{\mathrm{m}}$$

Sijoitetaan heikennyskerroin säteilyn intensiteetin vaimenemisen yhtälöön.

$$I = I_0e^{-\mu_{\mathrm{Pb}}x} = I_0 \cdot e^{-\frac{\ln\frac{1}{2}}{-x_{\mathrm{Pb}_{1/2}}}\cdot x_{\mathrm{v}_{1/2}}} = I_0 \cdot e^{-\frac{\ln\frac{1}{2}\cdot x_{\mathrm{v}_{1/2}}}{-x_{\mathrm{Pb}_{1/2}}}} = I_0 \cdot e^{-\frac{\ln\frac{1}{2}\cdot 0{,}0715\,\mathrm{m}}{-0{,}0042\,\mathrm{m}}} = 7{,}5045\cdot 10^{-6}\,I_0$$

Tuloksen perusteella säteily vaimenisi lyijykerrokseen lähes kokonaan.

Tehtävä 16.5.

Planckin vakio h = 4,135 667 697 · 10^{-15} eVs

valonnopeus c = 299 792 458 m/s

a) Amerikiumin isotoopin hajoamisreaktio

$${}^{241}_{95}\text{Am} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{237}_{93}\text{Np}$$

b) Alfahajoamisen yhteydessä merkittävin perusvuorovaikutus on vahva vuorovaikutus.

c) Syntyneiden alfahiukkasten ja gammafotonien spektrit ovat epäjatkuvia emissiospektrejä.

d) Kaavion perusteella 85,2 % hajoamisessa syntyneistä ytimistä jää viritystilalle 59,5 keV. Emittoituneiden fotonien energiat ovat E_3 = 59,5 keV, kun viritystila purkautuu energiatilalta 59,5 keV perustilalle.

Viritystilan purkautumisessa syntyvän fotonin energia on $E_3 = \dfrac{hc}{\lambda_3}$, joten aallonpituudeksi saadaan

$$\lambda_3 = \frac{hc}{E_3}$$

$$= \frac{4{,}135\,667\,697 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs} \cdot 299\,792\,458\,\text{m/s}}{59{,}5 \cdot 10^{3}\ \text{eV}} = 2{,}083\,78 \cdot 10^{-11}\ \text{m} \approx 20{,}8\,\text{pm}.$$

Tehtävä 16.6.

a) Lyijyn protonien määrä $Z = 82$. Fotonin energia on 0,250 MeV ja fotonin todennäköisin vuorovaikutus lyijyn kanssa on valosähköinen ilmiö.

b) Bariumin protonien määrä $Z = 56$. Fotonin energia on 11 MeV ja fotonin todennäköisin vuorovaikutus bariumin kanssa on parinmuodostus.

c) Kaliumin protonien määrä $Z = 19$. Fotonin energia on 1,8 MeV ja fotonin todennäköisin vuorovaikutus kaliumin kanssa on Comptonin sironta.

d) Neodyymin protonien määrä $Z = 60$. Kuvaajan perusteella fotonin energian pitää olla vähintään 0,4 MeV, jotta fotonin ja neodyymin välisessä vuorovaikutuksessa tapahtuisi Comptonin sironta.

Tehtävä 16.7.

a) ^{228}Th on alfahajoava isotooppi.

$$^{228}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{224}_{88}\mathrm{Ra}$$

b) ^{117}In on β^--hajoava isotooppi.

$$^{117}_{49}\mathrm{In} \rightarrow \mathrm{e}^- + {}^{117}_{50}\mathrm{Sn} + \overline{\nu}_\mathrm{e}$$

c) ^{30}P on β^+-hajoava isotooppi.

$$^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{e}^+ + {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + \nu_\mathrm{e}$$

d) $^{72}_{34}\mathrm{Se} + \mathrm{e}^- \rightarrow {}^{72}_{33}\mathrm{As} + \nu_\mathrm{e}$

e) $^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow \left[{}^{236}_{92}\mathrm{U}\right] \rightarrow 3\,{}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{144}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{89}_{38}\mathrm{Sr}$

f) $^{96}_{42}\mathrm{Mo} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{97}_{43}\mathrm{Tc} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$

g) $^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$

h) $^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{28}_{14}\mathrm{Si} \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{27}_{12}\mathrm{Mg}$

i) $^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{11}_{5}\mathrm{B}$

j) $^{16}_{6}\mathrm{C} + \gamma \rightarrow {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{15}_{6}\mathrm{C}$

Tehtävä 16.8.

happi-18-isotoopin massa $m_{\text{O-18}}$ = 17,999 1594 u

fluori-18-isotoopin massa $m_{\text{F-18}}$ = 18,000 937 u

protonin massa m_{p} = 1,007 2765 u

neutronin massa m_{n} = 1,008 6649 u

elektronin massa m_{e} = 5,485 7991 · 10^{-4} u

a) ${}^{18}_{8}\text{O} + {}^{1}_{1}\text{p} \rightarrow {}^{1}_{0}\text{n} + {}^{18}_{9}\text{F}$

b) elektronin massa $m_e = 5{,}485\ 7991 \cdot 10^{-4}$ u

protonien lukumäärä $Z = 9$

neutronien lukumäärä $N = A - Z = 18 - 9 = 9$

Fluori-18-isotoopin massavaje on

$\Delta m = Zm_p + Nm_n - (m_{F\text{-}18} - Zm_e)$

$\quad = Zm_p + Nm_n - m_{F\text{-}18} + Zm_e$

Fluori-18-isotoopin sidosenergia on

$$\begin{aligned}
E_{B,C} &= \Delta mc^2 \\
&= \left(9m_p + 9m_n - (m_{F\text{-}18} - 9m_e)\right)c^2 \\
&= (9 \cdot 1{,}007\,2765\ \text{u} + 9 \cdot 1{,}008\,6649\ \text{u} - 18{,}000\,937\ \text{u} + 9 \cdot 5{,}485\,7991 \cdot 10^{-4}\ \text{u}) \cdot c^2 \\
&= 0{,}147\,472\,8192\ \text{u} \cdot c^2 \quad \Big\| \ 1\ \text{u} = 931{,}494\,102\ \text{MeV}/c^2 \\
&= 0{,}147\,472\,8192 \cdot 931{,}494\,102 \frac{\text{MeV}}{\cancel{c^2}} \cdot \cancel{c^2} \\
&= 137{,}370\,0613\ \text{MeV} \\
&\approx 137{,}370\ \text{MeV}.
\end{aligned}$$

c) Ydinreaktiossa vapautuu energiaa, jos ydinreaktion massavaje on positiivinen ja sitoutuu, jos massavaje on negatiivinen. Lasketaan reaktion massavaje.

$$\begin{aligned}\Delta m &= m_{\text{O}-18} - 8m_{\text{e}} + m_{\text{p}} - \left(m_{\text{F}-18} - 9m_{\text{e}} + m_{\text{n}}\right)\\ &= m_{\text{O}-18} + m_{\text{p}} - m_{\text{F}-18} + m_{\text{e}} - m_{\text{n}}\\ &= 17{,}999\,1594\,\text{u} + 1{,}007\,2765\,\text{u} - 18{,}000\,937\,\text{u} + 5{,}485\,7991\cdot 10^{-4}\,\text{u} - 1{,}008\,6649\,\text{u}\\ &= -2{,}617\,420\,09\cdot 10^{-3}\,\text{u}\end{aligned}$$

Reaktiossa sitoutuvan energian määrä saadaan reaktioenergian avulla

$$\begin{aligned}Q &= \Delta mc^2\\ &= -2{,}6174\,2009\cdot 10^{-3}\,\text{u}\cdot c^2 \quad \Bigg\| \; 1\,\text{u} = 931{,}494\,102\,\frac{\text{MeV}}{c^2}\\ &= -2{,}617\,420\,09\cdot 10^{-3}\cdot 931{,}494\,102\,\frac{\text{MeV}}{\cancel{c^2}}\cdot \cancel{c^2}\\ &= -2{,}438\,111\,376\,29\,\text{MeV} \approx -2{,}438\,\text{MeV}.\end{aligned}$$

Koska ydinreaktioon liittyvä massavaje on negatiivinen, reaktiossa sitoutuu energiaa.

d) Sidosenergia kertoo, kuinka paljon vapautuu energiaa, kun ydin muodostuu vapaista nukleoneista. Reaktioenergia kuvaa, kuinka paljon energiaa vapautuu tai sitoutuu ydinreaktiossa, jossa ydin muuttuu toiseksi tai toisiksi hiukkasiksi. Sidosenergia liittyy yksittäisen ytimen muodostumiseen ja reaktioenergia ydinreaktioon ja siihen liittyvien ytimien massavajeeseen liittyvään energiaan.

Tehtävä 16.9.

Europiumin hajoamiseen liittyvät reaktioyhtälöt:

elektronisieppaus: ${}^{152}_{63}\mathrm{Eu} + \mathrm{e}^- \rightarrow {}^{152}_{62}\mathrm{Sm} + \nu_\mathrm{e}$

β^+-hajoaminen: ${}^{152}_{63}\mathrm{Eu} \rightarrow \mathrm{e}^+ + {}^{152}_{62}\mathrm{Sm} + \nu_\mathrm{e}$

β^--hajoaminen: ${}^{152}_{63}\mathrm{Eu} \rightarrow \mathrm{e}^- + {}^{152}_{64}\mathrm{Gd} + \overline{\nu}_\mathrm{e}$

b) Hajoamisten yhteydessä emittoituu β^+- ja β^--säteilyä, gammasäteilyä ja röntgensäteilyä. Gammasäteilyä syntyy, kun tytärydin jää virittyneeseen tilaan ja ytimen viritystila purkautuu. Lisäksi gammasäteilyä syntyy, kun β^+-hajoamisen yhteydessä emittoitunut positroni törmää elektroniin, jolloin syntyy kaksi gammakvanttia. Elektronisieppauksen yhteydessä atomin alimmalla energiatilalla oleva elektroni vuorovaikuttaa ytimen protonin kanssa ja syntyy neutroni. Elektronisieppauksessa vapautuvasta energiasta osa emittoituu gammasäteilynä. Ytimen kanssa vuorovaikuttaneen elektronin tilalle siirtyy ylemmältä energiatilalta elektroni ja tällöin emittoituu röntgensäteilyä.

c) Kaikki emittoitunut säteily on ionisoivaa säteilyä. Beetasäteily on hiukkassäteilyä, mutta gamma- ja röntgensäteily ovat sähkömagneettista säteilyä. Beetasäteilyn spektri on jatkuvaa ja gammasäteilyn spektri on epäjatkuva.

Tehtävä 16.10.

a) Sidososuus tarkoittaa sidosenergian määrää nukleonia kohden. Mitä suurempi nuklidin sidososuus on, sitä enemmän energiaa nukleonia kohden vapautuu ytimien muodostumisessa. Muodostuneen ytimen massa on pienempi kuin sen muodostaneiden rakenneosasten yhteenlaskettu massa. Kun ydin muodostuu, osa massasta siis muuttuu energiaksi yhtälön $E = \Delta mc^2$ mukaisesti. Sidososuus kuvaa myös sitä energiamäärää, joka tarvitaan, jos rakenneosanen irrotetaan ytimestä.

   Fuusiossa vapautuu energiaa, jos lähtöytimillä on pienempi sidososuus kuin muodostuvalla ytimellä. Raskaan ytimen fissiossa muodostuu kaksi keskiraskasta ydintä. Keskiraskaiden ytimien sidososuus on suurempi kuin raskaan ytimen sidososuus, joten fissioreaktiossa vapautuu energiaa. Fissiossa ja fuusiossa massaa muuttuu energiaksi, jos nuklidin sidososuus kasvaa.

b) Sidososuus kuvaa sitä, kuinka suuri energiamäärä tarvitaan irrottamaan nuklidi ytimestä. Mitä suurempi sidososuus on, sitä tiukemmin ytimen rakenneosaset ovat sidoksissa toisiinsa. Keskiraskailla ytimillä sidososuudet ovat suurimmat ja siksi keskiraskaat ytimet ovat pysyvimpiä.

Tehtävä 16.11.

a) Kirjoitetaan radiohiilen syntyyn liittyvä reaktioyhtälö

$^{1}_{0}n + ^{14}_{7}N \rightarrow ^{14}_{6}C + ^{1}_{1}H$

b) Hiili-14-isotoopin hajoamisreaktio on $^{14}_{6}C \rightarrow e^{-} + ^{14}_{7}N + \bar{\nu}_e$.

c) ^{14}C-isotoopin puoliintumisaika $T_{1/2}$ = 5 708 a

Isotooppien ^{14}C ja ^{12}C suhde luolassa olevassa oksassa oli $n = \frac{N_{\text{C-14}}}{N_{\text{C-12}}} = 0{,}94 \cdot 10^{-12}$.

Isotooppien ^{14}C ja ^{12}C suhde elävässä olevassa oksassa oli $n_0 = \frac{N_{\text{C-14}}}{N_{\text{C-12}}} = 1{,}18 \cdot 10^{-12}$.

^{12}C-isotoopin määrän oletetaan pysyvän koko ajan lähes samana.

Tällöin, kun radiohiili alkaa kuolleessa näytteessä hajota, hiilen isotooppien suhde alkaa pienentyä. Hiilen isotooppien suhde noudattaa hajoamislakia $n = n_0 e^{-\lambda t}$. Hajoamislain hajoamisvakio λ saadaan ^{14}C-isotoopin puoliintumisajan mukaan $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$.

Ratkaistaan hajoamislaista puupalan ikä

$$n = n_0 e^{-\lambda t} = n_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}$$

$$t = \frac{\ln \frac{n}{n_0}}{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}} = -\frac{\ln \frac{n}{n_0}}{\ln 2} T_{1/2} = -\frac{\ln \frac{0{,}94 \cdot 10^{-12}}{1{,}18 \cdot 10^{-12}}}{\ln 2} \cdot 5\,708\text{ a} = 1\,872{,}533\,36\text{ a} \approx 1\,900\text{ a}.$$

d) Radiohiilen määrä ilmakehässä on muuttunut huomattavasti toisen maailman sodan jälkeisten atomipommikokeiden jälkeen.

Radiohiilen puoliintumisaika on 5 708 vuotta, joten muutaman kymmenen vuoden ikäisten eloperäisten näytteiden iänmäärityksessä puoliintumisajoista aiheutuva virheen määrä on huomattavan suuri.

Tehtävä 16.12.

vanhan asunnon huoneilman radonpitoisuuden raja
A = 300 Bq/m^3

a) Mittauksen perusteella huoneilman radonpitoisuus oli suurimmillaan A_h = 13 800 Bq/m^3. Lasketaan huoneilman pitoisuuden suhde sallittuun pitoisuuteen nähden

$$\frac{A_\mathrm{h}}{A} = \frac{13\,800\,\frac{\mathrm{Bq}}{\mathrm{m}^3}}{300\,\frac{\mathrm{Bq}}{\mathrm{m}^3}} = 46.$$

Huoneilman radonpitoisuus ylitti sallitun radonpitoisuuden arvon 46-kertaisesti.

b) Huoneilman radonpitoisuutta voidaan pienentää tiivistämällä huoneen alapohjaa ja lisäämällä huoneen ilmanvaihtoa. Lisäksi talon alle voidaan tehdä radonputkisto. Radonputkistoon ja talon salaojiin voidaan lisätä radonimuri tehostamaan maaperästä tulevan radonkaasun poistumista talon alapohjasta ja talon kivijalan läheisyydestä.

c) tarkasteltava tilavuus $V = 1{,}0\ \mathrm{m}^3$

^{222}Rn-isotoopin atomimassa $m_{\mathrm{Rn}} = 222{,}017\,570\ \mathrm{u}$

^{222}Rn-isotoopin puoliintumisaika
$T_{½} = 3{,}825\ \mathrm{d} = 3{,}825 \cdot 24 \cdot 3\,600\ \mathrm{s}$

Mittauksen perusteella huoneilman radonpitoisuus enimmillään oli $A_{\mathrm{h}} = 13\,800\ \mathrm{Bq/m^3} \cdot 1{,}0\ \mathrm{m^3} = 13\,800\ \mathrm{Bq}$.

Aktiivisuudelle on voimassa $A = \lambda N$, jossa N on ilmassa olevien ^{222}Rn-isotoopin atomien määrä. Hajoamisvakio on $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{½}}$. Kuutiometrissä ilmaa olevan ^{222}Rn-isotoopin massa m saadaan atomien määrän perusteella

$m = Nm_{\mathrm{Rn}}$.

Yhdistetään edelliset yhtälöt ja lasketaan, kuinka monta grammaa kuutiometrissä huoneilmassa olevaa ^{222}Rn-isotooppia enimmillään oli.

$$A_{\mathrm{h}} = \frac{\ln 2}{T_{½}} \frac{m}{m_{\mathrm{Rn}}}$$

$$\begin{aligned}
m &= \frac{A_{\mathrm{h}} T_{½} m_{\mathrm{Rn}}}{\ln 2} \\
&= \frac{13\,800\ \mathrm{Bq} \cdot 3{,}825 \cdot 24 \cdot 3\,600\ \mathrm{s} \cdot 222{,}017\,570 \cdot 1{,}660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{\ln 2} \\
&= 2{,}425\,6897 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{kg} \approx 2{,}42\ \mathrm{pg}
\end{aligned}$$

d) Radon on radioaktiivinen kaasumainen aine, joka hajotessaan lähettää alfasäteilyä. Kun henkilö hengittää radonia sisältävää huoneilmaa keuhkoihin, radonin hajotessa syntynyt alfahiukkanen törmää kehon sisäpuolelle ja ionisoi törmäämäänsä ainetta. Kun radon-222-pitoisuus on suuri, tapahtuu radonin hajoamisia keuhkoissa paljon, mikä aiheuttaa terveysriskin.

Tehtävä 16.13.

^{11}C-isotoopin puoliintumisaika $T_{½}$ = 20,38 min

tarkastelujakson kesto t = 10,0 min

^{11}C aktiivisuus tarkastelujakson alussa A_0 = 850 MBq

a) ^{11}C-isotooppi on β^+-aktiivinen, ja sen hajoamisen reaktioyhtälö on ${}^{11}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{11}_{5}\mathrm{B} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}}$.

b) Kaikki PET-kuvantamisessa käytettävät isotoopit ovat β^+-aktiivisia. PET-kuvaus perustuu siihen, että kuvantamisessa käytettävä radioisotooppi lähettää hajoamisen yhteydessä positronin. Positroni ja kehossa olevan vesimolekyylin elektronit kohtaavat ja annihiloituvat. Annihilaation seurauksena syntyneiden gammakvanttien avulla muodostetaan kuva kehon sisältä.

c) Gammafotonien lukumäärä on verrannollinen ^{11}C-hajoamisten lukumäärään. Alussa ^{11}C-ytimiä on N_0 kappaletta, ja lopussa olevien ytimien määrä saadaan hajoamislaista $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Hajoamisvakio on $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{½}}$.

Aktiivisuus riippuu ytimien lukumäärästä $A_0 = \lambda N_0$, joten $N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{A_0 T_{½}}{\ln 2}$.

Ytimien lukumäärä pienenee tarkastelujakson aikana eksponentiaalisesti, eli

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = \frac{A_0 T_{½}}{\ln 2} e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}} t}.$$

Ytimien lukumäärän muutos eli hajoamisten lukumäärä on

$$\Delta N = N_0 - N = \frac{A_0 T_{½}}{\ln 2} - \frac{A_0 T_{½}}{\ln 2} e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}} t} = \frac{A_0 T_{½}}{\ln 2}\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}} t}\right)$$

$$= \frac{850 \cdot 10^6 \, \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 20{,}38 \cdot 60\,\mathrm{s}}{\ln 2}\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{20{,}38 \cdot 60\,\mathrm{s}} \cdot 10{,}0 \cdot 60\,\mathrm{s}}\right)$$

$$= 4{,}323\,218 \cdot 10^{11} \approx 4{,}3 \cdot 10^{11}.$$

Jokaista hajoamista kohden syntyy kaksi gammafotonia. Syntyneiden gammafotonien määrä on siis

$$N_\gamma = 2 \cdot \Delta N = 2 \cdot 4{,}323\,218 \cdot 10^{11} = 8{,}646\,44 \cdot 10^{11} \approx 8{,}65 \cdot 10^{11}.$$

d) käytettävän gammasäteilyn heikennyskerroin kudoksessa μ = 0,098 cm^{-1}

gammasäteilyn kudoksessa kulkema matka x = 5,0 cm

Gammasäteilyn intensiteetti heikkenee kudoksessa eksponentiaalisesti, eli $I = I_0 e^{-\mu x}$.

Kun säteily on edennyt kudoksessa 5,0 cm, säteilyn intensiteetistä jäljellä oleva osuus on

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu x} = e^{-0{,}098\,\mathrm{cm}^{-1}\cdot 5{,}0\,\mathrm{cm}} = 0{,}612\,63.$$

Silloin kudokseen absorboituva osuus on
1 − 0,61263 = 0,387 37 ≈ 0,39 eli 39 %.

Tehtävä 16.14.

a) Röntgensäteily ja näkyvä valo ovat molemmat sähkömagneettista säteilyä. Molempia syntyy, kun atomin viritystila purkautuu. Röntgensäteilyn ja näkyvän valon erona on esimerkiksi niiden kyky ionisoida kohtaamaansa materiaalia. Röntgensäteily on ionisoivaa säteilyä ja näkyvä valo on ionisoimatonta säteilyä.

b) Gammasäteily on sähkömagneettista säteilyä ja alfasäteily on hiukkassäteilyä. Molemmat säteilyt ovat ionioivaa säteilyä. Molemmat säteilyt syntyvät radioaktiivisten aineiden hajoamisten yhteydessä.

c) Alfasäteily ja β^--säteily ovat ionisoivaa hiukkassäteilyä. Alfasäteily koostuu He-atomin ytimistä ja β^--säteily elektroneista. Molemmat säteilyt syntyvät radioaktiivisten hajoamisten yhteydessä.

Tehtävä 16.15.

protonin massa m_p = 1,007 2765 u

neutronin massa m_n = 1,008 6649 u

elektronin massa m_e = 5,485 7991 · 10^{-4} u

heliumisotoopin massa $m_{He\text{-}4}$ = 4,002 6033 u

deuteriumisotoopin massa $m_{H\text{-}2}$ = 2,014 1018 u

a) Koska ydinreaktiossa massaluku säilyy, kahden deuteriumin ydinreaktiossa muodostuu helium-4-isotooppi

Kahden deuteriumin ydinreaktio ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He$.

b) Deuteriumilla on yksi protoni, yksi neutroni ja yksi elektroni.

Deuteriumin sidosuus on

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{E_\text{B}}{A} = \frac{\Delta mc^2}{A} \\
&= \frac{\left(Zm_\text{p} + Nm_\text{n} - (m_\text{H-2} - Zm_\text{e})\right)c^2}{A} \\
&= \frac{(1 \cdot 1{,}007\,2765\,\text{u} + 1 \cdot 1{,}008\,6649\,\text{u} - 2{,}014\,1018\,\text{u} + 1 \cdot 5{,}485\,7991 \cdot 10^{-4}\,\text{u}) \cdot c^2}{2} \\
&= \frac{0{,}002\,388\,1799 \cdot 931{,}494\,102\,\frac{\text{MeV}}{\cancel{c^2}} \cdot \cancel{c^2}}{2} \\
&= 1{,}112\,287\,75\,\text{MeV} \\
&\approx 1{,}11\,\text{MeV}.
\end{aligned}
$$

Helium-4-isotoopilla on kaksi protonia, kaksi neutronia ja kaksi elektronia.

Helium-4-isotoopin sidosuus on

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{E_\text{B}}{A} = \frac{\Delta mc^2}{A} \\
&= \frac{\left(Zm_\text{p} + Nm_\text{n} - (m_\text{He-3} - Zm_\text{e})\right)c^2}{A} \\
&= \frac{(2 \cdot 1{,}007\,2765\,\text{u} + 2 \cdot 1{,}008\,6649\,\text{u} - 4{,}002\,6033\,\text{u} + 2 \cdot 5{,}485\,7991 \cdot 10^{-4}\,\text{u}) \cdot c^2}{4} \\
&= \frac{0{,}030\,376\,6598 \cdot 931{,}494\,102\,\frac{\text{MeV}}{\cancel{c^2}} \cdot \cancel{c^2}}{4} \\
&= 7{,}073\,919\,865\,\text{MeV} \\
&\approx 7{,}07\,\text{MeV}.
\end{aligned}
$$

c) Deuteriumin fuusiossa vapautuu energiaa

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_{\text{He-4}} - 2\cdot E_{\text{H-2}} = 4\cdot b_{\text{He-4}} - 2\cdot 2b_{\text{H-2}}\\ &= 4\cdot 7{,}073\,919\,865\,\text{MeV} - 2\cdot 2\cdot 1{,}112\,287\,75\,\text{MeV}\\ &= 23{,}846\,528\,46\,\text{MeV} \approx 23{,}8\,\text{MeV}.\end{aligned}$$

TAI

Vapautuvan energian voi laskea myös ydinreaktion massavajeen avulla

$$\begin{aligned}Q &= \Delta mc^2 = [(m_{\text{H-2}} + m_{\text{H-2}} - 2m_{\text{e}}) - (m_{\text{He-4}} - 2m_{\text{e}})]c^2\\ &= (2m_{\text{H-2}} - m_{\text{He-4}})c^2\end{aligned}$$

$$= \left(2\cdot 2{,}014\,1018\,\text{u} - 4{,}002\,6033\,\text{u}\right)\cdot c^2$$

$$= 0{,}025\,6003\cdot 931{,}494\,102\,\frac{\text{MeV}}{\cancel{c^2}}\cdot \cancel{c^2}$$

$$= 23{,}846\,52\,\text{MeV} \approx 23{,}8\,\text{MeV}.$$

Tehtävä 16.16.

a) Väite on väärin. Alfasäteily on voimakkaasti ionisoivaa ja siten syöpää aiheuttavaa säteilyä. Alfa-aktiivisia aineita voi joutua elimistöön hengitysilman mukana, sillä esimerkiksi maaperästä nouseva radonkaasu on alfa-aktiivista. Elimistön ulkopuolella alfasäteily on melko vaaratonta, koska alfasäteilyn kantama on lyhyt ja alfasäteily pysähtyy mekaaniseen esteeseen.

b) Väite on väärin. Röntgensäteilyä syntyy atomin elektroniverhossa elektronien siirtymisissä sisäkuorilla ja jarrutussäteilynä, kun varatut hiukkaset ovat voimakkaasti kiihtyvässä liikkeessä.

c) Väite on oikein. Gammasäteilyn vuorovaikutus aineen kanssa, kuten Comptonin sironta tai valosähköinen ilmiö, tapahtuvat pääasiassa aineen elektroniverhossa, joten elektronien määrä on ratkaiseva. Myös suurienergiaisille gammakvanteille mahdollinen parinmuodostus tapahtuu vain raskaiden ytimien sähkökentässä.

d) Väite on väärin. Neutroni on varaukseton hiukkanen, joten sitä ei voida suoraan havaita ionisaatioon perustuvilla ilmaisimilla.

Tehtävä 16.17.

a) Sekä gammasäteily että näkyvä valo ovat sähkömagneettista säteilyä. Gammasäteily ei absorboidu aineeseen yhtä paljoa kuin näkyvä valo eli gammasäteily on paljon läpitunkeutuvampaa. Gammasäteily on ionisoivaa säteilyä ja näkyvä valo ionisoimatonta säteilyä.

   Gammasäteilyä syntyy atomin ytimen viritystilan purkautumisissa tai annihilaatiossa, kun näkyvää valoa syntyy atomin viritystilojen purkautumisissa.

b) Gammasäteilyä syntyy, kun radioaktiivisen ytimen hajotessa syntynyt tytärydin jää virittyneeseen tilaan ja atomin ytimen viritystila purkautuu. Gammasäteilyä syntyy annihilaatiossa, jossa hiukkanen ja antihiukkanen vuorovaikuttavat ja syntyy kaksi gammafotonia.

c) Gammasäteilyn ja aineen vuorovaikutustapahtumassa voi tapahtua valosähköinen ilmiö, Comptonin sironta tai parinmuodostus. Vuorovaikutustapahtumaan vaikuttaa aineen atomimassa ja fotonin energia.

d) gammasäteilyn puoliintumispaksuus $\mu_{1/2}$ = 7,2 cm

vesikerroksen paksuus x = 26 cm

Kun gammasäteily on kulkenut aineessa matkan x verran, gammasäteilyn intensiteetti on heikennyslain mukaan $I = I_0 e^{-\mu x}$, jossa μ on väliaineen matkavaimennuskerroin. Matkavaimennuskerroin saadaan puoliintumispaksuuden avulla

$$\mu_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$$

$$\mu = \frac{\ln 2}{\mu_{1/2}}.$$

Määritetään gammasäteilyn intensiteetti vesikerroksen jälkeen

$$I = I_0 e^{-\frac{\ln 2}{\mu_{1/2}}x} = I_0 e^{-\frac{\ln 2}{7{,}2\,\text{cm}}\cdot 26\,\text{cm}} = 0{,}081\,836\,535\,95 I_0.$$

Gammasäteilystä absorboituu vesikerroksessa

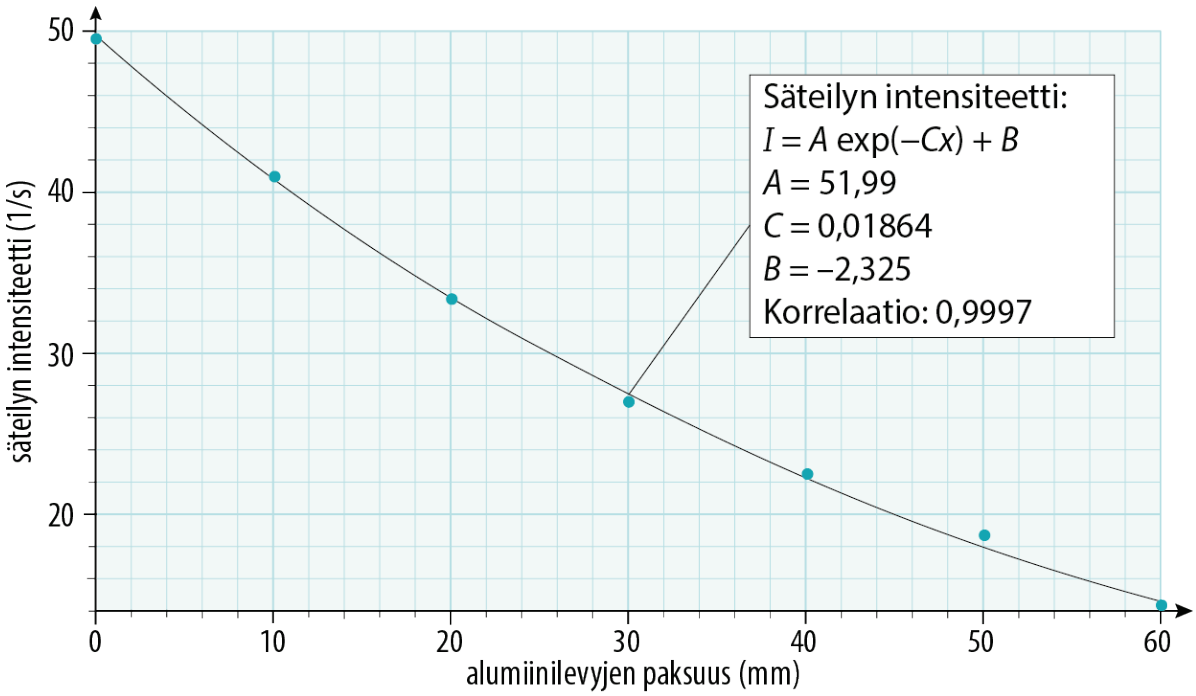
$$\frac{I_0 - I}{I_0}\cdot 100\,\% = \frac{I_0 - 0{,}081\,836\,535\,95 I_0}{I_0}\cdot 100\,\% = 91{,}816\,346\,41\,\% \approx 92\,\%.$$

Tehtävä 16.18.

a) Cesiumin järjestysluku on 55 ja bariumin 56. Hajoamisissa a ja b ytimen järjestysluku kasvaa yhdellä, joten niissä on kyse β^--hajoamisesta. β^--hajoamisessa ytimen neutroni muuttuu protoniksi. Siirtymissä a ja b syntyy siis β^--säteilyä.

Siirtymässä c varausluku ja massaluku pysyvät vakioina. Siirtymässä ytimen viritystila purkautuu, joten barium-137:n viritystila purkautuu alemmalle energiatilalle ja ydin lähettää gammasäteilyä.

b) Säteilyn intensiteetin vaimeneminen on eksponentiaalista, joten sovitetaan mittauspisteisiin vähenevä eksponenttifunktio.



c) Gammasäteilyn vaimenemista väliaineessa kuvaa gammasäteilyn heikennyslaki

$I(x) = I_0 e^{-\mu x}$, jossa μ on heikennyskerroin. b)-kohdan kuvaajan sovituksesta saatiin heikennyskertoimeksi $\mu = 0{,}018\,64\ \text{mm}^{-1}$.

Kun intensiteetti pienenee kymmenenteen osaan, intensiteetti on $I = 0{,}1 I_0$. Ratkaistaan heikennyslain lausekkeesta paksuus x, jolla intensiteetti pienenee kymmenenteen osaan eli

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu x}$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\mu x$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)}{-\mu} = \frac{\ln\left(\frac{0{,}1 I_0}{I_0}\right)}{-0{,}018\,64\ \text{mm}^{-1}} = 123{,}529\,2432\ \text{mm} \approx 12{,}4\ \text{cm}.$$

Tehtävä 16.19.
yhdessä hajoamisessa vapautuva energia

E_f = 200 MeV = 200 · 10^6 · 1,602 176 634 · 10^{-19} J

uraani-235-isotoopin massa
m_U = 235,04 u = 235,04 · 1,660 539 066 60 · 10^{-27} kg

uraania hajoaa m = 0,0010 kg

a) biokaasun lämpöarvo H = 18 MJ/kg

Hajonneiden uraaniytimien lukumäärä on $N = \dfrac{m}{m_U}$.

Uraanin hajoamisessa vapautuva energia $E_U = NE_f = \dfrac{m}{m_U}E_f$.

Biokaasun palamisessa vapautuva energia $E_B = Hm_B$.

Kun biokaasun palamisessa vapautuva energia on yhtä suuri kuin fissioissa vapautuva energia, saadaan edellisten yhtälöiden avulla selville poltettavan biokaasun määrä

$$E_U = E_B$$

$$\frac{m}{m_U}E_f = Hm_B$$

$$m_B = \frac{mE_f}{m_U H}$$

$$= \frac{0{,}0010\,\text{kg} \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{235{,}04 \cdot 1{,}660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot 18 \cdot 10^6\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg}}}$$

$$= 4{,}561\,177\,868 \cdot 10^3\ \text{kg} \approx 4{,}6\ \text{t}.$$

b) Hajonneiden uraaniytimien lukumäärä on

$$N = \frac{m}{m_\mathrm{U}}.$$

Uraanin hajoamisessa vapautuva energia

$$E_\mathrm{U} = NE_\mathrm{f} = \frac{m}{m_\mathrm{U}} E_\mathrm{f}.$$

Tuulivoimalan tuottama energia $E = Pt$. Kun tuulivoimalan tuottama energia on yhtä suuri kuin fissioissa vapautuva energia, on edellisten mukaan

$$Pt = \frac{m}{m_\mathrm{U}} E_\mathrm{f}.$$

Aika, joka tuulivoimalalta kestää tuottaa fissioita vastaava energia

$$t = \frac{mE_\mathrm{f}}{m_\mathrm{U} P}$$

$$= \frac{0{,}0010\,\mathrm{kg} \cdot 200 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{235{,}04 \cdot 1{,}660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 5{,}8 \cdot 10^{6}\ \mathrm{W}}$$

$$= 14\,155{,}379\,59\,\mathrm{s} \approx 3{,}9\,\mathrm{h}.$$

Tehtävä 16.20.

a) Fuusiossa kaksi kevyttä atomiydintä yhtyy raskaammaksi ytimeksi. Fuusioreaktiossa vapautunut energia on peräisin atomien ytimien sidosenergiasta. Fuusiossa vapautuu energiaa, jos ydinreaktion lähtöytimillä on pienempi sidososuus kuin muodostuvalla ytimellä.

b) Fuusioreaktio on vaikea saada aikaan, koska positiivisesti varautuneet atomiytimet hylkivät toisiaan sähköisen vuorovaikutuksen takia.

Jotta fuusioreaktio tapahtuu, ytimet pitää saada riittävän lähelle toisiaan. Tätä varten vedyn isotoopit täytyy kuumentaa hyvin korkeaan lämpötilaan. Kuumennettaessa aineesta tulee plasmaa eli elektronit irtoavat vety-ytimien vaikutuspiiristä. Korkea lämpötila merkitsee sitä, että hiukkasilla on hyvin suuria liike-energioita. Suurienergisissä hiukkastörmäyksissä fuusio on mahdollinen.

Plasma pidetään koossa magneettikenttien avulla. Tiheämmässä aineessa fuusioreaktiot käynnistyvät matalammissa lämpötiloissa. Magneettikentät myös estävät plasmaa törmäämästä reaktorin seinämiin.

c) Fuusioreaktio ei voi synnyttää hallitsematonta ketjureaktiota, ja suuronnettomuuden vaara on olematon. Fuusiovoimalan sijoittaminen on siksi helpompaa kuin fissiovoimalan.

Fuusioreaktorin käyttämästä polttoaineesta ei synny radioaktiivista ydinjätettä, joten jätteen sijoituksesta ei tule ongelmaa.

Fuusioreaktori ei käytä eikä tuota fissiokelpoista materiaalia. Näin ollen sen avulla ei voi rakentaa ydinasetta ja kaikki valtiot voivat hankkia fuusioreaktorin. Tokamak-tyyppinen reaktori ei myöskään vaikuta fuusioon perustuviin ydinaseisiin, sillä vetyä on helposti saatavilla joka tapauksessa, ja fuusiota hyödyntävissä ydinaseissa tarvitaan myös fissioituvaa materiaalia.

Tehtävä 16.21.

a) Radon ja sen radioaktiiviset hajoamistuotteet lähettävät säteilyä, joka ionisoi atomeja ja solujen molekyylejä. Huoneilmassa olevaa radonia päätyy hengityksessä ihmisen keuhkoihin.

Keuhkoihin päätynyt radon hajoaa ja hajoamisen yhteydessä vapautunut säteily voi vaurioittaa solujen perimäainesta. Tämä saattaa aiheuttaa keuhkosyöpää.

b) Hajoamisketjussa järjestysluku muuttuu seuraavasti: 92 → 90 → 91 → 92 → 90 → 88 → 86. Alfahajoamisessa järjestysluku pienenee kahdella ja β^--hajoamisessa kasvaa yhdellä. Voidaan päätellä, että hajoamisketjussa syntyy neljä alfahiukkasta ja kaksi β^--hiukkasta.

c) Kaivoveden aktiivisuus litraa kohden on

$$A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{½}} N,$$

missä on hajoamisvakio, N on radioaktiivisten ytimien lukumäärä ja $T_{1/2}$ on puoliintumisaika. Ytimien lukumääräksi saadaan

$$N = \frac{AT_{½}}{\ln 2} = \frac{460\,\frac{1}{\text{s}} \cdot 3{,}82 \cdot 24 \cdot 3\,600\text{ s}}{\ln 2} = 219\,032\,961{,}9 \approx 220\,000\,000.$$

Tehtävä 16.22.

a) Kun ytimestä poistuu alfahiukkanen, ytimen järjestysluku pienenee kahdella ja massaluku pienenee neljällä.

Tytärytimen järjestysluku Z = 92 − 2 = 90 ja massaluku A = 232 − 4 = 228, eli tytärydin on ${}^{228}_{90}\mathrm{Th}$ eli torium-228.

Reaktioyhtälö on ${}^{232}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{228}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

b) Isotooppien massat ovat

$m_{\text{U-232}}$ = 232,037 130 u

$m_{\text{Th-228}}$ = 228,028 715 u

$m_{\text{He-4}}$ = 4,002 6033 u.

Alfahajoamisessa vapautuva energia on

$$
\begin{aligned}
Q &= \Delta mc^2 \\
&= ((m_{\text{U-232}} \cancel{-92m_{\text{e}}}) - (m_{\text{Th-228}} \cancel{-90m_{\text{e}}}) - (m_{\text{He-4}} \cancel{-2m_{\text{e}}}))c^2 \\
&= (m_{\text{U-232}} - m_{\text{Th-228}} - m_{\text{He-4}})c^2 \\
&= (232{,}037\,130\ \text{u} - 228{,}028\,715\ \text{u} - 4{,}002\,6033\ \text{u})c^2 \\
&= 0{,}005\,8117\ \text{u} \cdot c^2 \quad \| \; 1\ \text{u} = 931{,}494\,102\ \text{MeV}/c^2 \\
&= 0{,}005\,8117 \cdot 931{,}494102\,\frac{\text{MeV}}{\cancel{c^2}} \cdot \cancel{c^2} = 5{,}413\,564\,273\ \text{MeV} \\
&\approx 5{,}414\ \text{MeV}.
\end{aligned}
$$

c) Hajoamisessa vapautuva energia muuntuu reaktiotuotteiden liike-energiaksi.

$$Q=\frac{1}{2}m_{\text{Th}}v_{\text{Th}}^2+\frac{1}{2}m_{\text{He}}v_{\text{He}}^2$$

Hajoamisessa liikemäärä säilyy, joten

$$\begin{aligned}\bar{p}_{\text{alussa}}&=\bar{p}_{\text{lopussa}}\\ \bar{0}&=\bar{p}_{\text{Th}}+\bar{p}_{\text{He}}.\end{aligned}$$

Liikemäärän säilymislain mukaisesti alfahiukkasen täytyy liikkua vastakkaiseen suuntaan kuin tytärytimen. Valitaan torium-228-ytimen liikkeen suunta positiiviseksi suunnaksi. Laskussa voidaan käyttää atomimassoja, koska elektronien massat ovat mitättömän pieniä.

$$\begin{aligned}0&=p_{\text{Th}}-p_{\text{He}}\\ p_{\text{Th}}&=p_{\text{He}}\\ m_{\text{Th}}v_{\text{Th}}&=m_{\text{He}}v_{\text{He}}\\ v_{\text{Th}}&=\frac{m_{\text{He}}v_{\text{He}}}{m_{\text{Th}}}\end{aligned}$$

Sijoitetaan toriumytimen nopeus hajoamisessa vapautuvan energian yhtälöön.

$$Q=\frac{1}{2}m_{\mathrm{Th}}v_{\mathrm{Th}}^2+\frac{1}{2}m_{\mathrm{He}}v_{\mathrm{He}}^2=\frac{1}{2}m_{\mathrm{Th}}\left(\frac{m_{\mathrm{He}}v_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{Th}}}\right)^2+\frac{1}{2}m_{\mathrm{He}}v_{\mathrm{He}}^2$$

$$Q=\frac{1}{2}m_{\mathrm{Th}}\frac{m_{\mathrm{He}}^2v_{\mathrm{He}}^2}{m_{\mathrm{Th}}^2}+\frac{1}{2}m_{\mathrm{He}}v_{\mathrm{He}}^2=\frac{1}{2}m_{\mathrm{He}}v_{\mathrm{He}}^2\cdot\frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{Th}}}+\frac{1}{2}m_{\mathrm{He}}v_{\mathrm{He}}^2$$

$$Q=\frac{1}{2}m_{\mathrm{He}}v_{\mathrm{He}}^2\left(\frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{Th}}}+1\right)$$

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{He}}v_{\mathrm{He}}^2=\frac{Q}{\left(\frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{Th}}}+1\right)}=\frac{\Delta mc^2}{\left(\frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{Th}}}+1\right)}$$

Sijoitetaan hajoamisen energia alfahiukkasen liike-energian yhtälöön, jolloin

$$E_{\mathrm{k,\,He}}=\frac{1}{2}m_{\mathrm{He}}v_{\mathrm{He}}^2=\frac{\Delta mc^2}{\left(\frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{Th}}}+1\right)}$$

$$=\frac{5{,}413\,564\,273\,\mathrm{MeV}}{\left(\frac{4{,}002\,6033\,\mathrm{u}}{228{,}028\,715\,\mathrm{u}}+1\right)}=5{,}320\,178\,818\,\mathrm{MeV}\approx 5{,}320\,\mathrm{MeV}.$$

Tehtävä 16.23.

a) ^{116}In-isotoopin hajoamisreaktio ${}^{116}_{49}\mathrm{In} \rightarrow \mathrm{e}^- + {}^{116}_{50}\mathrm{Sn} + \overline{\nu}_{\mathrm{e}}$.

b) Taustasäteilyn suhteellinen intensiteetti saadaan mittauksen alusta, jolloin näytettä ei vielä ollut laitettu mittarin läheisyyteen. Määritetään alun mittauksen suhteellisten intensiteettien keskiarvosta taustasäteilyn suhteellinen intensiteetti, joka on 0,040 50.

c) Näytteen aktiivisuus on suoraan verrannollinen mittarilla mitattuun suhteelliseen intensiteettiin. Indiumin aktiivisuudelle on voimassa

$$A = A_0 e^{-\lambda t}.$$

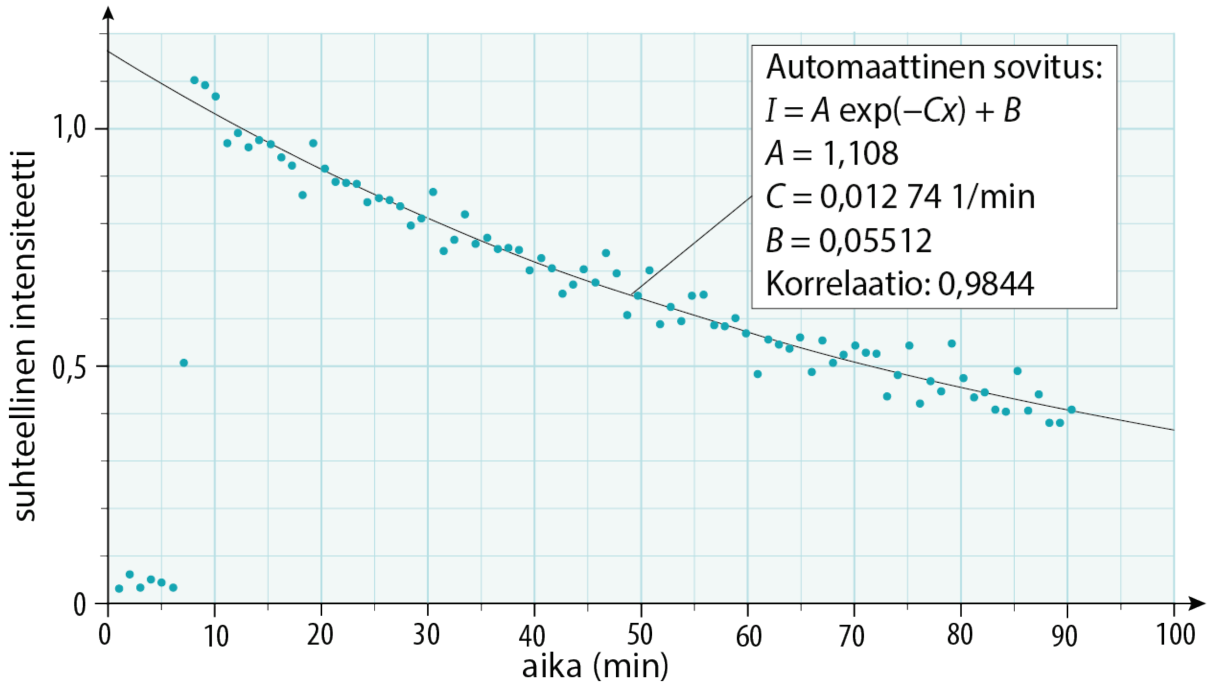
Indiumin hajoamisvakio voidaan esittää puoliintumisajan avulla

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{½}}.$$

Sijoittamalla hajoamisvakio aktiivisuuden yhtälöön saadaan

$$A = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}} t}.$$

Sovitetaan mittausaineistoon vähenevä eksponenttifunktio.



Sovitefunktion termin C = 0,012 74 1/min avulla voidaan määrittää tutkittavan isotoopin puoliintumisaika.

$$C = \frac{\ln 2}{T_{½}}$$

$$T_{½} = \frac{\ln 2}{C} = \frac{\ln 2}{0{,}012\,74\,\frac{1}{\text{min}}}$$

$$= 54{,}407\,157\,03\,\text{min} \approx 54{,}4\,\text{min}$$

Tehtävä 16.24.

a) Näytteen aktiivisuus kuvaa, kuinka monta radioaktiivisen aineen hajoamista tapahtuu sekunnissa. Näytteen aktiivisuus on $A = \lambda N$, jossa λ on hajoamisvakio ja N on näytteessä olevien radioaktiivisten ytimien lukumäärä.

Hajoamisvakio voidaan esittää isotoopin puoliintumisajan avulla $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{½}}$. Mitä pienempi on puoliintumisaika, sitä suurempi on hajoamisvakio ja sitä suurempi on näytteen aktiivisuus.

Näytteessä olevien aktiivisten ytimien lukumäärä voidaan laskea jakamalla näytteen massa isotoopin atomimassalla eli $N = \dfrac{m_{\text{näyte}}}{m_{\text{isotooppi}}}$. Mitä pienempi on isotoopin atomimassa, sitä suurempi on näytteessä olevien radioaktiivisten ytimien lukumäärä.

Taulukkokirjan mukaan isotoopin ^{22}Na puoliintumisaika ja atomimassa ovat pienemmät kuin isotoopin ^{230}Th. Tällöin isotooppia ^{22}Na sisältävän näytteen aktiivisuus on suurempi kuin isotooppia ^{230}Th sisältävän näytteen aktiivisuus, jos isotooppeja on yhtä suuret massat.

b) näytteen sisältämän Cs-137:n massa
m = 21 µg = 21 · 10^{-9} kg

Cs-137:n atomimassa m_{Cs} = 136,907 073 u

Cs-137:n puoliintumisaika $T_{1/2}$ = 30,17 a

tarkasteluaika t = 18,5 a

Näytteen aktiivisuus on $A = \lambda N$, jossa λ on hajoamisvakio ja N näytteessä olevien radioaktiivisten ytimien lukumäärä. Hajoamisvakio voidaan esittää isotoopin puoliintumisajan avulla $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{½}}$.

Aktiivisten ytimien lukumäärä $N = \frac{m}{m_{\mathrm{Cs}}}$.

Aktiivisten ytimien lukumäärä alussa on edellisten yhtälöiden mukaan

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{m_{\mathrm{Cs}}}.$$

Isotooppi ^{137}Cs hajoaa β^--hajoamisella, jolloin tytärytimenä syntyy stabiili isotooppi ^{137}Ba. Tällöin aktiivisuuden muutos aiheutuu pelkästään isotoopin hajoamisista ^{137}Cs.

Aktiivisten ytimien lukumäärä noudattaa hajoamislakia

$A = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}$. Aktiivisuuden muutos on

$$\Delta A = A_0 - A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t} = A_0\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}\right) = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}\frac{m}{m_{\mathrm{Cs}}}\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}\right)$$

$$= \frac{\ln 2}{30{,}17 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} \cdot \frac{21 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{kg}}{136{,}907\,073 \cdot 1{,}660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{30{,}17\,\mathrm{a}} \cdot 18{,}5\,\mathrm{a}}\right)$$

$$= 23\,301\,252{,}32\,\mathrm{Bq} \approx 23\,\mathrm{MBq}.$$

Tehtävä 16.25.

^{18}F-isotoopin atomimassa m_F = 18,000 937 u

^{18}F-isotoopin puoliintumisaika $T_{½}$ = 1,87 h = 1,87 · 3 600 s

a) Ydinreaktio 18F-isotoopin valmistamiselle on

$${}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{18}_{8}\mathrm{O} \rightarrow {}^{18}_{9}\mathrm{F} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

Ydinreaktio ^{18}F-isotoopin hajoamiselle on ${}^{18}_{9}\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{e}^{+} + {}^{18}_{8}\mathrm{O} + \nu_{\mathrm{e}}$

PET-kuvauksessa gammasäteilyä syntyy, kun ^{18}F-isotoopin hajoamisessa syntynyt positroni kohtaa kehossa olevan elektronin, jolloin emittoituu kaksi gammafotonia.

$$\mathrm{e}^{+} + \mathrm{e}^{-} \rightarrow 2\gamma$$

b) liuoksen aktiivisuus ennen mittausta A = 320 MBq

odotusaika ennen kuvauksen aloittamista
t = 50 min = 50 / 60 h = 50 · 3 600 s

Aktiivisuudelle on voimassa $A = \lambda N$, jossa N on ilmassa olevien ^{18}F-atomien määrä. Hajoamisvakio on $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{½}}$.

Aktiivisuus on suoraan verrannollinen aktiivisten ytimien lukumäärään, jolloin hajoamislain perustella aktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti. Aktiivisuus kuvaushetkellä $A = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}}t}$.

^{18}F-isotoopin massa m saadaan atomien määrän perusteella $m = Nm_{\mathrm{Rn}}$.

Yhdistetään edelliset yhtälöt ja lasketaan kehossa olevien ^{18}F-atomien massa.

$$A = \frac{\ln 2}{T_{½}}N = \frac{\ln 2}{T_{½}}\frac{m}{m_{\mathrm{F}}}$$

$$A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}}t} = \frac{\ln 2}{T_{½}}\frac{m}{m_{\mathrm{F}}}$$

$$m = \frac{A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}}t} T_{½} m_{\mathrm{F}}}{\ln 2}$$

$$= \frac{320 \cdot 10^6\ \mathrm{Bq} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{1{,}87\,\mathrm{h}} \cdot \frac{50}{60}\mathrm{h}} \cdot 1{,}87 \cdot 3\,600\ \mathrm{s} \cdot 18{,}000\,937 \cdot 1{,}660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}{\ln 2}$$

$$= 6{,}821\,25 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{kg} \approx 68\ \mathrm{pg}$$

c) lyijyn heikennyskerroin μ = 1,7 cm^{-1}

Merkitään lyijylevyyn osuvan gammasäteilyn intensiteettiä symbolilla I_0 ja tarvittavan lyijylevyn paksuutta symbolilla x.

Lyijylevyn läpi menneen gammasäteilyn intensiteetti $I = 0{,}050 I_0$.

Lyijyssä gammasäteilyn intensiteetti pienenee eksponentiaalisesti heikennyslain mukaisesti

$I = I_0 e^{-\mu x}$.

Tarvittavan lyijylevyn paksuus saadaan ratkaistua intensiteetin avulla.

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu x}$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\mu x$$

$$x = -\frac{\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)}{\mu} = -\frac{\ln\left(\frac{0{,}050 I_0}{I_0}\right)}{1{,}7\,\text{cm}^{-1}} = 1{,}762\,195\,\text{cm} \approx 1{,}8\,\text{cm}$$

d) Mitä pidempi on PET-kuvauksessa käytetyn isotoopin puoliintumisaika, sitä suurempi on potilaalle aiheutuva säteilyannos. PET-kuvauksessa käytetään isotooppeja, joiden puoliintumisaika on lyhyt, jotta potilaan saama säteilyannos olisi mahdollisimman pieni.

Mitä pidempi on PET-kuvauksessa käytetyn isotoopin puoliintumisaika, sitä suurempi on potilaalle aiheutuva säteilyannos. PET-kuvauksessa käytetään isotooppeja, joiden puoliintumisaika on lyhyt, jotta potilaan saama säteilyannos olisi mahdollisimman pieni.

PET-kuvauksissa käytettävien isotooppien pitää olla β^+-aktiivisia isotooppeja, koska PET-kuvauksessa positronien annihilaatio tuottaa kuvauksessa hyödynnettävät gammafotonit.

Ratkaistu tehtävään 16.26.

a) Kun uraanilasia valaistiin ultraviolettivalolla, lasi alkoi lähettää vihreää valoa. Ultraviolettivalon aallonpituus on lyhyempi kuin vihreän valon aallonpituus, joten kyseessä on fluoresenssi-ilmiö. Ultraviolettivalo viritti lasissa olevia atomeja. Viritystilat purkautuivat yhden tai useamman välitilan kautta, jolloin lasin emittoiman valon energia on pienempi kuin valon, joka viritti lasin atomeja. Tällöin lasi emittoi valoa, jonka aallonpituus on suurempi kuin ultraviolettivalon aallonpituus.

b) Uraanilasi sisälsi uraanin isotooppeja ^{238}U, ^{235}U ja ^{234}U, jotka hajotessaan emittoivat alfahiukkasia. Alfahiukkasten kantama on ilmassa vain joitakin senttimetrejä. Säteilyannoksen selkeä pieneneminen etäisyyden kasvaessa aiheutuu siitä, että ilma absorboi hajoamisissa emittoituneet alfahiukkaset. Säteilyannoksen suuruus 20 cm:n etäisyydellä lasista on taustasäteilyä suurempi. Tämä aiheutuu alfahajoamisten yhteydessä syntyneestä gammasäteilystä. Osa hajoamisissa syntyneistä tytärytimistä jää virittyneeseen tilaan, ja viritystilojen purkautuessa emittoituu gammasäteilyä, joka ei absorboidu ilmaan 20 cm:n matkalla.

c) ^{238}U-isotoopin massa mittaushetkellä m = 1,17 g

aika valmistuksesta mittaushetkeen t = 78 a

^{238}U-isotoopin atomimassa m_U = 238,050 784 u

^{238}U-isotoopin puoliintumisaika $T_{½}$ = 4,468 · 10^9 a

Näytteen aktiivisuus mittaushetkellä $A = \lambda N$.
Hajoamisvakion ja puoliintumisajan välillä on voimassa
$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{½}}$. Aktiivisten ytimien määrä saadaan näytteen

massan m ja isotoopin massan avulla eli $N = \frac{m}{m_U}$.
Hajoamisvakion ja puoliintumisajan välillä on voimassa
$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{½}}$.

Näytteen aktiivisuus mittaushetkellä on tällöin

$$A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{m_U}.$$

Näytteen aktiivisuus lasilautasen valmistuttua on A_0.
Kun lautasen valmistuksesta on kulunut aika *t, lasilautasen aktiivisuus saadaan* hajoamislain avulla

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}.$$

Sijoitetaan edellä saatu aktiivisuuden yhtälö hajoamislain aktiivisuuden yhtälöön ja saadaan

$$\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{m_U} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}.$$

Ratkaistaan lasilautasen aktiivisuus valmistumisen jälkeen

$$\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\frac{m}{m_\mathrm{U}}=A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}$$

$$A_0=\frac{\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\frac{m}{m_\mathrm{U}}}{e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}}=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\frac{m}{m_\mathrm{U}}e^{\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}$$

$$=\frac{\ln 2}{4{,}468\cdot 10^{9}\cdot 365\cdot 24\cdot 3\,600\ \mathrm{s}}\cdot\frac{1{,}17\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{238{,}050784\cdot 1{,}660\,539\,066\,60\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}\cdot e^{\frac{\ln 2}{4{,}468\cdot 10^{9}\ \mathrm{a}}\cdot 78\ \mathrm{a}}$$

$$=14\,560{,}385\,01\ \mathrm{Bq}\approx 15\ \mathrm{kBq}.$$

Tehtävä 16.27.

a) Hajoamisyhtälö on $^{137}_{55}\mathrm{Cs} \rightarrow {}^{137}_{56}\mathrm{Ba} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$.

b) Cesiumin puoliintumisaika
$T_{½}$ = 30,17 a = 952 072 456,7 s

(tai $T_{½}$ = 30,17 · 365 · 24 · 3 600 s = 951 441 120 s)

Cesium-137 moolimassa M = 136,907 073 g/mol

Avogadron vakio $N_\mathrm{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ 1/mol

aktiivisuus neliömetrillä A = 11 kBq

Aktiivisten ytimien ja aktiivisuuden välillä on voimassa $A = \lambda N$. Aktiivisten ytimien määrä saadaan ainemäärän avulla, jolloin

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_\mathrm{A}}$$

$$N = \frac{mN_\mathrm{A}}{M}.$$

Hajoamisvakio voidaan esittää puoliintumisajan mukaan $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{½}}$. Yhdistämällä edelliset yhtälöt saadaan laskettua ^{137}Cs-laskeuman massa neliömetriä kohden.

$$m = \frac{MN}{N_\mathrm{A}} = \frac{M\frac{A}{\lambda}}{N_\mathrm{A}} = \frac{MAT_{½}}{N_\mathrm{A}\ln 2}$$

$$= \frac{136{,}907\,073\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \cdot 11\,000\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 952\,072\,456{,}7\,\mathrm{s}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\,\frac{1}{\mathrm{mol}} \cdot \ln 2} = 3{,}434\,965 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{g} \approx 3{,}4\,\mathrm{ng}$$

c) Lasketaan aktiivisten ytimien määrän suhde alussa olevien ytimien määrään hajoamislain perusteella

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}}t} = e^{-\frac{\ln 2}{30{,}17\text{ a}}\cdot 30\text{ a}} = 0{,}501\,956\,6695 \approx 50\,\%.$$

TAI

Kyseisen cesium-isotoopin puoliintumisaika on 30,17 a ja tarkasteluaika on 30 a. Tällöin aikaa on kulunut noin yhden puoliintumisajan verran, jolloin ^{137}Cs:n määrä vuonna 2017 on 50 %.

Tehtävä 16.28.

a) Ydinreaktiossa massaluku ja protonien lukumäärä säilyvät

$$^{1}_{0}n + {}^{16}_{8}O \rightarrow {}^{10}_{4}Be + 3\,{}^{1}_{0}n + 4\,{}^{1}_{1}p$$

Reaktiossa syntyy neljä protonia.

b) Radiohiiltä syntyy ilmakehässä ja radiohiili muodostaa ilmakehän hapen kanssa hiilidioksidia. Radiohiili kulkeutuu yhteyttämisessä kasveihin ja kasvien hajotessa sitä palautuu ilmakehään. Jäähän hiilidioksidia sitoutuu vain pieniä määriä, joten jäässä radiohiilen määrät ovat hyvin pieniä. Lisäksi radiohiilen puoliintumisaika on vain muutamia tuhansia vuosia. Pienen määrän ja lyhyen puoliintumisajan takia jäässä olevaa radiohiililtä ei enää ole jäljellä miljoonia vuosia vanhoissa jäätiköissä.

(Riittää maininta: Radiohiiltä ei kerry jäähän, joten radiohiiltä ei voida käyttää jään iän määrittämisessä. Vastauksessa pitää lisäksi tarkastella radiohiilen puoliintumisajan vaikutusta.)

c) berylliumin puoliintumisaika $T_{1/2}$ = 1,51 · 10^6 a

jäästä otetussa näytteessä ^{10}Be ja ^{9}Be suhde

$$n=\frac{N_{\text{Be-10}}}{N_{\text{Be-9}}}=110{,}0\cdot 10^{-14}$$

jään pinnalta otetussa näytteessä ^{10}Be ja ^{9}Be suhde

$$n_0=\frac{N_{\text{Be-10}}}{N_{\text{Be-9}}}=9{,}7\cdot 10^{-9}$$

Koska ^{9}Be on pysyvä isotooppi, ^{9}Be isotoopin lukumäärä pysyy samana. Isotoopin ^{10}Be lukumäärä pienenee, jolloin isotooppien suhde pienenee.

Hajoamislain mukaan voidaan kirjoittaa $n=n_0e^{-\lambda t}$, jossa λ on hajoamisvakio ja t jäästä otetun näytteen ikä. Hajoamisvakio voidaan esittää puoliintumisajan avulla $\lambda=\dfrac{\ln 2}{T_{½}}$.

Ratkaistaan jäänäytteen ikä

$$n=n_0e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}$$

$$\frac{n}{n_0}=e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}$$

$$t=\frac{\ln\frac{n}{n_0}}{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}}=-\frac{\ln\frac{n}{n_0}}{\ln 2}T_{1/2}=-\frac{\ln\left(\frac{110{,}0\cdot 10^{-14}}{9{,}7\cdot 10^{-9}}\right)}{\ln 2}\cdot 1{,}51\cdot 10^{6}\text{ a}$$

$$=19\,790\,460{,}92\text{ a}\approx 20\cdot 10^{6}\text{ a}.$$

Tehtävä 16.29.

hiili-12 lukumääräosuus 98,9 %

hiili-13 lukumääräosuus 1,1 %

hiili-14 lukumääräosuus $1{,}2 \cdot 10^{-12}$

hiili-14:n puoliintumisaika $T_{½}$ = 5 730 a

isotooppien hiili-14 ja hiili-13 lukumääräsuhde $3{,}5 \cdot 10^{-11}$

a)

$$^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{p}$$

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{e}^{-} + \overline{\nu}_e$$

b) Hiilen kolmen isotooppien keskinäiset osuudet pysyvät ilmakehässä lähes samoina. Kun kasvit yhteyttävät ilmakehän hiili päätyy kasveihin ja edelleen kasveja syöviin eläimiin. Radioaktiivisen isotoopin osuus ei ehdi kasvin tai eläimen elinaikana pienentyä juurikaan radioaktiivisen hajoamisen takia, joten kasvin tai eläimen kuollessa siinä on hiilen isotooppeja samassa suhteessa kuin ilmakehässä. Kuoleman jälkeen isotoopin ^{14}C määrä pienenee ajan kuluessa eksponentiaalisesti radioaktiivisen hajoamisen takia, mutta taas pysyvien isotooppien ^{12}C ja ^{13}C määrät eivät muutu. Kasvin tai eläimen kuolemasta kulunut aika voidaan määrittää mittaamalla isotooppien keskinäinen lukumääräsuhde. Näytteen aktiivisuus pienenee myös eksponentiaalisesti, joten näytteen ikä voidaan määrittää myös mittaamalla näytteen aktiivisuus.

c) Hiilen isotoopin ^{14}C lukumäärä kuolleen nisäkkään luunäytteessä pienenee radioaktiivisen hajoamisen takia, joten ajan *t* kuluttua nisäkkään kuolemasta lukumäärä on

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}} t},$$

jossa *N* on isotoopin ^{14}C lukumäärä nisäkkään kuollessa ja $T_{½}$ on isotoopin ^{14}C puoliintumisaika.
Isotooppien ^{14}C ja ^{13}C lukumääräsuhde voidaan kirjoittaa

$$\frac{N\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)}{N\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)} = \frac{N_0\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right) e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}} t}}{N_0\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)},$$

jossa $N_0\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)$ on isotoopin lukumäärä näytteessä nisäkkään kuollessa. Lukumääräsuhde $\frac{N\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)}{N\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)}$ nisäkkään kuollessa oli yhtä suuri kuin isotooppien ^{14}C ja ^{13}C lukumääräsuhde ilmakehässä.

Lukumääräsuhteeksi saatiin mittauksissa

$\dfrac{N\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)}{N\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)} = 3{,}5 \cdot 10^{-11}$, joten näytteen iäksi saadaan

$$\frac{N\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)}{N\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)} = \frac{N_0\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)}{N_0\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)} e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)}{N\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)} \cdot \frac{N_0\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)}{N_0\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)} = e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}} t}$$

$$\ln\left(\frac{N\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)}{N\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)} \cdot \frac{N_0\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)}{N_0\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)}\right) = -\frac{\ln 2}{T_{½}} t$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{N\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)}{N\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)} \cdot \frac{N_0\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)}{N_0\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)}\right)}{-\frac{\ln 2}{T_{½}}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{N\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)}{N\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)} \cdot \frac{N_0\left({}^{13}_{6}\mathrm{C}\right)}{N_0\left({}^{14}_{6}\mathrm{C}\right)}\right) \cdot T_{½}}{-\ln 2}$$

$$= \frac{\ln\left(3{,}5 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}1 \cdot 10^{-2}}{1{,}2 \cdot 10^{-12}}\right) \cdot 5\,730 \text{ a}}{-\ln 2}$$

$$= 9\,397{,}796\,235 \text{ a}$$

$$t \approx 9\,400 \text{ a}.$$

Tehtävä 16.30.

a) Vesi hidastaa ydinreaktioissa vapautuneita neutroneja. Jotta uusi uraani-235-isotoopin ja neutronin reaktio voi syntyä, neutroni täytyy hidastaa. Vesi vuorovaikuttaa neutronin kanssa ja vastaanottaa neutronilta liike-energiaa, jolloin neutronin nopeus pienenee.

Vesi toimii ydinvoimalaitoksessa säteilysuojana. Vesi absorboi ydinreaktioissa vapautunutta säteilyä voimakkaasti, jolloin säteilyn määrä reaktorin veden pinnan yläpuolella ja reaktorihallin sisällä on pieni.

Vesi toimii energian siirtäjänä. Vesi vastaanottaa neutronien liike-energiaa ja polttoainesauvojen sisäenergiaa. Energia siirtyy reaktorissa höyrystyneen veden liike-energiana putkistossa turbiinille. Lauhduttimessa lauhdutinvesi siirtää voimalaitokselta energiaa lauhdutinveteen ja jäähdyttää samalla reaktorille palaavaa vettä.

b) $^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{96}_{37}\mathrm{Rb} + {}^{137}_{55}\mathrm{Cs} + 3\mathrm{n}$

c) yhdessä fissiossa vapautunut energia

$E_\mathrm{f} = 200\ \mathrm{MeV} = 200 \cdot 10^6 \cdot 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$

energiantuoton aika $t = 1{,}0\ \mathrm{s}$

sähköntuotannon hyötysuhde $\eta = 0{,}35$

sähköteho $P_\mathrm{s} = 890 \cdot 10^6\ \mathrm{W}$

Reaktorin sähköntuotannon hyötysuhde on

$$\eta = \frac{E_\text{sähköteho}}{E_\text{lämpöteho}} = \frac{P_\mathrm{s} t}{N E_\mathrm{f}}.$$

Fissioiden lukumäärä sekunnissa on

$$N = \frac{P_\mathrm{s} t}{\eta E_\mathrm{f}}$$

$$= \frac{890 \cdot 10^6\ \mathrm{W} \cdot 1{,}0\ \mathrm{s}}{0{,}35 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}} = 7{,}935\,63 \cdot 10^{19} \approx 7{,}9 \cdot 10^{19}.$$

d) Ydinreaktion reaktioenergia muuntuu reaktiotuotteiden liike-energiaksi. Reaktiotuotteet törmäilevät polttoainepelletin materiaaleihin, jolloin tuotteiden liike-energia muuntuu pellettien materiaalin sisäenergiaksi. Sisäenergia siirtyy johtumalla pellettejä ympäröivän veden ja polttoainesauvojen sisäenergiaksi. Polttoainesauvojen läpi virtaavan veden sisäenergia kasvaa ja vesi höyrystyy. Vesihöyry luovuttaa sisäenergiaa sekä liike-energiaa ydinvoimalan vesiputkistoille sekä höyryturbiinille, jolloin putkistojen ja turbiinin sisäenergiat kasvavat sekä turbiini alkaa pyöriä ja turbiinille tulee liike-energiaa. Turbiini pyörittää generaattoria, jolloin generaattorin liike-energia muuntuu sähköverkon energiaksi.

Tehtävä 16.31.

a) Helium-3-isotoopin ytimien fuusioreaktio

$${}^{3}_{1}\mathrm{He} + {}^{3}_{1}\mathrm{He} \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

b) helium-3-isotoopin massa $m_{\text{He-3}}$ = 3,016 0293 u

helium-4-isotoopin massa $m_{\text{He-4}}$ = 4,002 6033 u

protonin massa $m_{\text{H-1}}$ = 1,007 8250 u

Reaktiossa vapautuva energia saadaan reaktioenergian avulla

$$\begin{aligned}
Q &= \Delta m c^2 \\
&= ((2m_{\text{He-3}} - 4m_e) - ((m_{\text{He-4}} - 2m_e) + (2m_{\text{H-1}} - 2m_e)))c^2 \\
&= (2m_{\text{He-3}} - m_{\text{He-4}} - 2m_{\text{H-1}})c^2 \\
&= 2 \cdot 3{,}016\,0293\,\text{u} - 4{,}002\,6033\,\text{u} - 2 \cdot 1{,}007\,8250\,\text{u} \\
&= 0{,}013\,8053\,\text{u} \cdot c^2 \quad \Big\| \; 1\,\text{u} = 931{,}494\,102\,\text{MeV}/c^2 \\
&= 0{,}013\,8053 \cdot 931{,}494\,102 \frac{\text{MeV}}{\cancel{c^2}} \cdot \cancel{c^2} = 12{,}859\,5555\,\text{MeV} \\
&= 12{,}8596\,\text{MeV}.
\end{aligned}$$

c) Jotta fuusioreaktio tapahtuu, ytimet pitää saada riittävän lähelle toisiaan. Tätä varten vedyn isotoopit täytyy kuumentaa hyvin suureen lämpötilaan. Kuumennettaessa aineesta tulee plasmaa eli elektronit irtoavat vety-ytimien vaikutuspiiristä. Korkea lämpötila merkitsee sitä, että hiukkasilla on hyvin suuria liike-energioita. Suurienergiaisissa hiukkastörmäyksissä fuusio on mahdollinen.

Fuusioreaktio on vaikea saada aikaan, koska positiivisesti varatut atomiytimet hylkivät toisiaan sähköisen vuorovaikutuksen takia. Jotta plasman lämpötila olisi riittävän korkea, plasma ei saa osua reaktorin seinämiin. Plasma pidetään koossa magneettikenttien avulla. Korkeassa lämpötilassa olevan plasman hallinta on toistaiseksi osoittautunut hankalaksi.

d) koivuhalkojen lämpöarvo H = 18 MJ/kg

Fuusioituvien helium-3-ytimien lukumäärä on

$$N = \frac{m}{m_{\text{He-3}}}.$$

Yhteen fuusioreaktioon tarvitaan kaksi helium-3 isotooppia. Fuusiossa vapautuva energia on

$$E_{\text{He-3}} = \frac{N}{2} E_{\text{fuusio}} = \frac{m}{2m_{\text{He-3}}} E_{\text{fuusio}}.$$

Koivuhalkojen palamisessa vapautuva energia $E_{\text{K}} = Hm_{\text{K}}$.

Koska koivuhalkojen palamisessa vapautuva energia on yhtä suuri kuin fuusioissa vapautuva energia, saadaan edellisten yhtälöiden avulla selville poltettavien koivuhalkojen määrä.

$$\begin{aligned} E_{\text{He-3}} &= E_{\text{K}} \\ \frac{m}{2m_{\text{He-3}}} E_{\text{fuusio}} &= Hm_{\text{K}} \\ m_{\text{K}} &= \frac{mE_{\text{fuusio}}}{2m_{\text{He-3}}H} \\ &= \frac{0{,}0010\,\text{kg} \cdot 12{,}859\,5555 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{2 \cdot 3{,}016\,0293 \cdot 1{,}660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot 18 \cdot 10^{6}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}} \\ &= 11{,}427\,446\,490\,328\,06 \cdot 10^{3}\ \text{kg} \approx 11{,}4\ \text{t}. \end{aligned}$$

Tehtävä 16.32.

Käytettävät välineet:

säteilylähteet

säteilymittari

pahvinpala

alumiini- ja lyijylevy

statiivi ja koura

sekuntikello

Säteilymittari asetetaan pöydälle vaakasuuntaan ja laitetaan päälle. Muut välineet viedään metrien päähän säteilymittarista. Aluksi selvitetään taustasäteilyn määrä, jotta voidaan erottaa säteilylähteen tuottama säteily ja taustasäteilystä. Käynnistetään ajanotto ja jatketaan mittausta esimerkiksi 60 sekuntia (tai riittävän pitkä aika). Lopuksi katsotaan, kuinka monta pulssia säteilymittari on rekisteröinyt.

Asetetaan säteilylähde noin 4 cm:n etäisyydelle säteilymittarin mittauspäästä. Laitetaan lähteen ja mittarin väliin pahvilevy statiivin kouran kanssa. (HUOM! Säteilyturvallisuuden takia on käytettävä kouraa. Toistetaan koe kaikilla säteilylähteillä.

Alfasäteilyn kantama ilmassa on muutamia senttimetrejä, eikä alfasäteily merkittävästi läpäise pahvia. Alfasäteilylähteen aiheuttamien pulssien määrä poikkeaa selvästi beetasäteilylähteen ja gammasäteilylähteen aiheuttamien pulssien määrästä. Beetasäteily ja gammasäteily eivät nimittäin absorboidu pahviin.

Alfahajoamisten yhteydessä syntyy myös gammasäteilyä, joka läpäisee pahvin. Alfasäteilylähde tuottaa taustasäteilyä enemmän pulsseja.

(Alfasäteilijä voidaan erottaa myös etäisyyden avulla. Kun säteilylähteet ovat esim. 15 cm etäisyydellä mittarista, alfasäteilyä ei juurikaan enää tule mittarille.)

Asetetaan toinen jäljellä olevista tunnistamattomista säteilylähteistä noin 4 cm:n etäisyydelle säteilymittarin mittauspäästä. Laitetaan statiivi säteilylähteen ja säteilymittarin väliin, kiinnitetään koura statiiviin ja kouraan alumiinilevy. Suoritetaan kestoltaan 60 sekunnin mittaus ja merkitään muistiin säteilymittarin rekisteröimien pulssien määrä. Sama mittaus suoritetaan käyttämällä alumiinilevyn tilalla lyijylevyä.

Vaihdetaan säteilylähde toiseen tunnistamattomaan säteilylähteeseen ja toistetaan edellä kuvatut mittaukset.

Beetasäteilylähteen tuottama säteily absorboituu suurimmaksi osaksi alumiinilevyyn, mutta gammasäteilyä absorboituu alumiiniin vain hyvin vähän. Beetasäteily absorboituu kokonaan lyijylevyyn, mutta gammasäteilyä pääsee levyn läpi. Tällöin se säteilylähde, joka tuottaa alumiinilevyllä ja lyijylevyllä tehdyissä kokeissa vähemmän pulsseja on beetasäteilylähde.

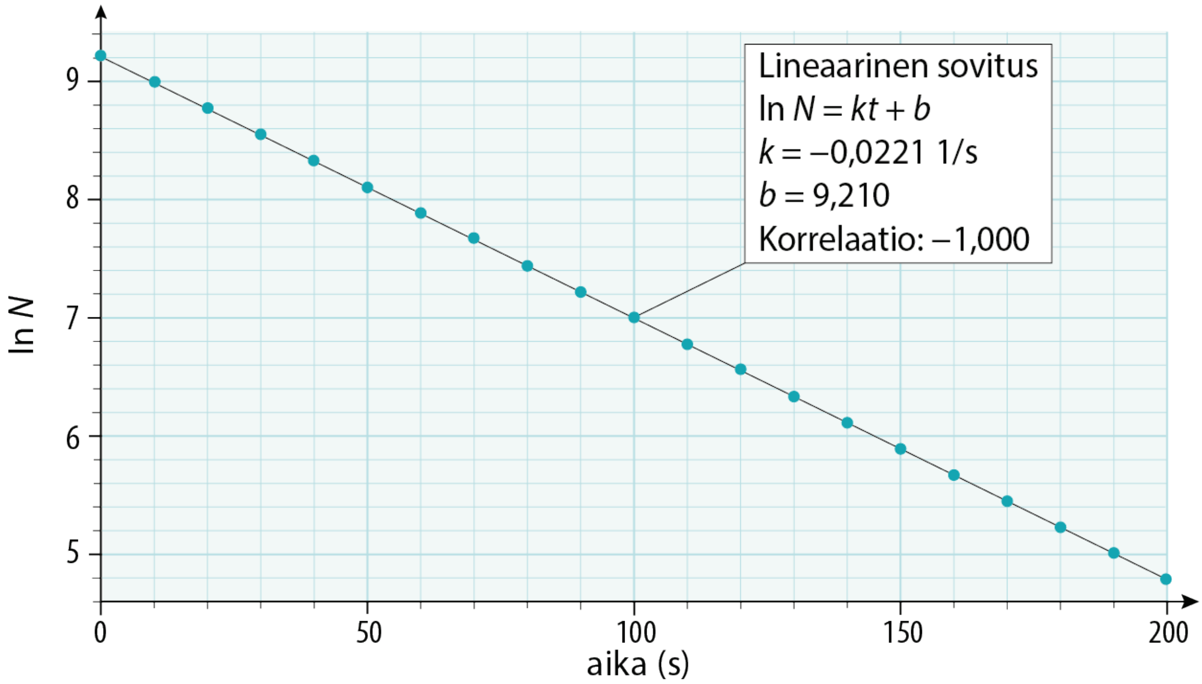
Beetasäteilyn yhteydessä syntyy myös gammasäteilyä, joka ei absorboidu alumiinilevyyn. Beetasäteilyn yhteydessä syntynyt gammasäteily havaitaan siitä, että säteilymittari rekisteröi pulsseja enemmän kuin mitä taustasäteily aiheuttaa.

Tehtävä 16.33.

a) Lasketaan uusi sarake luonnollinen logaritmi radioaktiivisten ytimien määrästä.

Aika (s)	*N* (lukumäärä)	ln *N*
0	10 000	9,210 340 372
10	8 014	8,988 945 291
20	6 422	8,767 484 875
30	5 146	8,545 974 993
40	4124	8,324 578 845
50	3 305	8,103 191 752
60	2 648	7,881 559 917
70	2 122	7,660 114 319
80	1 701	7,438 971 592
90	1 363	7,217 443 432
100	1 092	6,995 766 156
110	875	6,774 223 886
120	701	6,552 507 887
130	562	6,331 501 85
140	450	6,109 247 583
150	361	5,888 877 958
160	289	5,666 426 688
170	232	5,446 737 372
180	186	5,225 746 674
190	149	5,003 946 306
200	119	4,779 123 493

Tehdään (t, ln N)-koordinaatiston kuvaaja.



b) Hajoamislain mukaan aktiivisten ytimien määrälle on voimassa

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Johdetaan yhtälö, joka kuvaa, kuinka ln N riippuu ajasta.

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

$$\ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t \quad \Big\| \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda t$$

$$\ln N = -\lambda t + \ln N_0$$

c) (t, ln N)-koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalisen kulmakertoimen avulla saadaan määritettyä hajoamisvakio. Kuvaajasta määritettynä
$-\lambda = -0{,}022\ 15\ 1/\mathrm{s}$ ja hajoamisvakio on $\lambda = 0{,}022\ 15\ 1/\mathrm{s}$

Hajoamisvakion avulla saadaan laskettua emoytimien puoliintumisaika.

$$T_{½} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0{,}022\,15\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 31{,}293\,326\ \mathrm{s} \approx 31\ \mathrm{s}$$

Tehtävä 16.34.

a) Valitaan ketjureaktion mahdollistavaksi fissioreaktioksi

$^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{96}_{40}\mathrm{Zr} + {}^{137}_{52}\mathrm{Te} + 3\mathrm{n}$ (tai)

$^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{96}_{40}\mathrm{Zr} + {}^{138}_{52}\mathrm{Te} + 2\mathrm{n}$

b) Yhdessä fissioreaktiossa vapautuu energiaa massakadon verran. Luetaan atomimassat aineistosta:
$M_{\mathrm{U}} = 235{,}044$ u, $M_{\mathrm{Zr}} = 95{,}9083$ u, $M_{\mathrm{Te}} = 136{,}926$ u,
$M_{\mathrm{n}} = 1{,}67493 \cdot 10^{-27}$ kg.

Käytetään muunnosta $u = 1{,}661 \cdot 10^{-27}$ kg ja valonnopeuden arvoa $c = 2{,}998 \cdot 10^{8}$ m/s, jolloin saadaan

$Q = (M_{\mathrm{U}} + M_{\mathrm{n}})\mathrm{c}^2 - (M_{\mathrm{Zr}} + M_{\mathrm{Te}} + 3M_{\mathrm{n}})c^2$,
$Q \approx 2{,}880 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J} \approx 180\ \mathrm{MeV}$.

Hyväksytään vastaava lasku myös, mikäli vapautuvien neutronien määrä on 1 tai 2, jolloin Q on välillä 180 MeV ja 190 MeV.

c) Sähkötehon P tuottamiseksi täytyy reaktorin tuottaa ajassa t energia $E = P\eta t$.

Energia on peräisin reaktioista, joita tapahtuu $n = E/Q$ kappaletta.

Kuukaudessa tarvittava polttoaineen massa saadaan kertomalla reaktioiden määrä yhden ^{92}U-atomin massalla

$m = nM_\mathrm{U} = M_\mathrm{U}Pt/\eta Q$.

Sijoitetaan
$M_\mathrm{U} = 235{,}044\ \mathrm{u} \cdot 1{,}661 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg/u}$,
$P = 1{,}6 \cdot 10^9\ \mathrm{W}$,
$t = 30 \cdot 24 \cdot 3600\ \mathrm{s} = 2{,}592 \cdot 10^6\ \mathrm{s}$,
$\eta = 0{,}37$ ja
$Q = 2{,}880 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}$,
jolloin saadaan
$m = 151{,}9141622\ \mathrm{kg} \approx 150\ \mathrm{kg}$.

(Hyväksytään myös annetun vapautuvan energian 180 MeV perusteella laskettu tulos 140 kg.)

Lisätietona todettakoon, että Olkiluoto 3 käyttää vuodessa noin 32 tonnia asennetusta 128 tonnin latauksesta. Polttoaine on rikastettua luonnonuraania, jossa ^{92}U-isotoopin osuus on 3–5 %. Tämän perusteella voidaan laskea $m = (32\,000\ \mathrm{kg}/12\mathrm{kk}) \cdot 0{,}05 \approx 133\ \mathrm{kg/kk}$.)