Vipu 4

FY4 Voima ja liike

Tehtävien ratkaisut

1. Tasainen liike

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 1.1.

a) B

b) B

c) B

d) C

e) C

f) A

g) B

Tehtävä 1.2.

a) väärin, yksiköt: $\frac{\text{m}}{\text{s}} \neq \text{m} \cdot \text{s}$

b) oikein, yksiköt: $\text{m} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s}$

c) väärin, yksiköt: $\text{s} \neq \frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{m}} = \frac{1}{\text{s}}$

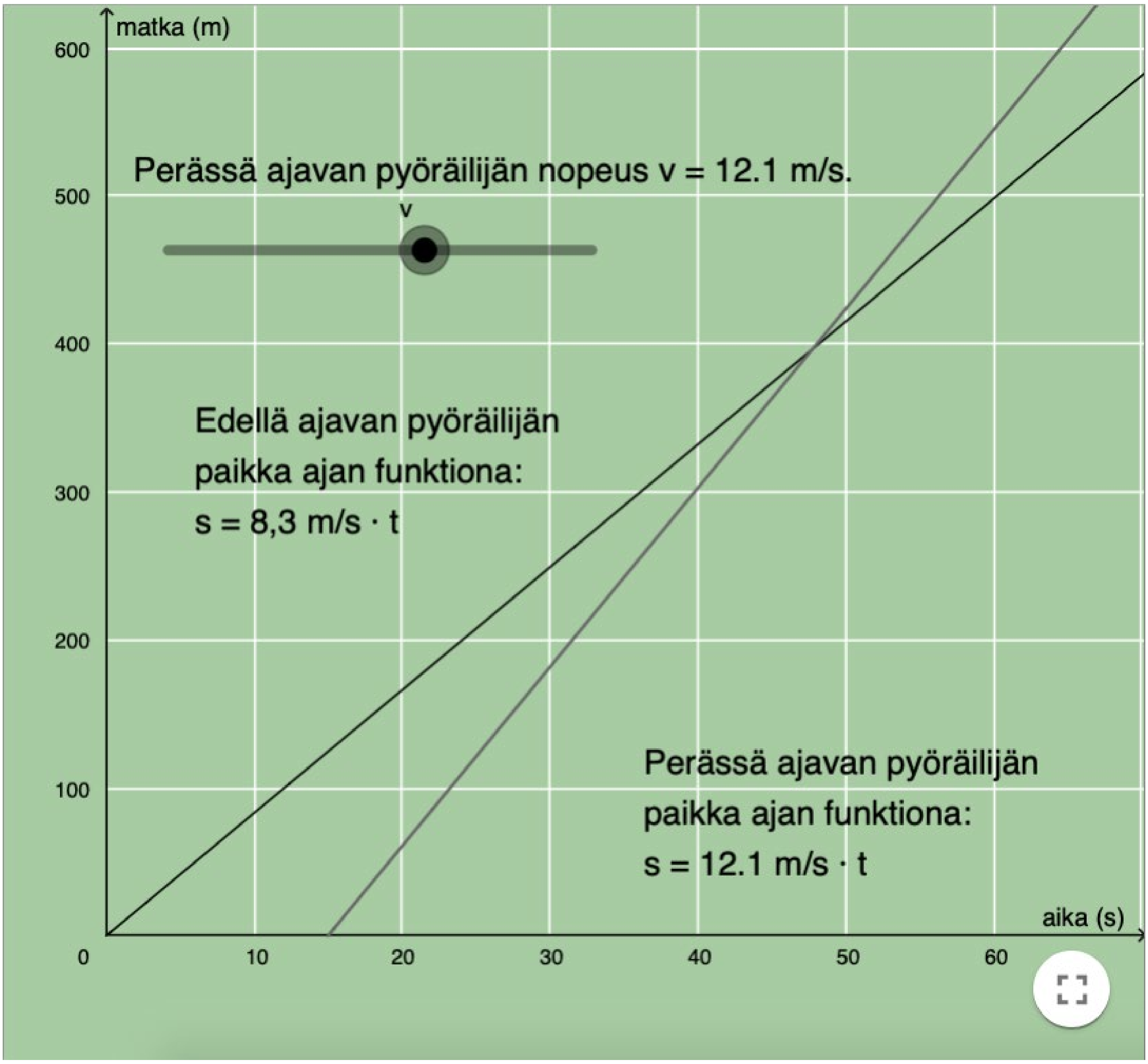
d) oikein, yksiköt: $\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

e) oikein, yksiköt: $\text{s} = \frac{\text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{s}}} = \text{s}$

f) väärin, yksiköt: $\text{m} \neq \frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Tehtävä 1.3.

Kokeilemalla huomataan, että toisen pyöräilijän nopeuden on oltava vähintään n. 12,1 m/s.



Tehtävä 1.4.

a) $85\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 85 \cdot \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 23{,}611\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 24\frac{\text{m}}{\text{s}}.$

b) $55\,\frac{\text{mi}}{\text{h}} = 55 \cdot \frac{1{,}609344\,\text{km}}{\text{h}} = 88{,}51392\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 89\frac{\text{m}}{\text{s}}.$

c) $21\,\text{solmua} = 21 \cdot 0{,}5144\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 10{,}8024\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$

d) $13\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 13 \cdot \frac{\frac{1}{25{,}40 \cdot 10^{-3}}\,\text{m}}{\frac{1}{60}\,\text{min}} = 30708{,}6\,\frac{\text{in}}{\text{min}} \approx 31000\,\frac{\text{in}}{\text{min}}.$

Tehtävä 1.5.

a) Lentokoneen nopeus v = 870 km/h

lentoaika

$$t = 14\ \text{min} = \frac{14}{60}\text{h} = 0{,}233\ \text{h}$$

Liike on tasaista, joten kuljettu matka

$$s = vt = 870\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0{,}233\ \text{h} = 202{,}71\ \text{km} \approx 200\ \text{km}.$$

b) Lentokoneen nopeus v = 870 km/h

kuljettu matka s = 1 200 km

Ratkaistaan matkaan kulunut aika kuljetun matkan

yhtälöstä $s = vt$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1200\ \text{km}}{870\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1{,}379\ \text{h} \approx 1{,}4\ \text{h}.$$

Tehtävä 1.6.

Nopeus

$$v = 79\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{79}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 21{,}9444\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

reaktioaika *t* = 1,1 s

Auton liike on tasaista ennen jarrutuksen alkamista.

Tällöin auto ehtii liikkua matkan

$$s = vt = 21{,}9444\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1{,}1\,\text{s} = 24{,}13884\,\text{s} \approx 24\,\text{m}$$

Tehtävä 1.7.

a) Molemmat uimarit etenevät likipitäen tasaisesti koko tarkastelujakson ajan (kuvaajat ovat suoria). Uimari 1 etenee suuremmalla nopeudella kuin uimari 2 (uimarin 1 paikan kuvaajan kulmakerroin on suurempi). Uimari 1 oli tarkastelun alussa origossa (sovitussa nollakohdassa) ja uimari 2 oli 0,8 metriä edellä. Uimari 1 ohittaa uimarin 2 ajanhetkellä 0,85 s.

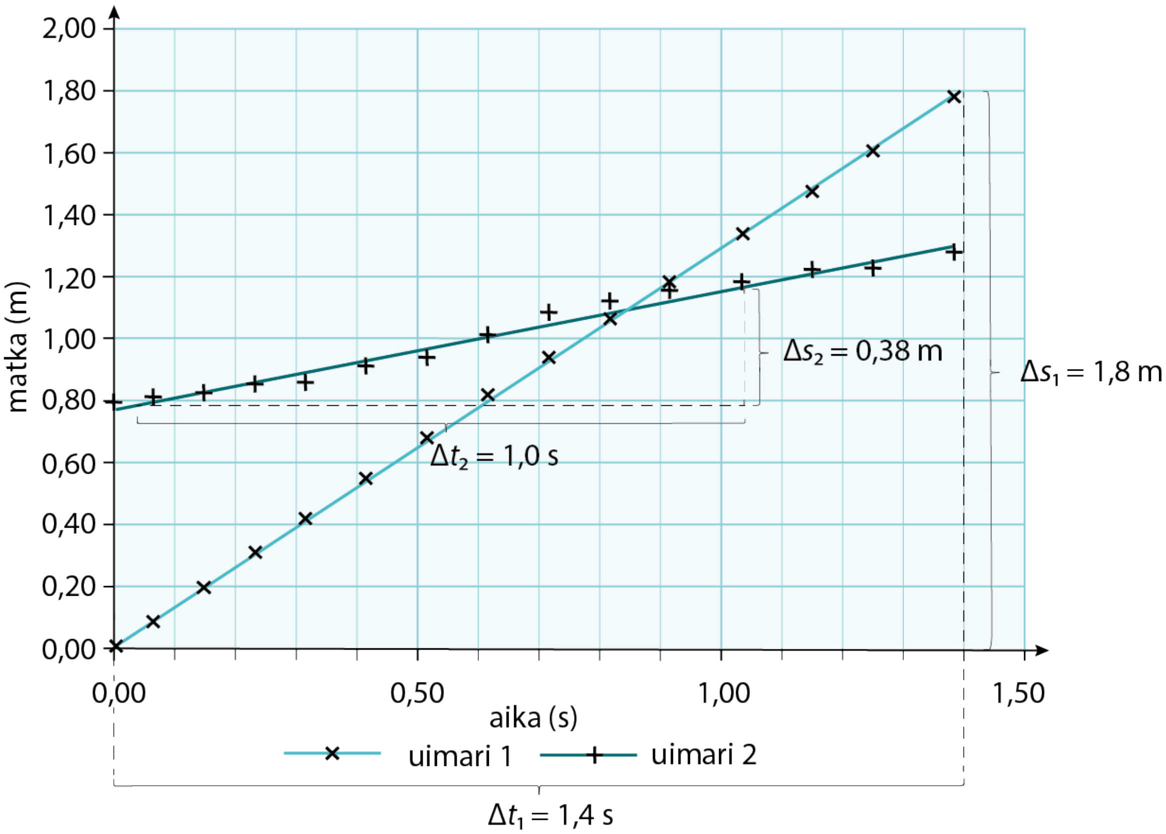
b) Uimarien nopeudet voidaan lukea kuvaajasuorien fysikaalisista kulmakertoimista:

uimari 1:

$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{1{,}80\ \text{m} - 0\ \text{m}}{1{,}40\ \text{s} - 0\ \text{s}} \approx 1{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

uimari 2:

$$v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = \frac{1{,}14\ \text{m} - 0{,}76\ \text{m}}{1{,}0\ \text{s} - 0\ \text{s}} = \frac{0{,}38\ \text{m}}{1{,}0\ \text{s}} = 0{,}38\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Sovella

Tehtävä 1.8.

Peilien välinen etäisyys s = 35,3855 km

valon matkaan käyttämä aika t = 0,23674 ms

Valo kulki toiselta peililtä toiselle ja takaisin, jolloin valon kulkema matka mittauksessa oli 2 s

Valon nopeus:

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 35{,}3855 \cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}23674 \cdot 10^{-3}\ \text{s}} = 298939765\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2{,}9894 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tehtävä 1.9.

a) Veneen nopeus v = 4,7 solmua

1 solmu = 1,852 km/h

Lisäksi muunnetaan kilometrit maileiksi

$1\,\text{km} = \dfrac{1}{1{,}609344}\text{mi}.$

Tällöin nopeus

$$v = 4{,}7 \cdot 1{,}852\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$= 4{,}7 \cdot 1{,}852\frac{1}{\text{h}} \cdot \frac{1}{1{,}609344}\text{mi}$$

$$= 5{,}40866\,\frac{\text{mi}}{\text{h}}$$

$$\approx 5{,}4\,\frac{\text{mi}}{\text{h}}.$$

b) Veneen kulkema matka

s = 12,3 mpk = 12,3·1,852 km = 22,7796 km

= 14,154587 mi

Vene on tasaisessa liikkeessä, jolloin $s = vt$.

Veneen nopeus a-kohdan mukaan on

$$v = 5{,}40866\,\frac{\text{mi}}{\text{h}}.$$

Veneen purjehdusaika

$$t = \frac{s}{v} = \frac{14{,}154587\ \text{mi}}{5{,}40866\,\frac{\text{mi}}{\text{h}}} = 2{,}617\,\text{h} \approx 2{,}6\ \text{h}.$$

Tehtävä 1.10.

Junan nopeus $v = 85\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

tunnelin pituus s = 2,6 km

junan pituus l = 140 m = 0,140 km

Junan on kokonaan tunnelissa matka
$s_1 = s - l$ = 2,6 km − 0,140 km = 2,46 km

Juna on tasaisessa liikkeessä, jolloin $s = vt$. Juna on kokonaan tunnelissa ajan

$$t = \frac{s_1}{v} = \frac{s-l}{v} = \frac{2{,}6\,\text{km} - 0{,}140\,\text{km}}{85\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}028941\,\text{h} \approx 104\text{ s.}$$

Tehtävä 1.11.

Kiekon nopeus v_1 = 27 m/s

kiekon kulkema matka s_1 = 14,3 m

äänen kulkema matka s_2 = 14,3 m

äänen nopeus v_2 = 340 m/s

Kokonaisaika, joka kuluu heittohetkestä äänen kuulumiseen, on kiekon lentoajan ja äänen kulkeman matkan summa

$t = t_1 + t_2$

Kiekko ja ääni liikkuvat tasaisella nopeudella, joten $v = \frac{s}{t}$, josta $t = \frac{s}{v}$.

Kokonaisaika on $t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{14{,}3\,\text{m}}{27\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} + \frac{14{,}3\,\text{m}}{340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}57169\,\text{s} \approx 0{,}57\,\text{s}$.

Tehtävä 1.12.

Auton A nopeus $v_{\text{A}} = 65\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

auton B nopeus $v_{\text{B}} = 78\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

Auton A kulkema aika ennen kuin auto B lähti liikkeelle

tA = 5,7 min = $\dfrac{5{,}7}{60}$ h.

a) Auto A oli kulkenut ennen auton B lähtöä matkan

$$s_{\text{A}} = v_{\text{A}} t_{\text{A}} = 65\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{5{,}7}{60}\,\text{h} = 6{,}175\ \text{km} \approx 6{,}2\ \text{km}.$$

b) Autot ovat tasaisessa liikkeessä ja auto A oli kulkenut matkan s_A ennen auton B lähtemistä. Autot kulkevat auton B lähtemisen jälkeen ajan t, jolloin autot ovat samassa paikassa, joten $s_\mathrm{A} + x_\mathrm{A} = x_B$. Tällöin

$$\begin{aligned}
s_\mathrm{A} + v_\mathrm{A} t &= v_B t \\
s_\mathrm{A} &= v_B t - v_\mathrm{A} t \\
s_\mathrm{A} &= (v_B - v_\mathrm{A}) t \\
t &= \frac{s_\mathrm{A}}{(v_B - v_\mathrm{A})} \\
&= \frac{6{,}175\,\mathrm{km}}{(78\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 65\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}})} \\
&= 0{,}475\,\mathrm{h} \\
&= 28{,}5\ \mathrm{min} \approx 29\ \mathrm{min}.
\end{aligned}$$

c) Auton B paikka saavuttamisajanhetkellä on

$$x_\mathrm{B} = v_B t = 78\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 0{,}475\,\mathrm{h} = 37{,}05\,\mathrm{km} \approx 37\,\mathrm{km}.$$

Tehtävä 1.13.

a) Aikavälillä 0 s … 6 s kävelijän liike oli tasaista, sillä paikan kuvaaja on nouseva suora. Aikavälillä 6 s…11 s kävelijä oli paikoillaan, sillä paikka ei muutu.
Aikavälillä 11 s…14 s kävelijä palasi kohti lähtöpistettä kohti tasaisella nopeudella, sillä paikka lopussa on nolla ja paikan kuvaaja on laskeva suora. Paluumatkalla nopeus on ollut suurempi kuin alussa, koska suora kulkee jyrkemmin.

b) Kävelijä oli kauimpana, kun paikkakoordinaatti oli suurin. Kävelijä kävi 4,0 metrin päässä.

c) Kävelijä kulki 4,0 metrin päähän ja takaisin, joten kävelijän kulkema matka oli s = 4,0 m + 4,0 m = 8,0 m.

d) Kävelijän nopeus aikavälillä 1,0 s… 5,4 s on $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Määritetään kuvaajasta kävelijän paikat kahdella eri ajanhetkellä:
Kun t_1 = 1,0 s, niin x_1 = 0,70 m.
Kun t_2 = 5,4 s, niin x_2 = 3,6 m.

Kävelijän nopeus on

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{3{,}6\,\mathrm{m}-0{,}70\,\mathrm{m}}{5{,}4\,\mathrm{s}-1{,}0\,s}=0{,}659\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 0{,}66\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tehtävä 1.14.

a) Pyöräilyaika alussa t_1 = 4,5 min

pyöräilynopeus alussa v_1 = 21 km/h

pyöräilyaika lopussa t_2 = 11 min

pyöräilynopeus lopussa v_2 = 17,8 km/h

Pyöräilijä kulki alkunopeudella matkan

$$s_1 = v_1 t_1 (= 21\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{4{,}5}{60}\,\text{h} = 1{,}575\,\text{km}).$$

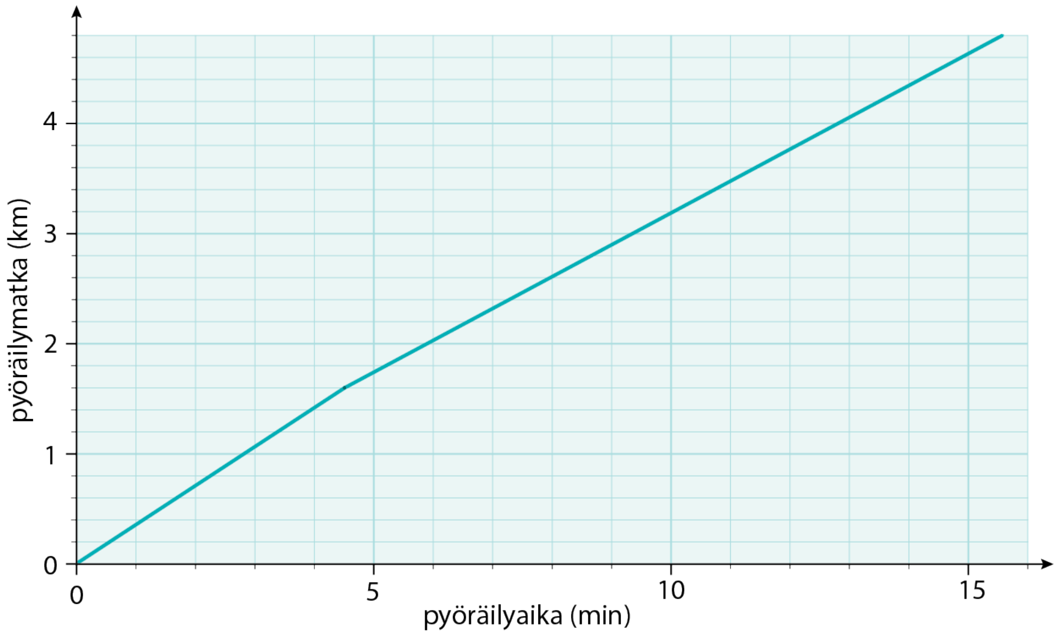
Pyöräilijä kulki lopussa olevalla nopeudella matkan

$$s_2 = v_2 t_2 (= 17{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{11}{60}\,\text{h} = 3{,}2633\,\text{m}).$$

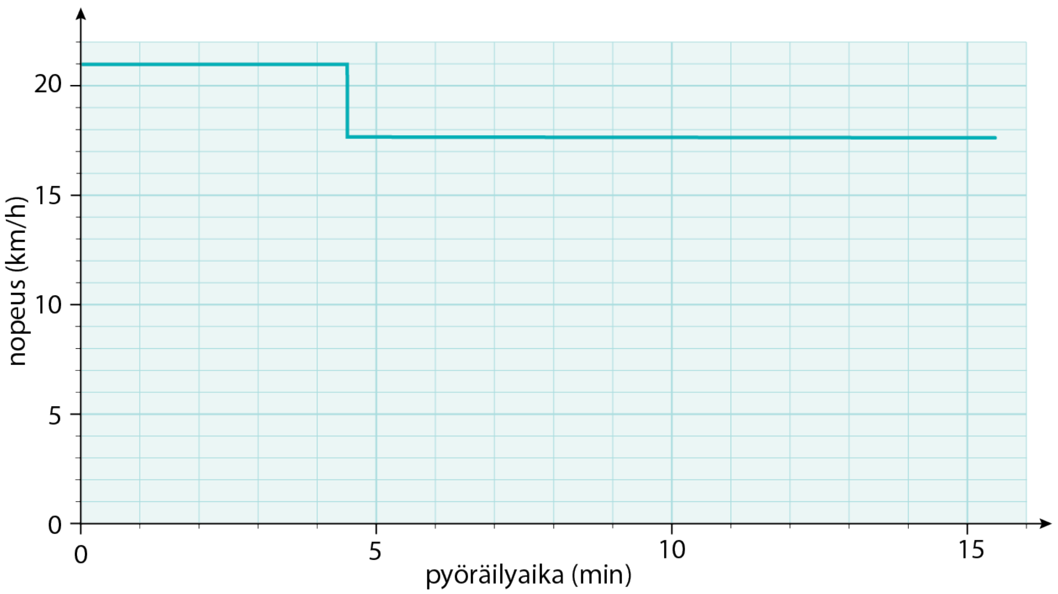
Pyöräilijän kulkema kokonaismatka

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 \\ &= v_1 t_1 + v_2 t_2 \\ &= 21\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{4{,}5}{60}\,\text{h} + 17{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{11}{60}\,\text{h} \\ &= 4{,}8383\text{ km} \approx 4{,}8\text{ km}. \end{aligned}$$

b) Hyödynnetään a-kohdan tuloksia ja esitetään pyöräilijän paikka ajan funktiona.

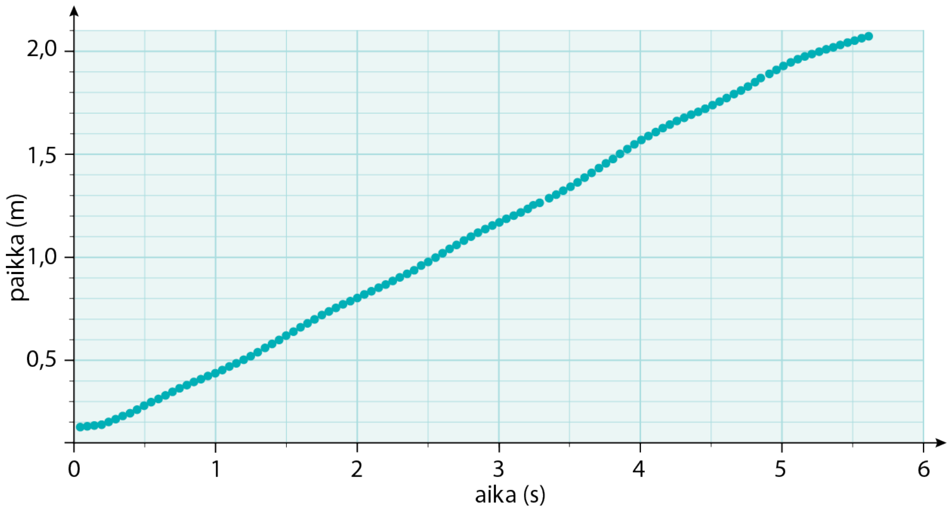


c) Esitetään pyöräilijän nopeus pyöräilyajan funktiona



Tehtävä 1.15.

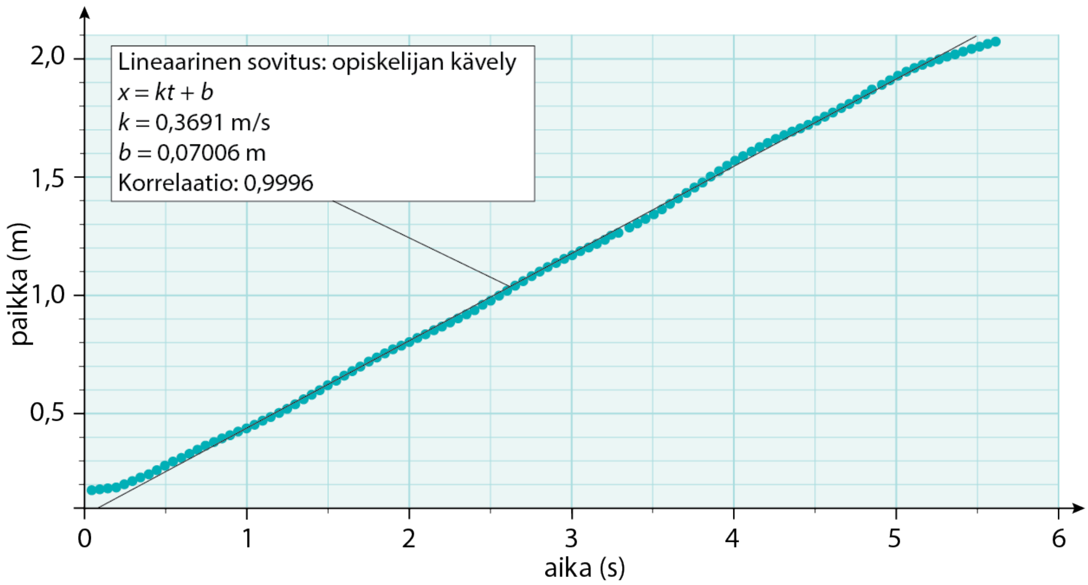
a) Esitetään opiskelijan paikka ajan funktiona



b) Kuvaajan perusteella liike oli likimain tasaista, sillä opiskelijan paikka muuttui joka sekunti yhtä paljon. Kävely ei kuitenkaan ollut ihan tasaista, mikä näkyy kuvaajassa pieninä epätasaisuuksina.

c) Kuvaajasta interpoloituna opiskelijan paikka 3,5 sekunnin kohdalla oli 1,35 m.

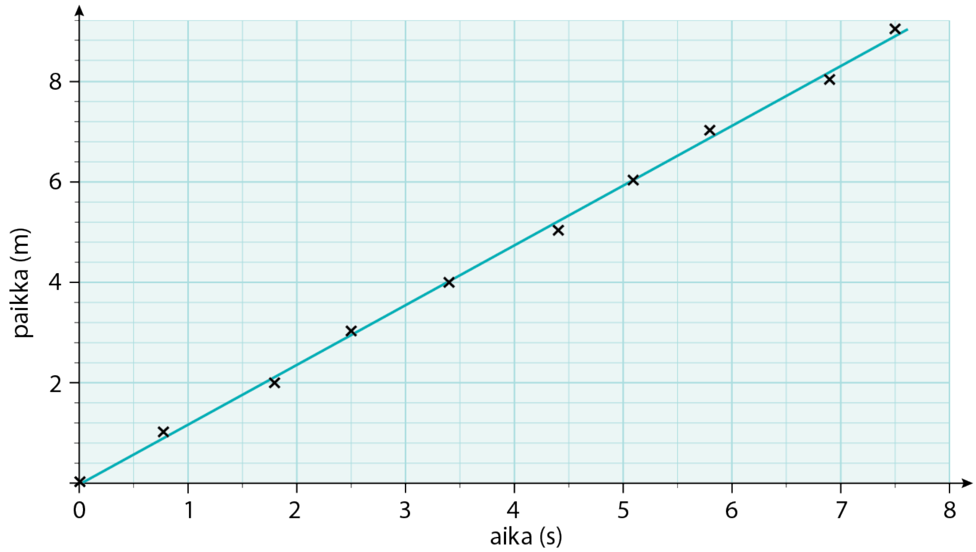
d) Opiskelijan kävelynopeus saadaan (t, x)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Sovitetaan mittaustuloksiin suora ja määritetään suoran kulmakerroin



$$v = 0{,}3691\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}37\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

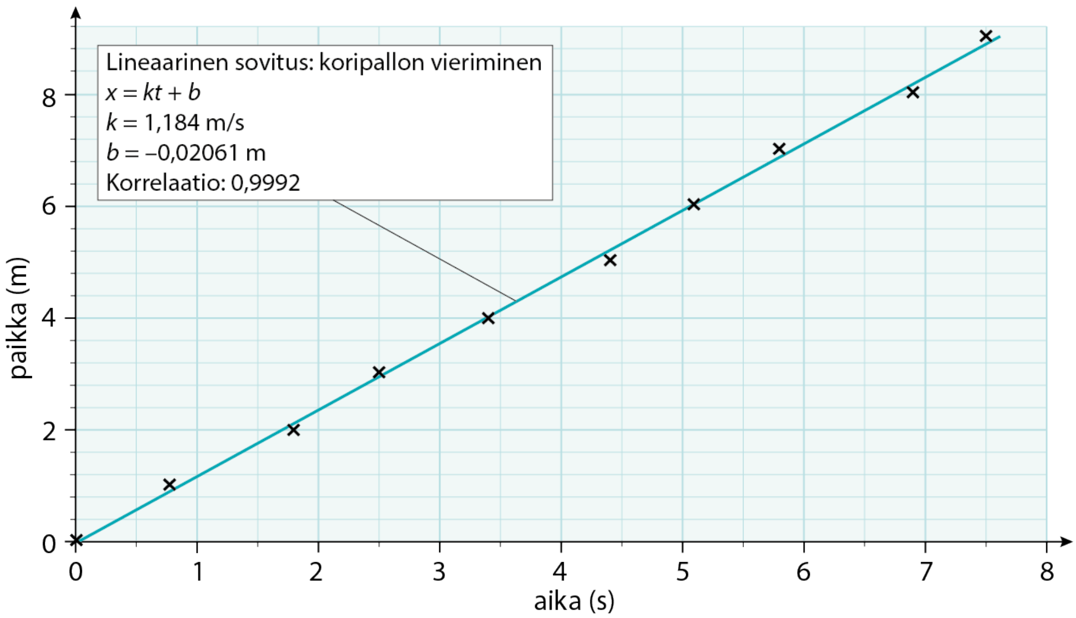
Tehtävä 1.16.

a)



b) Kuvaajasta interpoloimalla koripallon paikka 4,0 sekunnin kohdalla oli x = 4,7 m.

c) Koripallon paikkaa kuvaa yhtälö $x = vt$, joten vierimisnopeus saadaan paikan kuvaajaan piirretyn suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Sovitetaan mittauspisteisiin suora ja määritetään suoran fysikaalinen kulmakerroin.

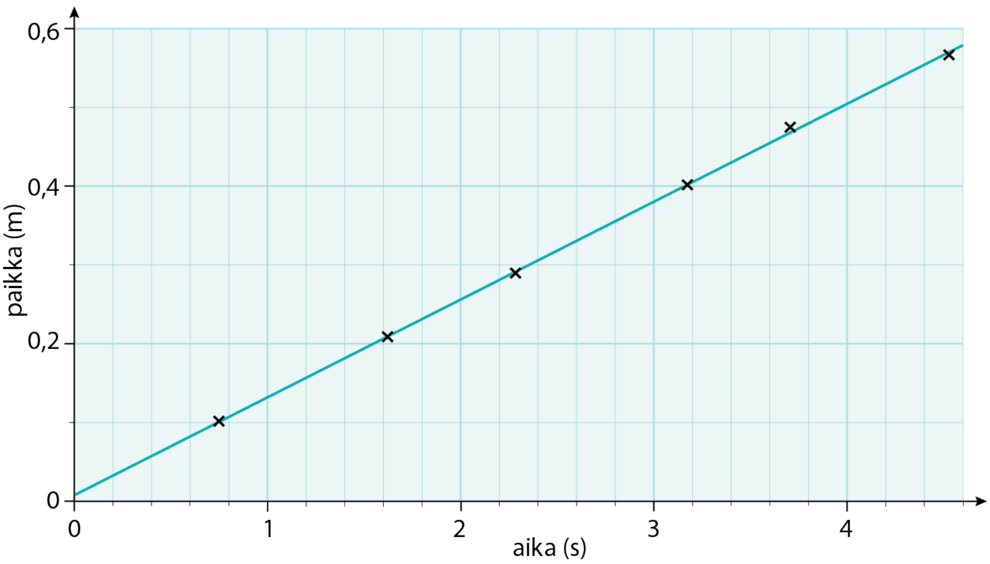


Koripallon nopeus on $v = 1{,}184\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 1{,}2\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

d) Koska suoran kulmakerroin kuvaa pallon vierimisnopeutta, suora kulkisi koordinaatistossa jyrkemmin, jos koripallon nopeus olisi ollut suurempi.

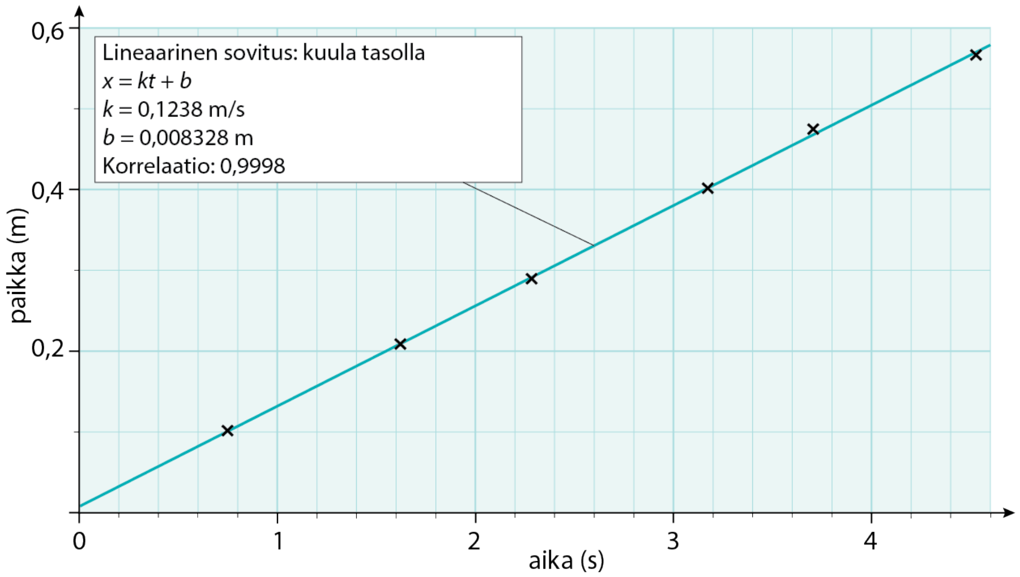
Tehtävä 1.17.

a)



b) Koska kuulan paikka muuttuu joka sekunti yhtä paljon eli (t, x)-koordinaatiston kuvaajana on nouseva suora, kuulan liike on tasaista liikettä.

c) Kuulan nopeus saadaan (t, x)-koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Määritetään suoran fysikaalinen kulmakerroin.



Kuulan vierimisnopeus on v = 0,1238 m/s ≈ 0,12 m/s.

Tehtävä 1.18.

a) Skootterin alkupaikka x_0 = 35 m

Skootterin nopeus

$$v = 41{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{41{,}4}{3{,}6}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 11{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Skootterin paikkaa ajanhetkellä t kuvaava yhtälö on

$$x(t) = 35\,\text{m} + 11{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}t.$$

b) Skootterin paikka ajanhetkellä t on x = 370 m

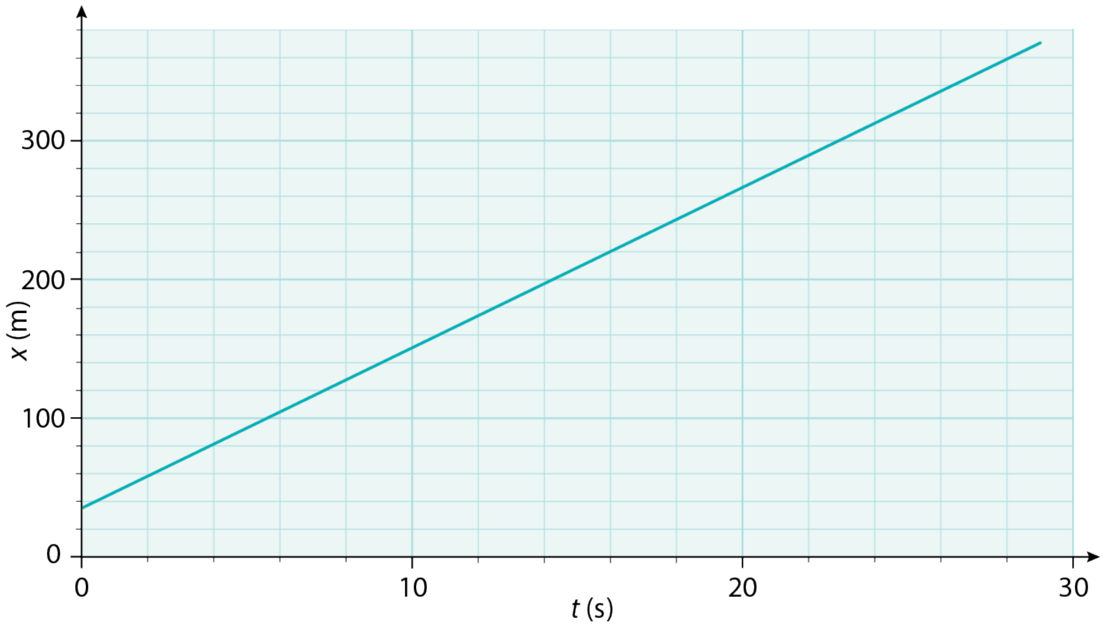
Skootteri alkupaikka x_0 = 35 m

Skootterin nopeus $v = 11{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + vt \\ x - x_0 &= vt \\ t &= \frac{x - x_0}{v} = \frac{370\,\text{m} - 35\,\text{m}}{11{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 29{,}13\,\text{s} \approx 29\,\text{s}. \end{aligned}$$

c) Esitetään yhtälö $x(t) = 35\,\mathrm{m} + 11{,}5\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t$

(t, x)-koordinaatistossa

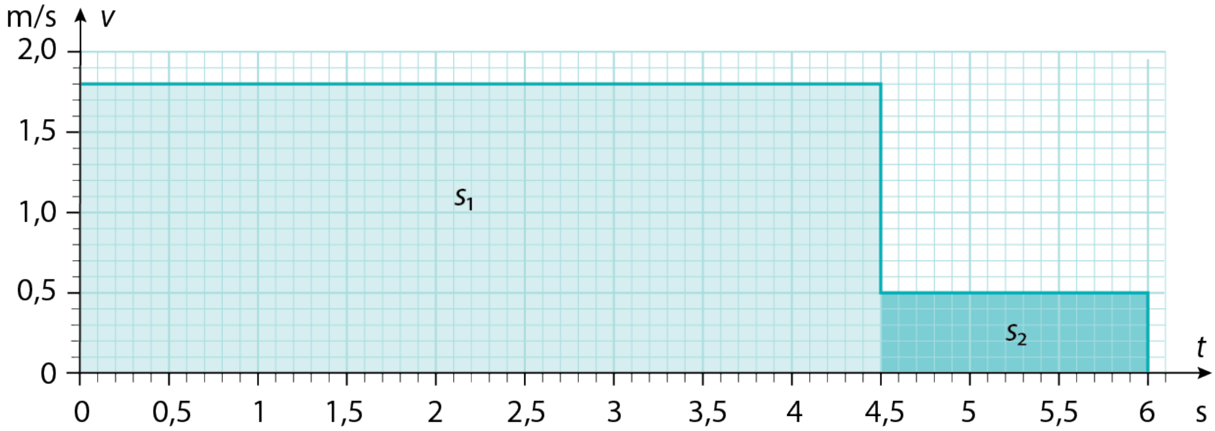


Tehtävä 1.21.

a) Kuvaajasta interpoloituna kävelijän nopeus 5,0 sekunnin kohdalla oli v = 0,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Kävelijän kulkema matka saadaan (t, s)-koordinaatiston ja kuvaajan rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään pinta-alat eri aikaväleillä:

Aikavälillä 0 s … 4,5 s kuljettu matka s_1 = 8,1 m.
Aikavälillä 4,5 s … 6,0 s kuljettu matka s_2 = 0,75 m.

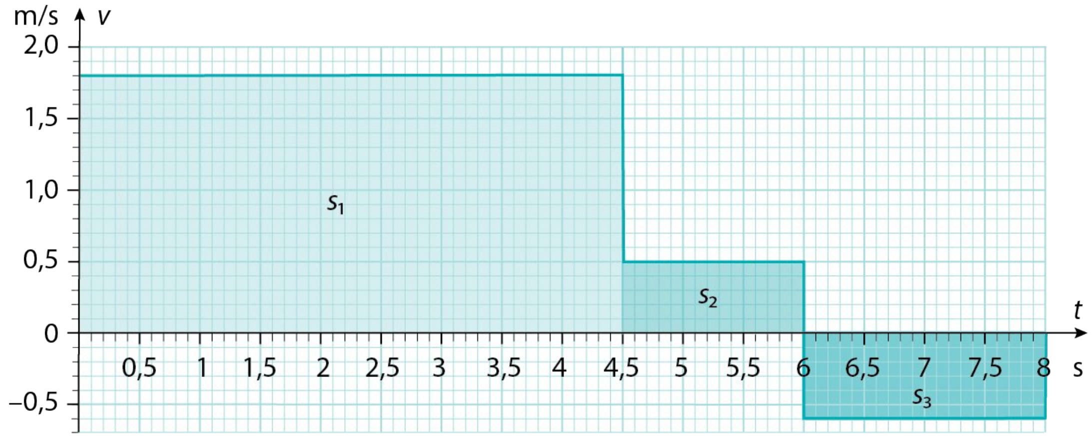


Kävelijä oli kulkenut 6,0 sekunnin aikana matkan

$s = s_1 + s_2$ = 8,1 m + 0,75 m = 8,85 m ≈ 8,9 m.

c) Kuvaajan negatiivinen nopeus tarkoittaa, että kävelijä palaa kohti lähtöpaikkaansa.

d) b-kohdan mukaan kävelijän kulkema matka aikavälillä 0 s … 6,0 s on s = 8,85 m. Määritetään kävelijän matka s_3 kuvaajan fysikaalisesta pinta-alasta. Koska pinta-ala on t-akselin alapuolella, kävelijä palaa kohti lähtöpaikkaansa matkan s_3 = 1,2 m.



Kävelijän paikka kävelyn lopussa on

$x = s - s_3$ = 8,85 m – 1,2 m = 7,65 m ≈ 7,7 m.

Syvennä

Tehtävä 1.22.

a) Koska renkaat ovat yhtä kaukana uimarista ja uimarin nopeus veden suhteen on sama molempiin suuntiin, on uintiaika molemmille renkaille sama, joten on yhdentekevää kumman renkaan luo uimari ui.

Tasaisessa liikkeessä $s = vt$, ja nyt

uitava matka $s = 5{,}0$ m

uintinopeus $v = 0{,}65$ m/s

Uintiaika on

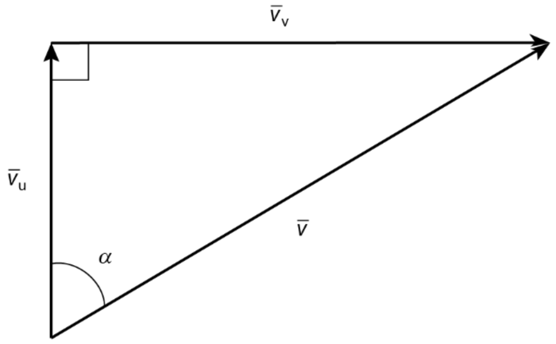
$$t = \frac{s}{v} = \frac{5{,}0\,\mathrm{m}}{0{,}65\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 7{,}6923\,\mathrm{s} \approx 7{,}7\,\mathrm{s}.$$

b) Uintinopeus veden suhteen, kun uidaan vastavirtaan $v_\mathrm{u} = -0{,}65$ m/s

virtauksen nopeus $v_\mathrm{v} = 1{,}1$ m/s

Uimarin nopeus rantaan nähden on
$v = v_\mathrm{u} + v_\mathrm{v} = -0{,}65\ \mathrm{m/s} + 1{,}1\ \mathrm{m/s} = 0{,}45\ \mathrm{m/s}.$

c) Koska uimari ui koko ajan kohtisuorasti virtaukseen nähden, uimarin nopeus ja veden nopeus muodostavat suorakulmaisen kolmion. Kateetteina ovat uimarin nopeus veden suhteen ja virtauksen nopeus rannan suhteen. Hypotenuusa on uimarin kokonaisnopeus rannan suhteen.



$$v^2 = v_\mathrm{u}^2 + v_\mathrm{v}^2$$

$$v = \sqrt{v_\mathrm{u}^2 + v_\mathrm{v}^2} = \sqrt{(0{,}65\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 + (1{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2} = 1{,}27769\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 1{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Nopeuden suunta

$$\tan\alpha = \frac{v_\mathrm{v}}{v_\mathrm{u}} = \frac{1{,}1\,\mathrm{m/s}}{0{,}65\,\mathrm{m/s}}$$

$$\alpha = 59{,}42^\circ \approx 59^\circ$$

Uimarin nopeus rannan suhteen on 1,3 m/s ja nopeuden suunta on kuvan mukaisesti 59°.

d) Uitava matka s = 32 m

uimari ui koko ajan kohtisuorassa suunnassa joen rantaan nähden nopeudella v_u = 0,65 m/s

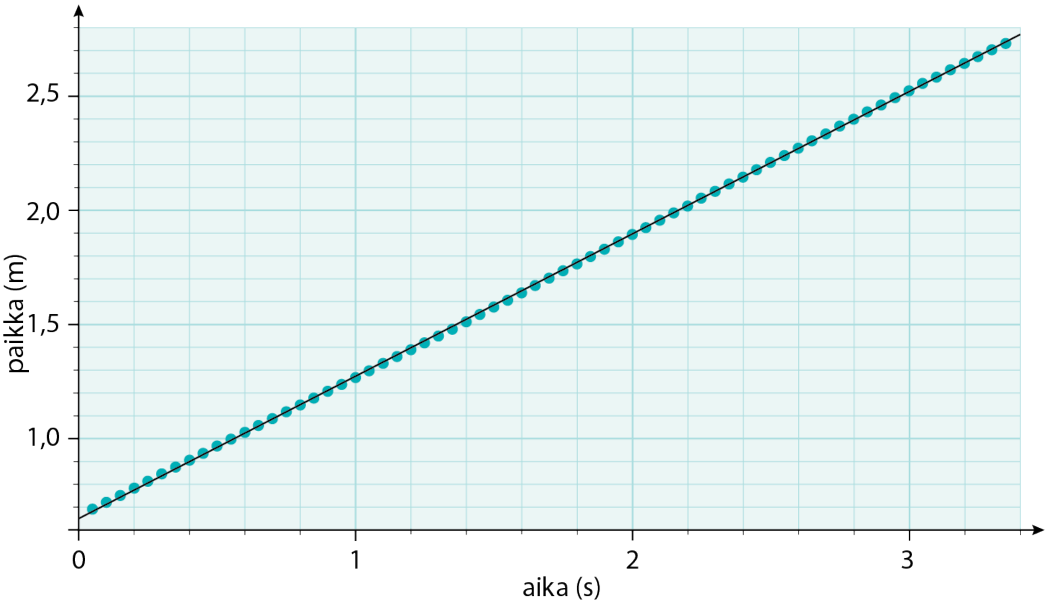
$$s = vt$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{32\,\text{m}}{0{,}65\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 49{,}23\,\text{s} \approx 49\ \text{s}$$

Uinti rantaan kestää 49 sekuntia.

Tehtävä 1.23.

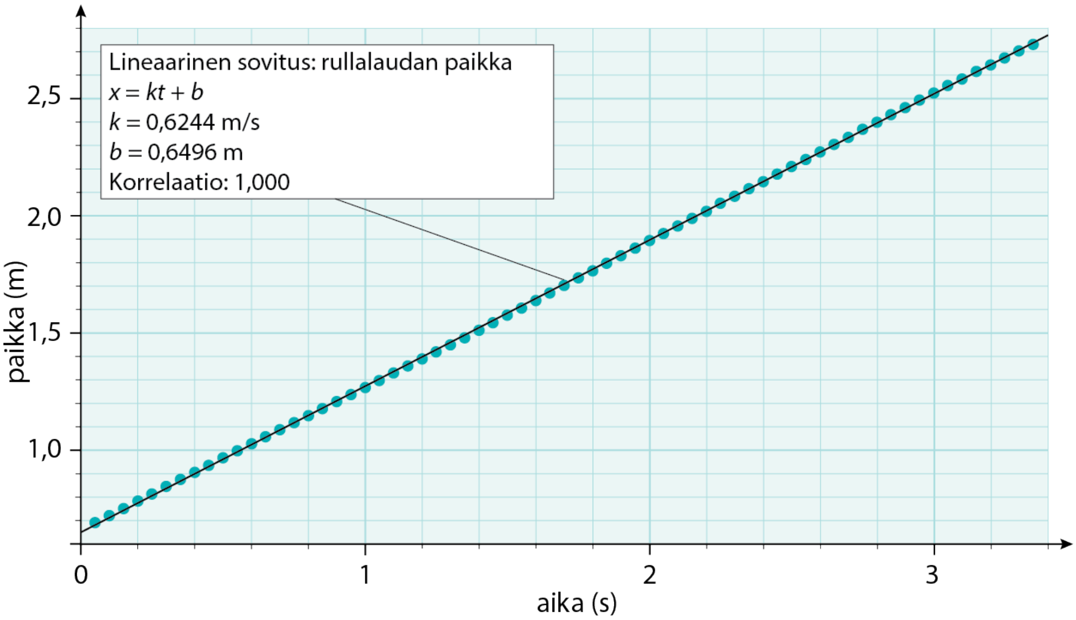
a) Rullalaudan paikan riippuvuus ajasta



Akselit on oikein päin (1 p), mittauspisteet ovat näkyvillä (1 p), mittauspisteisiin on sovitettu suora (1 p)

b) Rullalaudan paikka muuttuu (t, x)-koordinaatistossa lineaarisesti (1 p), joten rullalaudan liike oli tasaista. (1 p)

c) Rullalaudan paikka tasaisessa liikkeessä $x = vt$, joten nopeus saadaan (t, x)-koordinaatiston fysikaalisesta kulmakertoimesta. (1 p) Määritetään kulmakerroin.



Nopeus on

$$v = 0{,}6244\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}62\,\frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad \text{(2 p)}$$

d) Muunnetaan rullalaudan nopeus yksikköön tuumaa/minuutti. matka 1 in = 0,02540 m, joten 1 m = $\frac{1}{0,02540}$in

Aika 1 min = 60 s, joten 1 s = $\frac{1}{60}$min

$$v = 0,6244\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,6244 \cdot \frac{\frac{1}{0,02540}\,\text{in}}{\frac{1}{60}\,\text{min}} = 1474,96\,\frac{\text{in}}{\text{min}} \approx 1500\,\frac{\text{in}}{\text{min}}.$$ (2 p)

e) matka s = 14,3 jaardia = 14,3·0,9144 m = 13,07592 m.

Rullalaudan nopeus on c-kohdan mukaan $v = 0,6244\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

(matka ja viittaus aiempaan nopeuteen 1 p)

Tasaisessa liikkeessä kuljettu matka $s = vt$, joten matkaan käytetty aika

$$t = \frac{s}{v} = \frac{13,07592\,\text{m}}{0,6244\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 20,9415759\,\text{s} \approx 20,9\,\text{s}.$$ (2 p)

f) Koska nopeus saadaan (t, x)-koordinaatiston suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta (1 p), kuvaaja kulkisi jyrkemmin, jos rullalauta olisi liikkunut nopeammin. (1 p)

2. Muuttuva liike

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 2.1.

a) C

b) A

c) C

d) B

e) A

f) B

g) C

h) A

i) B

Tehtävä 2.2.

a) 2

b) 3

c) 4

d) 6

e) 5

f) 1

Tehtävä 2.4.

a) Kappale on ensin paikoillaan tietyn etäisyyden päässä valitusta nollakohdasta ja lähtee sitten liikkumaan nollakohtaa päin.

b) Kappale on alussa valitussa nollakohdassa. Kappale liikkuu ensin eteenpäin melko tasaisesti, sitten nopeus pienenee ja kappale on hetken paikoillaan. Lopuksi kappale lähtee liikkumaan eteenpäin vakionopeudella (kuvaaja on lopussa lähes suora) ja nopeammin kuin alussa (kuvaaja suora on jyrkempi kuin alussa).

c) Kappale liikkuu alussa tasaisella nopeudella, sitten nopeus hidastuu ja liike pysähtyy.

d) Kappale on aluksi kiihtyvässä liikkeessä. Sen jälkeen liike on tovin melko tasaista. Lopuksi kappale on jälleen kiihtyvässä liikkeessä samaan suuntaan kuin aluksi, mutta sen kiihtyvyys on suurempi, koska suora kulkee jyrkemmin ylöspäin.

Tehtävä 2.5.

a) Opiskelijan liikkeestä voidaan kuvaajan perusteella päätellä seuraavaa:

Aikavälillä 0 s…1,9 s opiskelija on paikallaan.

Aikavälillä 1,9 s…7,2 s opiskelija liikkuu lähtöpaikasta poispäin 1,8 metrin etäisyydelle.

Aikavälillä 7,2 s…10 s opiskelija on paikallaan.

Aikavälillä 10 s…12,6 s opiskelija palaa kohti lähtöpistettä ja ohittaa lähtöpaikan hetkellä 11,9 s.

Opiskelija pysähtyy hetkellä 12,6 s. Tällöin opiskelija on kulkenut 0,6 metriä lähtöpaikan ohi.

b) Opiskelija on paikassa 1,0 m hetkellä 4,8 s.

c) Aluksi opiskelija liikkuu poispäin 1,8 metrin etäisyydelle lähtöpaikasta. Tämän jälkeen opiskelija kävelee kohti lähtöpaikkaa ja jatkaa lähtöpaikan ohi 0,6 metriä. Yhteensä opiskelija kävelee
1,8 m + 1,8 m + 0,6 m = 4,2 m.

d) Opiskelijan keskinopeus aikavälillä 2,0 s…10 s on

$$v_\mathrm{k} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}8\ \mathrm{m} - 0\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{s} - 2{,}0\ \mathrm{s}} \approx 0{,}23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

e) Keskinopeus aikavälillä 7,0 s…11 s on

$$v_\mathrm{k} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}9\ \mathrm{m} - 1{,}8\ \mathrm{m}}{11\ \mathrm{s} - 7{,}0\ \mathrm{s}} \approx -0{,}23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Negatiivinen keskinopeus tarkoittaa, että opiskelija liikkuu takaisin kohti lähtöpaikkaa.

f) Opiskelija kävelee mittaajasta ensin 1,8 metrin päähän ja sitten 2,4 metriä kohti mittaajaa ja mittaajan ohi. Keskivauhti koko 15 s:n mittausaikana on

$$v_\mathrm{k} = \frac{s}{\Delta t} = \frac{1{,}8\ \mathrm{m} + 2{,}4\ \mathrm{m}}{15\ \mathrm{s}} = 0{,}28\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 1{,}0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Tehtävä 2.6.

a) Ensimmäisen sekunnin ajan opiskelijan nopeus on pieni, sillä paikan muutos ajan suhteen on pieni. Ajanhetkellä 0,8 s opiskelijan nopeus kasvaa, sillä kuvaajan jyrkkyys kasvaa. Opiskelija on kiihtyvässä liikkeessä. Aikavälillä 1,0 s…2,5 s opiskelijan liike on likipitäen tasaista, sillä kuvaajan jyrkkyys ei muutu. Hetkestä t = 2,5 s alkaen nopeus alkaa pienentyä ja lopulta opiskelija pysähtyy 7,7 sekunnin kohdalla.

b) Hetkellinen nopeus saadaan paikan kuvaajan tangentin fysikaalisena kulmakertoimena. Kuvaan on piirretty valmiiksi kysyttyä ajanhetkeä t = 3,0 s vastaava tangentti. Tangentin fysikaalinen kulmakerroin voidaan määrittää lukemalla tangentista paikan ja ajan muutokset.

Paikan muutos Δx = 3,0 m − 0,5 m = 2,5 m

Ajan muutos Δt = 5,0 s − 1,0 s = 4,0 s

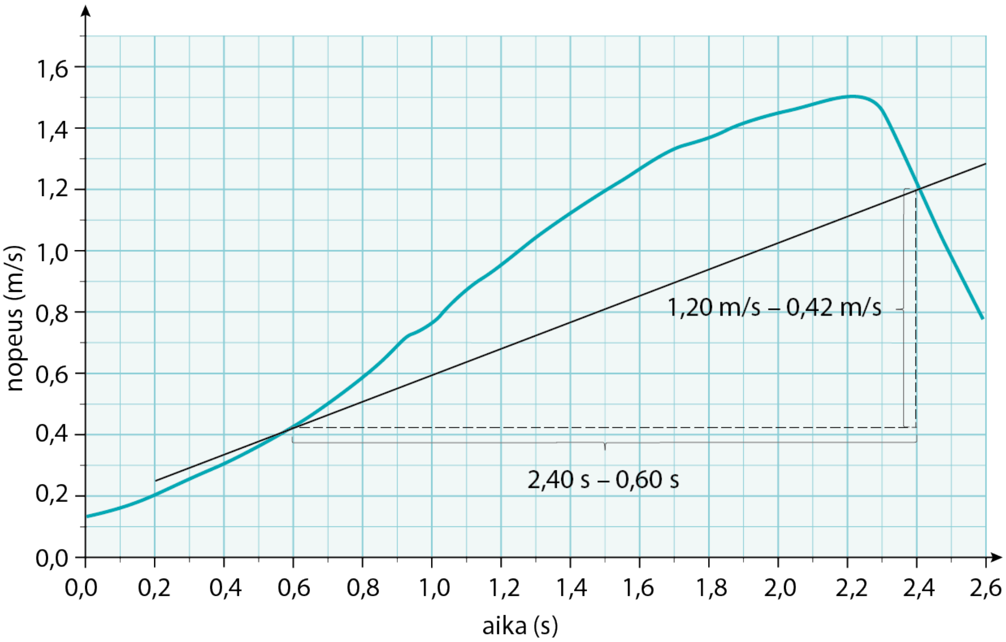
Ajanhetkellä t = 3,0 s hetkellinen nopeus on

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{2{,}5\,\mathrm{m}}{4{,}0\,\mathrm{s}}=0{,}625\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 0{,}63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tehtävä 2.7.

a) Suurin hetkellinen kiihtyvyys on ajanhetkellä, missä nopeuden kuvaaja kulkee jyrkimmin ylös- tai alaspäin. Tämä kohta on mittauksen loppuvaiheilla, ajanhetkellä t ≈2,4 s. Nopeuden kuvaajan kulmakerroin on silloin negatiivinen eli nopeus pienenee, joten kappale on hidastuvassa liikkeessä.

b)



Keskikiihtyvyys on

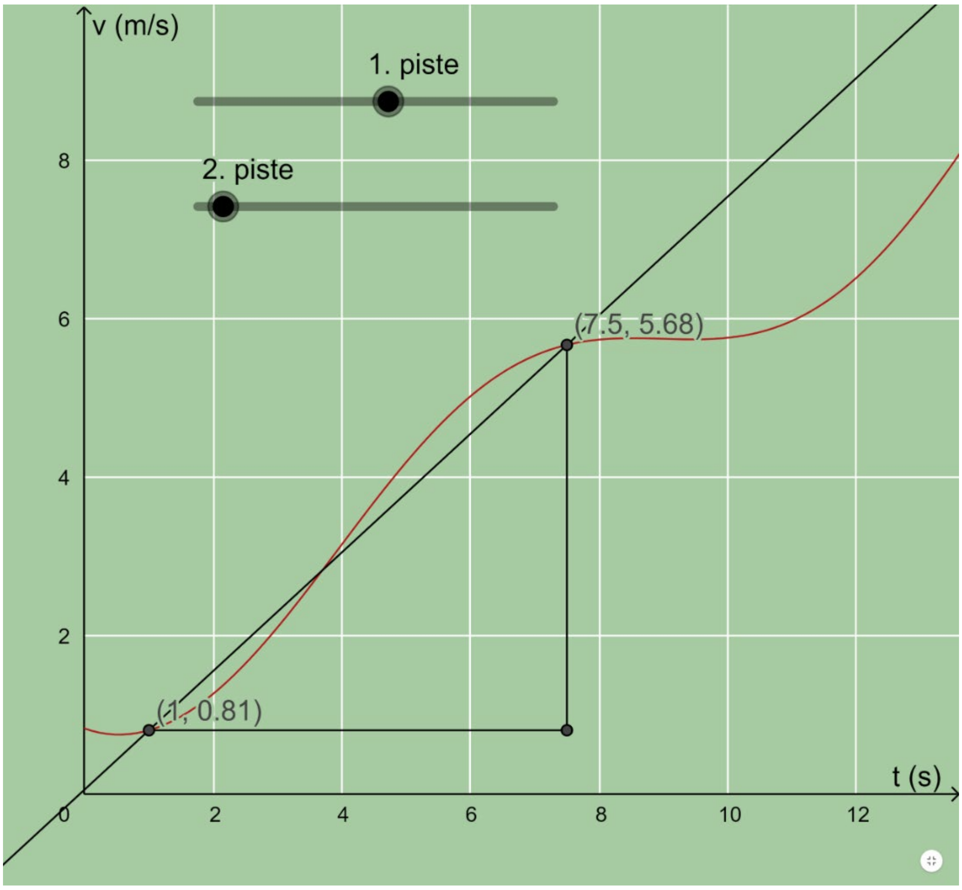
$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1{,}20\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}42\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2{,}40\ s - 0{,}60\ \text{s}} \approx 0{,}43\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehtävä 2.8.

a) Laskettelija on liikkunut ensin sekunnin ajan suunnilleen nopeudella 1,0 m/s. Aikavälillä 1,0 s…7,5 s laskettelijan nopeus kasvaa 5,8 m/s:iin. Tämän jälkeen laskettelija etenee parin sekunnin ajan suunnilleen vakionopeudella. 10 s:n kohdalla nopeus alkaa jälleen kasvaa.

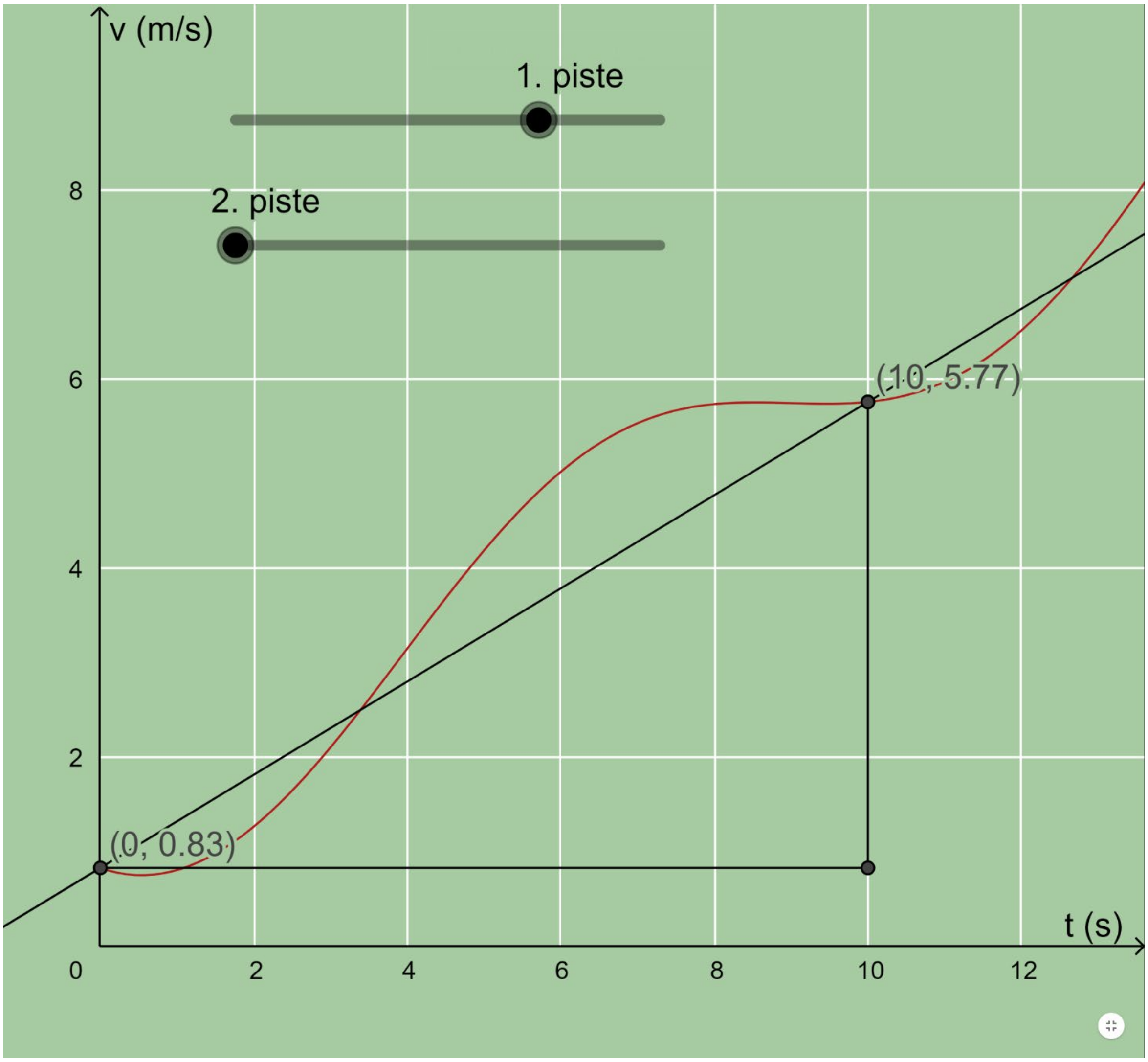
b) Keskikiihtyvyys aikavälillä 1,0 s…7,5 s:

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5{,}68\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}}}{7{,}5\text{ s - }1{,}0\text{ s}} \approx 0{,}75\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



c) Keskikiihtyvyys aikavälillä 0 s…10 s:

$$a_{\mathrm{k}}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{5{,}77\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}-0{,}83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\ \mathrm{s}-0\ \mathrm{s}}\approx 0{,}49\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$



Tehtävä 2.9.

a) Aikavälillä 0 s…4,0 s koiran liike on kiihtyvää. Nopeus kasvaa tasaisesti arvosta 0 m/s arvoon 4,8 m/s.

Aikavälillä 4,0 s…6,0 s koira liikkuu tasaisesti, sillä sen nopeus pysyy koko ajan samana (4,8 m/s).

Aikavälillä 6,0 s…12,0 s koiran liike on hidastuvaa. Nopeus pienenee tasaisesti arvosta 4,8 m/s arvoon 0 m/s.

b) Kiihtyvyydet eri aikaväleillä:

0 s…4,0 s:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4{,}0\ \text{s} - 0\ \text{s}} = \frac{4{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4{,}0\ \text{s}} = 1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

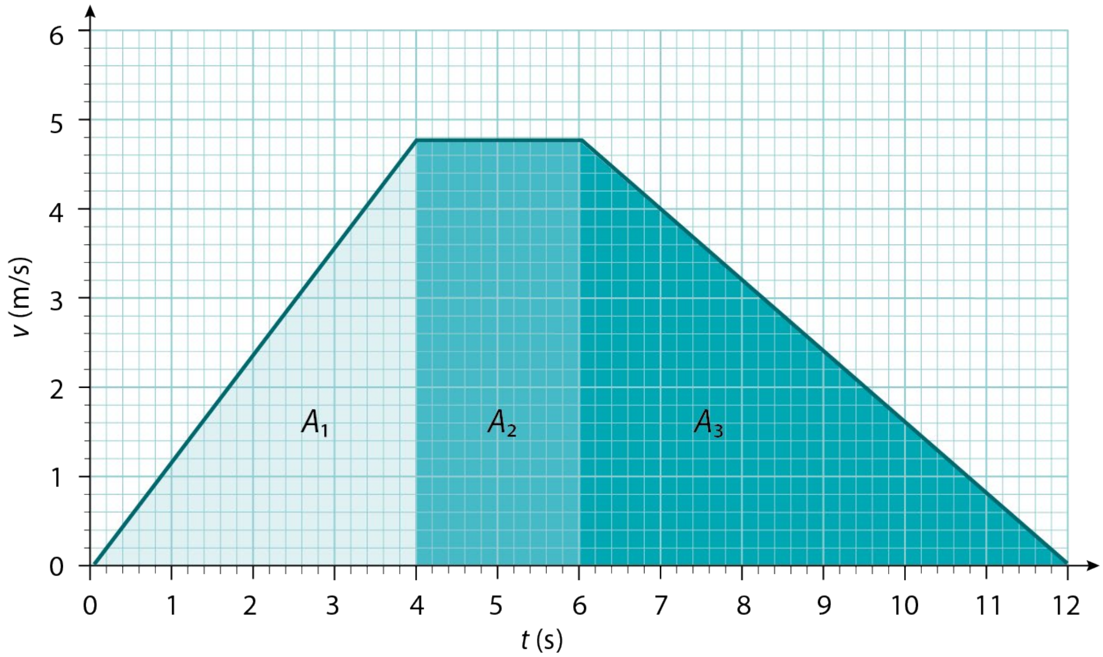
4,0 s…6,0 s:

$a = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, sillä liike on tasaista.

6,0 s…12,0 s:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{12{,}0\ \text{s} - 6{,}0\ \text{s}} = \frac{-4{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{6{,}0\ \text{s}} = -0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c)



(t, v)-koordinaatistoon rajattu alue eli fysikaalinen pinta-ala kuvaa kuljettua matkaa, koska $s = vt$.

Käyrän ja vaaka-akselien väliin jäävä pinta-ala voidaan jakaa kahteen kolmioon ja yhteen suorakulmioon. Alueiden pinta-alojen summa kuvaa koiran kulkemaa matkaa.

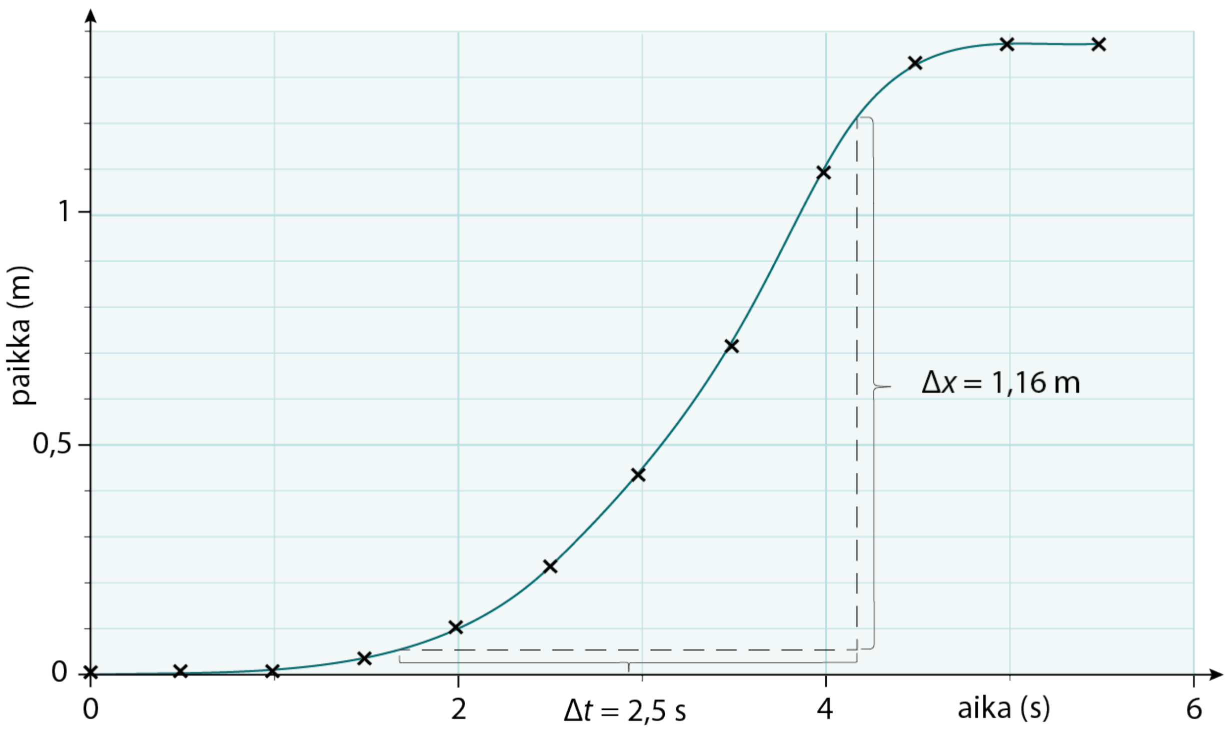
$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{4{,}0\,\text{s} \cdot 4{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} + 2\,s \cdot 4{,}8\frac{m}{s} + \frac{6{,}0\,\text{s} \cdot 4{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 33{,}6\,\text{m} \approx 34\,\text{m}.$$

Koira juoksi 34 metriä.

Sovella

Tehtävä 2.10.

a) Piirretään taulukon mittaustuloksista kuvaaja:



b) Auton keskinopeus saadaan laskettua, kun tiedetään, kuinka pitkän matkan auto kulkee tietyllä aikavälillä. Luetaan kuvaajalta kaksi matkan arvoa ja niitä vastaavien aikojen arvot

Keskinopeus

$$v_\text{k} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(1{,}19 - 0{,}03)\text{ m}}{(4{,}2 - 1{,}7)\text{ s}} = \frac{1{,}16\text{ m}}{2{,}5\text{ s}} \approx 0{,}46\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Auto lähtee liikkeelle heti 1,0 sekunnin jälkeen, sillä paikka alkaa muuttua. Lopussa auto pysähtyy, kun paikkakoordinaatti ei enää muutu. Tämä tapahtuu noin 4,9 sekunnin kohdalla. Auto liikkuu ajan
t = 4,9 s − 1,0 s = 3,9 s.

Tehtävä 2.11.

Ensimmäinen kävelymatka s_1 = 350 m

Kävelynopeus koulumatkan alussa v_1 = 1,4 m/s

Bussin odotusaika t_2 = 1,6 min = 1,6 · 60 s

Bussin nopeus on $v_3 = 28\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{28}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Bussimatkan kesto t_3 = 13 min = 13 · 60 s

Toinen kävelymatka s_4 = 580 m

Toisen kävelymatkan kesto t_4 = 4,5 min = 4,5 · 60 s

Koko koulumatkan keskinopeus on

$$v_{\text{k}} = \frac{s_{\text{kok}}}{t_{\text{kok}}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4},$$

jossa s_{kok} on kokonaismatka ja t_{kok} kokonaisaika.

Lasketaan ensimmäiseen kävelyyn kulunut aika

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{350\,\text{m}}{1{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}.$$

Opiskelija odotti paikallaan bussia, jolloin t_2 = 1,6 min ja s_2 = 0 m.

Lasketaan bussimatkan pituus

$s_3 = v_3 t_3$.

Opiskelijan keskinopeus koulumatkalla on

$$v_\mathrm{k} = \frac{s_\mathrm{kok}}{t_\mathrm{kok}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{s_1 + s_2 + v_3 t_3 + s_4}{\frac{s_1}{v_1} + t_2 + t_3 + t_4}$$

$$= \frac{350\,\mathrm{m} + 0\,\mathrm{m} + \frac{28}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 13 \cdot 60\,\mathrm{s} + 580\,\mathrm{m}}{\frac{350\,\mathrm{m}}{1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} + 1{,}6 \cdot 60\,\mathrm{s} + 13 \cdot 60\,\mathrm{s} + 4{,}5 \cdot 60\,\mathrm{s}} = 5{,}0119\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tehtävä 2.12.

Kuljettu matka s = 2,0 km

Matkan alkuosa s_1 = 1,0 km

Matkan loppuosa s_2 = 1,0 km

Nopeus matkan alkuosassa $v_1 = 15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Nopeus matkan loppuosassa v_2 = ?

Keskinopeus koko matkalla $v_\text{k} = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Koko matkaan kuluu aika $t = \frac{s}{v_k} = \frac{2{,}0\,\text{km}}{30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{1}{15}\text{h} = 4\,\text{min}.$

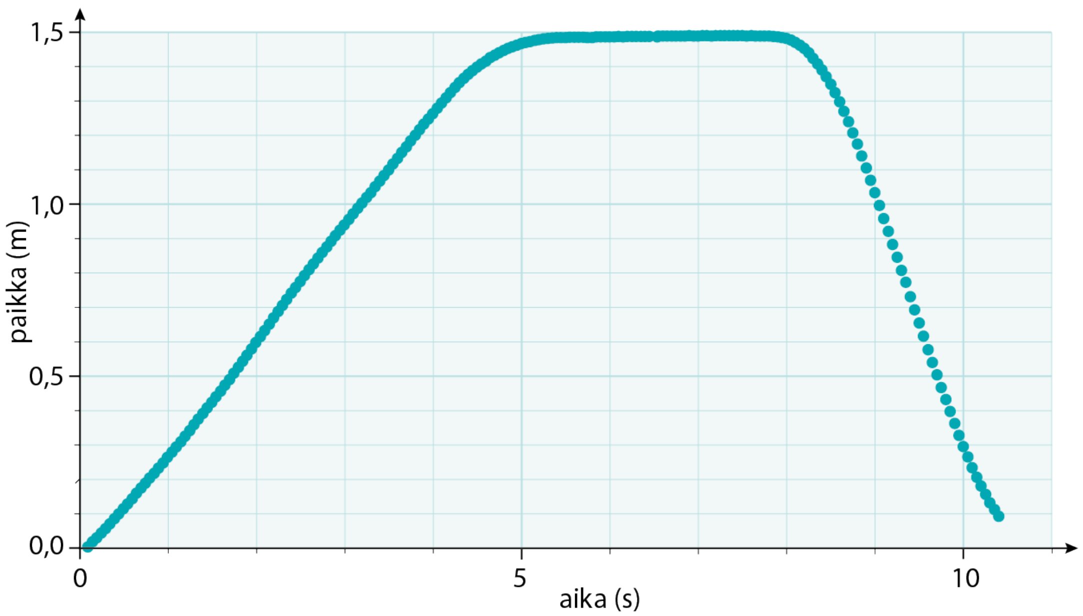
Matkan alkuosassa $s_1 = v_1 t_1$, josta saadaan matkan alkuosaan kuluvaksi ajaksi

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{1{,}0\,\text{km}}{15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{1}{15}\text{h} = 4\,\text{min}.$$

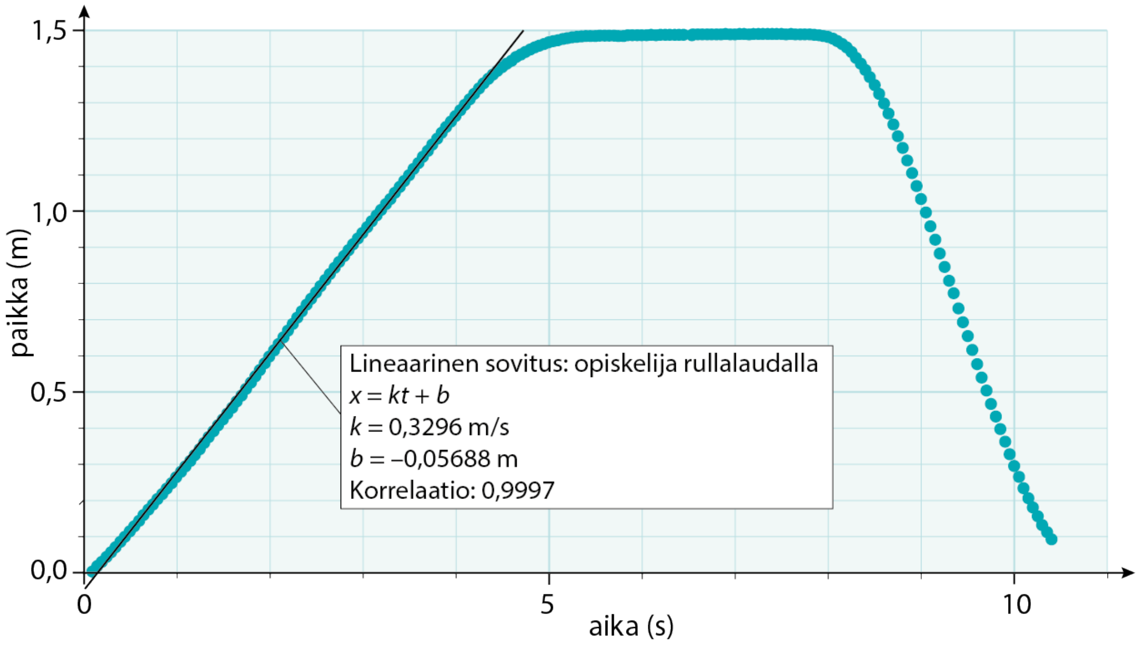
Huomataan, että koko 2,0 km:n matkaan kuluva aika on sama kuin matkan alkuosaan kuluva aika. Näin ollen, jos ensimmäinen kilometri on ajettu nopeudella 15 km/h, matkan keskinopeudeksi ei voi koko matkalla mitenkään tulla 30 km/h.

Tehtävä 2.13.

a) Opiskelijan paikan riippuvuus ajasta



b) Opiskelijan nopeus saadaan (t, s)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Sovitetaan kuvaajan alkuosaan suora ja määritetään suoran kulmakerroin.

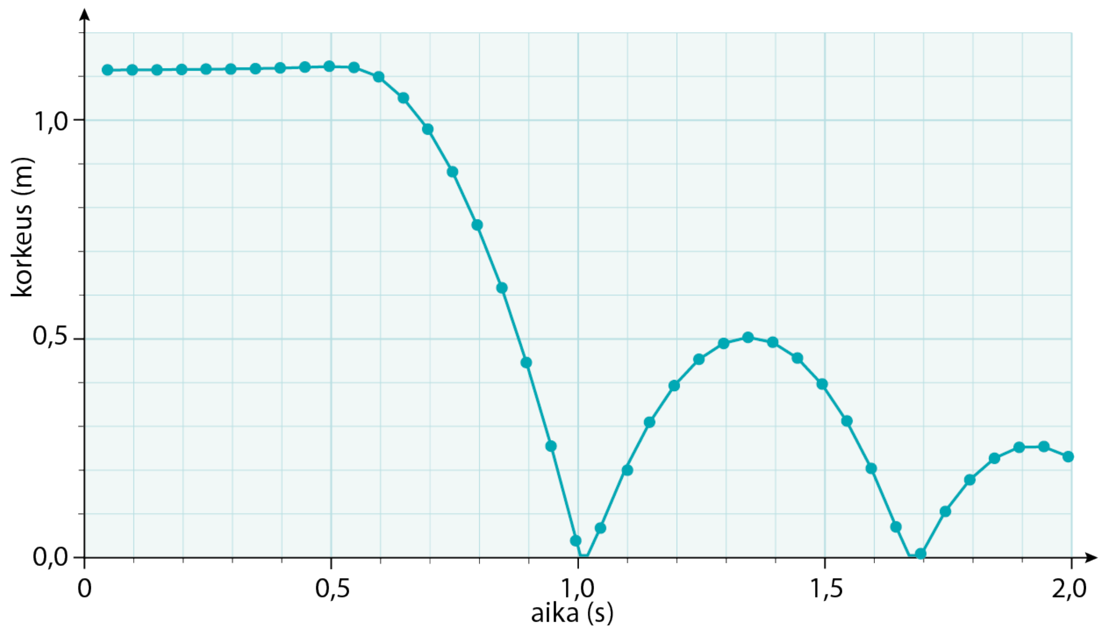


Opiskelijan nopeus on $v = 0{,}3296\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}33\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

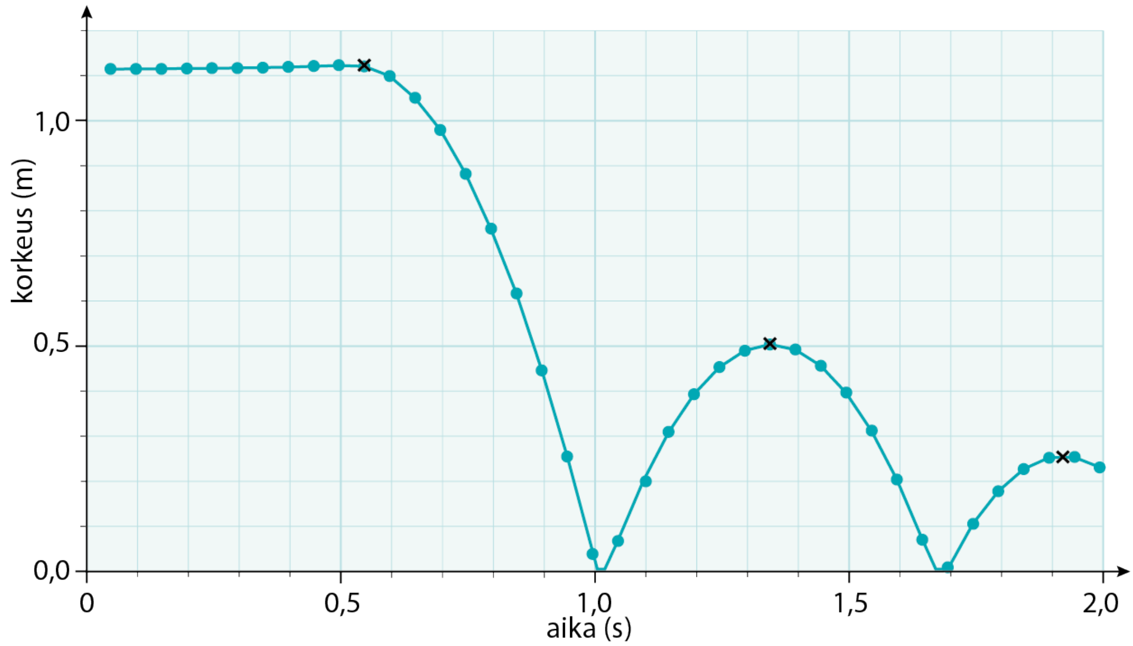
c) (t, x)-koordinaatistoon piirretyn suoran kulmakerroin eli jyrkkyys kuvaa kappaleen nopeutta. Koska suora kulkee mittauksen loppuosassa jyrkemmin kuin alkuosassa, nopeus oli mittauksen loppuosassa suurempi kuin alkuosassa. Alkuosassa opiskelija etääntyy anturista, suora on nouseva, ja nopeus on positiivinen. Loppuosassa opiskelija liikkuu anturia kohti, suora on laskeva ja nopeus negatiivinen.

Tehtävä 2.14.

a)



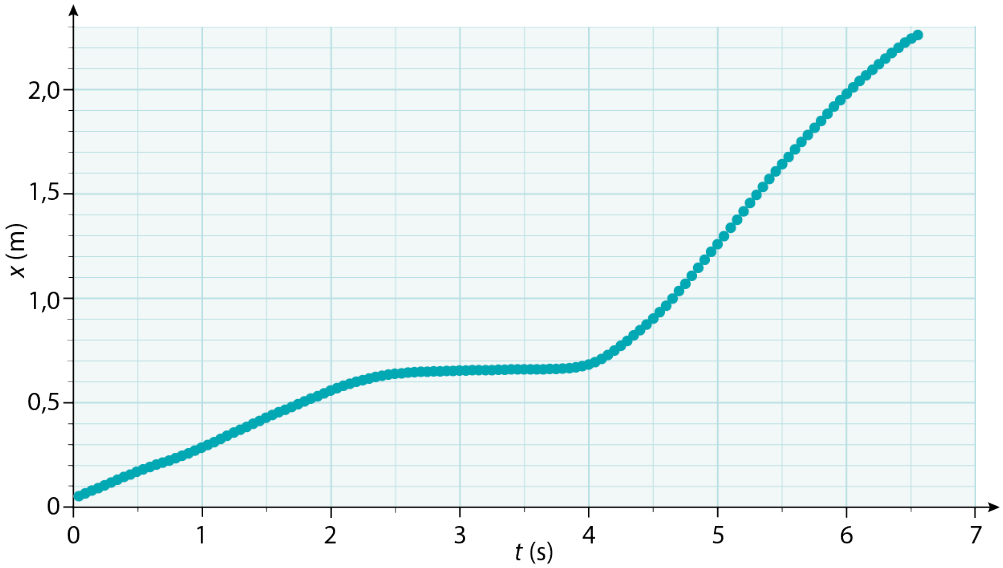
b) Pallon nopeus saadaan (t, h)-koordinaatistoon laaditulle kuvaajalle sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Pallo on paikallaan, jos fysikaalinen kulmakerroin on nolla. Merkitään kuvaajaan kohdat, joissa kuvaajalle piirretty tangentti on vaakasuorassa eli tangentin kulmakerroin on nolla. Pallo on lisäksi mittauksen alussa paikallaan ensimmäiseen merkittyyn pisteeseen asti. Nopeus on tällöin nolla.



c) Pallon ensimmäinen pomppu on ajanhetken 1,0 s jälkeen, sillä tämän jälkeen nopeuden suunta muuttuu. Seuraavan kerran pallo osuu lattialle noin 1,7 sekunnin kohdalla. Määritetään korkein kohta aikaväliltä 1,0 s…1,7 s. Pallo pomppaa korkeudelle h = 0,50 m.

Tehtävä 2.15.

a)



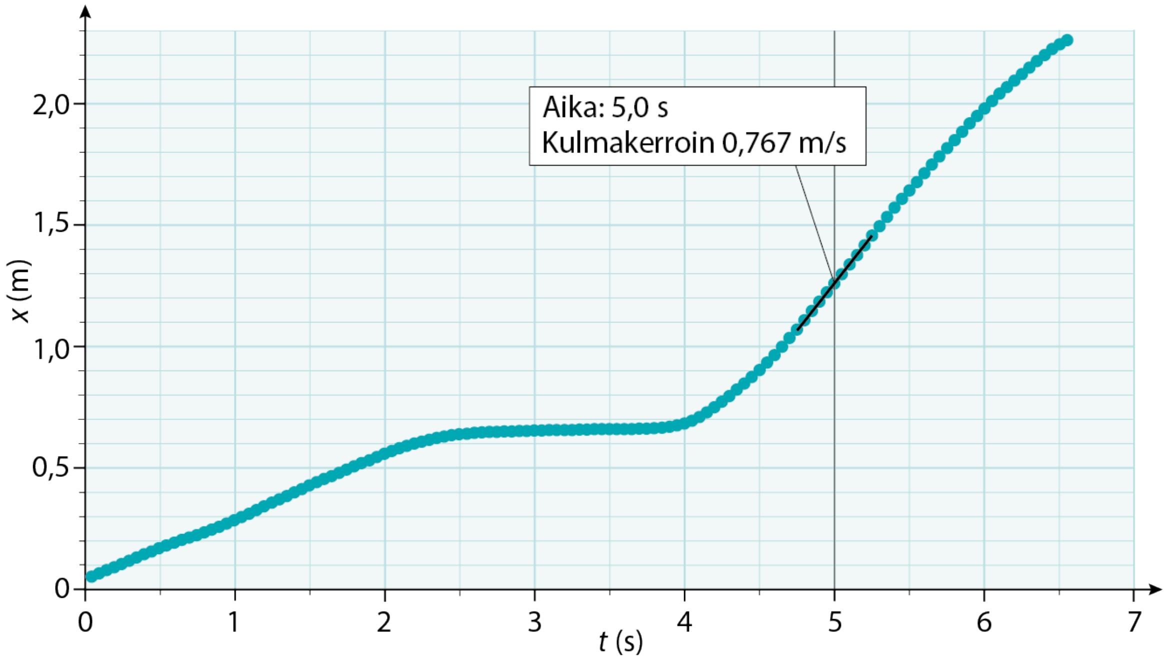
Aikavälillä 0 s...2,0 s. opettajan kävely oli tasaista liikettä, sillä (t, x)-koordinaatiston kuvaajan jyrkkyys pysyy samana.

Ajanhetkellä 2,0 s opettajan nopeus alkoi pienentyä, sillä kuvaajan jyrkkyys pienenee ajanhetkelle 2,75 s asti.

Aikavälillä 2,75 s...3,75 s opettaja oli paikoillaan. Tämän jälkeen hän lähti taas liikkeelle, ja nopeus kasvoi, sillä kuvaajan jyrkkyys lisääntyy.

Aikavälillä 4,65 s...5,25 s opettaja käveli vakionopeudella, joka oli suurempi kuin kävelynopeus mittauksen alussa. Tämän jälkeen opettajan nopeus alkoi pienentyä, sillä kuvaajan jyrkkyys pienenee.

b) Opettajan hetkellinen nopeus ajanhetkellä 5,0 s saadaan (t, x)-koordinaatistoon 5,0 s:n kohdalle määritetyn tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta.

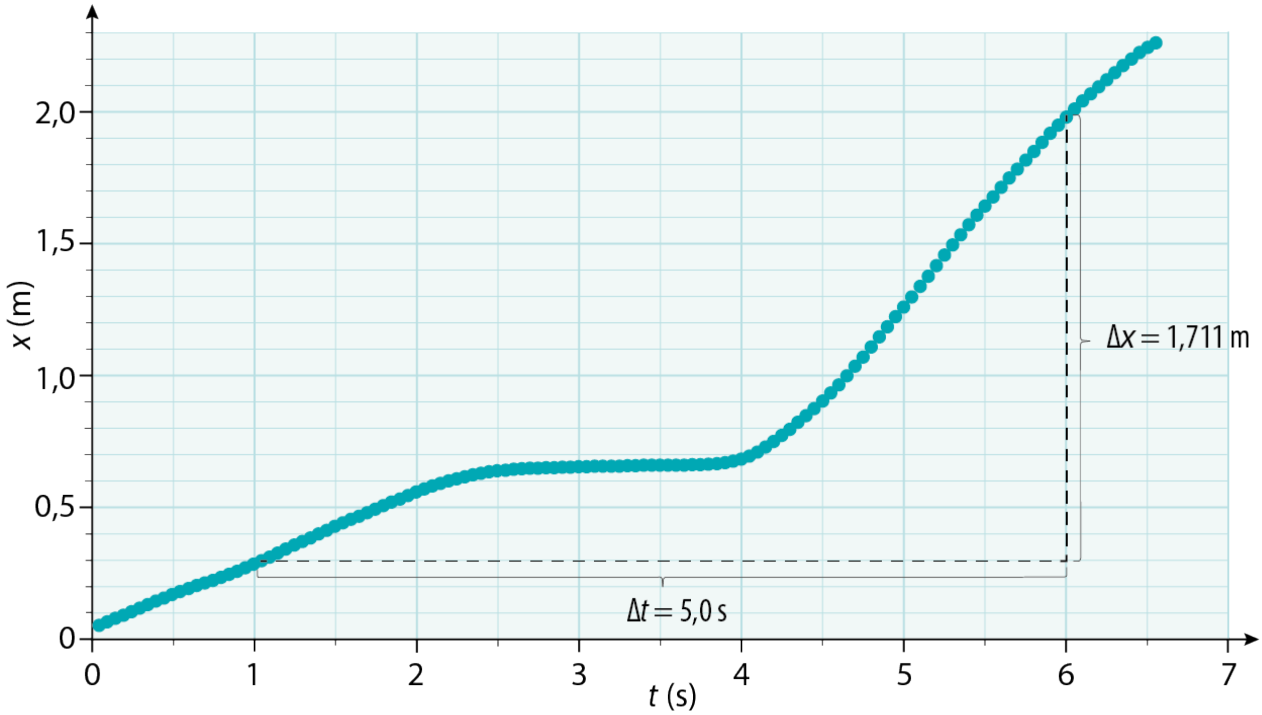


Nopeus ajanhetkellä 5,0 s on $v = 0{,}767\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}77\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

c) Opettajan keskinopeus aikavälillä 0,1 s…6,0 s on

$$v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

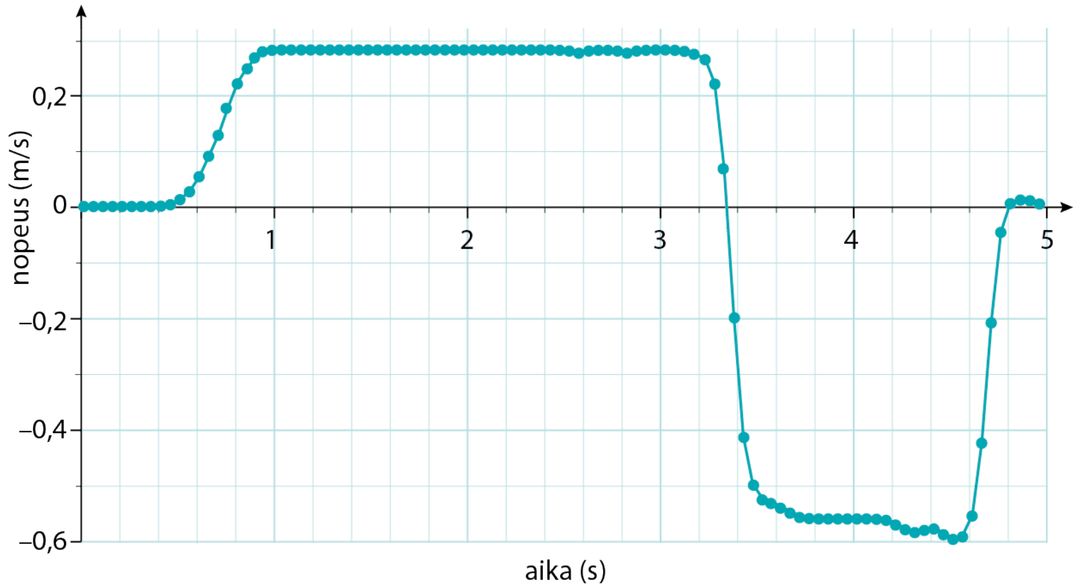
Määritetään paikan ja ajan muutokset kyseisellä aikavälillä.



Kävelyn keskinopeus $v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1{,}711\,\text{m}}{5{,}0\,\text{s}} = 0{,}3422\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}34\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

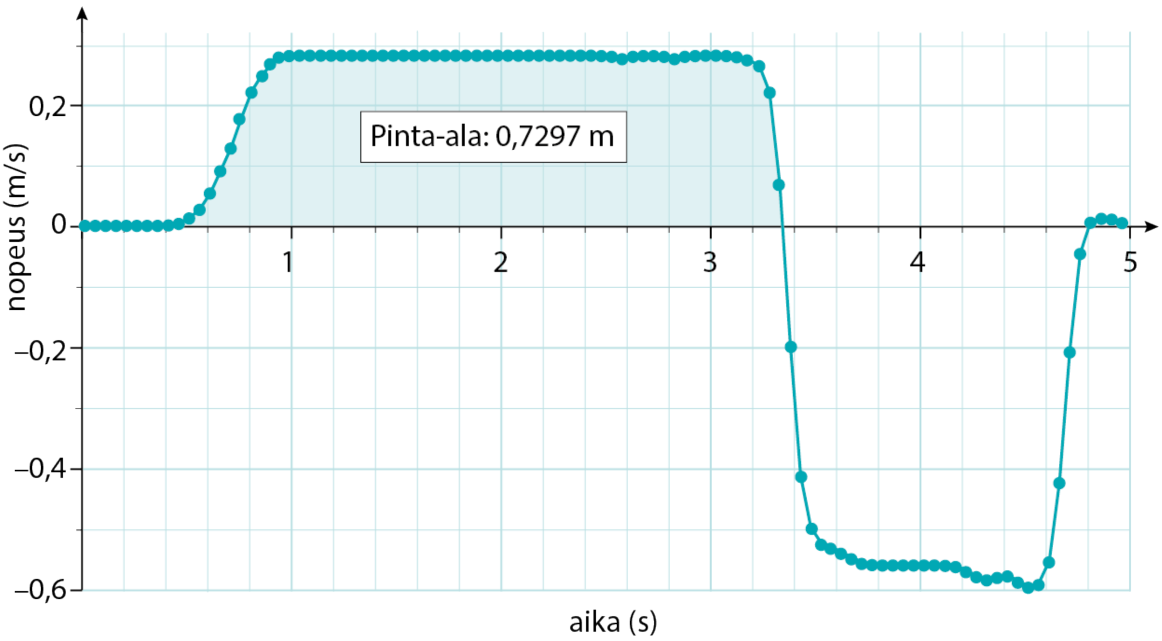
Tehtävä 2.16.

a)



b) Vaunu liikkui vakionopeudella ennen törmäystä, joten vaunun liike oli tasaista. Kun vaunu törmäsi, sen liikkeen suunta muuttui. Tämä näkyy kuvaajassa nopeuden muuttumisena positiivisesta negatiiviseksi. Vaunu törmäsi ajanhetkellä t = 3,36 s ≈ 3,4 s.

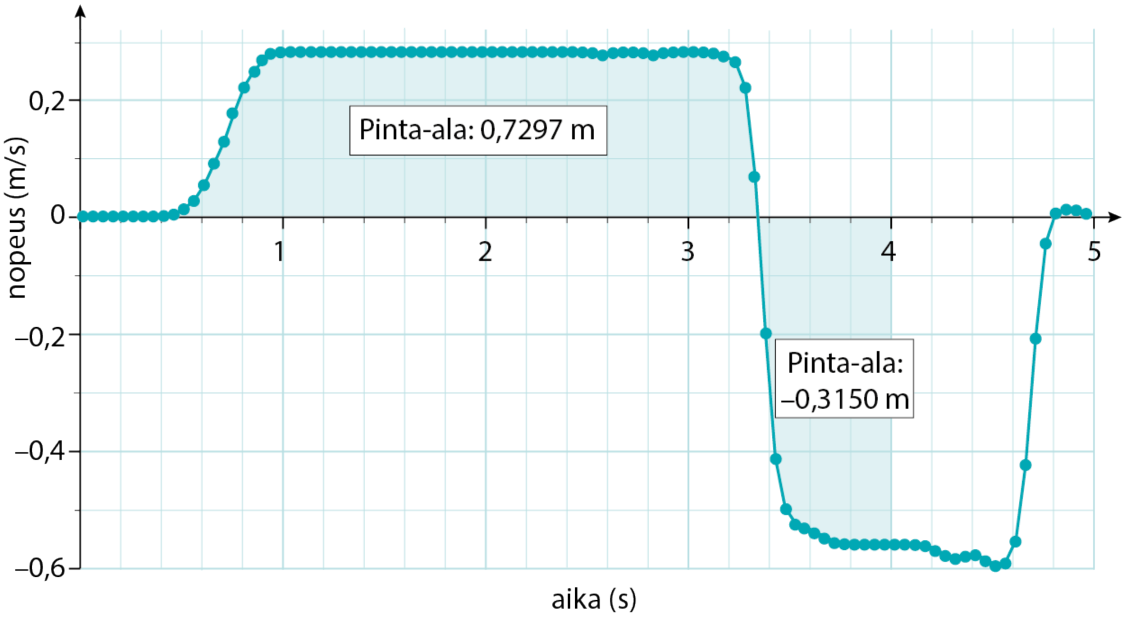
c) Vaunun kulkema matka saadaan (t, v)-koordinaatistoon piirretyn kuvaajan ja akselien rajoittaman alueen fysikaalisena pinta-alana. Vaunu törmäsi ajanhetkellä t = 3,36 s.



Vaunun kulkema matka ennen törmäystä on s = 0,7297 m = 0,73 m.

d) Ennen törmäystä vaunu oli c-kohdan mukaan kulkenut matkan $s = 0{,}7297$ m.

Vaunun kulkema matka saadaan (t, v)-koordinaatistoon piirretyn kuvaajan ja akselien rajoittaman alueen fysikaalisena pinta-alana. Vaunu törmäsi ajanhetkellä $t = 3{,}36$ s. Kuvaaja on aika-akselin alapuolella, koska vaunun suunta vaihtuu törmäyksessä. Määritetään kuvaajan ja aika-akselin rajaaman alueen fysikaalinen pinta-ala.

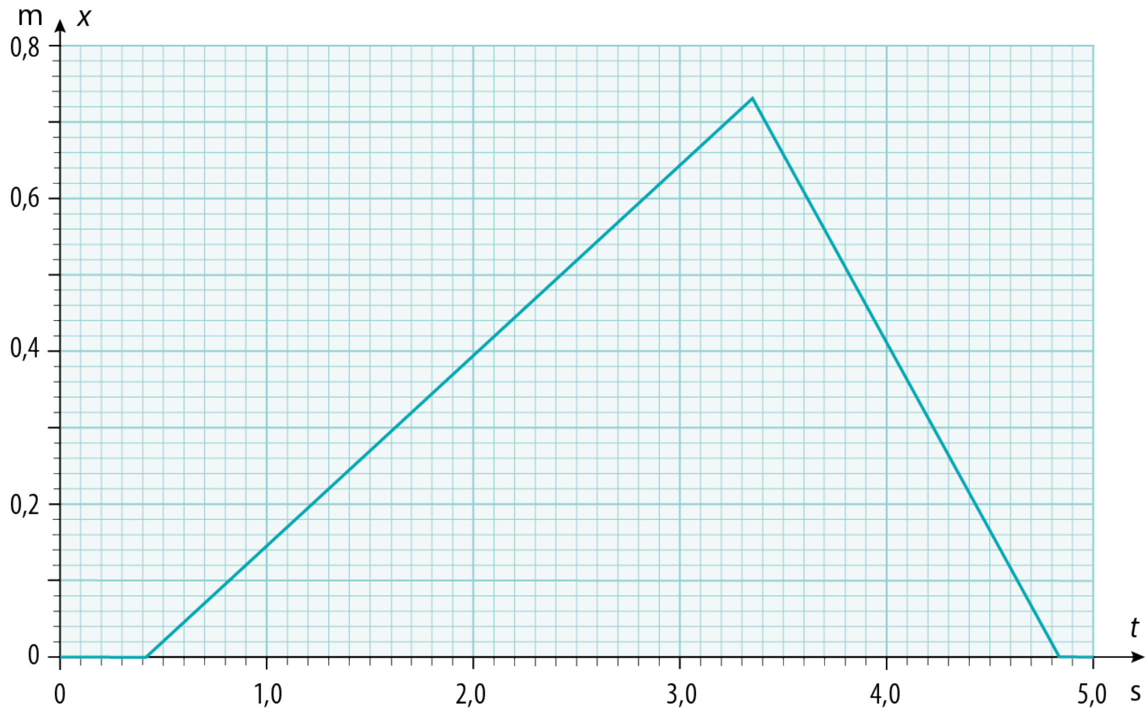


Vaunun paikka 4,0 sekunnin kohdalla on

$x = s_1 + s_2$

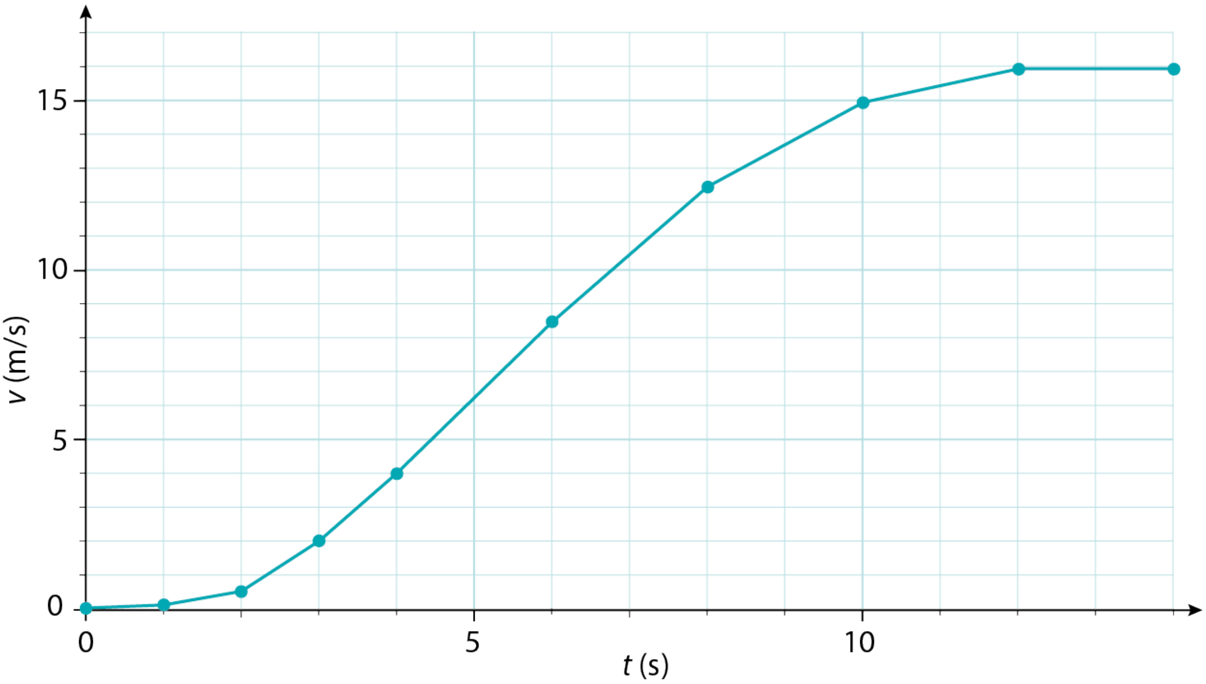
$= 0{,}7297 \text{ m} + (-0{,}3150 \text{ m}) = 0{,}4147 \text{ m} = 0{,}41 \text{ m}.$

e) Alussa vaunu on paikallaan noin 0,4 s. Vaunu on tasaisessa liikkeessä ajanhetkeltä 0,4 s hetkelle 3,36 s, jossa vaunu törmää ja sen suunta vaihtuu nopeasti. Suunnanmuutoksen jälkeen vaunu on tasaisessa liikkeessä, ja nopeus on negatiivinen mittauksen loppuun saakka. Tasaista liikettä voidaan kuvata (t, s)-koordinaatistossa nousevalla tai laskevalla suoralla.

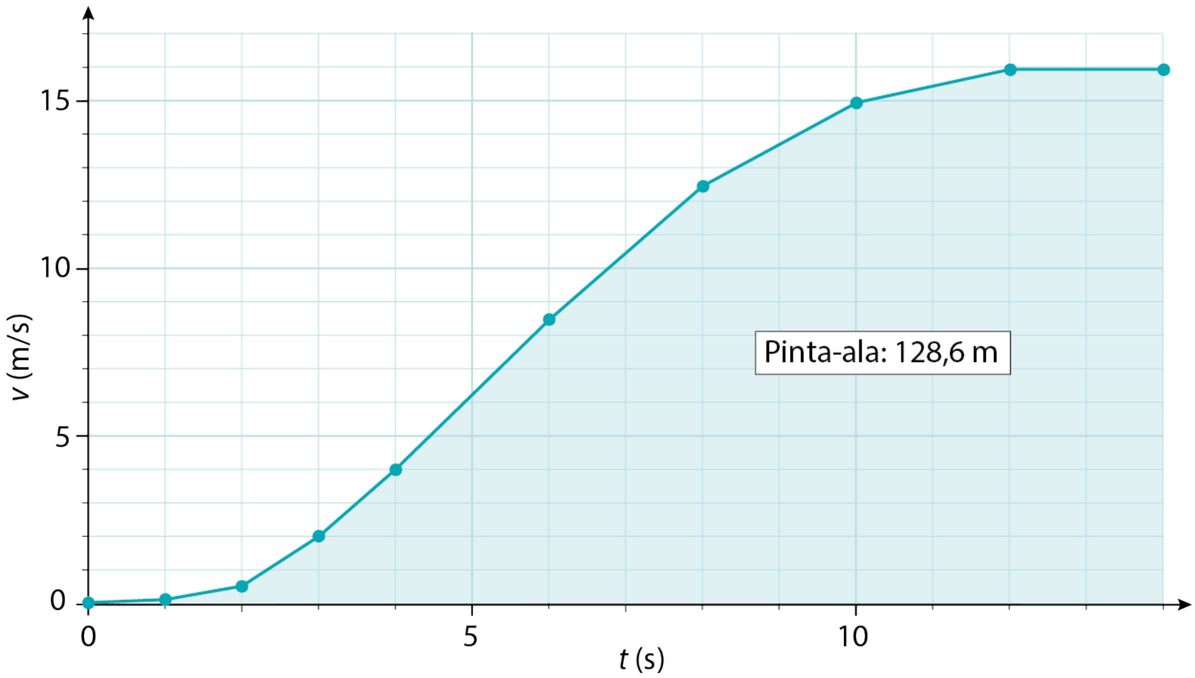


Tehtävä 2.17.

a)



b) Auton kulkema matka saadaan (*t, v*)-koordinaatiston ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään fysikaalinen pinta-ala aikavälillä 0,0 s...14,0 s.



Auton kulkema matka on s = 128,6 m ≈ 130 m.

c) Auton keskinopeus aikavälillä 0,0 s...14,0 s on

$$v_k = \frac{s}{\Delta t} = \frac{128{,}6\,\mathrm{m}}{14{,}0\,\mathrm{s}} = 9{,}1857\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 9{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

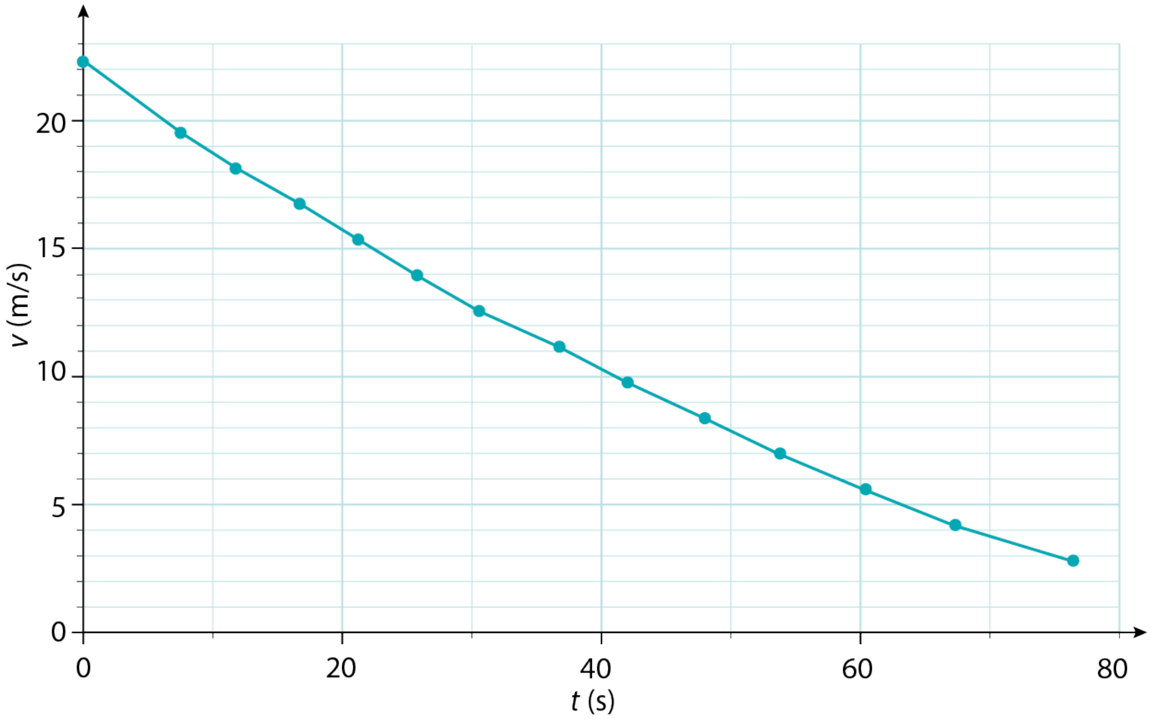
Tehtävä 2.18.

a) Käytetään apuna taulukkolaskentaohjelmaa.

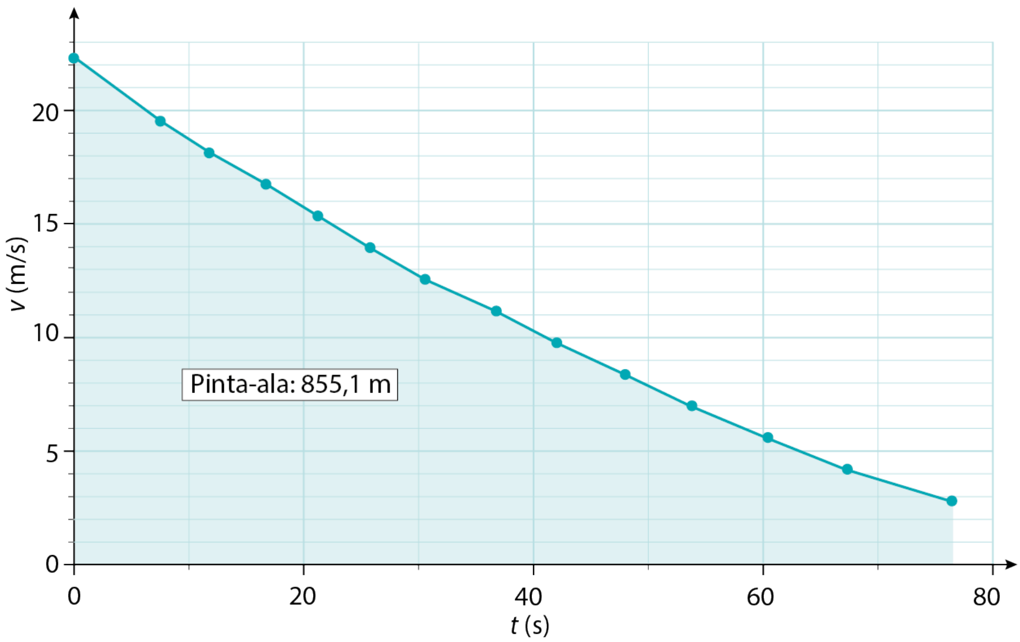
Nopeudet saadaan yksikössä m/s jakamalla 3,6:lla nopeudet yksikössä km/h.

aika (s)	nopeus (km/h)	nopeus (m/s)
0	80	22,22
7,54	70	19,44
11,81	65	18,06
16,74	60	16,67
21,27	55	15,28
25,81	50	13,89
30,62	45	12,50
36,82	40	11,11
42,07	35	9,722
48,05	30	8,333
53,85	25	6,944
60,47	20	5,556
67,4	15	4,167
76,5	10	2,778

b)



c) Kun auton nopeutta kuvataan (t, v)-koordinaatistossa, auton kulkema matka on kuvaajan ja akselien rajoittaman alueen fysikaalinen pinta-alana eli graafisena integraalina. Määritetään pinta-ala.



Auton kulkema matka s = 855,1 m = 860 m.

d) Koska auton nopeus pieneni koko ajan, auto oli hidastuvassa liikkeessä.

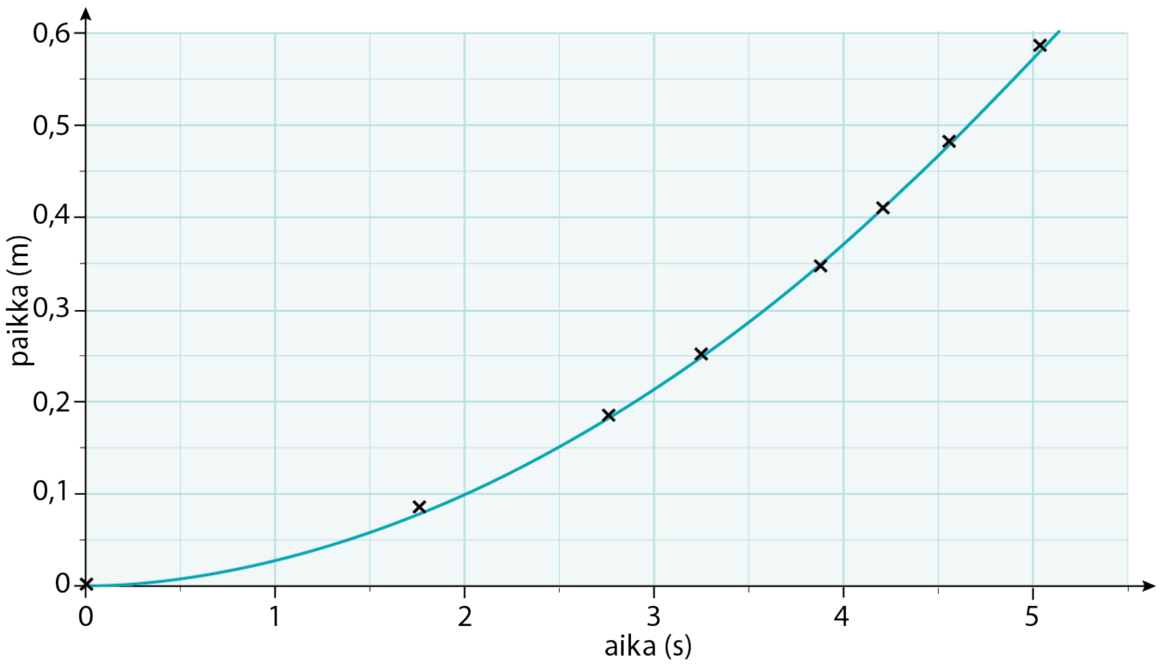
e) mittauksen alkuhetki t_1 = 0 s
mittauksen päättymishetki t_2 = 76,5 s
auton nopeus alkuhetkellä v_1 = 22,22222 m/s
auton nopeus mittauksen lopussa v_2 = 2,778 m/s

Auton keskikiihtyvyys

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{2{,}778\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 22{,}222\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{76{,}5\,\text{s} - 0\,\text{s}} = -0{,}254\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx -0{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehtävä 2.20.

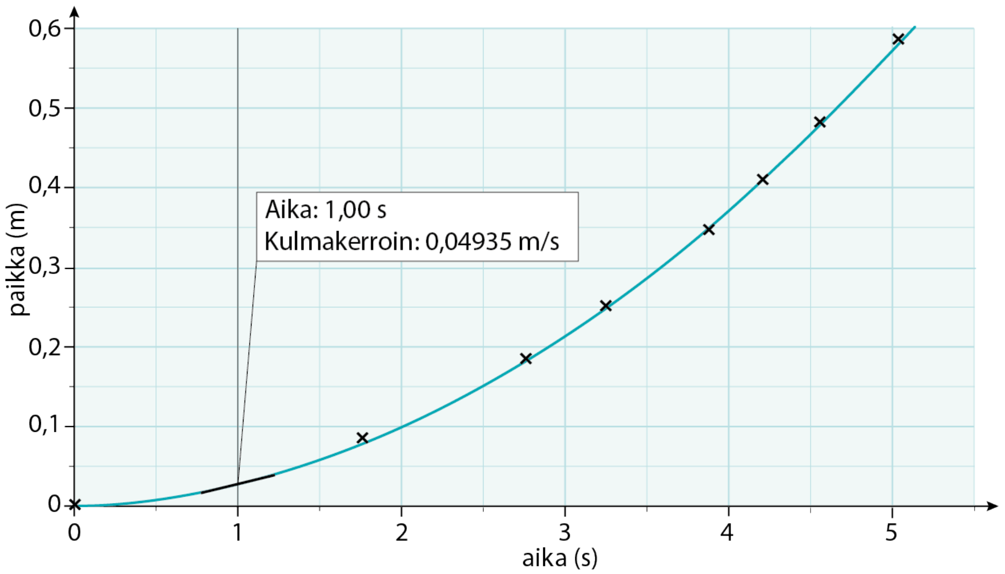
a)

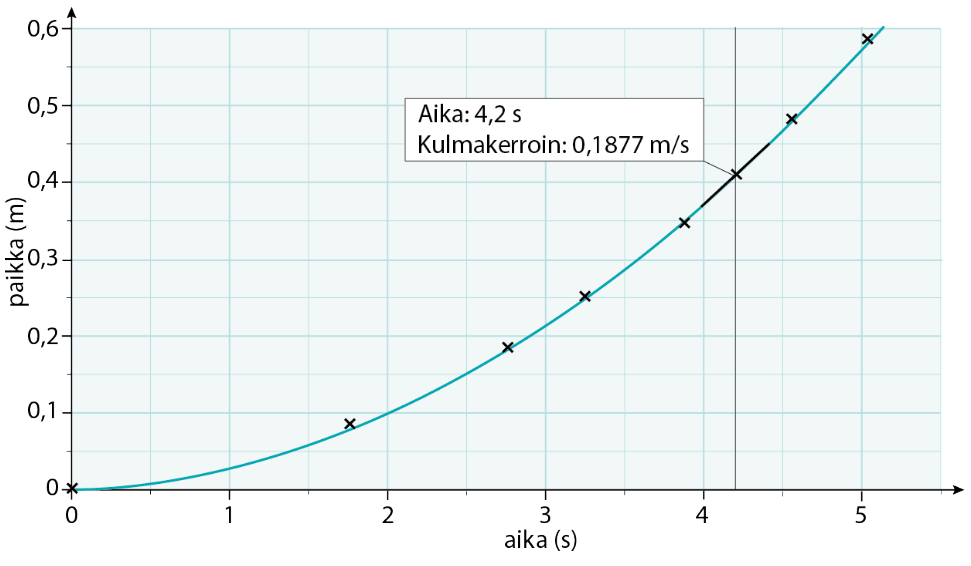


b) Määritetään kuulan paikka kuvaajasta interpoloimalla ajanhetkillä 1,0 s ja 4,2 s. Kuulan keskinopeus aikavälillä 1,0 s ja 4,2 s ja määritetään keskinopeus

$$v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}408\,\mathrm{m} - 0{,}0294\,\mathrm{m}}{4{,}2\,\mathrm{s} - 1{,}0\,\mathrm{s}} = 0{,}1183\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 12\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}.$$

c) Kuulan hetkellinen nopeus saadaan ajanhetkille 1,0 s ja 4,2 s määritettyjen tangenttien fysikaalisista kulmakertoimista. Määritetään tangentit ja hetkelliset nopeudet





Hetkelliset nopeudet

$$v_{t=1,0\,\mathrm{s}} = 0{,}04935\,\mathrm{m/s} \approx 4{,}9\,\mathrm{cm/s}$$

$$v_{t=4,2\,\mathrm{s}} = 0{,}1877\,\mathrm{m/s} \approx 19\,\mathrm{cm/s}.$$

Syvennä

Tehtävä 2.21.

a) Autojen ultraäänimittalaitteet mittaavat etäisyyksiä auton lähellä oleviin esteisiin. Ultraäänimittalaitteita käytetään myös sikiöiden voinnin ja kasvun tutkimiseen.

b) Pietsosähköisessä ilmiössä puristus tai jännitys aiheuttaa materiaaleihin sähköisen jännitteen. Toisaalta jos pietsosähköiseen materiaaliin kytketään jännite, materiaali voi puristua kokoon tai venyä. Vaihtojännitteen suuruus muuttuu jaksoissa. Tämä aiheuttaa pietsosähköiseen materiaaliin jaksottaista puristumista ja venymistä eli värähtelyä. Värähtelyn seurauksena voi syntyä ultraääni.

c) Ultraäänimittalaitteen toiminta perustuu pietsosähköisen kiteen värähtelyssä syntyvään ultraääneen ja ultraäänen heijastumiseen tutkittavasta kohteesta. Mittalaite lähettää ultraäänipulsseja, jotka etenevät tutkimuskohteen väliaineessa tietyllä nopeudella ja heijastuvat osuessaan aineen rajapintaan. Sama pietsosähköinen kide myös rekisteröi kaiun. Kun heijastunut ultraäänipulssi osuu kiteeseen, kide alkaa värähdellä ja syntyy jännite. Mittalaitteessa oleva anturi rekisteröi lähtevän ja tulevan ultraäänipulssin välisen aikaeron, jonka perusteella laite laskee etäisyyden tai piirtää tilanteesta kuvan.

d) Etäisyyden määrityksessä tapahtuva virhe voi johtua siitä, että ultraääniaalto etenee eri nopeudella kesällä kuin talvella. Esineen etäisyys *d* voidaan määrittää yhtälöllä

$$d = \frac{v_{\text{ääni}} t_{\text{viive}}}{2},$$

jossa $v_{\text{ääni}}$ on äänen nopeus tietyssä lämpötilassa

ja t_{viive} kuvaa signaalin lähettämisen ja vastaanottamisen välistä aikaeroa. Koska ääniaallon kulkema matka on kaksinkertainen etäisyyteen verrattuna, kaavassa on nimittäjä 2.

Kun ilman lämpötila on 20 °C, $d = \dfrac{343\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}050\,\text{s}}{2} = 8{,}575\,\text{m}.$

Kun ilman lämpötila on −20 °C, $d = \dfrac{319\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}050\,\text{s}}{2} = 7{,}975\,\text{m}.$

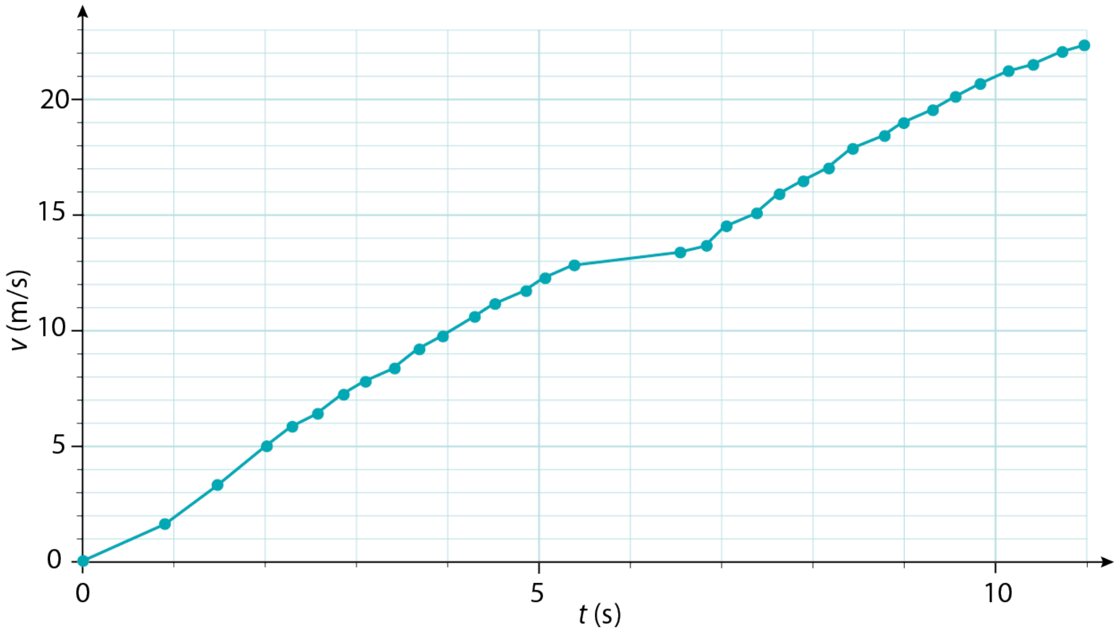
Lämpötilan aiheuttama muutos mittaustuloksessa on 8,575 m – 7,975 m = 0,600 m ≈ 0,60 m.

Se tarkoittaa prosentteina

$\dfrac{85{,}75\,\text{m} - 79{,}75\,\text{m}}{85{,}75\,\text{m}} = 0{,}06997 \approx 7{,}0\,\%$ eroa.

Tehtävä 2.22.

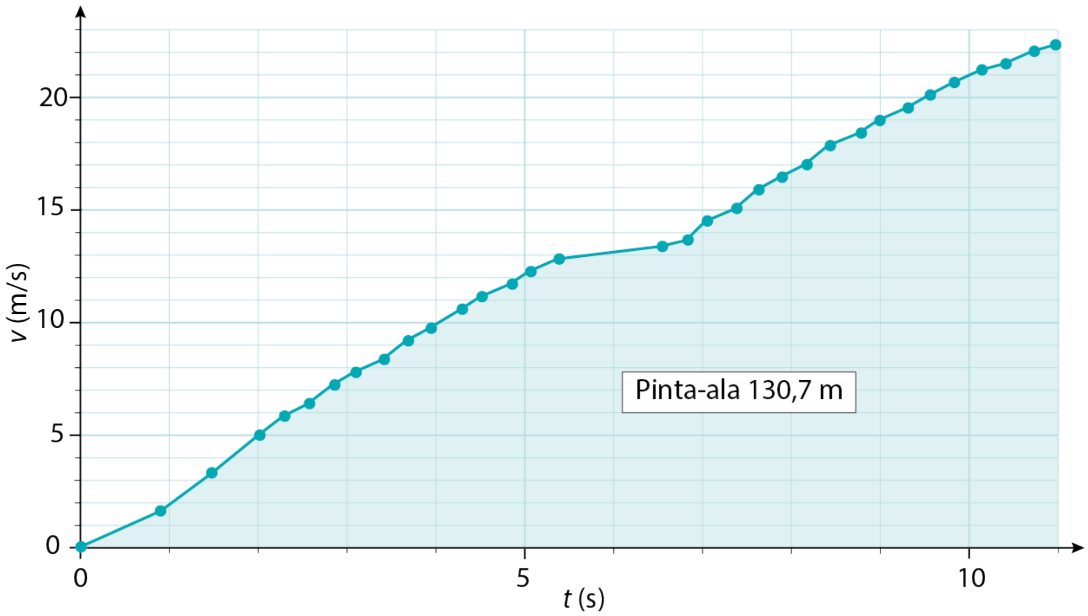
a)



(uudet arvot 1 p, akselit oikein päin 1 p, mittapisteet näkyvä kuvassa 1 p)

b) Auton kulkema matka saadaan (*t*, *v*)-koordinaatiston ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta (graafisella integroinnilla). (1 p)

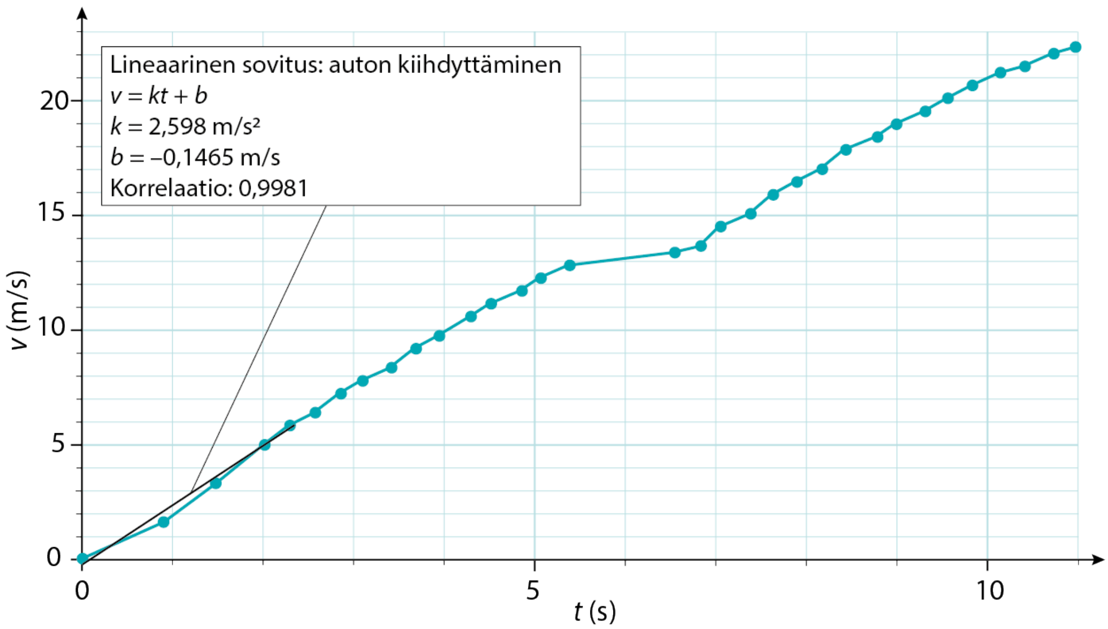
Määritetään kuvaajan fysikaalinen pinta-ala.



Auto kulki tutkimuksen aikana matkan
$s = 130{,}7 \text{ m} \approx 130 \text{ m}$.

(pinta-alan määritys 2 p, vastaus matkan tunnusta *s* käyttämällä 1 p)

c) Hetkellinen kiihtyvyys saadaan (*t, v*)-koordinaatistoon määritetyn tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta. (1 p) Auton kiihtyvyys on suurin hetkellä, jolla kuvaaja nousee jyrkimmin. Tämä on heti kiihdytyksen alussa. (1 p) Sovitetaan mittausaineiston tähän kohtaan tangentti ja määritetään tangentin fysikaalinen kulmakerroin.



(tangentin tekeminen ja kiihtyvyysarvon määrittäminen 2 p)

Auton suurin kiihtyvyys on $a = 2{,}598\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. (1 p)

d) Vaihteenvaihdon jälkeinen keskimääräinen kiihtyvyys saadaan määrittämällä kuvaajasta nopeuden muutos ja siihen kulunut aika

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{22{,}22\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 13{,}33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{10{,}94\,\text{s} - 6{,}51\,\text{s}} = 2{,}00677\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.\ \ (3\text{ p})$$

3. Tasaisesti kiihtyvä liike

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 3.1.

a) C

b) C

c) A

d) B

e) A

f) C

Tehtävä 3.2.

Sähköpotkulaudan kiihtyvyys a = 0,94 m/s^2

a) Aika t = 3,0 s

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen nopeus $v = v_0 + at$.

Sähköpotkulauta lähtee paikaltaan, joten $v_0 = 0$.

Sähköpotkulaudan nopeus hetkellä t = 3,0 s on

$$v = at = 0{,}94\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3{,}0\,\text{s} = 2{,}82\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Aika t = 3,0 s

Paikka alkuhetkellä $x_0 = 0$

Nopeus alkuhetkellä $v_0 = 0$

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen paikka on

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 0 + 0 \cdot 3{,}0\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}94\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3{,}0\,\text{s})^2 = 4{,}23\,\text{m} \approx 4{,}2\,\text{m}. \end{aligned}$$

c) Loppunopeus $v = 25\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{25}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Nopeus alkuhetkellä $v_0 = 0$

Ratkaistaan kiihdytykseen tarvittava aika yhtälöstä $v = at$.

$$t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{25}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}94\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 7{,}38771\ \text{s} \approx 7{,}4\ \text{s}$$

Tehtävä 3.3.

Auton alkunopeus $v_0 = \frac{70}{3,6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Auton kiihtyvyys $a = 1,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

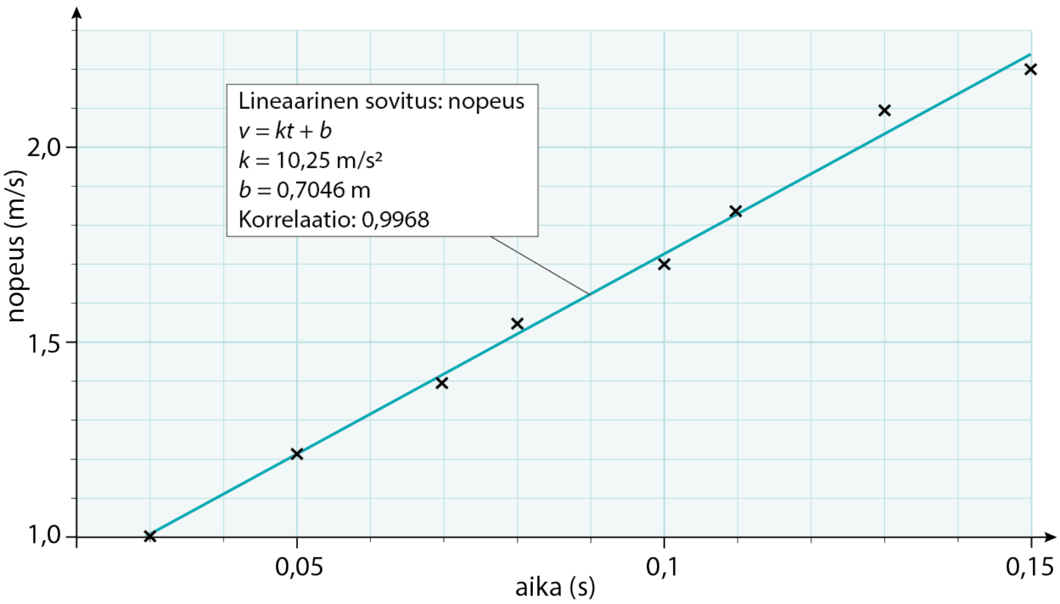
Auton kiihdytysaika t = 2,5 s

Auto on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jolloin auton kulkema matka on

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$= \frac{70}{3,6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2,5\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 1,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2,5\,\text{s})^2 = 54,2361\,\text{m} \approx 54\text{ m}.$$

Tehtävä 3.4.



Putoamiskiihtyvyys on nopeuden kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin, a = 10,3 m/s^2. Putoamiskiihtyyvyyden taulukkoarvo on 9,81 m/s^2.

Verrataan tulosta kirjallisuusarvoon

$$\frac{10{,}3\,\mathrm{m/s^2} - 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \cdot 100\,\% = 4{,}9949\,\% \approx 5{,}00\,\%.$$

Tehtävä 3.5.

Putoamismatka s = 3,0 m

a) Hyppääjän liike on tasaisesti kiihtyvää liikettä, sillä putoamisen aikana kiihtyvyys on koko ajan vakio.

b) Putoamisliikkeessä kiihtyvyys on $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä hyppääjän putoamismatka on

$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}gt^2$, josta putoamisajaksi saadaan

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}0\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0{,}782\,\mathrm{s} \approx 0{,}78\,\mathrm{s}.$$

c) Uimahyppääjä on putoamisen aikana tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Nopeus, jolla hän osuu vedenpintaan, on *v* = *at* = *gt*.

Putoamisaika b-kohdan mukaan $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$.

Tällöin nopeus on

$$v=g\sqrt{\frac{2s}{g}}=\sqrt{\frac{2sg^2}{g}}=\sqrt{2sg}$$
$$=\sqrt{2\cdot 3{,}0\,\mathrm{m}\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}=7{,}672\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 7{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tehtävä 3.6.

Auton nopeus alussa $v_0 = \frac{39}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Auton nopeus kiihdytyksen jälkeen $v = \frac{78}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Kiihdytysaika t = 6,4 s

a) Auton keskikiihtyvyys on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{\frac{78}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{39}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{6{,}4\,\text{s}} = 1{,}6927\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Auton kulkema matka tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä on

$$
\begin{aligned}
s &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\
&= \frac{39}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6{,}4\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}6927\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6{,}4\ \text{s})^2 \\
&= 103{,}9998\ \text{m} \approx 100\ \text{m}.
\end{aligned}
$$

Sama tulos saadaan myös sieventämällä kaavaa niin, että päädytään keskinopeuteen:

$$
\begin{aligned}
s &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t + \frac{1}{2}\frac{v - v_0}{\cancel{t}}t^{\cancel{2}} \\
&= v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)t = v_0 t + \frac{1}{2}vt - \frac{1}{2}v_0 t = \frac{1}{2}v_0 t + \frac{1}{2}vt \\
&= \frac{1}{2}(v_0 + v)t = v_k t \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{78}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{39}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot 6{,}4\ \text{s} = 103{,}9998\ \text{m} \approx 100\ \text{m}.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 3.7.

a) Putoamisaika on Maassa 0,7 s, Kuussa 1,8 s ja Marsissa 1,2 s.

b) Simulaation perusteella Kuussa 1,0 m:n putoaminen kestää 1,1 s. Vastaava aika kuluu Maassa, kun kappale pudotetaan 6,0 metrin korkeudelta.

Sovella

Tehtävä 3.8.

Pulkkailijan kiihtyvyys a = 1,1 m/s^2

a) Laskumatka s = 12,7 m

Pulkkailija on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Pulkkailijan laskuaika ratkaistaan matkan yhtälöstä.

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12{,}7\,\mathrm{m}}{1{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 4{,}805\,\mathrm{s} \approx 4{,}8\,\mathrm{s}$$

b) Pulkkailija on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Pulkkailijan nopeus on

$$v = v_0 + at = 0 + at = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{a^{\cancel{2}}2s}{\cancel{a}}}$$

$$= \sqrt{2sa} = \sqrt{2 \cdot 12{,}7\,\mathrm{m} \cdot 1{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 5{,}2858\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 5{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

c) Pulkkailijan nopeus tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä on b-kohdan mukaan $v = \sqrt{2sa}$. Tällöin pulkkailijan nopeus on suoraan verrannollinen laskumatkan neliöjuureen $v \sim \sqrt{s}$.

Tehtävä 3.9.

a) Aikavälillä 0 s … 1,5 s kappale on tasaisessa liikkeessä, sillä kappaleen nopeus ei muutu. Aikavälillä 1,5 s … 6,0 s kappale on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä, sillä nopeuden muutos pysyy samana. Aikavälillä 6,0 s … 8,0 s kappaleen negatiivinen nopeus kasvaa, joten kappale on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä vastakkaiseen suuntaan kuin liikkeen alussa. Aikavälillä 8,0 s … 9,0 s kappale on tasaisessa liikkeessä alkuperäisen liikkeen suuntaa vastaan, sillä kappaleella on negatiivista nopeutta ja nopeuden suuruus ei muutu.

b) Kiihtyvyys on (t, v)-koordinaatiston laaditun kuvaajan tangentin fysikaalinen kulmakerroin. Kappaleella on sitä suurempi kiihtyvyys, mitä jyrkemmin sen liikkeen kuvaaja kulkee koordinaatistossa. Kappaleen kiihtyvyys on suurimmillaan aikavälillä 1,5 s … 6,0 s. Interpoloidaan nopeudet ajanhetkillä 1,5 s ja 6,0 s ja lasketaan kiihtyvyys.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 3{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{6{,}0\,\text{s} - 1{,}5\,\text{s}} = -0{,}7111\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx -0{,}71\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Kiihtyvyyden negatiivinen tulos tarkoittaa, että kiihtyvyyden suunta on alussa olevan nopeuden suunnalle vastakkainen.

c) Kappaleen kulkema matka on (t, v)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan ja akselien rajoittama fysikaalinen pinta-ala. Nyt ala koostuu tasaisen liikkeen osasta ja hidastuvan liikkeen osasta. Lasketaan yhteen vastaavien suorakulmion ja kolmion pinta-alat.

$$s = 3{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1{,}5\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 3{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (6{,}0 - 1{,}5)\,\text{s} = 12\,\text{m}.$$

d) Määritetään c-kohdan mukaan, kuinka pitkä matka on kuljettu 6,0 s:n kohdalla. Sen jälkeen kappaleen liikkeen suunta vaihtuu ja kappaleen liike on kiihtyvää. Määritetään kappaleen paikka (t, v)-koordinaatiston kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta

$$x = 3{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1{,}5\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 3{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (6{,}0 - 1{,}5)\,\text{s} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (8{,}0 - 6{,}0)\,\text{s} = 11{,}4\,\text{m}$$

Tehtävä 3.10.

Kuljettajan reaktioaika t_1 = 0,95 s

Auton alkunopeus $v_0 = \frac{40}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Auton kiihtyvyys $a = -2{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a) Kuljettajan reaktioajan auto liikkuu tasaisella nopeudella matkan

$$s_1 = v_0 t_1 = \frac{40}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}95\,\text{s} = 10{,}555\,\text{m} \approx 11\text{ m}.$$

b) Auton hidastumiseen kulunut aika t_2 saadaan auton loppunopeuden avulla, koska liike on tasaisesti kiihtyvää. Jarrutuksen jälkeen auton nopeus nolla. Tällöin

$$0 = v_0 + at_2.$$

Jarruttamiseen kulunut aika on

$$t_2 = -\frac{v_0}{a} = -\frac{\frac{40}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-2{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4{,}6296\,\text{s} \approx 4{,}6\text{ s}.$$

c) Jarrutuksen ajan auton liike on tasaisesti hidastuvaa ja se kulkee jarrutuksessa matkan s_2. Auto kulkee kuljettajan tekemän havainnon jälkeen reaktiomatkan sekä jarrutusmatkan $s = s_1 + s_2$.

Sijoitetaan yhtälöön a- ja b-kohdassa saadut ajan ja matkan lausekkeet. Auto kulkee ennen pysähdystä

$$
\begin{aligned}
s &= s_1 + s_2 = v_0 t_1 + v_0 t_2 + \frac{1}{2} a t_2{}^2 \\
&= v_0 t_1 + v_0 \left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 \\
&= v_0 t_1 - \frac{v_0{}^2}{a} + \frac{1}{2} \frac{v_0{}^2}{a} \\
&= v_0 t_1 - \frac{1}{2} \frac{v_0{}^2}{a} \\
&= \frac{40}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}95\,\text{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{40}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\left(-2{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 36{,}276\,\text{m} \approx 36\,\text{m}.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 3.11.

Kiihtyvään liikkeeseen kulunut aika t_1 = 15,6 s

Nopeus tasaisessa liikkeessä v = 15,1 m/s

Tasaiseen liikkeeseen kulunut aika t_2 = 51 s

Hidastuvaan liikkeeseen kulunut aika t_3 = 25,3 s

a) Juna on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Koska juna lähti asemalta, voidaan olettaa, että alkunopeus v_0 = 0 m/s.

Junan kiihtyvyys

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t_1} = \frac{v}{t_1} = \frac{15{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{15{,}6\,\text{s}} = 0{,}9679\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0{,}97\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Juna kiihdyttää tasaisesti. Kiihdytyksen aikana juna kulkee

$$s = \frac{1}{2}a_1 t^2 = \frac{1}{2}\frac{v}{t_1}t_1{}^2 = \frac{1}{2}vt_1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 15{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 15{,}6\,\text{s} = 117{,}78\,\text{m} \approx 120\text{ m}.$$

c) Juna kiihdyttää tasaisesti matkan s_1, kulkee tasaisella nopeudella matkan s_2 ja hidastaa asemalle saapuessaan matkan s_3.

Pysäkkien välinen matka on $s = s_1 + s_2 + s_3$.

Junan hidastuvuus jarrutuksen aikana

$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v}{t_3} = \frac{v}{t_3} (= -\frac{15{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{25{,}3\,\text{s}} = -0{,}5968\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

Junan kulkema matka kiihdytyksessä

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{1}{2} \frac{v}{t_1} {t_1}^2 = \frac{1}{2} v t_1$$

Junan kulkema matka tasaisessa liikkeessä $s_2 = v t_2$

Junan kulkema matka tasaisesti hidastuvassa liikkeessä

$$s_3 = v t_3 + \frac{1}{2} a_2 t^2 = v t_3 + \frac{1}{2} (-\frac{v}{t_3}) {t_3}^2 = v t_3 - \frac{1}{2} v t_3 = \frac{1}{2} v t_3$$

Pysäkkien välimatka $s = s_1 + s_2 + s_3$ on

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} v t_1 + v t_2 + \frac{1}{2} v t_3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 15{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15{,}6\,\text{s} + 15{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 51\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 15{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 25{,}3\,\text{s} \\ &= 1078{,}895\,\text{m} \approx 1100\,\text{m}. \end{aligned}$$

Tehtävä 3.12.

a) Aikavälillä 0 s … 1,2 s liike on tasaisesti kiihtyvää, sillä kiihtyvyys ei muutu. Aikavälillä 1,2 s … 1,6 s liike on tasaisesti hidastuvaa, sillä kiihtyvyys on negatiivinen eikä kiihtyvyyden suuruus muutu.

b) Kappaleen nopeus on (t, v)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan ja akselien rajoittama fysikaalinen pinta-ala. Nopeus kasvaa, kun fysikaalinen pinta-ala on positiivinen ja pienenee, kun fysikaalinen pinta-ala on negatiivinen.

Määritetään fysikaaliset pinta-alat eli nopeuden muutokset kiihtyvälle liikkeelle v_1 ja hidastuvalle liikkeelle v_2.

$$v_1 = 0{,}60\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}2\,\text{s} = 0{,}72\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = -0{,}20\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1{,}6 - 1{,}2)\,\text{s} = -0{,}080\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Kappaleen nopeus ajanhetkellä 16 s on

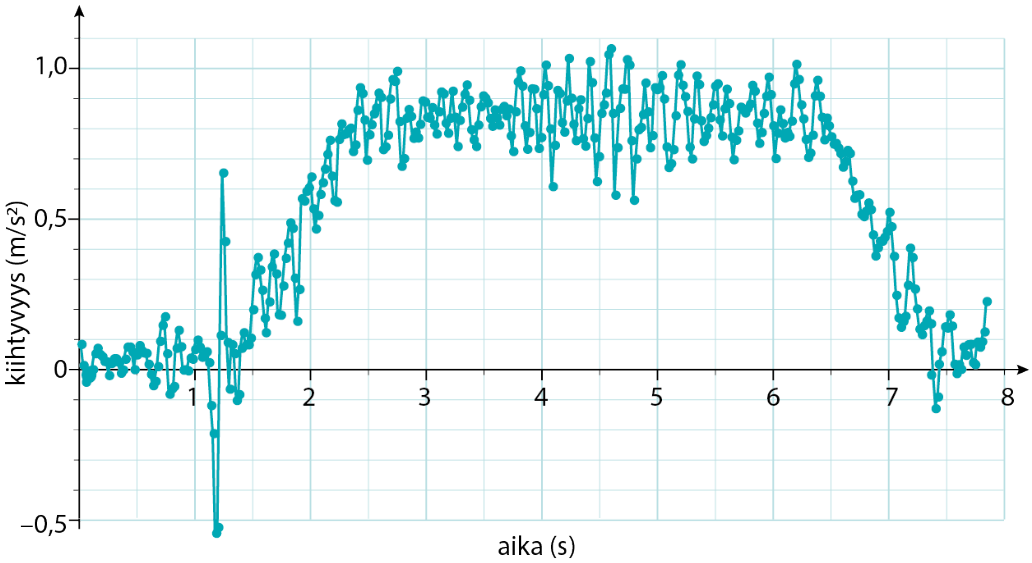
$$v = v_1 + v_2 = 0{,}72\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}08\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}64\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Kappaleen alkumatka s_1 on tasaisesti kiihtyvää liikettä ja loppumatka s_2 tasaisesti hidastuvaa liikettä. Kappaleen kulkema kokonaismatka on näiden matkojen summa.

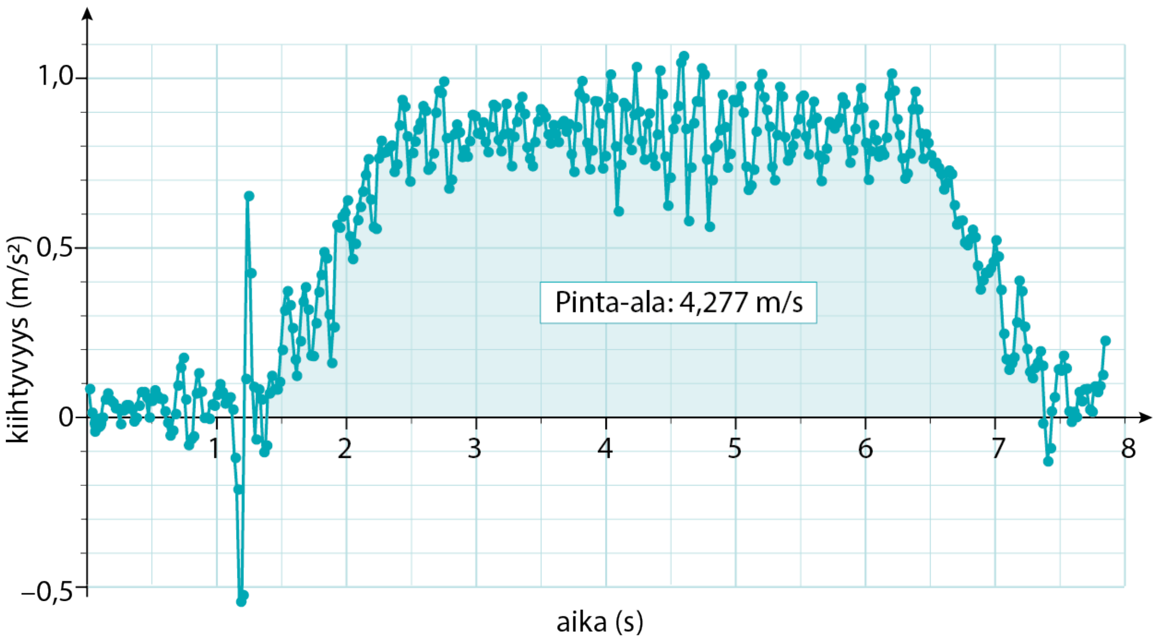
$$\begin{aligned}
s &= s_1 + s_2 \\
&= \frac{1}{2}a_1 t_1{}^2 + v_1 t_2 + \frac{1}{2}a_2 t_2{}^2. \\
&= \frac{1}{2}\cdot 0{,}60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(1{,}2\,\mathrm{s})^2 + 0{,}72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 0{,}40\,\mathrm{s} + \frac{1}{2}\cdot\left(-0{,}20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\cdot(0{,}40\,\mathrm{s})^2 \\
&= 0{,}704\,\mathrm{m} \approx 70\ \mathrm{cm}
\end{aligned}$$

Tehtävä 3.13.

a)



b) Hissin nopeus saadaan (t, a)-koordinaatiston kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään fysikaalinen pinta-ala.



Hissin nopeus kiihdytyksen jälkeen
v = 4,277 m/s ≈ 4,3 m/s.

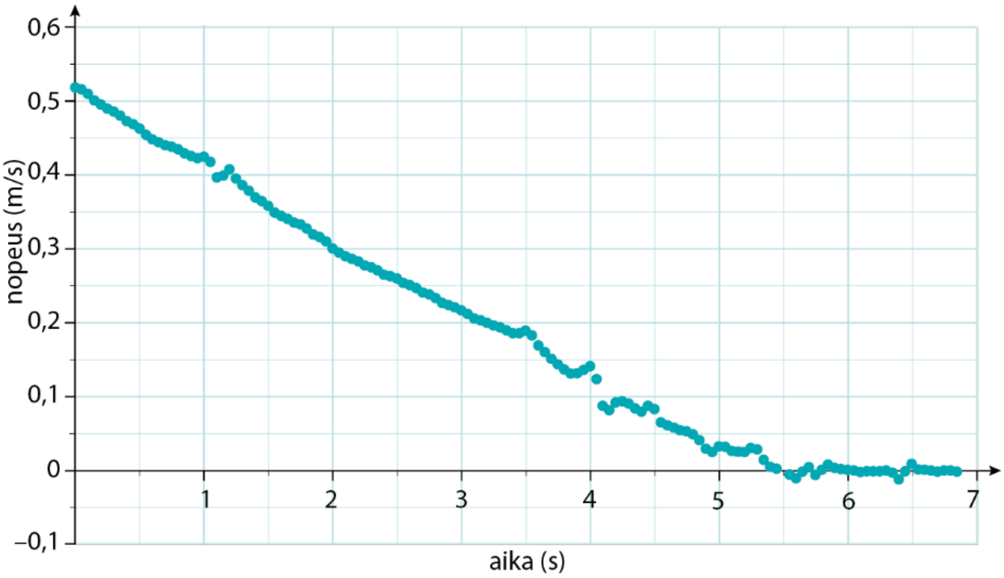
c) kiihdytyksen kesto Δt = 5,96 s

Hissin keskimääräinen kiihtyvyys on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4{,}277\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5{,}96\,\text{s}} = 0{,}7176\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0{,}72\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

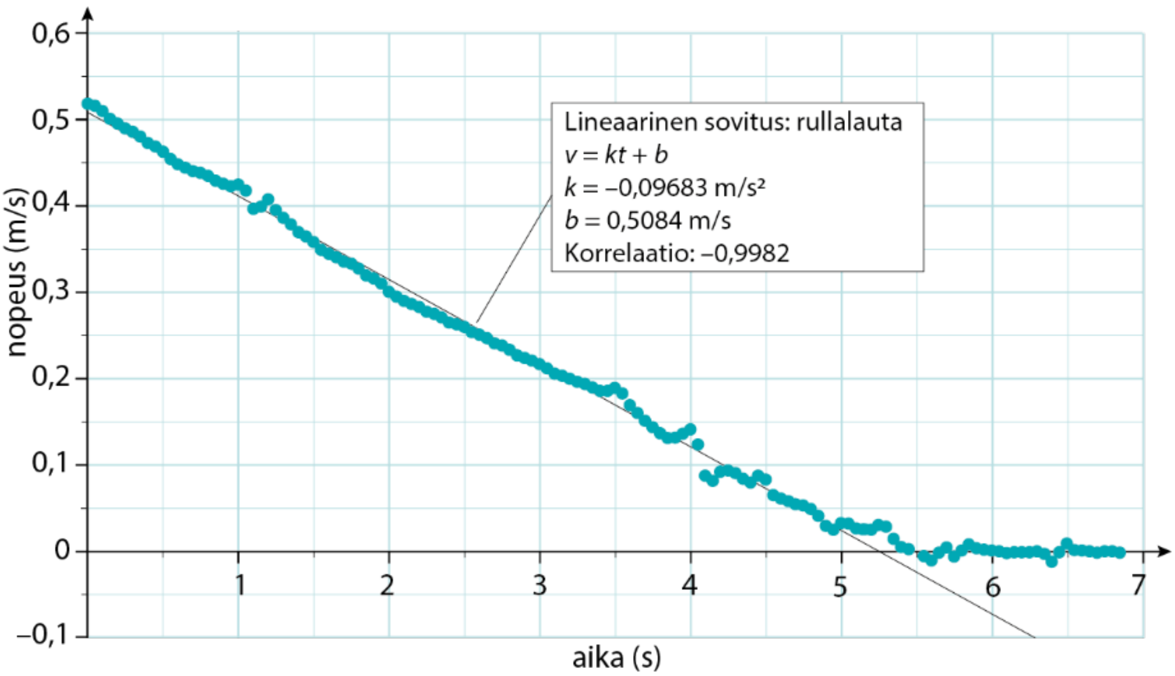
Tehtävä 3.14.

a)



Rullalaudan liike oli likimain tasaisesti hidastuvaa, sillä nopeus pieneni joka sekunti suunnilleen yhtä paljon. Ajanhetkellä 5,5 s lauta pysähtyi, sillä nopeus on siitä ajanhetkestä eteenpäin nolla.

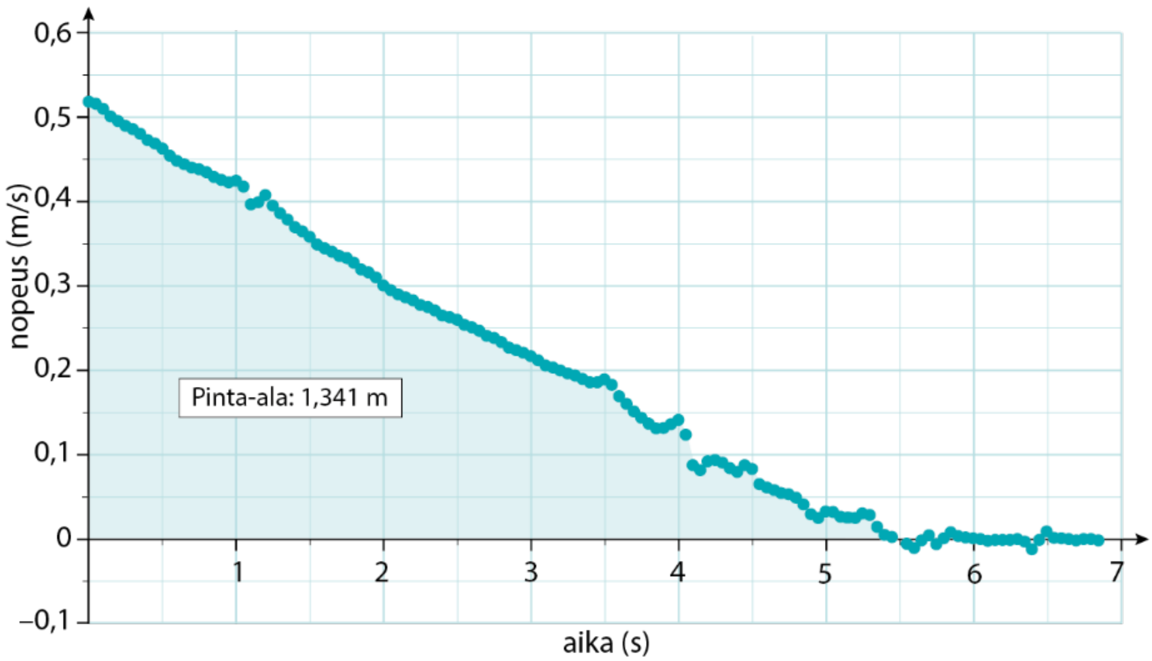
b) Rullalaudan kiihtyvyys on (t, v)-koordinaatistossa olevan kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin.



Rullalaudan kiihtyvyys oli
$a = -0{,}09683\ \mathrm{m/s^2} \approx -0{,}097\ \mathrm{m/s^2}$.

Kiihtyvyyden suunta oli vastakkaiseen suuntaan alussa olevaan nopeuteen nähden.

c) Rullalaudan kulkema matka on (t, v)-koordinaatistossa olevan kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalinen pinta-ala.

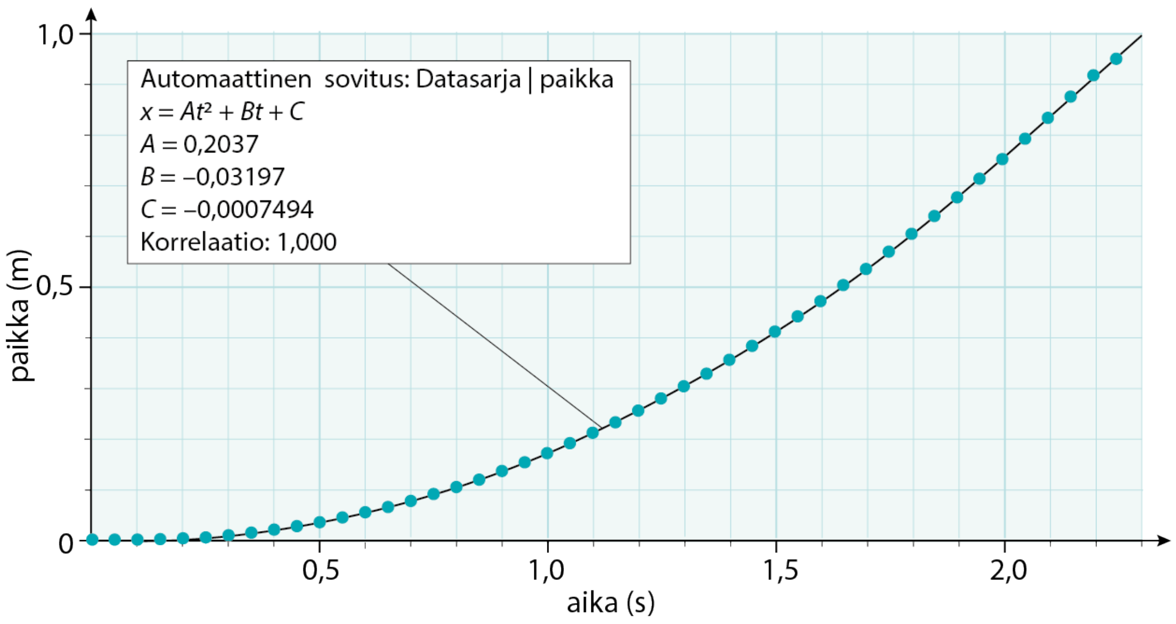


Rullalaudan liikkuma matka tönäisyn jälkeen

s = 1,341 m ≈ 1,3 m.

Tehtävä 3.15.

a)



b) Kun vaunu on tasaisessa liikkeessä, vaunun paikka voidaan ilmoittaa ajan funktiona yhtälöllä $x = vt + x_0$. Liikettä voidaan kuvata (t, x)-koordinaatistossa suoralla.

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan vaunun paikka on ajan funktiona $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Koska mittausaineistoon voitiin sovittaa toisen asteen polynomifunktio, vaunun liike on tasaisesti kiihtyvää.

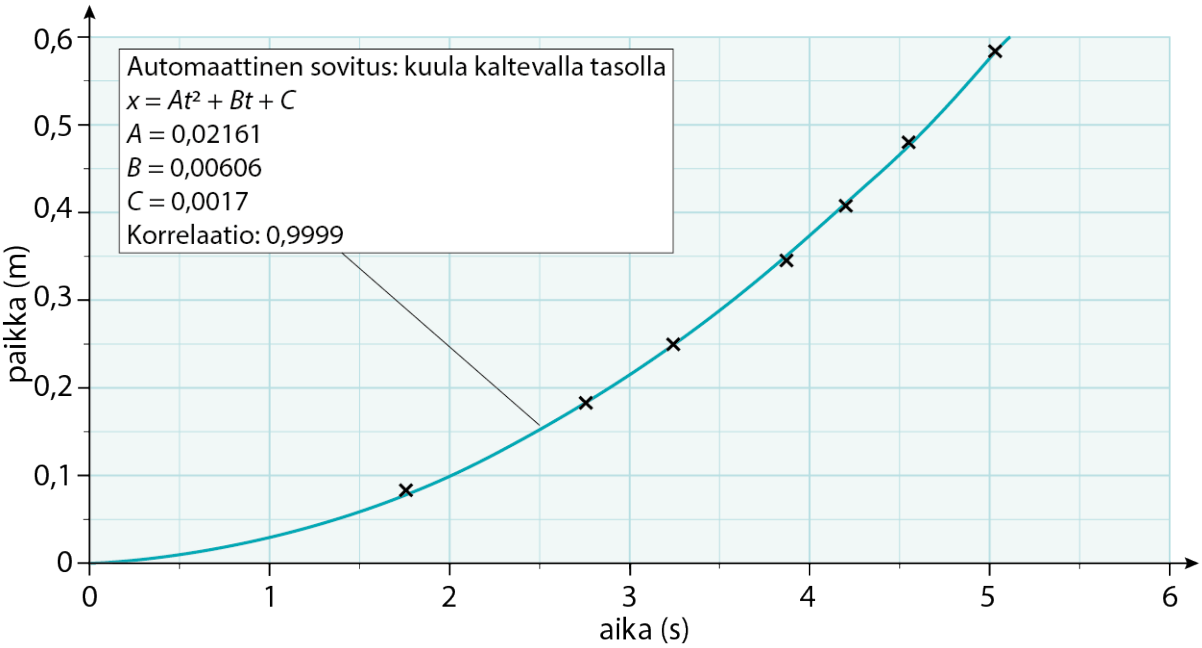
c) Sovitefunktiosta saadaan tasaisesti kiihtyvän liikkeen yhtälöön kertoimet. Kun yhtälö on muotoa $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, sovituksen mukaan vakio $A = \frac{1}{2}a$.

Tällöin vaunun kiihtyvyys on

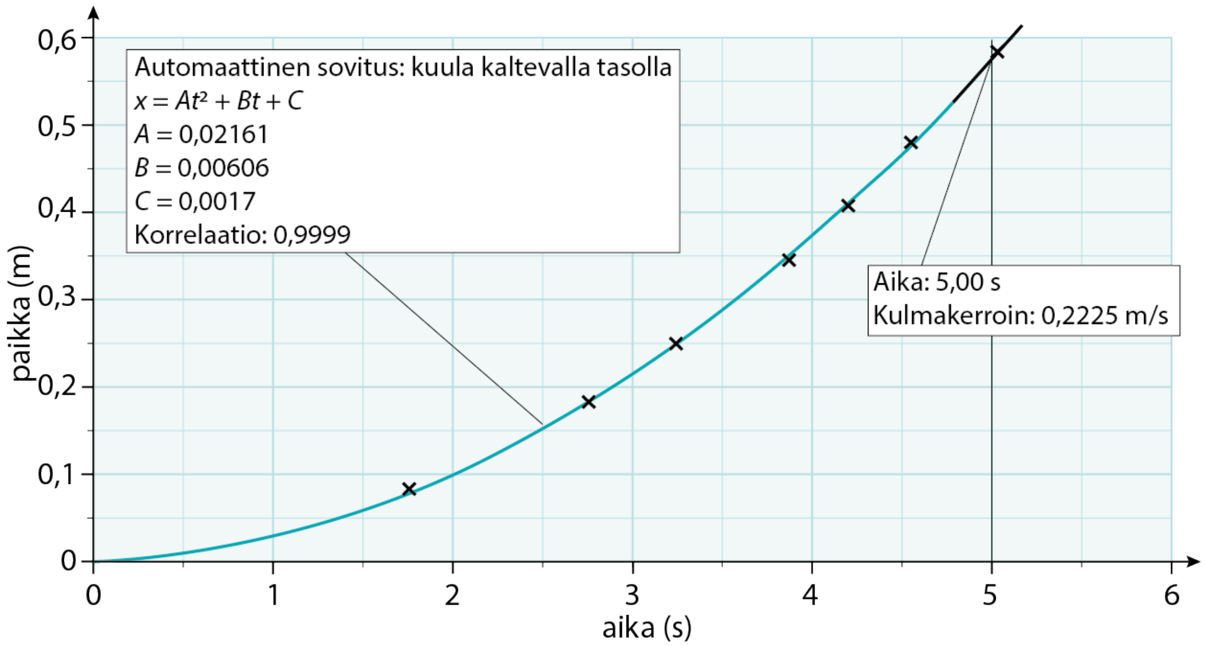
$a = 2A = 2 \cdot 0{,}2037\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}4074\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0{,}41\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Tehtävä 3.16.

a)



b) Kuulan hetkellinen nopeus saadaan
(t, x)-koordinaatiston sovitetun suoran jyrkkyydestä eli sovitetut tangenttisuoran fysikaalisesta kulmakertoimesta. Sovitetaan tangenttisuora kuvaajan loppuosaan ja määritetään tangenttisuoran fysikaalinen kulmakerroin.



Kuulan nopeus vierimisen lopussa oli

v = 0,2225 m/s ≈ 0,22 m/s.

c) Tasaisesti kiihtyvän liikkeen malli kappaleen paikalle on

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Sovitetaan mittauspisteisiin 2. asteen polynomifunktio ja määritetään sovituskäyrän t^2-termin arvosta kiihtyvyys.

a-kohdan sovituksen mukaan $A = \frac{1}{2}a = 0{,}02161\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Kuulan kiihtyvyys on

$$a = 2 \cdot 0{,}02161\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}04322\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0{,}043\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Syvennä

Tehtävä 3.18.

a) Kiihtyvyysantureita käytetään esimerkiksi autoissa ajonvakaudenhallintajärjestelmissä ja mäkilähtöavustimissa sekä kännyköiden näytön käännön hallinnassa.

b) Piipuolijohde on kiihtyvyysanturien perusmateriaali. Kiihtyvyysanturin sisällä on piistä valmistettu punnus, joka on ripustettu piistä valmistetulla jousella. Jousi sallii punnuksen liikkumisen auton kiihdyttäessä. Punnuksen liike aiheuttaa signaalin, joka välitetään digitaalisesti ESC-järjestelmään. Signaalin avulla määritetään auton kiihtyvyys.

c) Punnuksen tilavuus
V = 50 µm · 200 µm · 500 µm = $5 \cdot 10^{-12}$ m^3.

Piin tiheys ρ = 2 330 kg/m^3

Jousivakio k = 2,0 N/m

Auton alkunopeus
v_1 = 40 km/h = 40/3,6 m/s = 11,111 m/s

Auton loppunopeus v_2 = 0 m/s

Auton törmäysaika t = 0,5 s

Lasketaan punnuksen massa

$$m = \rho V = 2\,330\ \text{kg/m}^3 \cdot 5 \cdot 10^{-12}\ \text{m}^3 = 11{,}65 \cdot 10^{-9}\ \text{kg}$$

Arvioidaan, että autoon ja anturiin kohdistuva kiihtyvyys pysyy likipitäen samana koko pysähtymisen ajan.

Auton kiihtyvyys on

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{-11{,}111\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}5\ \text{s}} = -22{,}222\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Miinusmerkki tarkoittaa sitä, että auton nopeus pienenee törmäyksessä, jolloin Si-punnukseen kohdistuva voima on

$$F = ma = 11{,}65 \cdot 10^{-9}\ \text{kg} \cdot 22{,}222\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 258{,}8863 \cdot 10^{-9}\ \text{N}.$$

Jousi puolestaan kohdistaa punnukseen voiman *F = kx*, joka on törmäyksessä samansuuruinen mutta vastakkaissuuntainen kuin kiihtyvyys. Tästä saadaan ratkaistua punnuksen etäisyyden muutos

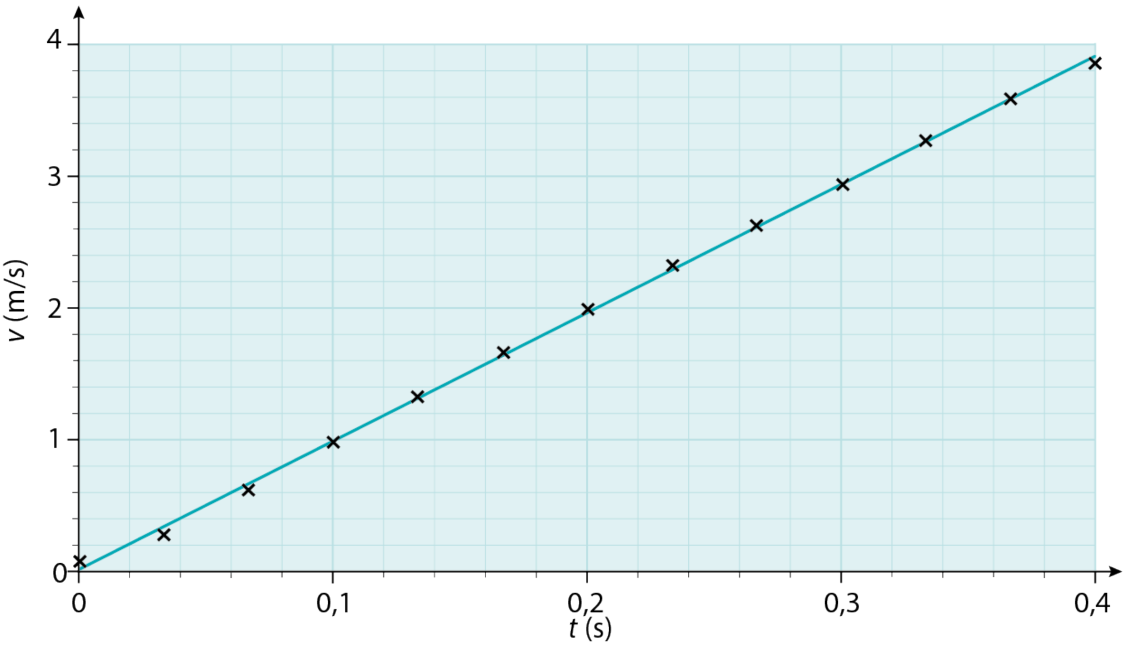
$$F = kx$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{258{,}8863 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{N}}{2{,}0\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = 129{,}44315 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m} \approx 130\,\mathrm{nm}.$$

Törmäystilanteessa punnus liikkuu anturin sisällä 130 nm.

Tehtävä 3.19.

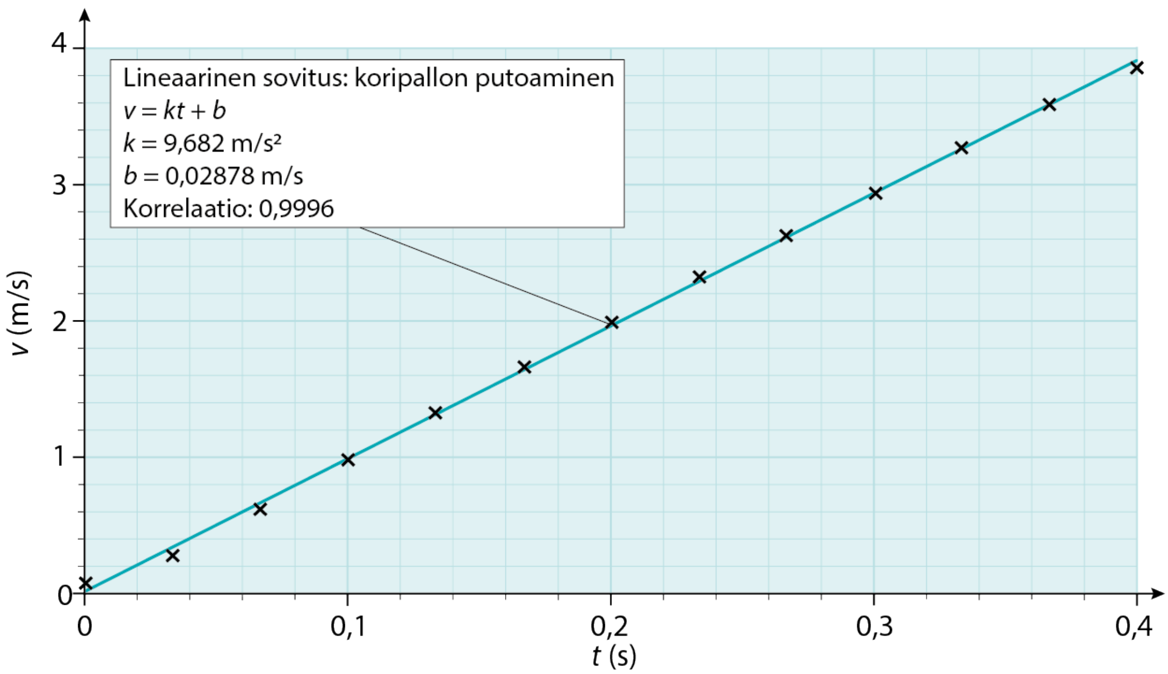
a)



(akselit oikeinpäin 1 p, mittauspisteet näkyvillä 1 p, sovitettu suora 1 p)

Koska kuvaaja on (t, v)-koordinaatistossa nouseva suora, koripallon liike on tasaisesti kiihtyvää. (tasaisesti kiihtyvä 1 p, perustelut kuvaajaan viitaten 1 p)

b) Koripallon kiihtyvyys saadaan määritettyä (t, v)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. (1 p)



(Suoran kulmakertoimen määritys 1 p)

Koripallon putoamiskiihtyvyys kulmakertoimesta määritettynä on g = 9,682 m/s^2 ≈ 9,68 m/s^2.(1 p)

c) Koripallo on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä alaspäin ja koripallon kiihtyvyys on putoamiskiihtyvyys, $a = g$. Matka ajanhetkellä t tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevalle kappaleelle on

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2. \qquad (1 \text{ p})$$

Koripallon alkunopeus on nolla, joten koripallon kulkema matka on

$$s = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}68 \, \frac{m}{s^2} (2{,}5 \text{ s})^2 = 30{,}25 \text{ m} \approx 30 \text{ m}. \quad (2 \text{ p})$$

d) Koripallon kulkema matka s = 0,65 m

Koripallon lentoaika t = 0,27 s

Koripallon kiihtyvyys $a = g = -9{,}81\ \text{m/s}^2$.

Koripallo on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä, kun koripallo kulkee ylöspäin. Hidastuvuus on putoamiskiihtyvyys.

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ eli $s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$.

(1 p sisältää maininnan liiketilasta)

Ratkaistaan koripallon lähtönopeus

$$v_0 t = s - \frac{1}{2}gt^2 \text{ (1 p.)}$$

$$v_0 = \frac{s}{t} - \frac{1}{2}gt \text{ (1 p.)}$$

$$v_0 = \frac{0{,}65\,\text{m}}{0{,}364\,\text{s}} - \frac{1}{2}\cdot(-9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2})\cdot 0{,}364\,\text{s} = 3{,}571134274\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}. \text{ (1 p.)}$$

Huom! d-kohdan voi laskea myös b-kohdan arvolla.

4. Liikkeen mallintaminen

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 4.1.

a) B

b) B

c) B

d) C

e) C

Tehtävä 4.2.

Putoamismatka s = 3,8 m

Kun vasara putoaa, se on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Vasaran kiihtyvyys on putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2.

Vasaran putoamisaika saadaan putoamismatkan avulla

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

$$2s = gt^2$$

$$t^2 = \frac{2s}{g}$$

Vasaran putoamisaika on

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}8\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0{,}88018\,\mathrm{s} \approx 0{,}88\,\mathrm{s}.$$

Tehtävä 4.3.

a) Kävelijän A nopeus ei muutu, joten kävelijä A on tasaisessa liikkeessä. Kävelijän B nopeus kasvaa joka sekunti yhtä paljon, joten kävelijä B on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä.

b) Kävelymatka saadaan määritettyä (t, v)-koordinaatiston kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään kävelijöiden nopeuksien kuvaajien fysikaaliset pinta-alat

$s_{\mathrm{A}} = 2{,}3\,\mathrm{m} \cdot 6{,}0\,\mathrm{s} = 13{,}8\,\mathrm{m} \approx 14\,\mathrm{m},$

$s_{\mathrm{B}} = 0{,}5 \cdot 3{,}5\,\mathrm{m} \cdot 6{,}0\,\mathrm{s} = 10{,}5\,\mathrm{m} \approx 11\,\mathrm{m}.$

Kävelijä A kulkee siten pidemmän matkan.

Tehtävä 4.4.

Potkulautailijan kiihdytysaika t = 6,1 s

Potkulautailijan matka s = 18 m

Potkulautailija on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jolloin potkulautailijan kiihtyvyys saadaan matkan yhtälöstä

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 18\,\text{m}}{(6{,}1\,\text{s})^2} = 0{,}96748\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0{,}97\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehtävä 4.5.

a) Pallo putoaa maahan noin 9,8 metrin päässä heittopaikasta.

b) Pallo putoaa maahan noin 4,8 metrin päässä heittopaikasta.

c) Jos lähtönopeus kaksinkertaistuu, heiton pituus kaksinkertaistuu.

d) Heittoliikkeessä kappaleen vaakasuuntainen liike on tasaista ja pystysuuntainen liike tasaisesti kiihtyvää. Tämän vuoksi pystysuuntainen nopeus kasvaa nopeasti vaakasuuntaista nopeutta suuremmaksi, jolloin lähtökorkeuden merkitys heiton pituuteen pienenee.

Tehtävä 4.6.

Kävyn nopeus alussa v_0 = 8,6 m/s

a) Kävyn lentoaika t = 0,31 s

Kun käpy heitetään ylöspäin, käpy on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä ja kävyn hidastuvuus on putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2. Kävyn nopeus 0,31 s:n kuluttua on

$$v = v_0 + at = v_0 - gt = 8{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}31\,\text{s} = 5{,}5589\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 5{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Kävyn lentoaika t = 0,31 s

Käpy on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä, jossa kiihtyvyys on putoamiskiihtyvyys. Kiihtyvyyden suunta on liikkeen suuntaan nähden vastakkainen. Kävyn kulkema matka on

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= 8{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 0{,}31\,\text{s} + \frac{1}{2}\cdot\left(-9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\cdot(0{,}31\,\text{s})^2 = 2{,}1946\,\text{m} \approx 2{,}2\,\text{m}.$$

Tehtävä 4.7.

a) Koska pyöräilijän A paikan kuvaaja on suora, pyöräilijä etenee joka sekunti yhtä pitkän matkan. Pyöräilijä on tasaisessa liikkeessä.

b) (t, x)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan jyrkkyys kuvaa kappaleen nopeutta. Pyöräilijän B paikan kuvaaja on nouseva käyrä, jonka jyrkkyys kasvaa. Tästä voidaan päätellä, että alussa pyöräilijän sekunnissa kulkema matka on lyhyempi kuin lopussa. Lopussa nopeus on siis suurempi, ja pyöräilijän liike on kiihtyvää. Kuvaaja on paraabelin puolikkaan muotoinen. Paraabeli on 2. asteen polynomifunktion kuvaaja. Toisen asteen polynomifunktio on siis samaa muotoa kuin tasaisesti kiihtyvän liikkeen paikan yhtälö. Niinpä pyöräilijän B liike on tasaisesti kiihtyvää.

c) Pyöräilijä B saavuttaa pyöräilijän A, kun heillä on sama paikka. Pyöräilijöiden paikka on sama, kun käyrät leikkaavat toisiinsa. Tämä tapahtuu ajanhetkellä t = 4,6 s.

d) (t, x)-koordinaatistoon laaditulle kuvaajalle piirretyn tangentin jyrkkyys kuvaa kappaleen nopeutta. Pyöräilijöiden paikan kuvaajien jyrkkyys on sama ajanhetkellä t = 2,4 s.

Sovella

Tehtävä 4.8.

a) Putoamismatka y = 1,4 m

Ei huomioida ilmanvastusta.

Putoamisliike on tasaisesti kiihtyvää.

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{2y}{g} = t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}4\,\text{m}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0{,}53425\,\text{s} \approx 0{,}53\,\text{s}$$

b) Nopeus vaakasuunnassa $v = 23\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{23}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Putoamisaika a-kohdan mukaan on $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$

Vaakasuunnassa liike on tasaista. Ratsastajan vaakasuunnassa liikkuma matka on

$$x = vt = v\sqrt{\frac{2y}{g}} = \frac{23}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}4\,\text{m}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 3{,}41326\,\text{m} \approx 3{,}4\,\text{m}.$$

Tehtävä 4.9.

a) Suoraan ylöspäin heitetty kuula on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä, ja alaspäin heitetty kuula on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Molempien nopeus muuttuu 9,81 m/s^2.

b) Kun kuula liikkuu ylöspäin, se on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä. Sen kiihtyvyys on −9,81 m/s^2, jos positiivinen suunta on ylöspäin. Kun nopeus on hidastunut nollaan, kuula on saavuttanut lakipisteensä, jonka jälkeen sen suunta muuttuu ja nopeus alkaa kasvaa. Kun kuula on takaisin heittokohdassa, sillä on sama nopeus alaspäin kuin millä se heitettiin ylöspäin, sillä kiihtyvyys on koko lennon ajan yhtä suuri. Heittokohdassa kuula siis liikkuu nopeudella 20 m/s alaspäin. Tämä on sama nopeus kuin millä toinen kuula heitetään alaspäin. Näin ollen molempien kuulien nopeudet ovat samat juuri ennen niiden osumista maahan.

Tehtävä 4.10.

Kiipeilijän putoamismatka s_1 = 2,6 m

Kiipeilijän kiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Patjan liukumismatka s_2 = 1,4 m

Patjan hidastuvuus a = 1,8 m/s^2

a) Kun kiipeilijä putoaa, on kiipeilijä kiihtyvässä liikkeessä ja kiipeilijän kiihtyvyys on putoamiskiihtyvyys. Kiipeilijän putoamisaika

$$s_1 = \frac{1}{2}at^2$$

$$s_1 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t^2 = \frac{2s_1}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}6\,\text{m}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0{,}728\,\text{s} \approx 0{,}73\,\text{s}.$$

b) Patja on hidastuvassa liikkeessä, jolloin patjan kulkema matka kiipeilijän putoamisaikana t on

$$s_2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Patja pitää laittaa liukumaan nopeudella a-kohdan putoamisaikana

$$s_2 = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_0 t = s_2 + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_0 = \frac{s_2}{t} + \frac{1}{2} a t$$

$$= \frac{1{,}4\,\mathrm{m}}{0{,}728\,\mathrm{s}} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}728\,\mathrm{s} = 2{,}578\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 2{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tehtävä 4.11.

Veneen nopeus v = 2,8 m/s

Paketin putoamismatka s = 5,1 m

Pallo on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä ja pallon kiihtyvyys on putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2.

Lasketaan pallon putoamisaika tasaisesti kiihtyvän liikkeen matkan avulla

$$s = \frac{1}{2}at^2$$
$$s = \frac{1}{2}gt^2$$
$$t^2 = \frac{2s}{g}$$
$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Vene kulkee vakionopeudella. Lasketaan, kuinka pitkän matkan vene kulkee sinä aikana, kun pallo putoaa.

$$x = vt = v\sqrt{\frac{2s}{g}} = 2{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}1\,\text{m}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2{,}8551\,\text{m} \approx 2{,}9\text{ m}.$$

Pallo osuu 2,9 m:n päähän veneen keulasta.

Tehtävä 4.12.

Pyöräilijän nopeus alussa $v_0 = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Pyöräilijän kiihtyvyys $a = 0{,}92\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Pyöräilijän kulkema aika $t = 3{,}2$ s

Pyöräilijä on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä.

Pyöräilijän nopeus 3,2 sekunnin kuluttua

$$v = v_0 + at = 2{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}} + 0{,}92\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 3{,}2\,\text{s} = 5{,}444\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 5{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Pyöräilijän matka tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä

$$\begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 2{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}t + \frac{1}{2}\cdot 0{,}92\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2 \\ &= 2{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}t + 0{,}46\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2. \end{aligned}$$

Kuljetun matkan ja ajan välillä on toiseen asteen riippuvuus.

c) Pyöräilijän kulkema matka s = 4,5 m

Pyöräilijän matka

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, josta saadaan

$\frac{1}{2}at^2 + v_0 t - s = 0.$

Sijoitetaan arvot ja ratkaistaan t laskimella tai toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

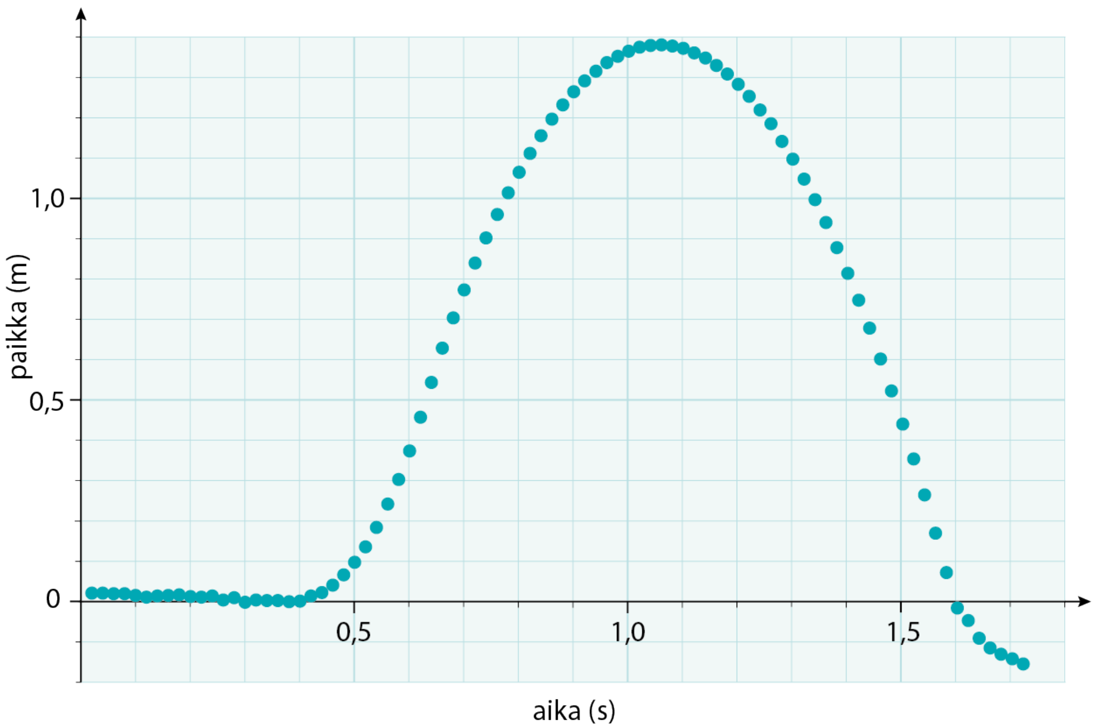
$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}92\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2 + 2{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}t - 4{,}5\,\text{m} = 0$$

$$t = 1{,}425895\,\text{s tai } (t = -6{,}8606779\,\text{s})$$

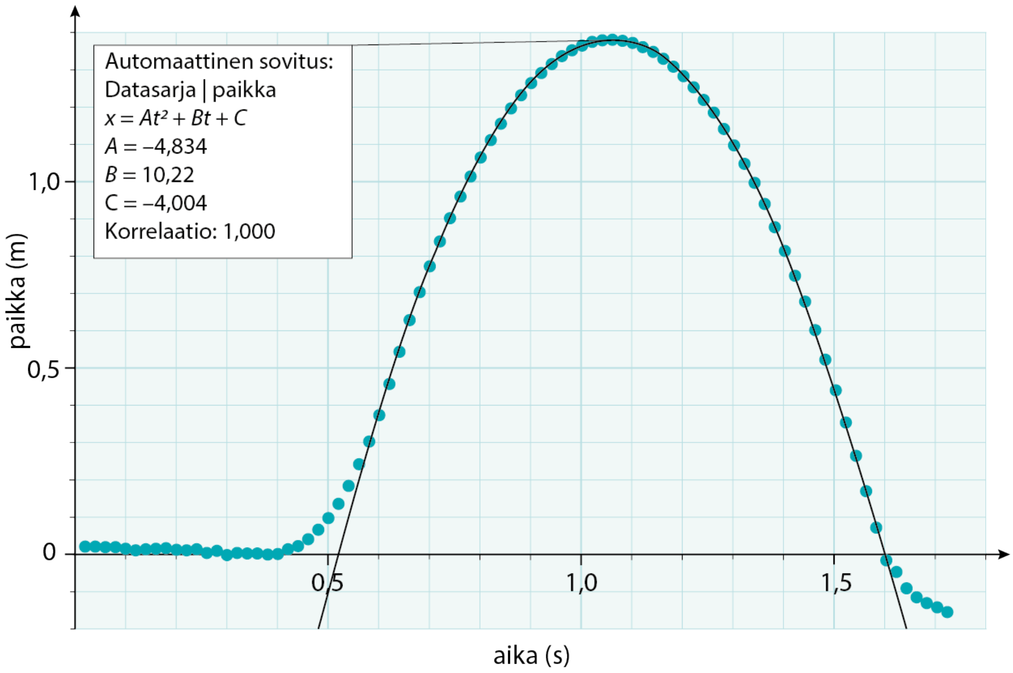
$$t \approx 1{,}4\,\text{s.}$$

Tehtävä 4.13.

a)



b)



c) Kun koripallo heitetään ylöspäin, koripallo on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä. Tällöin koripallon paikka

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Koska koripallon paikkaa kuvaa toisen asteen polynomifunktio, jossa toisen asteen termin kerroin on negatiivinen, mittauspisteisiin voidaan sovittaa alaspäin aukeava toisen asteen polynomifunktio.

d) c-kohdan mukaan koripallon paikka on $x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

b-kohdassa sovitetusta polynomifunktiosta

saadaan $A = \frac{1}{2}g$.

Tällöin mittauksen perusteella putoamiskiihtyvyydeksi

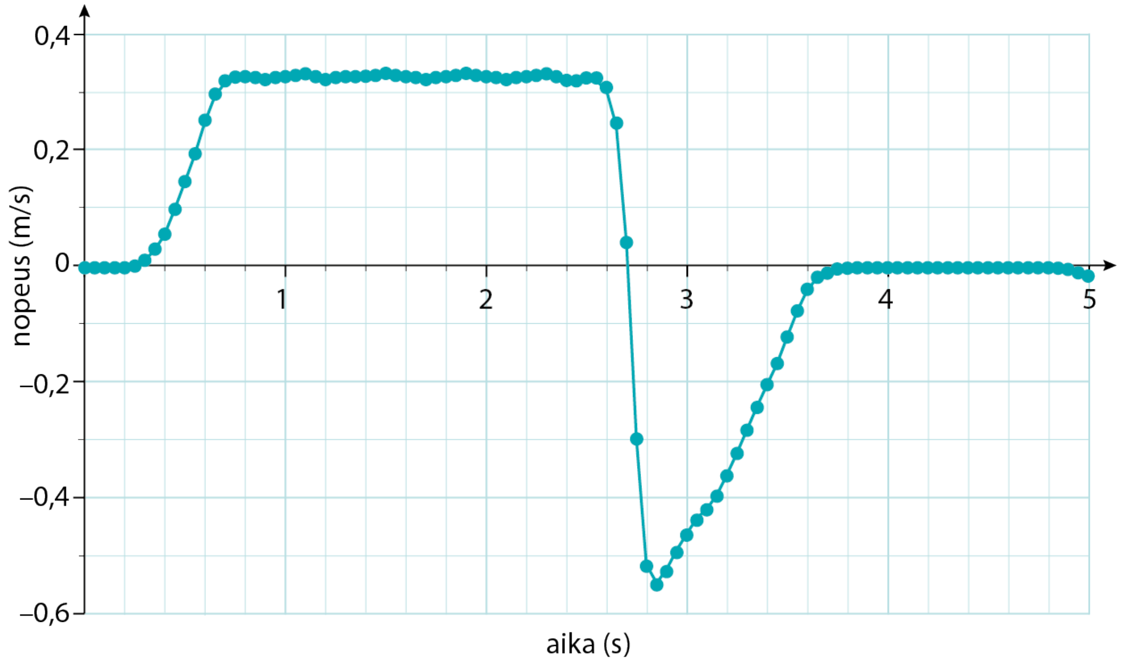
saadaan $g = 2A = 2 \cdot 4{,}834\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9{,}668\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 9{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Tulos on hieman pienempi kuin putoamiskiihtyvyyden kirjallisuusarvo, 9,81 m/s^2.

Esimerkiksi ilmanvastus ja käytetyn ultraäänianturin tarkkuus aiheuttavat virhettä mittaustulokseen.

Tehtävä 4.14.

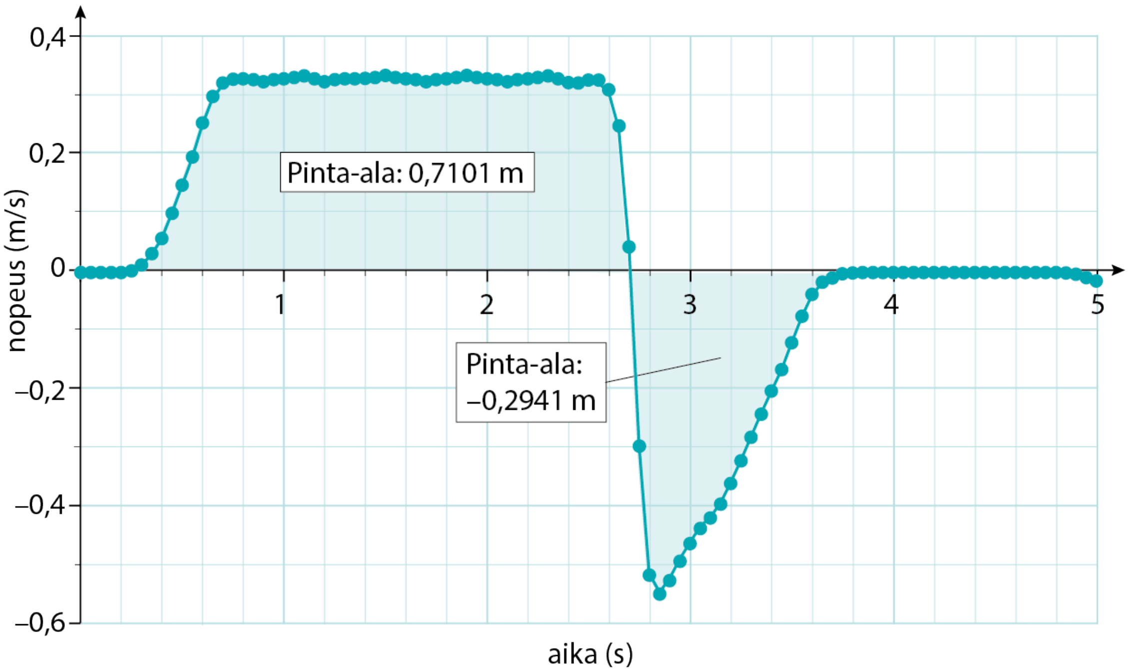
a)



b) Koska vaunun nopeuden suunta muuttui törmäyksessä, kuvaajan avulla voidaan todeta, että törmäys tapahtui ajanhetkellä, jossa vaunun nopeus muuttui positiivisesta negatiiviseksi. Ennen törmäystä vaunun nopeus oli likimain vakio, joten vaunun liike oli tasaista.

c) Vaunun kulkema matka saadaan (t, v)-koordinaatiston ja akselien rajoittaman alueen fysikaalisesta pinta-alasta.

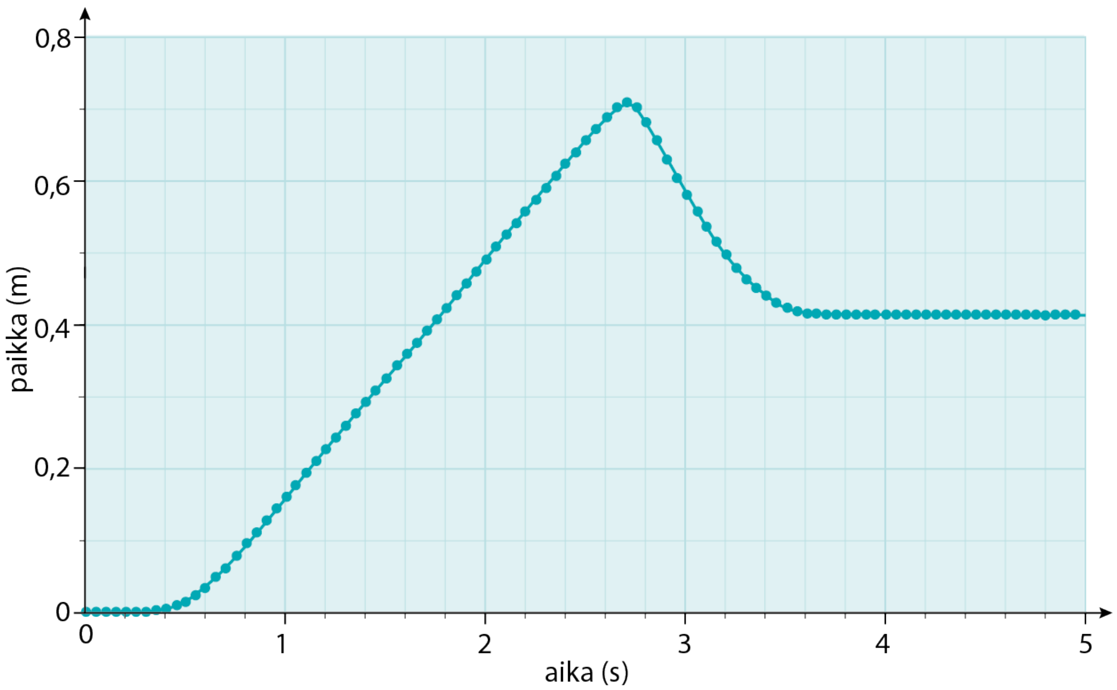
Määritetään ensin matka s_1, jonka vaunu liikkui ennen törmäystä ja matka s_2, jonka vaunu liikkui törmäyksen jälkeen.



Koska tehtävässä kysytään vaunun kulkeman kokonaismatkan pituutta, merkitään molemmat matkat, s_1 ja s_2, positiivisiksi. Vaunun kulkema matka mittauksen aikana on

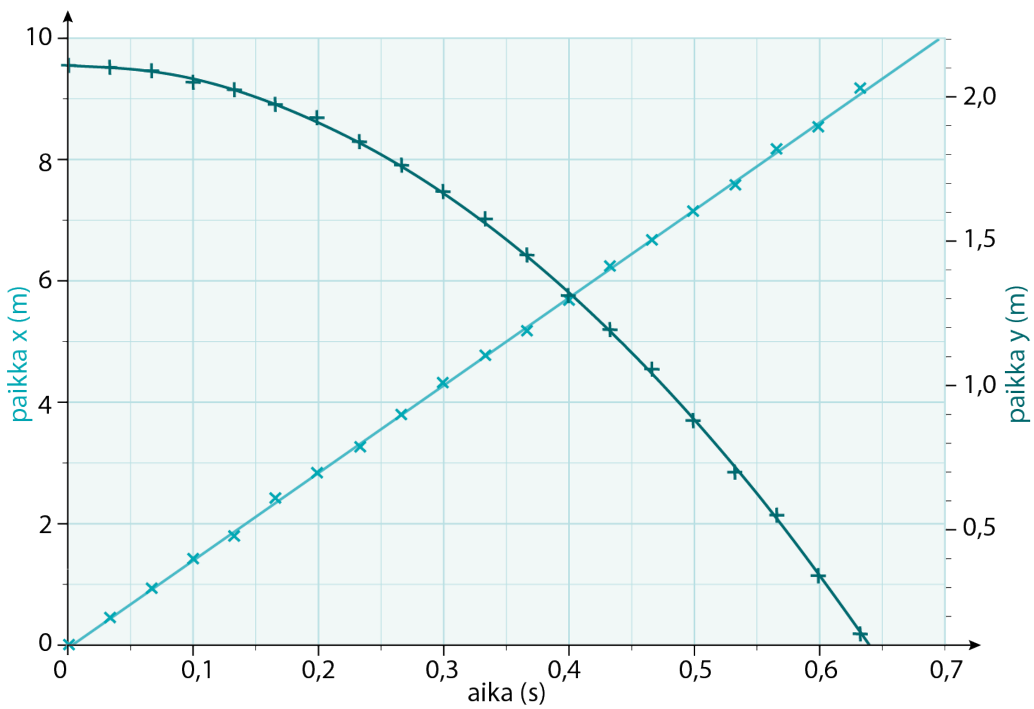
$s = s_1 + s_2 = 0{,}7101\ \text{m} + 0{,}2941\ \text{m} = 1{,}0042\ \text{m} \approx 1{,}00\ \text{m}$.

d) Vaunu kulkee alkukiihdytyksen jälkeen liki pitäen tasaisesti eteenpäin 0,71 m ajassa 0,75 s. Sen jälkeen vaunun kulkusuunta muuttuu, ja vaunu liikkuu takaisin päin 0,29 m siten, että vaunun nopeus hidastuu. Vaunu pysähtyy 3,8 s kohdalla.

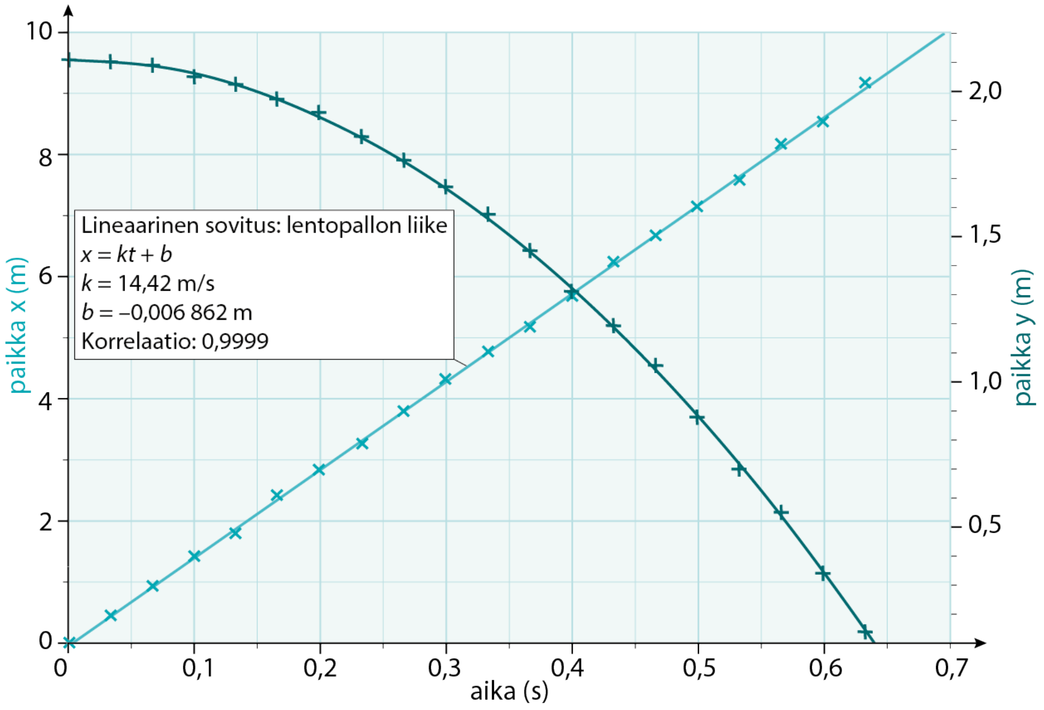


Tehtävä 4.15.

a) Koska vaakasuunnassa pallon liike on tasaista, sovitetaan mittauspisteisiin suora, sillä ajan ja paikan välillä on lineaarinen riippuvuus. Pystysuunnassa pallon liike on tasaisesti kiihtyvää, jolloin paikan ja ajan välillä on toisen asteen riippuvuus. Sovitetaan mittauspisteisiin toisen asteen polynomifunktio.

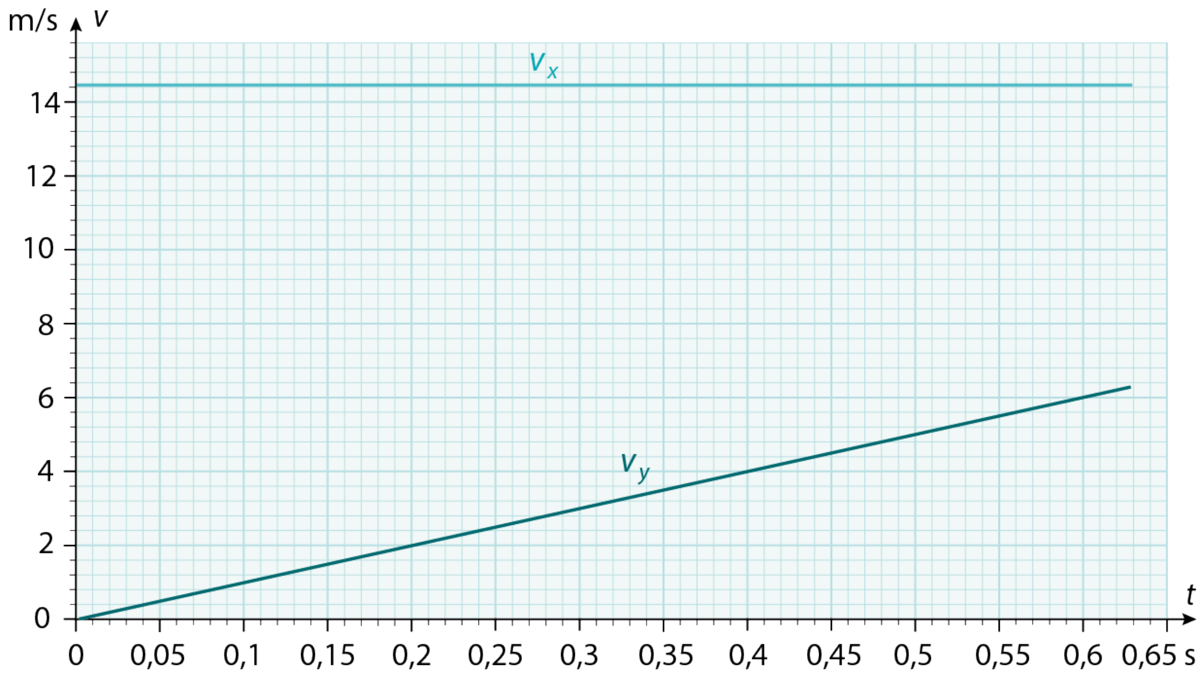


b) Nopeus saadaan (t, x)-koordinaatiston fysikaalisesta kulmakertoimesta. Nopeus vaakasuunnassa on



Pystysuuntaisen liikkeen kuvaaja on alkuhetkellä vaakasuora, joten pystysuuntainen nopeus on nolla. Tällöin lentopallon nopeus alkuhetkellä on
$v = v_x = 14{,}42\ \text{m/s} \approx 14\ \text{m/s}$.

c) Lentopallo on vaakasuunnassa tasaisessa liikkeessä, jolloin lentopallon nopeus vaakasuunnassa on koko lennon aikana b-kohdan mukaisesti v_0 = 14,42 m/s. Lentopallo on pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Määritetään lentopallon hetkellinen nopeus lennon lopussa (t, y)-koordinaatistoon piirretyn tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta. Lennon lopussa pystysuunnan nopeus on v_y = 6,3 m/s. Nopeus pystysuunnassa on alussa nolla. Koska pystysuunnassa liike on tasaisesti kiihtyvää, on (t, v_y)-koordinaatiston kuvaajana nouseva suora.



Tehtävä 4.16.

Havaitaan, että kolikot putoavat saman aikaisesti lattialle. Viivoittimen päällä oleva kolikko putoaa lähes suoraan lattialle ja pöydällä oleva kolikko putoaa pöydästä huomattavasti kauemmaksi. Molempiin kolikkoihin kohdistuu putoamisen aikana paino ja ilmanvastus, mutta ilmanvastus on hyvin merkityksetön. Paino aiheuttaa molempiin kolikkoon yhtä suuren kiihtyvyyden g, jolloin kolikot putoavat samanaikaisesti.

Tehtävä 4.17.

Kun tikka irtoaa kädestä, on tikan liike pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvää ja tikan kiihtyvyys on g, sillä ilmanvastus on merkityksetön. Myös maalitaulun liike pystysuunnassa on tasaisesti kiihtyvää ja kiihtyvyys on g. Tikka ja maalitaulu liikkuu pystysuunnassa samalla tavalla eli molempien paikka pystysuunnan lähtöpisteeseen muuttuu koko ajan yhtä paljon, jolloin tikka osuu maalitauluun.

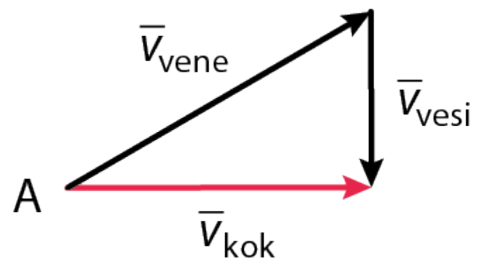
Syvennä

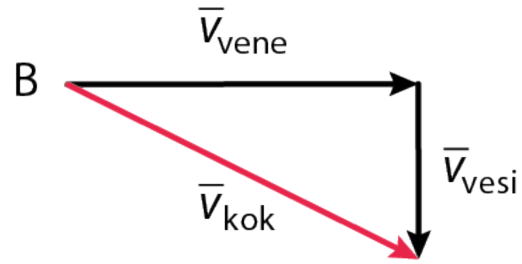
Tehtävä 4.18.

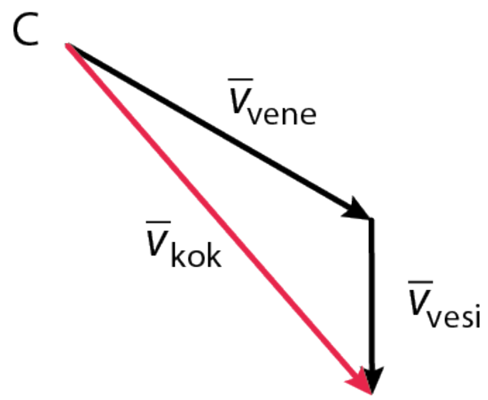
a) Veneen A nopeusvektorien summavektori osoittaa suoraan vastarantaa kohti. Muiden veneiden nopeuksien summavektorit osoittavat vinosti vastarantaan nähden, joten veneet B ja C liikkuvat myös virran suuntaisesti. Näin ollen vene A liikkuu lyhimmän matkan ylittäessään jokea.

b) Veneen B nopeus poikittaisessa suunnassa on kaikista suurin, joten vene B ylittää joen kaikkein lyhimmässä ajassa.

c) Veneen C nopeus on osittain virran suuntainen. Veneen A nopeus on osittain virran suuntaa vastaan ja veneen B nopeus on kohtisuorassa virran suuntaan nähden. Näin ollen veneen C kokonaisnopeus on suurin.







Tehtävä 4.19.

a) Metallin lämpötila T = 300 K

Boltzmannin vakio $k_B = 1{,}380658 \cdot 10^{-23}$ J/K

Elektronin massa $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg

Elektronien nopeuden suuruutta arvioidaan Druden mallin avulla

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

$$v_e^2 = \frac{3k_B T}{m_e}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$$

$$= \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}380658 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300\text{K}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\text{kg}}} = 116789{,}856\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1{,}2 \cdot 10^5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Kun metallin lämpötila on 300 K, elektronien nopeus on $v_e = 1{,}2 \cdot 10^5$ m/s.

b) Elektronit liikkuvat suurella nopeudella (v_e = 1,2 · 10^5 m/s) satunnaisiin suuntiin metallijohdon sisällä. Kun vapaiden elektronien nopeusvektorit lasketaan yhteen, tuloksena saadaan nollavektori. Siksi sähkövirta on nolla johdossa, jota ei ole kytketty osaksi virtapiiriä.

c) Elektronin kulkema matka (λ) voidaan laskea relaksaatioajan (τ) avulla. Törmäysaika on $\tau = 1 \cdot 10^{-12}$ s. Matka on

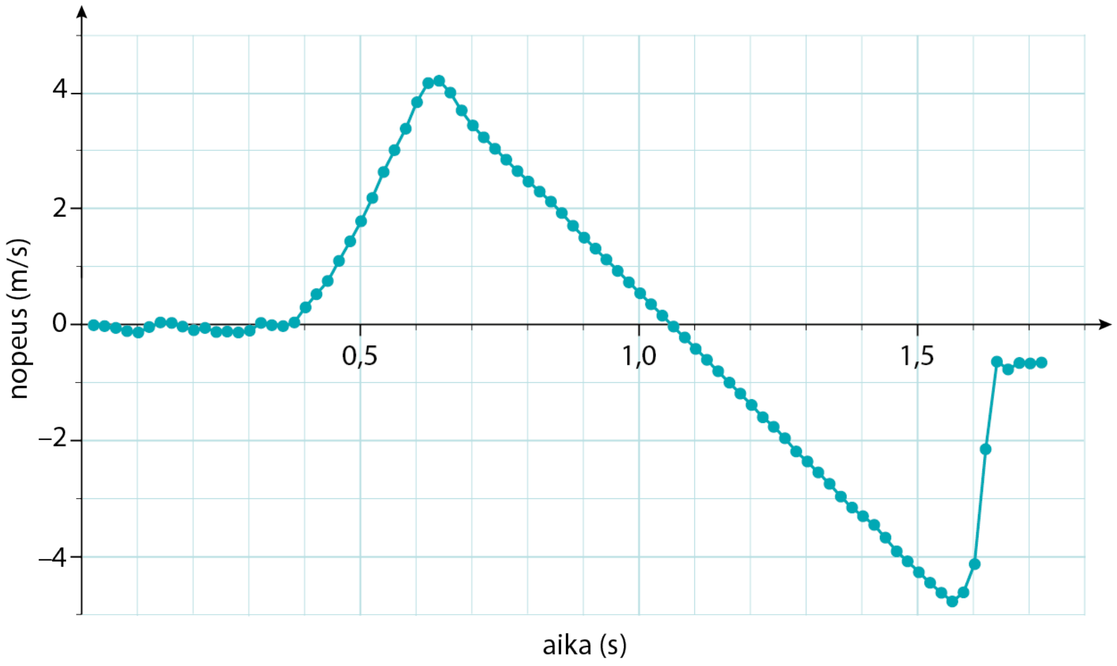
$$\lambda = v_e \tau = 116789{,}856\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \cdot 10^{-12}\,\text{s} = 1{,}168 \cdot 10^{-7}\,\text{m} \approx 120\,\text{nm}.$$

Elektronin kulkema matka kahden törmäyksen välillä on siis paljon pidempi kuin ionien välinen etäisyys (noin 0,3 nm) metallikiteessä.

d) Elektronien kulkema matka kahden törmäyksen välillä on paljon pidempi kuin ionien välinen etäisyys metallissa. Tästä voidaan päätellä, että elektronit eivät metallissa liikkuessaan todennäköisesti törmää metalli-ioneihin vaan johonkin muuhun, kuten lämpövärähtelystä aiheutuvien aaltoihin eli fononeihin, metallin epäpuhtauksiin tai kidevirheisiin.

Tehtävä 4.20.

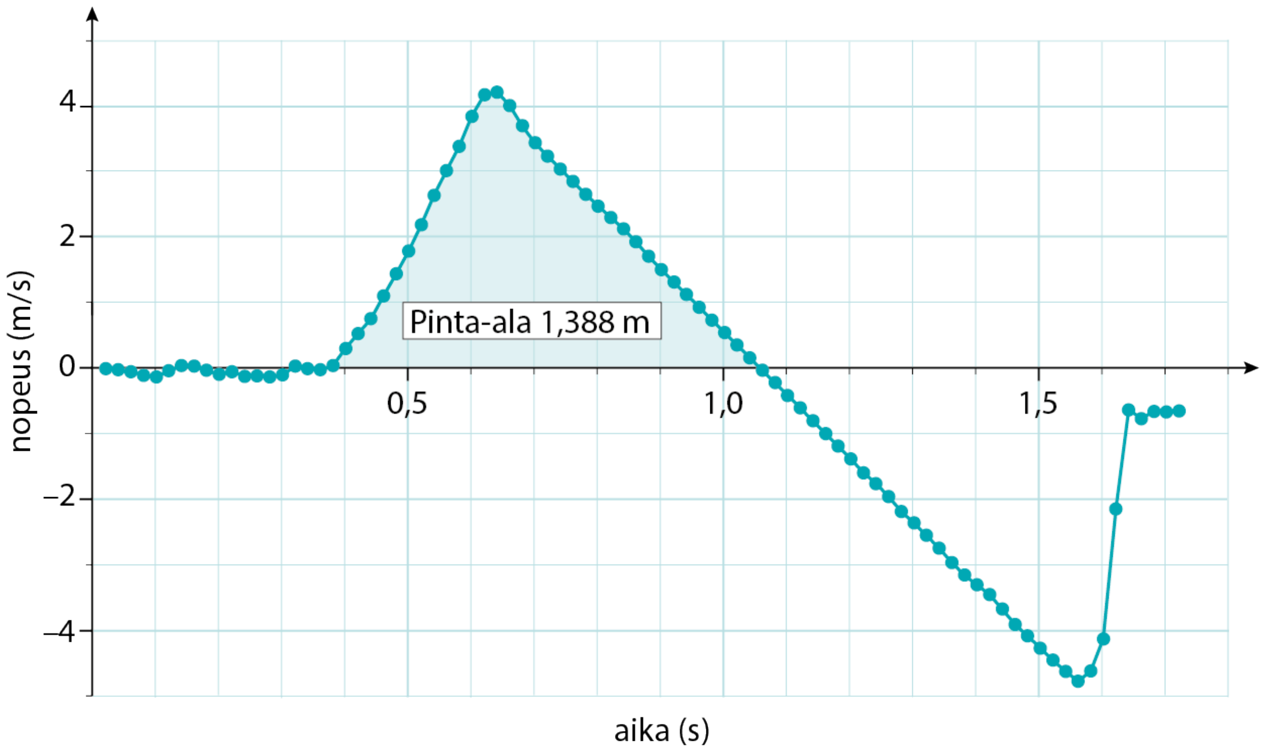
a)



(akselit oikein päin 1 p, mittauspisteet näkyvillä 1 p)

b) Lakipiste tarkoittaa pallon lentoradan korkeinta kohtaa. Siinä ylöspäin liikkuvan pallon nopeus on hidastunut ja pallon nopeus on hetkellisesti nolla. Kun pallo alkaa pudota, nopeuden suunta muuttuu. (1 p) Kuvaajasta voidaan lukea, että pallon nopeus on nolla ajanhetkellä t = 1,06 s. (1 p)

c) Pallon kulkema matka saadaan (*t*, *v*)-koordinaatiston ja akselin rajoittaman alueen fysikaalisesta pinta-alasta. (1 p) Määritetään fysikaalinen pinta-ala lakikorkeuteen asti



Koripallon nousukorkeus h = 1,388 m ≈ 1,4 m. (määritys 1 p, vastaus oikealla tarkkuudella 2 p. Vastaus voi olla likimain 1,39 m tai 1,4 m)

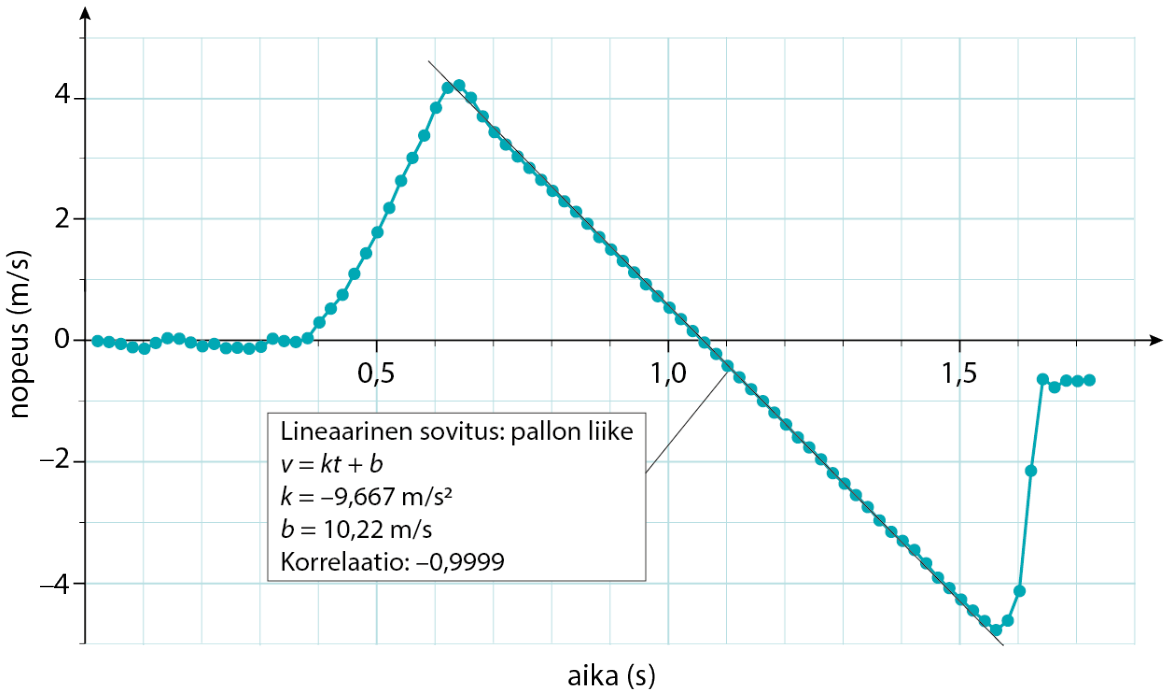
d) Kun pallo on pystysuorassa heittoliikkeessä, on pallo tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. (1 p) Pallon paikkaa voidaan mallintaa yhtälöllä

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \text{ (1 p)}$$

jossa v_0 on pallon alkunopeus, a on pallon kiihtyvyys ja x_0 pallon paikka ajanhetkellä t = 0 s. Alussa x_0 = 0.

Interpoloidaan kuvaajaa ja määritetään pallon alkunopeus irtoamisen jälkeen. Irtoamisen jälkeen pallo on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä, jolloin nopeus alkaa pienentyä tasaisesti. Pallo irtosi kädestä ajanhetkellä 0,64 s, jolloin interpoloimalla saadaan pallon nopeudeksi 4,2 m/s ylöspäin. (1 p)

Pallon kiihtyvyys saadaan *(t*, *v*)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Koska heittoliikkeen aikana pallo on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, määritetään kiihtyvyys kuvaajan lineaariselta osalta.



Pallon kiihtyvyys on $a = -9{,}667\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$. (2 p)

Pallon paikan matemaattiseksi malliksi saadaan

$$x(t) = 4{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}t + \frac{1}{2}\cdot\left(-9{,}667\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2$$

eli

$$x(t) = 4{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}t - \frac{1}{2}\cdot 9{,}667\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2 \text{ tai } x(t) = 4{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}t - 4{,}83\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2.$$

(lukuarvot sijoitettuna malliin 1 p, jompi kumpi viimeisistä sievennetyistä muodoista 1 p. HUOM! Jos mallissa ei ole yksiköitä, ei pisteitä.)

5. Newtonin lait

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 5.1.

a) C

b) C

c) D

d) C

e) C

f) B

g) C

Tehtävä 5.2.

a) Painovoima on gravitaatiovuorovaikutuksen aiheuttama voima.

b) Hiukset hylkivät toisiaan, koska hiuksissa on kauttaaltaan sama varaus. Samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan. Varausten väliset voimat ovat sähkömagneettisen vuorovaikutuksen aiheuttamia.

c) Juomalasi pysyy kädessä ihon ja lasin pinnan kitkan vaikutuksesta. Kitkavoima on sähkömagneettisen vuorovaikutuksen aiheuttama.

Tehtävä 5.3.

a) Renkaan ja tienpinnan välinen kitkavoima pysäyttää auton liikkeen. Kitka on liikkeen suuntaan nähden vastakkainen.

b) Laskuvarjohyppääjään vaikuttavat painovoima ja ilmanvastus. Voimat ovat yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset.

c) Veneeseen vaikuttaa painovoima ja veden noste. Voimat ovat yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset.

d) Polkupyöräilijään vaikuttaa painovoima, tien pinnan tukivoima, ilmanvastus, vierimisvastus ja kitka. Kokonaisvoiman suunta on sama kuin kiihtyvyyden suunta. Kitkan suunta on kiihtyvyyden suuntaan.

e) Pulkkaan vaikuttaa painovoima, maan tukivoima, kitka ja narun jännitysvoima. Koska pulkka liikkuu vakionopeudella, pulkkaan vaikuttava kokonaisvoima on nolla.

Tehtävä 5.4.

a) Kuun gravitaatiovoima vetää Maata puoleensa.

b) Kirja aiheuttaa tukivoiman kohti pöydän pintaa.

c) Jalka aiheuttaa kitkavoiman lattiaan. Jalan lattiaan aiheuttama kitkavoima on ihmisen liikkeen suunnalle vastakkainen.

Tehtävä 5.5.

a) Painon suuruuteen vaikuttavat kappaleen massa ja putoamiskiihtyvyyden arvo. Putoamiskiihtyvyyden arvo pienenee, kun etäisyys Maan pinnasta kasvaa.

b) Talitiaisen massa m = 16 g

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Talitiaisen paino

$G = mg = 0{,}016\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 0{,}15696\,\text{N} \approx 0{,}16\,\text{N}.$

Tehtävä 5.6.

Kuukiven massa m = 3,6 kg

Putoamiskiihtyvyys Kuussa g = 1,622 m/s^2

Putoamiskiihtyvyys Maassa g = 9,81 m/s^2

a) Kuukiven paino Kuussa

$$G = mg = 3{,}6\,\text{kg} \cdot 1{,}622\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 5{,}8392\,\text{N} \approx 5{,}8\,\text{N}.$$

b) Kuukiven paino Maassa

$$G = mg = 3{,}6\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 35{,}316\,\text{N} \approx 35\,\text{N}.$$

Tehtävä 5.7.

Polkupyöräilijän massa m = 68 kg

Pyöräilijän kiihtyvyys a = 1,1 m/s^2

a) Kokonaisvoima aiheuttaa kiihtyvyyden. Kokonaisvoiman suunta on sama kuin kiihtyvyyden suunta. Tässä tilanteessa kokonaisvoima on yhtä suuri kuin kitkavoima. Kitka aiheuttaa pyörän kiihtyvyyden.

b) Kokonaisvoima voidaan laskea yhtälöstä

$$\sum F = ma = 68\text{kg} \cdot 1{,}1\text{m/s}^2 = 74{,}8\text{N} \approx 75\text{N}.$$

Sovella

Tehtävä 5.8.

Massan hitaus ilmenee esimerkiksi, kun bussin jarruttaessa matkustajat pyrkivät jatkamaan liikettään. Matkustaja heilahtavat jarrutuksen aikana eteenpäin. Vastaavasti kiihdytyksen aikana matkustajat nojautuvat taaksepäin. Massan hitaus näkyy myös siinä, että liikennevaloista liikkeelle lähtevän bussin kiihtyvyys on pieni.

Tehtävä 5.9.

Liikkeen jatkuvuuden laki tarkoittaa, että kappale jatkaa liikettään, jos siihen vaikuttavien voimien summa on nolla.

Esimerkiksi turvavyöt ja turvatyynyt estävät tai pehmentävät törmäystilanteissa kuljettajan tai matkustajan osumista auton rakenteisiin. Peräänajotilanteissa istuimen niskatuki ehkäisee niskan alueelle tulevia vammoja. Autossa olevat erilaiset lokerot ja tavaratilan kiinnitysratkaisut estävät tavaroiden sinkoutumisen ihmisten päälle kovissa jarrutuksissa ja törmäyksissä.

Esimerkiksi: turvavyöt, niskatuet, turvatyynyt, kuormansidontaverkot tavaratilassa, törmäyksessä kokoon painuvat osat auton rakenteissa.

Tehtävä 5.10.

Kun SUP-laudalta ponnistetaan veteen, lautaan ja lautailijaan kohdistuu yhtä suuret, mutta vastakkaissuuntaiset voimat Newtonin III lain mukaisesti. Tilanteessa voimat ovat yhtä suuret, mutta voimien vaikutukset eivät ole samanlaiset, koska laudan ja hyppääjän massat ovat erilaiset. Newtonin II lain mukaan voima aiheuttaa kiihtyvyyden niin, että $\Sigma F = ma$. Koska SUP-lauta on kevyempi kuin lautailija, SUP-lauta saa suuremman kiihtyvyyden.

Tehtävä 5.11.

a) Kun hissin vaijeri pysähtyy, hissin tuoli ja matkustajat pyrkivät säilyttämään liiketilansa ja jatkavat liikettään. Tuoli heilahtaa eteenpäin.

b) Kädessä olevan mukin liiketila voi muuttua nopeasti kävelyn aikana. Mukissa juoma pyrkii säilyttämään liiketilaansa, ja osa kahvista voi läikkyä reunan yli.

c) Laatikossa olevat ruokailuvälineet pyrkivät säilyttämään liiketilansa eli ne pyrkivät pysymään paikoillaan. Laatikon ja ruokailuvälineiden kitka ei ole riittävän suuri pitämään ruokailuvälineitä laatikon mukana.

Tehtävä 5.12.

a) Käden tukivoiman vastavoima on auton käteen kohdistama tukivoima.

b) Newtonin III lain eli voiman ja vastavoiman lain mukaisesti voimat ovat yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset, ja ne kohdistuvat eri kappaleisiin.

c) Voiman ja vastavoiman lain mukaisesti voimat ovat yhtä suuret. Vaikka auto on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, niin auton käteen kohdistama tukivoima on yhtä suuri kuin käden autoon kohdistama tukivoima.

Tehtävä 5.13.

Kuukiven massa m = 1,2 kg

Putoamiskiihtyvyys Kuussa g = 1,622 m/s^2

Putoamiskiihtyvyys Maassa g = 9,81 m/s^2

Kuukiven paino kuussa

$$G = mg = 1{,}2\,\text{kg} \cdot 1{,}622\,\text{m/s}^2 = 1{,}9464\,\text{N} \approx 1{,}95\,\text{N}.$$

Kuumönkijä tuottaa yhtä suuren voiman Maassa ja Kuussa. Tällä voimalla voidaan nostaa punnus, jonka massa on

$$G = mg$$

$$m = \frac{G}{g} = \frac{1{,}9464\text{N}}{9{,}81\text{m/s}^2} = 0{,}1984\,\text{kg} \approx 198\,\text{g}.$$

Tehtävä 5.14.

a) Lattian tukivoima on suurempi kuin opiskelijan paino.

b) Lattian tukivoima on yhtä suuri kuin opiskelijan paino.

c) Opiskelijan paino on suurempi kuin lattian tukivoima.

d) Tukivoima on suurempi kuin opiskelijan paino.

Tehtävä 5.15.

a) Auto on kiihtyvässä liikkeessä eteenpäin eli autolla kiihdytetään. Jatkavuuden lain mukaisesti puhelin pyrkii säilyttämään liiketilansa ja liukuu taaksepäin.

b) Auto on kiihtyvässä liikkeessä taaksepäin eli autolla jarrutetaan. Jatkavuuden lain mukaisesti puhelin pyrkii säilyttämään liiketilansa ja liukuu eteenpäin.

c) Auto on pysähtynyt tai kulkee vakionopeudella. Jatkavuuden lain mukaisesti puhelin pyrkii säilyttämään liiketilansa ja pysyy paikoillaan.

Tehtävä 5.16.

Autoon vaikuttavat voimat aiheuttavat liikkeen. Kaverukset kohdistavat autoon tietyn suuruisen kosketusvoiman ja ponnistavat maasta eteenpäin. Kitka tien ja jalkojen välillä estää kaverusten kenkiä sutimasta, joten tien ja kenkien välinen kitka liikuttaa autoa.

Tehtävä 5.17.

a) Opiskelija pysyy molemmissa tilanteissa paikoillaan, joten vaikuttavan kokonaisvoiman suuruus on molemmissa tilanteissa $\sum F = 0$.

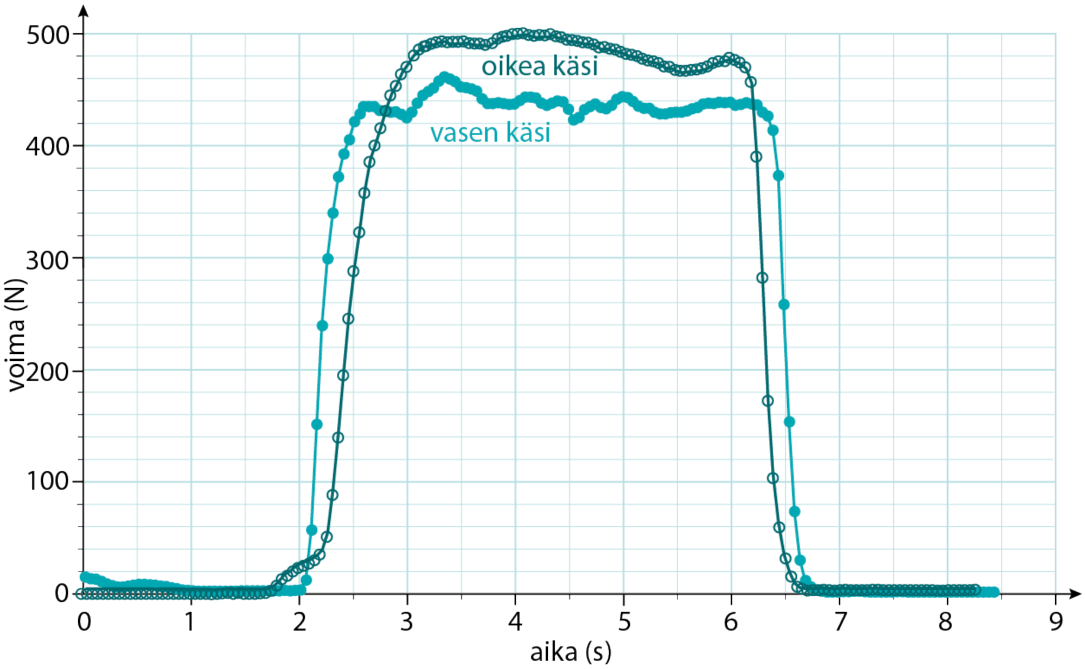
b) Molemmissa tilanteissa opiskelijaan vaikuttaa samansuuruiset voimat. Tilanteessa 1 narusta vedetään 200 N:n voimalla. Koska opiskelija pysyy paikallaan, toiseen käteen sidotun narun tukivoima on 200 N. Tilanteessa 2 kahvan tukivoima on 200 N. Lisäksi opiskelijan paino ja lattian tukivoima ovat samat tilanteissa 1 ja 2.

Tehtävä 5.18.

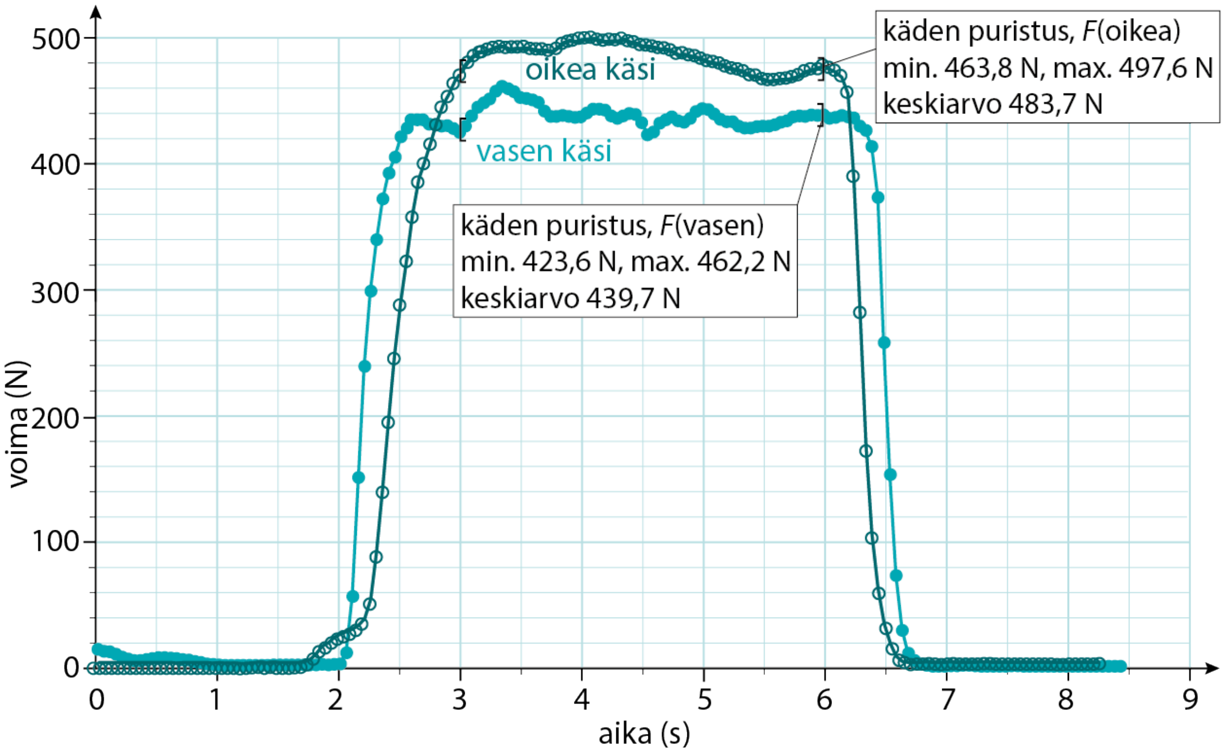
Käsien aiheuttama tukivoima suuntautuu ylöspäin. Se kannattelee kakun ja juomien painoa. Narussa vaikuttaa jännitysvoima, joka on yhtä suuri kuin pullojen paino. Jos naru katkeaa, jännitysvoima häviää yllättäen. Pullot alkavat pudota kohti lattiaa. Käsiin kohdistuva kokonaisvoima muuttuu nopeasti ja kädet ja kakku saavat kiihtyvyyden ylöspäin.

Tehtävä 5.19.

a)



b) Kuvaajan perusteella tasainen puristus alkaa ajanhetkellä 3 s ja päättyy ajanhetkellä 5 s. Määritetään keskimääräinen puristusvoima aikavälillä 3 s – 5 s.



Oikean käden kolmen sekunnin keskimääräinen puristusvoima on mittauksen perusteella 483,7 N, joten puristusvoima ylittää viitearvon.

c) Verrataan puristusvoimien eroa pienempään puristusvoimaan. Lasketaan, miten monta prosenttia suurempi on oikean käden puristusvoima suhteessa vasemman käden puristusvoimaan

$$\frac{F_{\text{oikea}} - F_{\text{vasen}}}{F_{\text{vasen}}} = \frac{483{,}7\,\text{N} - 439{,}7\,\text{N}}{439{,}7\,\text{N}} \cdot 100\,\% = 10{,}01\,\% \approx 10\,\%.$$

Tehtävä 5.20.

Kun sukkapuikkoa lyödään vasaralla alaspäin, menee sukkapuikko omenan läpi. Jatkavuuden lain mukaan kappale pyrkii säilyttämään liiketilansa. Sukkapuikkoon nähden omena liikkuu ylöspäin.

Tehtävä 5.22.

a) Ensimmäisessä vedossa narun jännitysvoima on pieni ja kiihtyvyys pieni. Naru kestää jännitysvoiman.

b) Käsi kiihdyttää narua suurella kiihtyvyydellä. Jotta punnus saavuttaisi saman kiihtyvyyden kuin naru, tarvitaan suuri narun jännitysvoima. Naru ei kestä näin suurta jännitysvoimaa.

Tehtävä 5.23.

Polkupyöräilijän alkunopeus v_0 = 8,4 km/h

Polkupyöräilijän loppunopeus v = 16,1 km/h

Polkupyöräilijän massa m = 71 kg

Putoamiskiihtyvyys Maassa g = 9,81 m/s^2

Kiihdytyksen kesto t = 3,5 s

a) Polkupyöräilijän paino $G = mg = 71\,\text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 696{,}51\,\text{N} \approx 700\,\text{N}.$

b) Painon vastavoima on voima, jolla pyöräilijä vetää Maata puoleensa.

c) Pyöräilijä on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä.

Pyöräilijän kiihtyvyys

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\left(\frac{16{,}1 - 8{,}4}{3{,}6}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}5\,\text{s}} = 0{,}611\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0{,}61\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

d) Pyöräilijään vaikuttava kokonaisvoima on Newtonin II lain mukaan

$$\sum F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = 71\text{kg} \cdot \frac{\left(\dfrac{16{,}1 - 8{,}4}{3{,}6}\right)\text{m/s}}{3{,}5\text{s}} = 43{,}388\text{N} \approx 43\text{N}.$$

Tehtävä 5.24.

Sähköauton alkunopeus v_0 = 0 km/h

Sähköauton loppunopeus v = 48 km/h

Kiihdytyksen aikana kuljettu matka s = 41 m

Sähköauton massa m = 1680 kg

a) Sähköauto on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Auton kiihtyvyys voidaan laskea matkan yhtälöstä

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = \frac{1}{2}at^2.$$

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen nopeuden avulla saadaan kiihdytykseen kulunut aika, kun kappale lähtee paikoiltaan ja kappaleen alkunopeus on nolla.

$$v = at$$

$$t = \frac{v}{a}.$$

Tällöin matkan kaavasta saadaan kiihtyvyys

$$x=\frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2=\frac{1}{2}\cancel{a}\frac{v^2}{a^{\cancel{2}}}=\frac{1}{2}\frac{v^2}{a}$$

$$a=\frac{v^2}{2x}=\frac{\left(\frac{48-0}{3{,}6}\mathrm{m/s}\right)^2}{2\cdot 41\mathrm{m}}=2{,}168\mathrm{m/s^2}\approx 2{,}2\mathrm{m/s^2}$$

b) Autoa kiihdyttävä kokonaisvoima saadaan sijoittamalla a-kohdan kiihtyvyyden lauseke Newtonin II lain mukaiseen yhtälöön.

$$\sum F=ma=m\frac{v^2}{2x}$$

$$=1680\,\mathrm{kg}\cdot\frac{\left(\frac{48-0}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 41\,\mathrm{m}}=3642{,}276\,\mathrm{N}\approx 3600\,\mathrm{N}.$$

Tehtävä 5.25.

Punnuksen 1 massa m_1 = 1,0 kg

Punnuksen 2 massa m_2 = 5,0 kg

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Punnukset ovat putoamisen ajan tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaan punnusten paino aiheuttaa punnuksille kiihtyvyyden

$$\begin{aligned} G &= ma \\ mg &= ma \\ g &= a. \end{aligned}$$

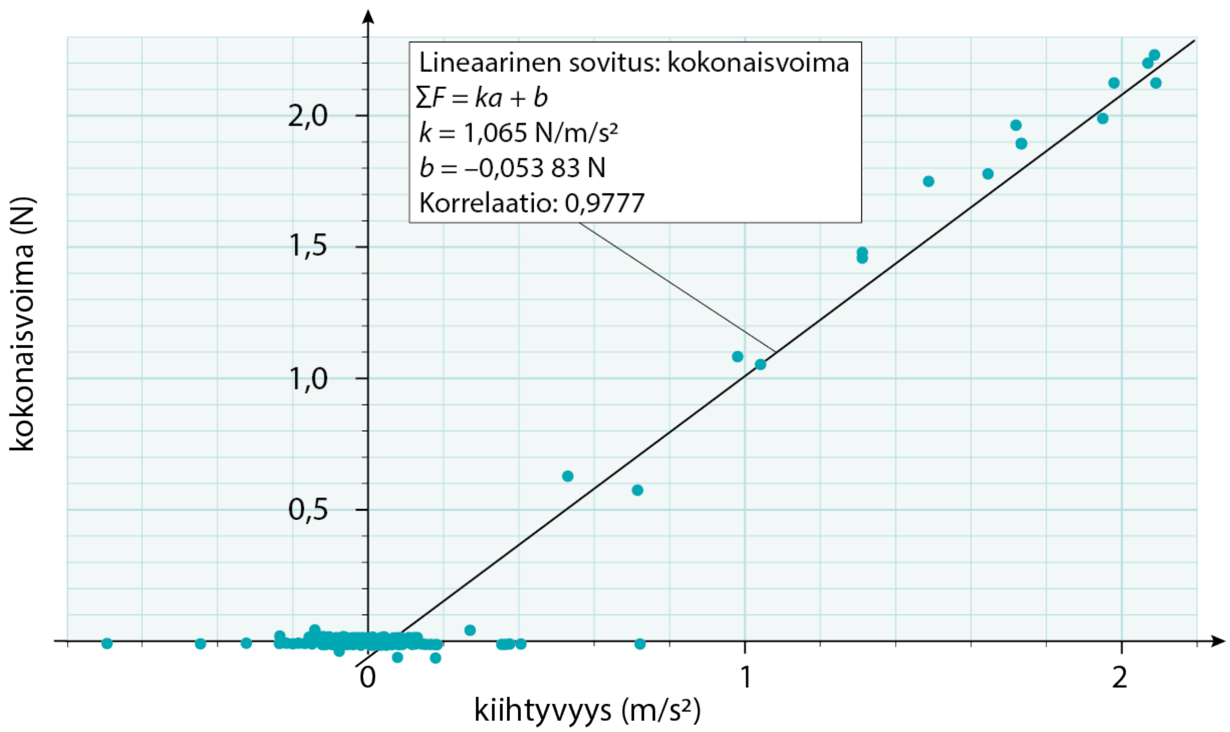
Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan punnuksen putoamisaika saadaan matkan yhtälöstä

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 \\ t &= \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2x}{g}}. \end{aligned}$$

Yhtälöstä havaitaan, että punnuksien massat eivät vaikuta putoamisaikaan.

Tehtävä 5.26.

Kun vaunun törmää seinään, vaunu (ja sen kyydissä oleva anturi) on muuttuvassa liikkeessä. Muuttuvan liiketilan aiheuttaa kokonaisvoima $\sum F$. Newtonin II laki antaa lineaarisen riippuvuuden $\sum F = ma$. Tällöin vaunun massa saadaan $(a, \sum F)$-koordinaatistoon laaditun kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Tehdään kuvaaja ja määritetään fysikaalinen kulmakerroin.



Vaunun massa on m = 1,065 kg ≈1,07 kg.

Syvennä

Tehtävä 5.27.

a) Paikallaan leijuva pisara on pallon muotoinen eli vaihtoehto 2.

Pisaran pinnalla oleviin molekyyleihin kohdistuva kokonaisvoima on kohtisuorassa pintaa vastaan ja sen suunta on nesteen sisälle. Tällaisessa tilanteessa pinta muodostaa pallopinnan. Pisaran muoto voidaan ymmärtää myös pisaran sisäenergian avulla. Luonnossa prosessien ja rakenteiden luonnollinen suunta on sellainen, että energiaa vapautuu. Pisaran sisäenergia on pienimmillään, kun pisaran pinta-ala on pienin mahdollinen. Pallo on muoto, jossa pinta-ala on pienin tilavuuteen nähden.

b) Kun pisara putoaa, siihen vaikuttaa ilmanvastus, jonka suunta on ylöspäin. Ilmanvastuksen tekemä työ muokkaa pisaran muotoa ja muuttaa pisaran sisäenergiaa. Ilmanvastuksen tekemä työ myös siirtää pisaran liike-energiaa ympäröivän ilman sisäenergiaksi.

c) Veden pintajännitys γ = 0,073 J/m^2

Pisaran pinta-alan muutos ΔA = 3,8 mm^2 = 3,8 · 10^{-6} m^2

$\gamma = \dfrac{\Delta W}{\Delta A}$, joten

$$\Delta W = \gamma \Delta A = 0{,}073\,\frac{\text{J}}{\text{m}^2} \cdot 8 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2 = 0{,}584 \cdot 10^{-6}\ \text{J} \approx 5{,}8\,\mu\text{J}$$

Tehty työ on 5,8 µJ.

d) Veden pintajännitys γ = 0,073 J/m^2.

Yhden pisaran tilavuus alussa

V_1 = 12 µl = 12 · 10^{-6} l = 12 · 10^{-6} dm^3 = 12 · 10^{-9} m^3

Sumupisaran tilavuus on $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Tästä saadaan pisaran säde alussa

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{V_1}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{12 \cdot 10^{-9}\ \text{m}^3}{\pi}} = 1{,}420248 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Pisaran tilavuus lopussa
V_2 = 2 · 12 µl = 24 µl = 24 · 10^{-9} m^3

ja pisaran säde lopussa

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{V_2}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{24\cdot 10^{-9}\ \text{m}^3}{\pi}} = 1{,}789400\cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Pisaroiden yhdistyessä kokonaispinta-ala muuttuu. Vähennetään lopun ison pisaran pinta-alasta alun kahden pienemmän pisaran pinta-alat.

$$\begin{aligned}\Delta A &= A_2 - 2A_1 = 4\pi r_2^2 - 2\cdot 4\pi r_1^2\\ &= 4\pi(r_2^2 - 2r_1^2)\\ &= 4\pi((1{,}789400\cdot 10^{-3}\ \text{m})^2 - 2\cdot(1{,}420248\cdot 10^{-3}\ \text{m})^2)\\ &= -1{,}04584\cdot 10^{-5}\ \text{m}^2\end{aligned}$$

Kahden yksittäisen pisaran pinta-ala on siten suurempi kuin yhden ison pisaran pinta-ala. Silloin pintajännitykseen liittyvä työ on negatiivinen, joten yhdistymisessä sisäenergiaa vapautuu.

Energiaa vapautuu saman verran kuin mitä pinta-alan kasvattamiseen vaadittu työ olisi ollut.

$$\Delta W = \gamma\Delta A = 0{,}073\ \frac{\text{J}}{\text{m}^2}\cdot 1{,}04584\cdot 10^{-5}\ \text{m}^2 = 7{,}6346\cdot 10^{-7}\ \text{J} \approx 0{,}76\ \mu\text{J}$$

Energiaa vapautuu 0,76 µJ.

Tehtävä 5.28.

Sähköpotkulautailijan alkunopeus $v_0 = 19\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{19}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Sähköpotkulautailijan loppunopeus v = 0 km/h = 0 m/s

Sähköpotkulautailijan massa m = 62 kg.

Hidastumiseen kulunut aika t = 3,2 s

a) Sähköpotkulautailija on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä. Potkulautailijan nopeus $v = v_0 + at$, josta saadaan potkulautailijan kiihtyvyys

$$a = \frac{v - v_0}{t} = -\frac{v_0}{t} = -\frac{\frac{19}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}2\,\text{s}} = -1{,}6493\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

(kaava 1 p, tulos 1 p)

b) Renkaiden ja maan välinen kitka pysäyttää potkulautailijan liikkeen. (1 p)

c) Newtonin II laki $\sum F = ma$. ilmenee potkulautailijan hidastuvana liikkeenä (1 p). Kappaleeseen vaikuttavien voimien summa ei ole liikkeen suunnassa nolla, koska tien pinnan ja jalan välillä on kitkaa. Siksi potkulauta on hidastuvassa liikkeessä. (1 p) Newtonin III laki ilmenee esimerkiksi tukivoimissa. (1 p) Tien pinnan potkulautaan kohdistama tukivoima on yhtä suuri kuin potkulaudan tiehen kohdistama tukivoima. (1 p)

d) Sähköpotkulautailijaan vaikuttava kokonaisvoima hidastumisen aikana Newtonin II lain mukaan

$\sum F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{v - v_0}{t - t_0} = -m\frac{v_0}{t}$,koska v = 0 m/s ja t_0 = 0 s.

$$\sum F = ma = -m\frac{v_0}{t} = -62\,\text{kg} \cdot \frac{\frac{19}{3,6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3,2\,\text{s}} = -102,2569\,\text{N} \approx -100\,\text{N}$$

Miinusmerkki tarkoittaa sitä, että voiman suunta vastakkainen potkulautailijan liikesuuntaan nähden.

(Lauseke $\sum F = ma$ (1 p) kaavan lopullinen tulos tai viittaus a-kohdan arvoon kiihtyvyydelle (1 p), tulos (1 p))

e) Potkulautailijan kulkema matka tasaisesti hidastuvassa liikkeessä (1 p)

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

koska x_0 = 0 m. (1 p)

Sijoitetaan a-kohdassa saatu lauseke $a = -\frac{v_0}{t}$ matkan kaavaan

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{-v_0}{\cancel{t}}\right)t^{\cancel{2}} = v_0 t - \frac{1}{2}v_0 t \qquad \text{(1 p)}$$

$$x = \frac{v_0 t}{2} = \frac{\left(\frac{19}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\cdot 3{,}2\,\text{s}}{2} = 8{,}444\,\text{m} \approx 8{,}4\,\text{m}.$$

(kaavan lopullinen muoto 1 p., tulos oikealla tarkkuudella 1 p)

6. Liikeyhtälö ja voimakuvio

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 6.1.

a) A

b) C

c) C

d) B

e) A

f) B

Tehtävä 6.2.

a) Kitka. Myös ilmanvastus ja vierimisvastus vaikuttavat tilanteessa. Kitka on huomattavasti suurempi.

b) Ilmanvastus on yhtä suuri kuin laskuvarjohyppääjän paino.

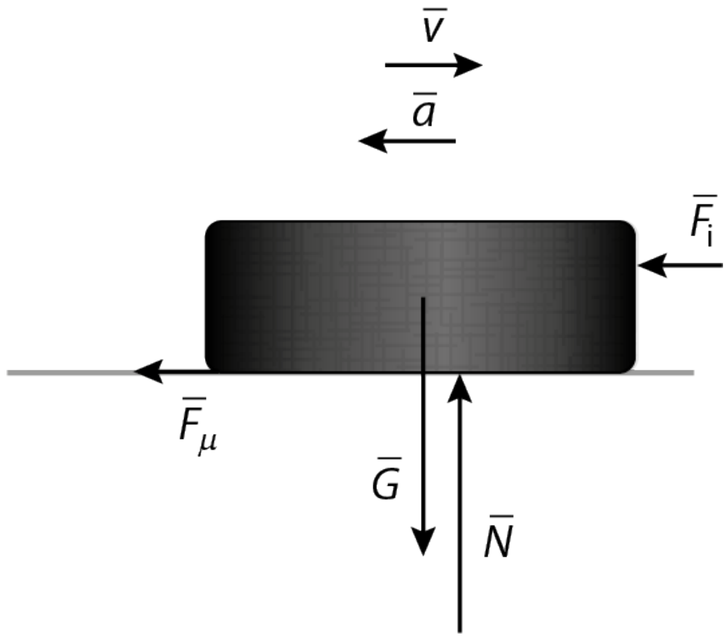
c) Veden noste on yhtä suuri kuin veneeseen kohdistuva paino.

d) Kitka saa aikaan polkupyöräilijän kiihtyvän liikkeen.

e) Pulkkaan vaikuttavat voimat ovat narun jännitysvoima, pinnan tukivoima, kitka ja paino. Jos pulkka kulkee vakionopeutta, niin voimien summa on nolla.

Tehtävä 6.3.

a)



$\overline{F}_{\mu} =$ kitka

$\overline{F}_{i} =$ ilmanvastus

$\overline{N} =$ tukivoima

$\overline{G} =$ kappaleen paino

b)

$\bar{G}$ = pyöräilijän ja polkupyörän yhteenlaskettu paino

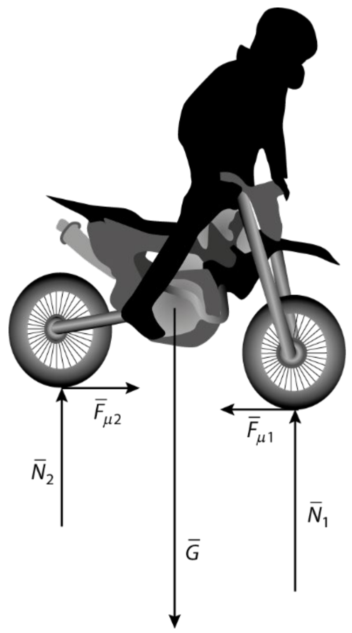
$\bar{N}_1$ = takarenkaaseen kohdistuva maanpinnan tukivoima

$\bar{N}_2$ = eturenkaaseen kohdistuva maanpinnan tukivoima

$\bar{F}_i$ = ilmanvastus

$\bar{F}_\mu$ = takarenkaan ja maanpinnan välinen kitka

c)



$\overline{G} =$ pyörän ja kuljettajan paino

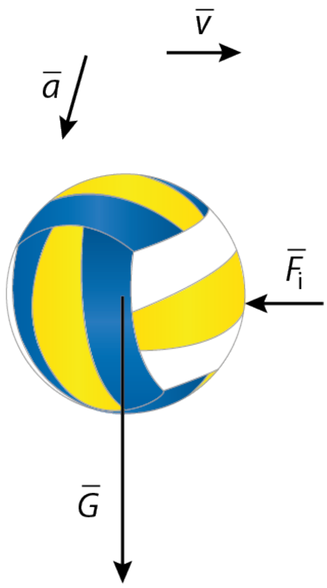
$\overline{F}_{\mu 1} =$ eturenkaan kitka

$\overline{F}_{\mu 2} =$ takarenkaan kitka

$\overline{N}_1 =$ etupyörään kohdistuva tukivoima

$\overline{N}_2 =$ takapyörään kohdistuva tukivoima

d)

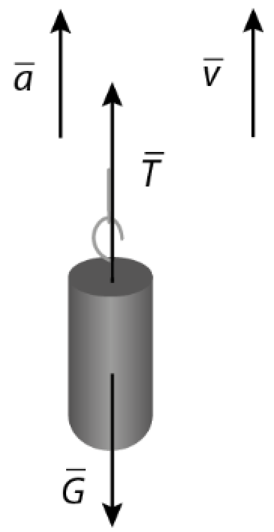


$\overline{F}_i =$ ilmanvastus

$\overline{G} =$ kappaleen paino

Tehtävä 6.4.

a)



$\overline{G}$ = kappaleen paino

$\overline{T}$ = narun jännitysvoima

b) Massa m = 1,7 kg

Kiihtyvyys a = 0,31 m/s^2

Dynamiikan peruslain mukaisesti $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Valitaan suunta ylöspäin positiiviseksi.

$$T - G = ma$$

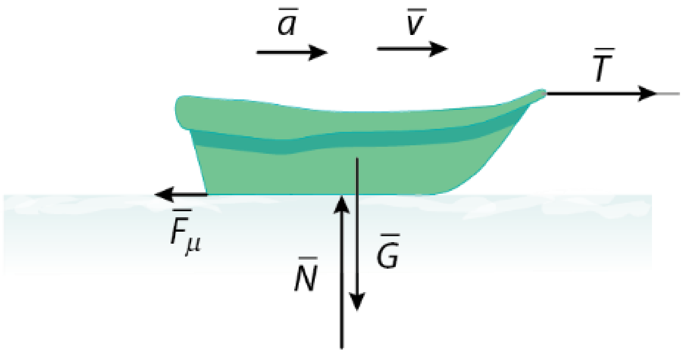
$$T = ma + G$$

$$T = ma + mg$$

$$T = m(a+g) = 1{,}7\,\text{kg} \cdot (0{,}31\,\text{m/s}^2 + 9{,}81\,\text{m/s}^2) = 17{,}204\,\text{N} \approx 17\,\text{N}.$$

Tehtävä 6.5.

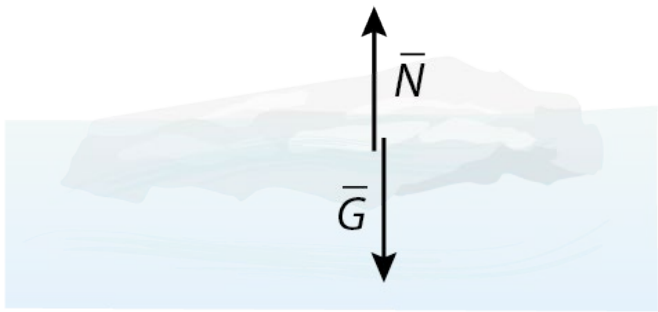
a)



$\bar{F}_\mu$ = kitka
$\bar{N}$ = pinnan tukivoima
$\bar{G}$ = kappaleen paino
$\bar{T}$ = narun jännitysvoima

Pulkka on kiihtyvässä liikkeessä. Narun jännitysvoima on suurempi kuin kitka.

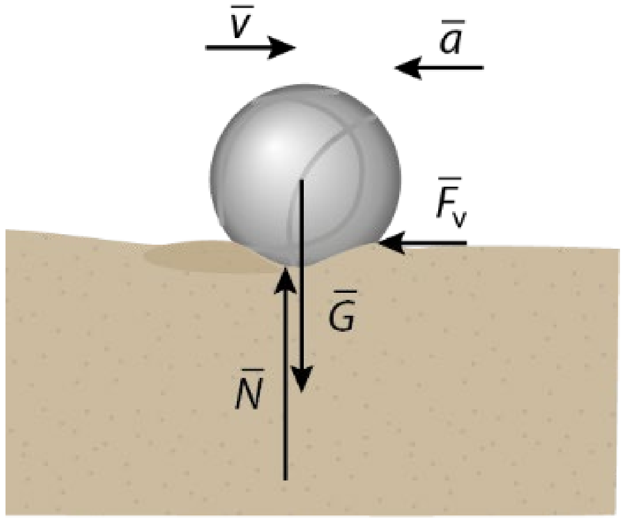
b)



$\bar{N}$ = veden noste
$\bar{G}$ = kappaleen paino

Voimat ovat yhtä suuret. Jäälautta liikkuu veden mukana. Jäälautta kulkee vakionopeudella.

c)



$\bar{N}$ = pinnan tukivoima

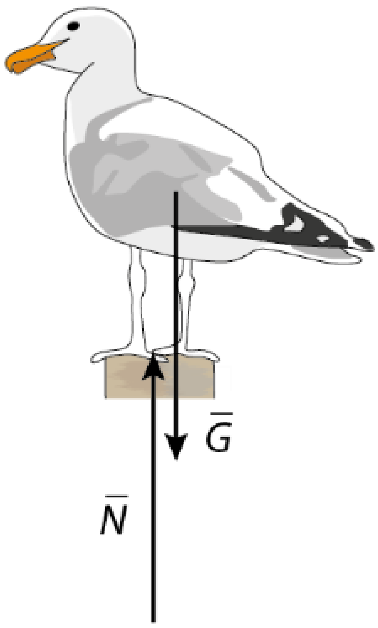
$\bar{G}$ = kappaleen paino

$\bar{F}_v$ = vierimisvastus

Kuula on hidastuvassa liikkeessä.

Tehtävä 6.6.

a)

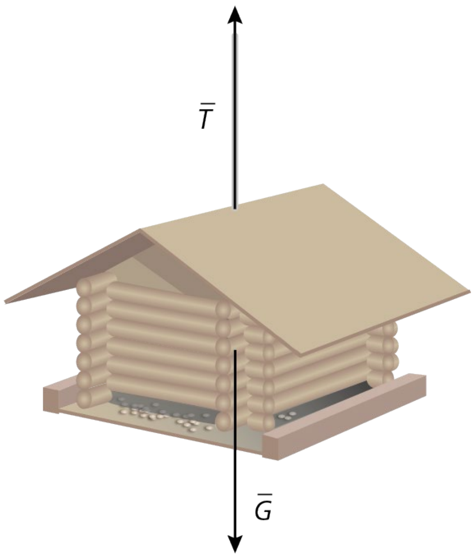


$\overline{N}$ = pinnan tukivoima

$\overline{G}$ = paino

Lokki on paikallaan, joten sen nopeus on nolla ja myös kiihtyvyys on nolla.

b)

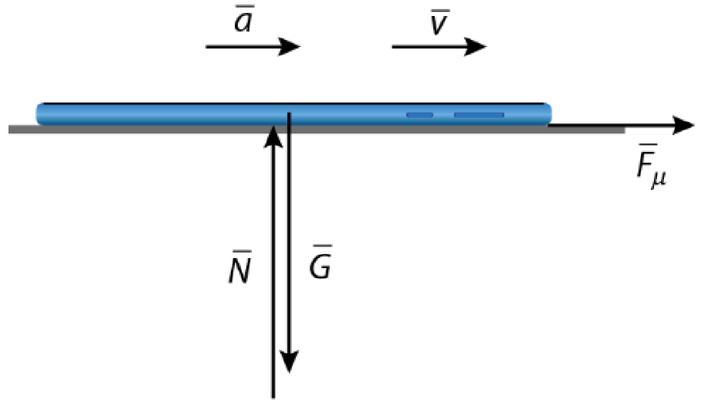


$\overline{G}$ = kappaleen paino

$\overline{T}$ = narun jännitysvoima

Lintulauta on paikallaan, joten lintulaudan nopeus on nolla. Myös lintulaudan kiihtyvyys on nolla.

c)



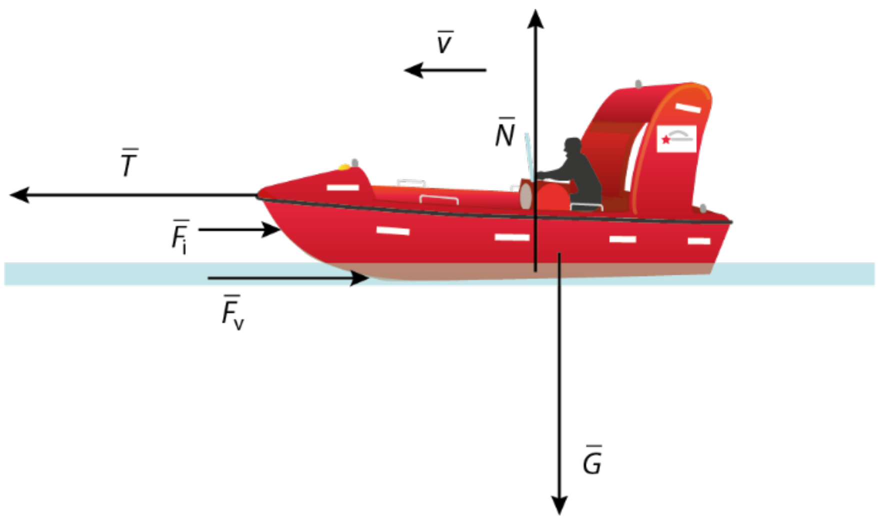
$\bar{F}_\mu =$ kitka

$\bar{N} =$ tukivoima

$\bar{G} =$ kappaleen paino

Puhelin on kiihtyvässä liikkeessä. Voima, joka puhelimen kiihtyvyyden aiheuttaa on kitka.

d)



$\bar{F}_\mu =$ kitka

$\bar{F}_v =$ veden vastus

$\bar{F}_i =$ ilmanvastus

$\bar{N} =$ noste

$\bar{G} =$ paino

$\bar{T} =$ narun jännitysvoima

Pelastusvene kulkee vakionopeudella. Veneeseen vaikuttava kokonaisvoima on nolla. Narun jännitysvoima on yhtä suuri kuin mitä ilmanvastus ja veden vastus ovat yhteensä.

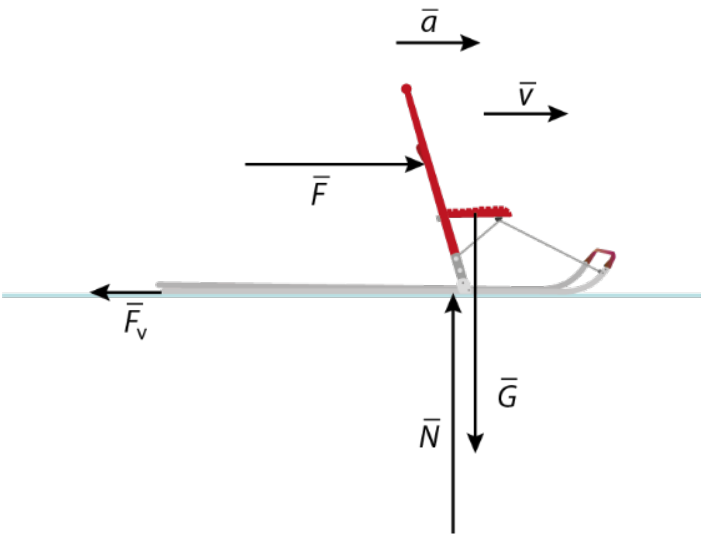
Tehtävä 6.7.

Kelkan ja lapsen massa $m = 27$ kg

Työntävä voima $T = 140$ N

Kelkan ja alustan liikettä vastustava voima $F_v = 95$ N

a) Piirretään kelkan voimakuvio.



$\bar{G} =$ kelkkailijan paino

$\bar{N} =$ jään tukivoima

$\bar{F} =$ kelkkaa työntävä voima

$\bar{F}_v =$ kelkan ja pinnan välinen liikettä vastustava voima

Kelkka ja lapsi ovat kiihtyvässä liikkeessä. Kelkkaa työntävä voima on suurempi kuin liikettä vastustava voima ja siksi Newtonin II lain mukaan kappale on kiihtyvässä liikkeessä

b) Newtonin II lain mukaisesti $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Kun suunta oikealle valitaan positiiviseksi, saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista kiihtyvyys.

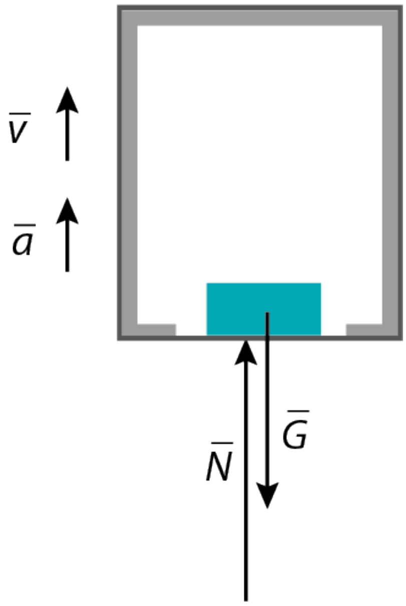
$$T - F_{\mathrm{v}} = ma$$

$$a = \frac{T - F_{\mathrm{v}}}{m} = \frac{140\,\mathrm{N} - 95\,\mathrm{N}}{27\,\mathrm{kg}} = 1{,}6667\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 1{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Sovella

Tehtävä 6.8.

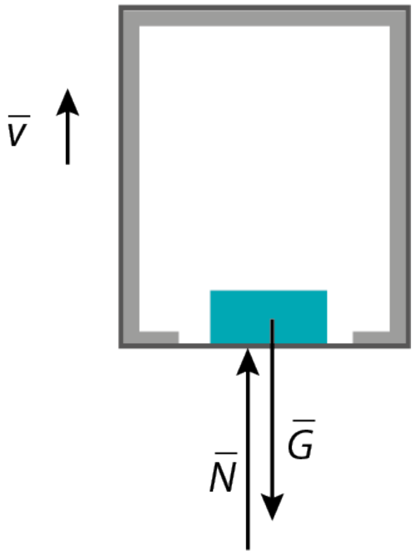
a)



$\bar{N} =$ hissin lattian tukivoima

$\bar{G} =$ paino

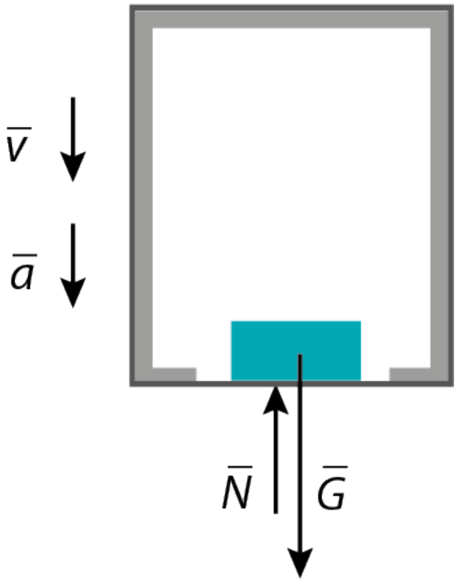
b)



$\bar{N} =$ hissin lattian tukivoima

$\bar{G} =$ paino

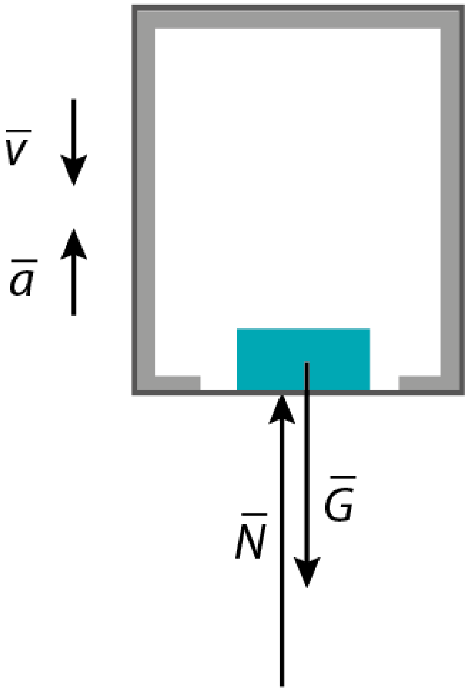
c)



$\bar{N} =$ hissin lattian tukivoima

$\bar{G} =$ paino

d)



$\bar{N} =$ hissin lattian tukivoima

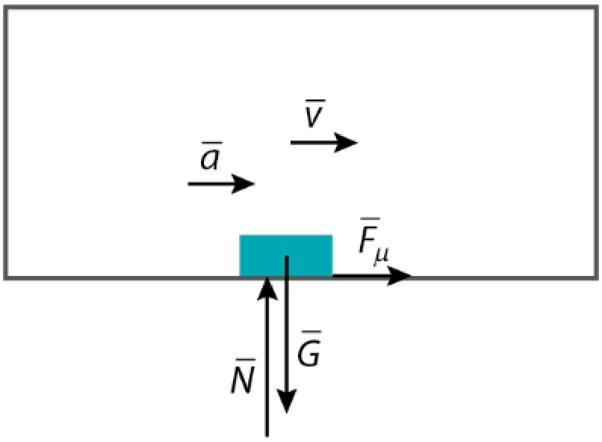
$\bar{G} =$ paino

Tehtävä 6.9.

Laatikon massa m = 8,9 kg

Auton ja peräkärryn kiihtyvyys a = 1,8 m/s^2

a)



$\overline{F}_\mu =$ kitka

$\overline{N} =$ peräkärryn lattian tukivoima

$\overline{G} =$ kappaleen paino

b) Laatikko on kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaisesti $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}.$ Valitaan suunta oikealle positiiviseksi.

$$F_\mu = ma = 8{,}9\,\text{kg} \cdot 1{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 16{,}02\,\text{N} \approx 16\,\text{N}.$$

c) Jos laatikko pysyy peräkärryyn nähden paikallaan, niin myös laatikon kiihtyvyys kasvaa. Laatikkoa kiihdyttävä voima on kitkavoima. Jos kiihtyvyys on suurempi niin myös kitkan on oltava suurempi.

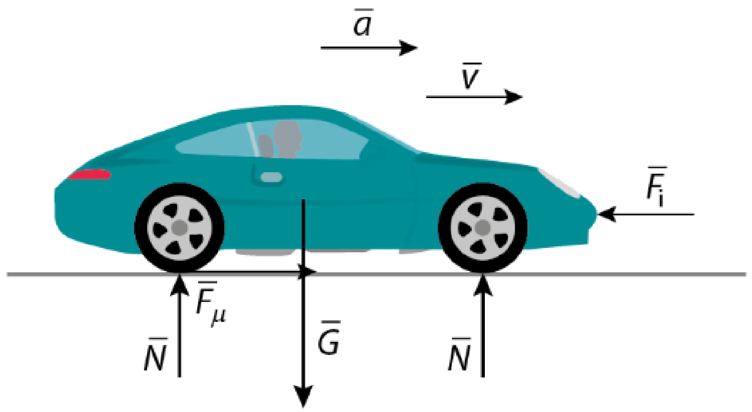
Tehtävä 6.10.

a) Auton massa m = 1260 kg

Auton kiihtyvyys a = 0,21 m/s^2

Ilmanvastus F_i = 7335 N

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2



$\bar{F}_\mu$ = autoa eteenpäin vievä kitka

$\bar{F}_i$ = ilmanvastus

$\bar{N}$ = tienpinnan tukivoima

$\bar{G}$ = auton paino

Auto on ohitustilanteessa kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaisesti $\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$. Valitaan suunta oikealle positiiviseksi.

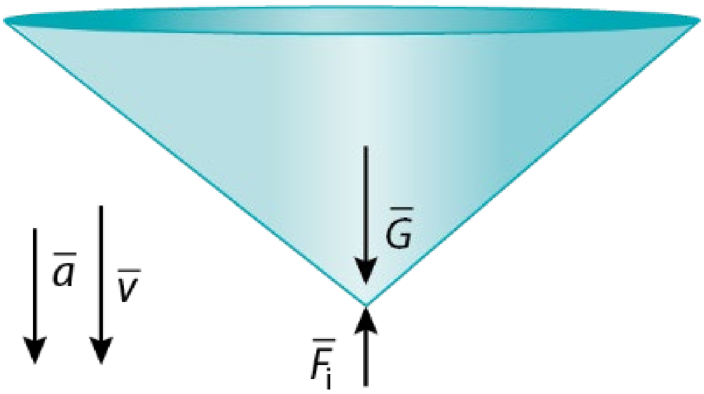
$F_\mu - F_i = ma$

$$F_\mu = ma + F_i = 1260\,\text{kg} \cdot 0{,}21\,\text{m/s}^2 + 7335\,\text{N} = 7599{,}6\,\text{N} \approx 7{,}6\,\text{kN}.$$

b) Kartion kiihtyvyys a = 4,24 m/s^2

Kartioon kohdistuva ilmanvastus F_i = 0,20 N

Piirretään kartion voimakuvio.



$\overline{F}_i$ = ilmanvastus

$\overline{G}$ = kartion paino

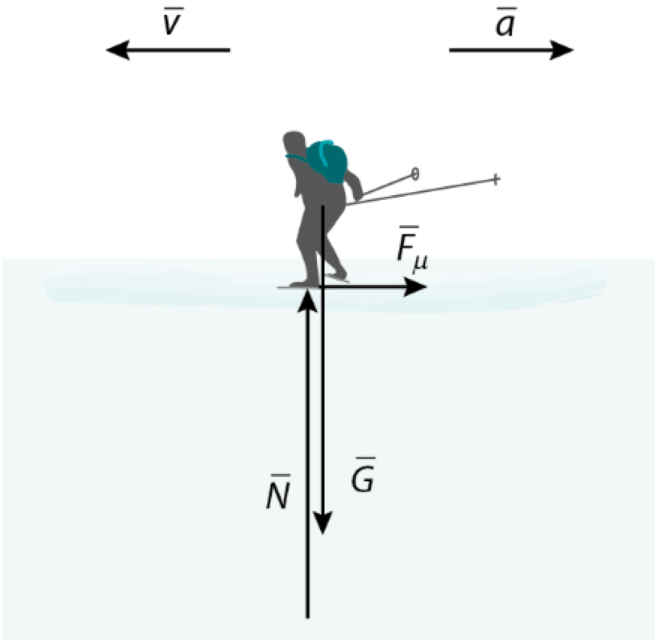
Kartio on kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaisesti $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$. Valitaan suunta alaspäin positiiviseksi.

$$\begin{aligned}
G - F_\mathrm{i} &= ma \\
mg - F_\mathrm{i} &= ma \\
mg - ma &= F_\mathrm{i} \\
m(g-a) &= F_\mathrm{i}
\end{aligned}$$

$$m = \frac{F_\mathrm{i}}{g-a} = \frac{0{,}20\,\mathrm{N}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} - 4{,}24\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}03591\,\mathrm{kg} \approx 36\,\mathrm{g}.$$

Tehtävä 6.11.

a)



$\bar{N} =$ jään tukivoima

$\bar{G} =$ paino

$\bar{F}_\mu =$ kitka

b) Retkiluistelijan massa m = 71 kg

Kitka F_μ = 84 N

Luistelija on kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaisesti $\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$.

$$F_\mu = ma$$

$$a = \frac{F_\mu}{m} = \frac{84\,\text{N}}{71\,\text{kg}} = 1{,}1831\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Kiihtyvyys on samaan suuntaan kuin kitkavoima, eli liikkeelle vastakkaiseen suuntaan.

c) Luistelijan nopeus alussa v_0 = 3,6 m/s

Luistelijan nopeus liu'un lopuksi v = 0 m/s

Valitaan alkunopeuden suunta positiiviseksi, jolloin luistelijan kiihtyvyys on b-kohdan mukaan

$$a=-\frac{F_\mu}{m}=-1{,}1831\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä $v = v_0 + at$, joten liukuun käytetty aika on

$$t=\frac{(v-v_0)}{a}=\frac{-v_0}{a}=3{,}0429\,\text{s}.$$

Lasketaan luistelijan liukuma matka tasaisesti kiihtyvän liikkeen matkan yhtälöstä. Jos välituloksia ei sijoita suoraan yhtälöön, se sievenee seuraavasti:

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2=v_0\frac{-v_0}{a}+\frac{1}{2}a\left(\frac{-v_0}{a}\right)^2$$

$$=\frac{-v_0^2}{a}+\frac{1}{2}\cancel{a}\frac{v_0^2}{a^{\cancel{2}}}=\frac{-v_0^2}{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{v_0^2}{a}$$

$$=-\frac{v_0^2}{2a}=-\frac{v_0^2}{2\cdot\left(-\frac{F_\mu}{m}\right)}=-\frac{(3{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2\cdot\left(-\frac{84\,\text{N}}{71\,\text{kg}}\right)}$$

$$=5{,}4771\,\text{m}\approx 5{,}5\,\text{m}$$

Tehtävä 6.12.

a) Valitaan positiivinen suunta oikealle, jolloin kokonaisvoimalle saadaan

A: $\Sigma\overline{F}$ = −10 N + 10 N = 0 N.

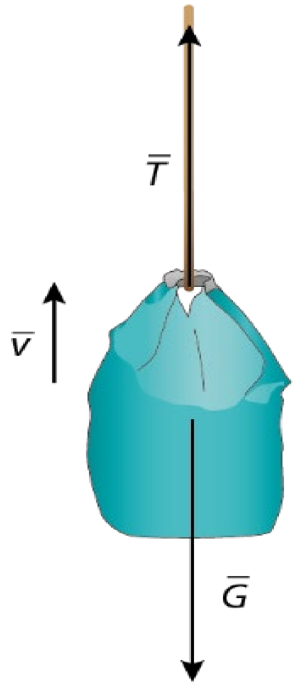
B: $\Sigma\overline{F}$ = −10 N + 20 N = 10 N. Voiman suunta on oikealle.

b) A: Voima-anturin lukema on 10 N. Anturiin vaikuttaa 10 N voima oikealle ja 10 N voima vasemmalle. Anturi pysyy paikoillaan mutta näyttää lukemaa 10 N.

B: Voima-anturin lukema on 20 N. Anturiin vaikuttaa 20 N voima oikealle ja 10 N voima vasemmalle. Anturi on kiihtyvässä liikkeessä oikealle, ja näyttää lukemaa, jolla anturipäätä vedetään.

Tehtävä 6.13.

a) Piirretään säkin voimakuvio. Säkkiin vaikuttaa paino ja köyden jännitysvoima. Voimat ovat yhtä suuret, kun säkki liikkuu tasaisesti, sillä Newtonin II lain mukaisesti $\Sigma\overline{F}=\overline{0}$.



$\overline{G}=$kappaleen paino

$\overline{\mathrm{T}}=$köyden jännitysvoima

b) Varustesäkin massa m = 8,2 kg

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Varustesäkkiä nostetaan vakionopeudella. Newtonin II lain mukaisesti $\Sigma\overline{F}=\overline{0}$. Valitaan positiivinen suunta ylöspäin.

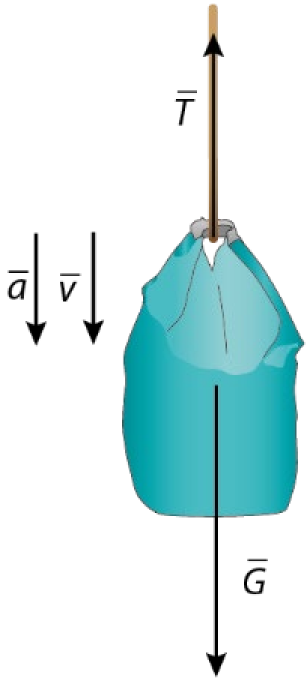
$T-G=0$

$$T=G=mg=8{,}2\,\text{kg}\cdot 9{,}81\text{m/s}^2=80{,}442\text{N}\approx 80\text{N}.$$

c) Varustesäkin massa m = 8,2 kg

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Varustesäkin kiihtyvyys a = 3,2 m/s^2



$\overline{G}$ = kappaleen paino

$\overline{T}$ = köyden jännitysvoima

Varustesäkki on kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaisesti $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$. Valitaan positiivinen suunta alaspäin. Köyden jännitysvoima voidaan laskea yhtälöstä.

$$
\begin{aligned}
G - T &= ma \\
T &= G - ma \\
T &= mg - ma = m(g - a) \\
&= 8{,}2\,\text{kg} \cdot (9{,}81\,\text{m/s}^2 - 3{,}2\,\text{m/s}^2) \\
&= 54{,}202\,\text{N} \approx 54\,\text{N}.
\end{aligned}
$$

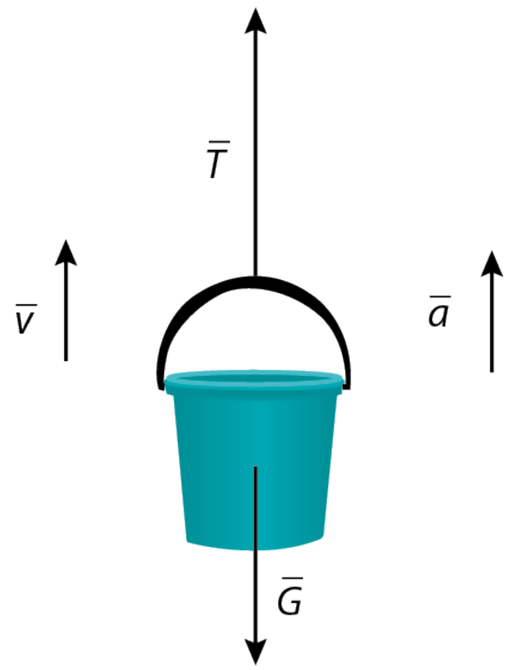
Tehtävä 6.14.

Narun jännitysvoima T = 92 N

Ämpärin kiihtyvyys a = 0,54 m/s^2

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a)



$\overline{G}=$kappaleen paino

$\overline{T}=$narun jännitysvoima

b) Ämpäri on kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaisesti $\Sigma\overline{F}=m\overline{a}$. Valitaan suunta ylöspäin positiiviseksi.

$$T-G=ma$$

$$T=mg+ma$$

$$T=m(g+a)$$

$$m=\frac{T}{g+a}=\frac{92\text{N}}{9{,}81\text{m/s}^2+0{,}54\text{m/s}^2}=8{,}888\text{kg}\approx 8{,}9\text{kg}.$$

Tehtävä 6.16.

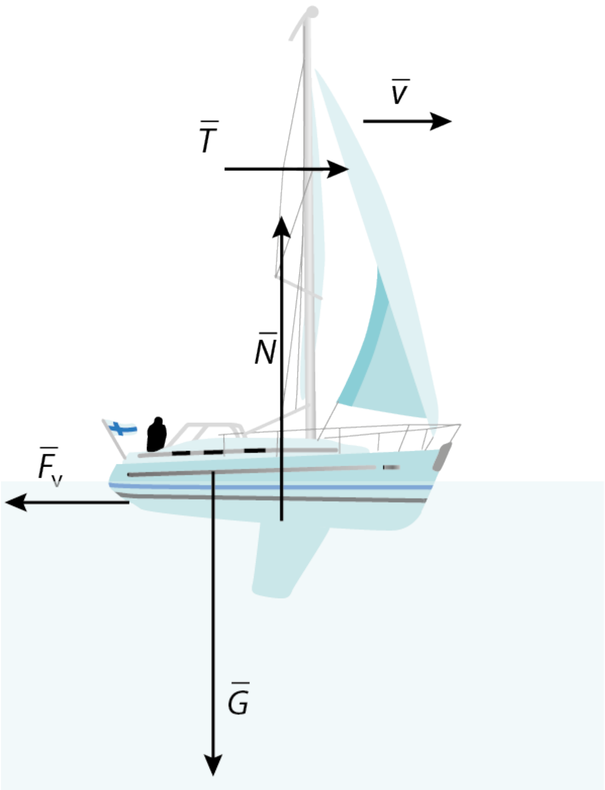
Purjeveneen massa m = 26 000 kg

Veden väliaineen vastus F_v = 427 kN

Purjeveneen nopeus v = 6,6 solmua

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a)



$\overline{F}_v$ = veden vastus

$\overline{N}$ = noste

$\overline{G}$ = paino

$\overline{T}$ = tuulen työntövoima

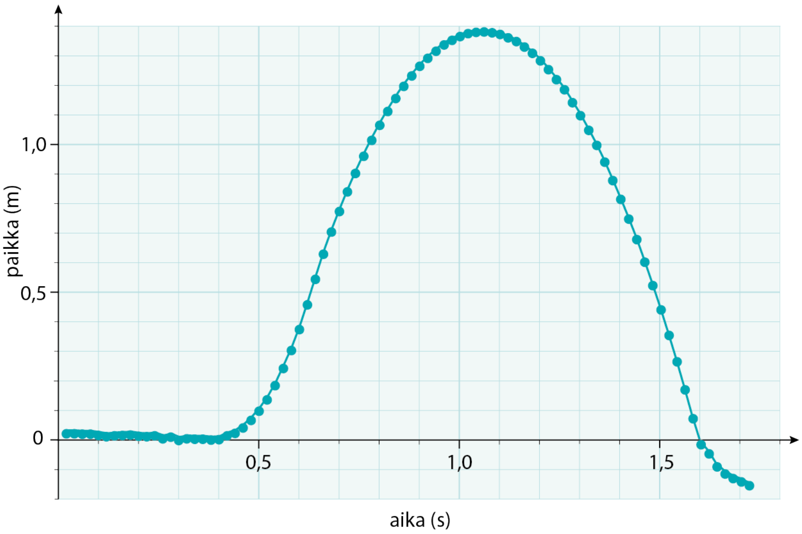
b) Koska purjevene kulkee vakionopeudella, on tuulen työntövoiman oltava yhtä suuri kuin veden väliaineen vastus. Tuulen työntövoiman suuruus on T = 427 kN.

c) Purjeveneellä ei ole kiihtyvyyttä. Silloin pystysuunnassa $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$, ja veneeseen kohdistuva noste on yhtä suuri kuin veneen paino. Kun positiivinen suunta valitaan ylöspäin, saadaan

$$\begin{aligned} N - G &= 0 \\ N &= G \\ &= mg \\ &= 26000\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \\ &= 255060\,\text{N} \\ &\approx 255\,\text{kN}. \end{aligned}$$

Tehtävä 6.17.

a)



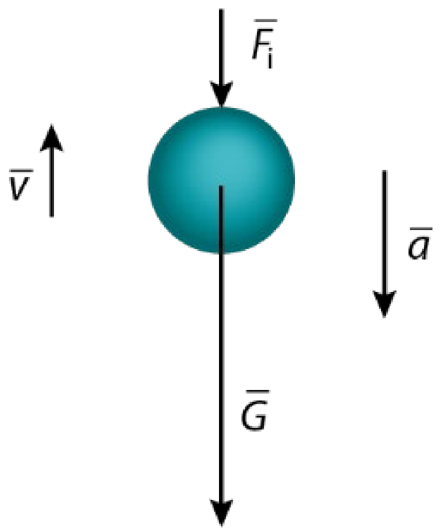
b) Kun koripallo on liikkeessä heittäjän kädessä, siihen vaikuttaa käden työntävä voima, koripallon paino ja ilmanvastus. Heiton alussa käden työntävä voima liikuttaa palloa ylöspäin, ja pallon nopeus kasvaa. Kiihtyvyys on silloin positiivinen.

Kun pallo on irtoamassa kädestä, sen kiihtyvyys pienenee ensin nollaan, ja muuttuu sitten negatiiviseksi.

Ilmassa olevaan koripalloon vaikuttavat pallon paino ja ilmanvastus. Kun pallo on irronnut kädestä, pallo on hidastuvassa liikkeessä ja kiihtyvyys on ilmanvastuksesta riippuen likipitäen $-g$.

(t, x)-koordinaatistoon piirretyn käyrän fysikaalinen kulmakerroin kuvaa pallon nopeutta. Pallo on irtoamassa kädestä ja sen kiihtyvyys on 0 m/s^2 ajanhetkellä t = 0,64 s, koska sen jälkeen pallon nopeus ei enää kasva eli kuvaajan jyrkkyys ei enää suurene.

c) Ajanhetkellä t = 0,90 s pallo on saavuttamassa lakipisteen.



$\overline{F}_i$ = ilmanvastus

$\overline{G}$ = pallon paino

Tehtävä 6.18.

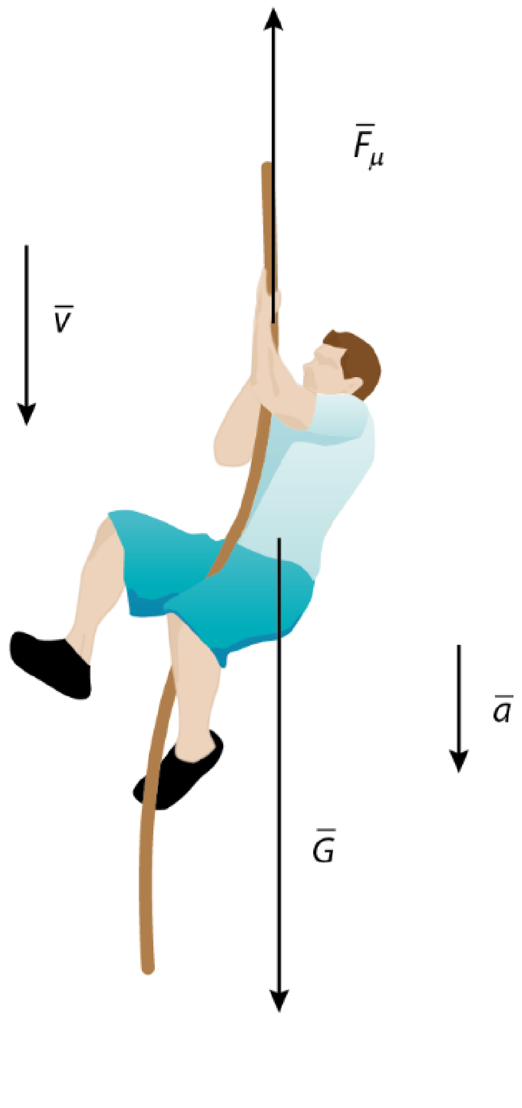
Opiskelijan massa m = 58 kg

Opiskelijan matka lattiaan s = 4,2 m

Kiihtyvyys a = 0,15 m/s^2

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a)



$\overline{F}_\mu =$ kitka

$\overline{G} =$ paino

b) Opiskelija on kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaisesti $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$. Valitaan suunta alaspäin positiiviseksi.

$$G - F_\mu = ma$$

$$\begin{aligned} F_\mu &= G - ma = m(g - a) \\ &= 58\,\text{kg} \cdot (9{,}81\,\text{m/s}^2 - 0{,}15\,\text{m/s}^2) = 560{,}28\,\text{N} \approx 560\,\text{N}. \end{aligned}$$

c) Opiskelija on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Alkunopeus on nolla. Ratkaistaan matkan lausekkeesta putoamisen kesto.

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$\frac{2s}{a} = t^2$$

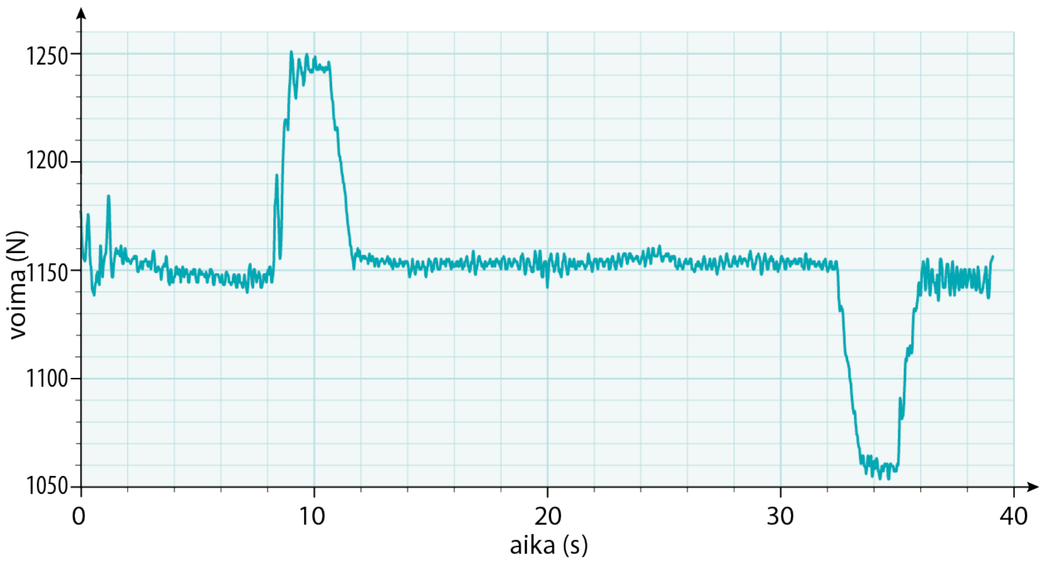
$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä nopeus on lopuksi $v = v_0 + at$. Nyt $v_0 = 0$, joten

$$\begin{aligned} v &= at = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{a^{\cancel{2}}2s}{\cancel{a}}} \\ &= \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 0{,}15\,\text{m/s}^2 \cdot 4{,}2\,\text{m}} = 1{,}1225\,\text{m/s} \approx 1{,}1\,\text{m/s}. \end{aligned}$$

Tehtävä 6.19.

a) Esitetään voima-anturin lukema ajan suhteen.



Opiskelijan vaikuttavat voimat ovat voimalevyn häneen kohdistama tukivoima $\overline{N}$ ja opiskelijan paino $\overline{G}$. Kun hissi on paikallaan, opiskelijan Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Paino on yhtä suuri kuin tukivoima, joten voimalevy näyttää opiskelijan painoa. Kuvaajan perusteella opiskelijan paino G = 1 150 N.

Opiskelija massa on silloin

$$G = mg$$

$$m = \frac{G}{g} = \frac{1150\,\text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2} = 117{,}23\,\text{kg} \approx 120\,\text{kg}.$$

b) Kun hissi lähtee liikkeelle, on opiskelija hetken aikaa kiihtyvässä liikkeessä. Opiskelijan liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$. Kiihtyvän liikkeen aiheuttaa Newtonin II lain mukainen kokonaisvoima, joka on tilanteessa painon ja tukivoiman summa.

Mittausaineistosta nähdään, että voima-anturin lukema muuttuu ensimmäisen kerran aikavälillä 9,0 s - 10,6 s. Tuolloin voima-anturin lukema kasvaa, eli $N > G$.

Opiskelija saa kiihtyvyyden tukivoiman suuntaan, eli ylöspäin. Hissi lähtee siis liikkeelle ylöspäin.

c) Hissi on kiihtyvässä liikkeessä, kun $\Sigma\overline{F} \neq \overline{0}$ eli $N \neq G$. Mittauksen perusteella tukivoima on suurempi kuin paino aikavälillä 9,0 s – 10,6 s ja pienempi kuin paino aikavälillä 33,4 s – 34,9 s. Koska tukivoima on aikaväleillä likipitäen vakio, on hissin liike tasaisesti kiihtyvää.

Aikavälillä 9,0 s – 10,6 s hissi lähtee liikkeelle ja aikavälillä 33,4 s – 34,9 s hissi pysähtyy.

Hissi on tasaisessa liikkeessä, kun $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $N = G$. Voimalevyn lukema on sama kuin paino aikavälillä 11,7 s – 32,3 s. Hissi on silloin tasaisessa liikkeessä.

d) Hissin kiihdyttäessä ylöspäin tukivoima on suurimmillaan N = 1 244 N.

Opiskelijan ja hissin suurin kiihtyvyys saadaan opiskelijan Newtonin II lain mukaisesta liikeyhtälöstä $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}.$ Kun suunta ylöspäin valitaan positiiviseksi, saadaan

$$N - G = ma.$$

Suurin kiihtyvyys on

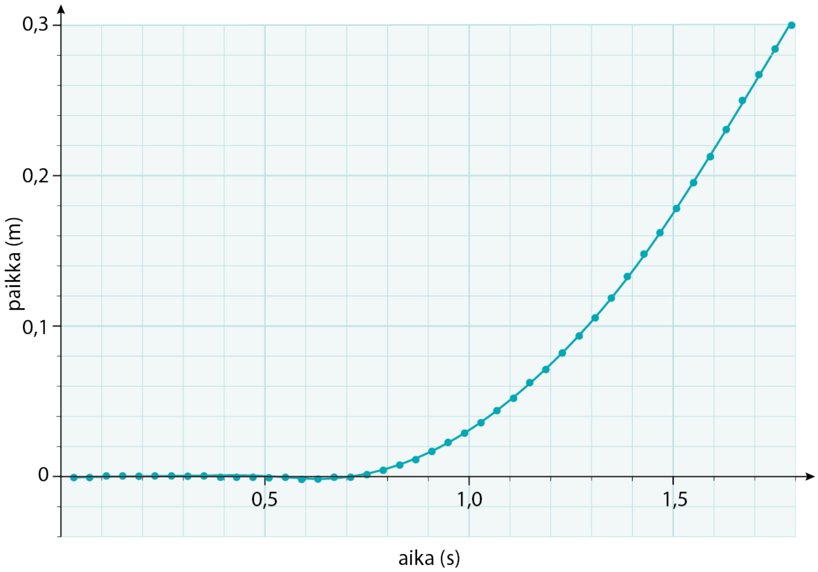
$$a = \frac{N-G}{m} = \frac{N-G}{\frac{G}{g}} = \frac{(N-G)g}{G}$$

$$= \frac{(1244\,\mathrm{N} - 1150\,\mathrm{N}) \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{1150\,\mathrm{N}} = 0{,}80186\,\mathrm{m/s^2} \approx 0{,}80\,\mathrm{m/s^2}.$$

Tehtävä 6.20.

a) Narun molempiin päihin kohdistuu 50 g:n punnukset, joten narun jännitysvoima on yhden punnuksen paino. Narun jännitysvoima alkutilanteessa on
$F = G = mg = 0{,}050\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 0{,}4905\,\text{N} \approx 0{,}49\,\text{N}.$

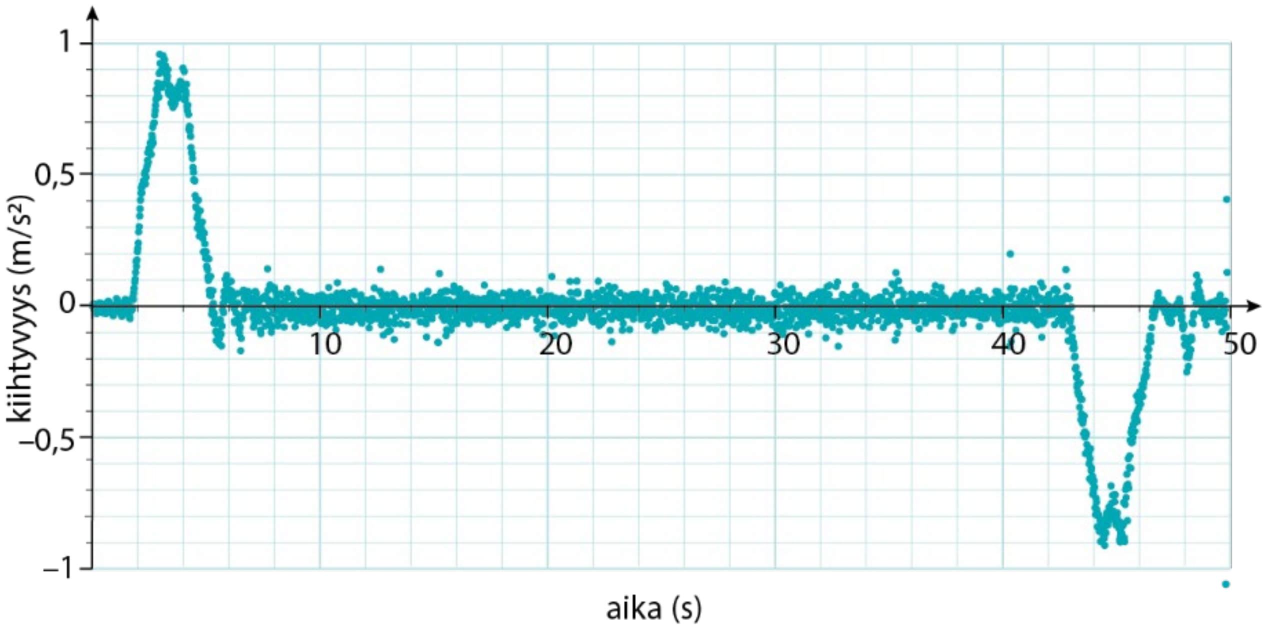
b) Esitetään vaunun paikka ajan suhteen.



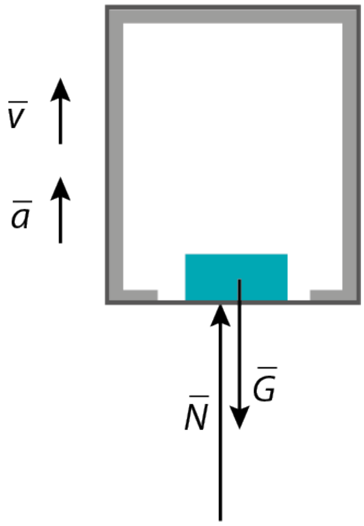
Paikan kuvaajan jyrkkyys kuvastaa vaunun hetkellistä nopeutta. Kuvaajan perustella vaunun nopeus kasvaa, joten vaunu on kiihtyvässä liikkeessä. Punnuksien painot ovat eri suuret punnuksen lisäämisen jälkeen, jolloin vainuun kohdistuvien voimien summa vaakasuunnassa poikkeaa nollasta. Newtonin II lain mukaan vaunu on tällöin tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, sillä kokonaisvoiman aiheuttaa punnusten painot ja niiden suuruudet eivät enää muutu punnuksen lisäämisen jälkeen.

Tehtävä 6.21.

a)



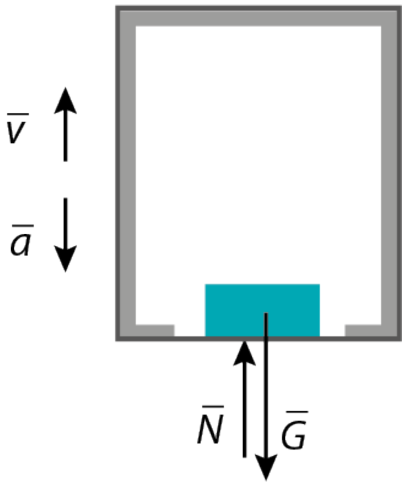
b) Ajanhetkellä 3,7 s hissi on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä ylöspäin, sillä hissin kiihtyvyys on suurempi kuin nolla.



$\bar{N} =$ hissin lattian tukivoima

$\bar{G} =$ paino

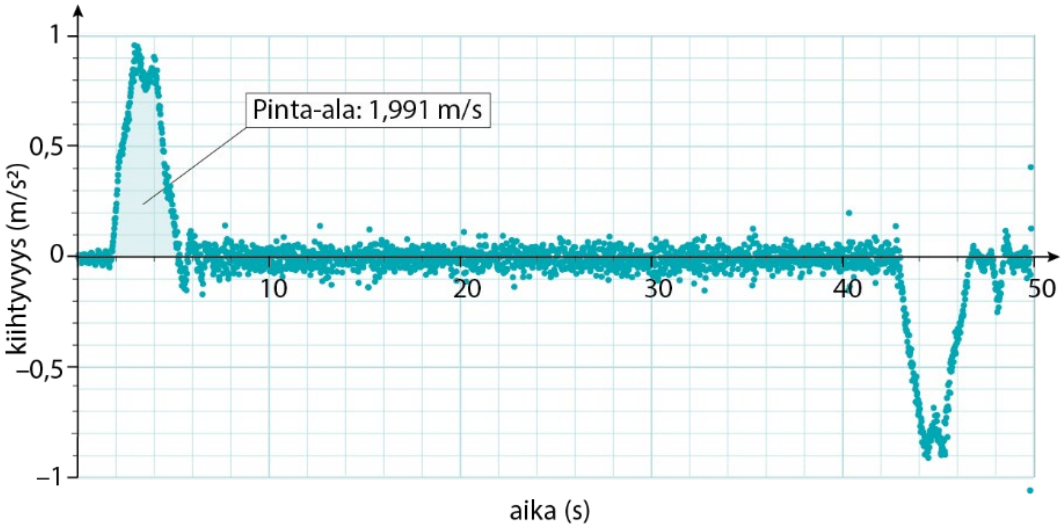
Ajanhetkellä 44,7 s hissin kiihtyvyys on pienempi kuin nolla, joten hissi on hidastuvassa liikkeessä.



$\bar{N} =$ hissin lattian tukivoima

$\bar{G} =$ paino

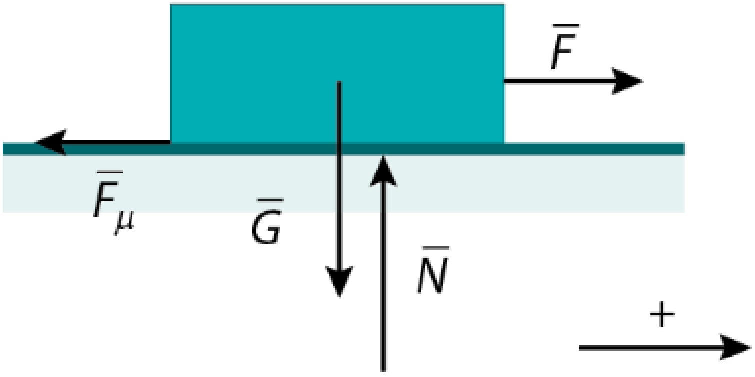
c) Hissi on tasaisessa liikkeessä liikkeelle lähdön jälkeen, kun hissin kiihtyvyys on nolla. Hissi on tasaisessa liikkeessä ajanhetkellä 5,3 s – 43 s. Hissin nopeus saadaan (*t, a*)-koordinaatiston kuvaajan ja aika-akselin rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta.



Hissin nopeus on v = 1,991 m/s ≈ 2,0 m/s.

Tehtävä 6.22.

a) Piirretään tilanteesta voimakuvio.



$\overline{N}$ = pinnan tukivoima

$\overline{G}$ = paino

$\overline{F}_\mu$ = kitka

$\overline{F}$ = vetävä voima

b) Laatikon massa m = 36 kg

Laatikon ja pinnan välinen kitka $\overline{F}_\mu$ = 150 N

Newtonin II lain mukaan laatikon liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Valitaan suunta oikealle positiiviseksi.

Suurin kiihtyvyys saadaan, kun vetävä voima on suurin:

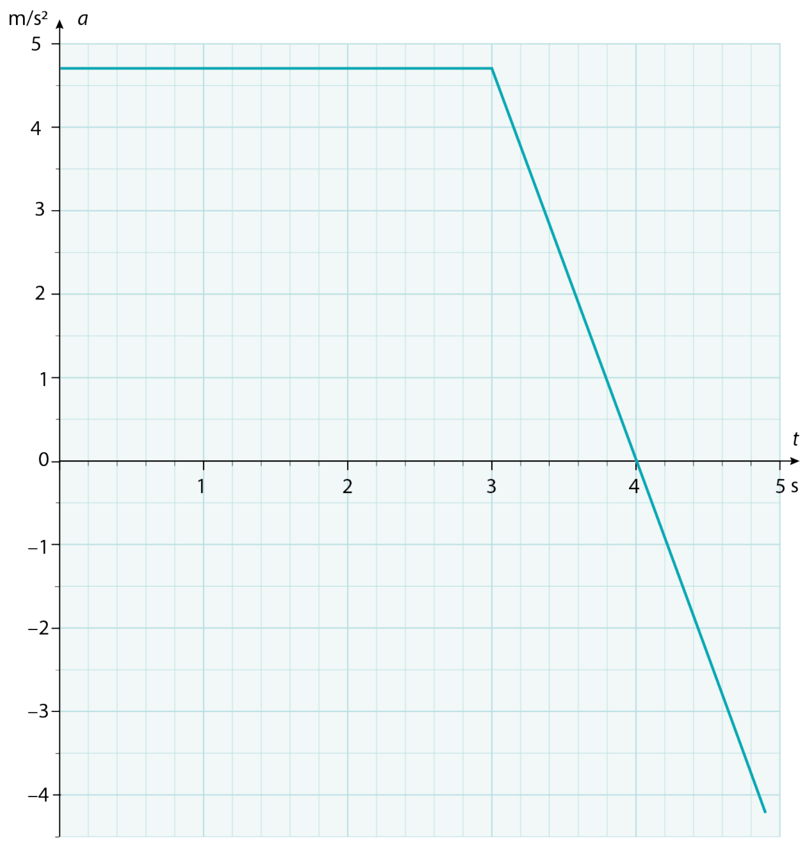
$$F - F_\mu = ma$$

$$a = \frac{F - F_\mu}{m} = \frac{320\ \text{N} - 150\ \text{N}}{36\ \text{kg}} = 4{,}72\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Pienin kiihtyvyys on silloin, kun pelkkä kitka vaikuttaa laatikkoon. Tällöin vetävä voima on suuruudeltaan F = 0 N:

$$-F_{\mu} = ma \Rightarrow a = \frac{-F_{\mu}}{m} = \frac{-150\ \text{N}}{36\ \text{kg}} = -4{,}17\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Piirretään kiihtyvyyden kuvaaja.



c) Laatikon nopeus kasvaa niin kauan, kun kiihtyvyys on positiivinen.

Se on suurin hetkellä t = 4,0 s, jolloin kiihtyvyys a = 0 m/s^2.

Tehtävä 6.23.

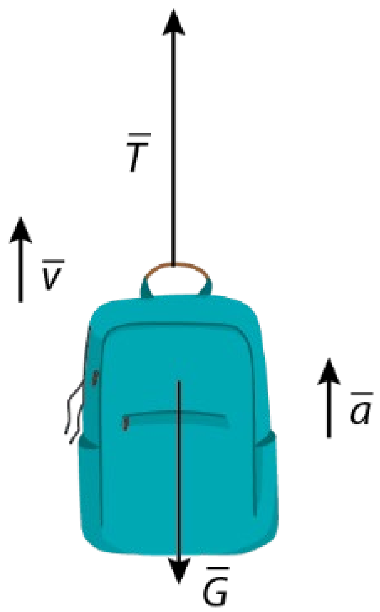
a) Repun massa m_r = 5,03 kg

Vaa'an lukema m_v = 5,31 kg

Kiihdytysaika t = 11 s

Loppunopeus v = 6,0 m/s

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2



$\overline{G}$ = paino

$\overline{T}$ = koukun tukivoima

b) Hissi on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaisesti $\Sigma\overline{F} = m_{\text{r}}\overline{a}$. Vaaka näyttää lukemaa $T = m_{\text{v}}g$.

Kun suunta ylöspäin valitaan positiiviseksi suunnaksi, saadaan

$$
\begin{aligned}
T - G &= ma \\
T &= G + m_{\text{r}}a \\
T &= m_{\text{r}}g + m_{\text{r}}a \\
m_{\text{v}}g &= m_{\text{r}}g + m_{\text{r}}a \\
m_{\text{r}}a &= m_{\text{v}}g - m_{\text{r}}g \\
m_{\text{r}}a &= (m_{\text{v}} - m_{\text{r}})g
\end{aligned}
$$

$$a = \frac{(m_{\text{v}} - m_{\text{r}})g}{m_{\text{r}}} = \frac{(5{,}31\,\text{kg} - 5{,}03\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{5{,}03\,\text{kg}} = 0{,}54608\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Hissin loppunopeus voidaan laskea tasaisesti kiihtyvän liikkeen mallin avulla yhtälöstä

$$v = at$$

$$v = \frac{(m_{\text{v}} - m_{\text{r}})g}{m_{\text{r}}} \cdot t = \frac{(5{,}31\,\text{kg} - 5{,}03\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{5{,}03\,\text{kg}} \cdot 11\,\text{s} = 6{,}0069\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 6{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Kun hissi liikkuu vakionopeudella, on sen kiihtyvyys nolla. Repun Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on silloin $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$, ja vaa’an tukivoima on yhtä suuri kuin painovoima. Vaaka näyttää samaa lukemaa kuin repun ollessa levossa. Vaaka näyttää lukemaa
m_{r} = 5,03 kg ≈ 5,0 kg.

Syvennä

Tehtävä 6.24.

a) Hiilikuituköydet mahdollistavat yhä korkeampien hissien rakentamisen. Hiilikuituköydet myös pidentävät hissin toimintaikää ja vähentävät samalla materiaalikulutusta.

b) Akseliin vaikuttavia voimia ovat: nostava voima ylöspäin, hissikorin ja ihmisten paino alaspäin, vastapainon, teräsköyden ja kompensaatioköyden painot alaspäin. Paikallaan olevaan akseliin vaikuttaa Newtonin II lain mukaan kokonaisvoima, joka on nolla.

$$\sum \overline{F} = \overline{0}$$

$$F = G_{\text{kok}}$$

$$F = m_{\text{kok}} g$$

$$= (1500\,\text{kg} + 21 \cdot 75\text{kg} + 2300\text{kg} + 2 \cdot 1400\text{kg}) \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$= 8175\text{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 80196{,}75\text{N} \approx 80\text{kN}$$

Akseliin vaikuttaa 80 kN:n voima.

c) Hiilikuituiset köydet pienentävät teräsköysien 2 · 1 400 kg = 2 800 kg massaa niin, että jäljelle jää vain 40 % alkuperäisestä massasta, eli 0,40 · 2 800 kg = 1 120 kg.

Tilanteessa akseliin vaikuttaa voima

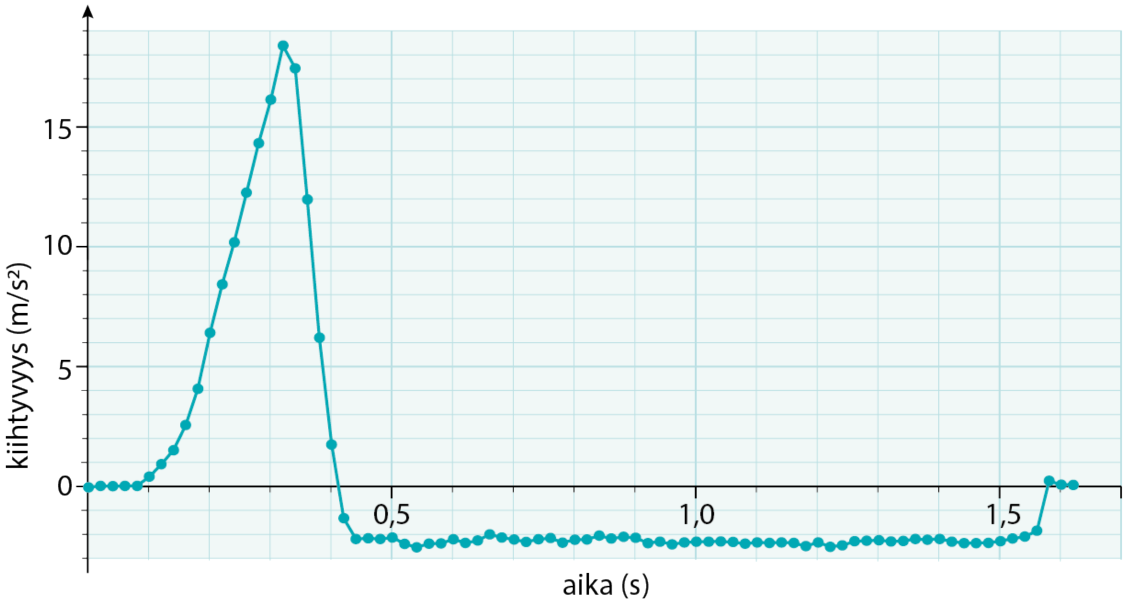
$$
\begin{aligned}
F &= G_{\text{kok}} = m_{\text{kok}} g \\
&= (1500\,\text{kg} + 21 \cdot 75\,\text{kg} + 2300\,\text{kg} + 0{,}4 \cdot 2 \cdot 1400\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \\
&= 6495\,\text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 63715{,}95\,\text{N} \approx 64\,\text{kN}
\end{aligned}
$$

Kun teräsköydet korvataan hiilikuituköysillä, akseliin kohdistuu 64 kN voima.

d) Kun hissi liikkuu, köysi siirtyy moottorin akselin puolelta toiselle. Yläasennossa nostoköyden paino on lähes kokonaan vastapainon puolella. Ala-asennossa nostoköyden paino on vastaavasti hissikorin puolella. Kompensaatioköyden avulla vetopyörän molemmille puolille saadaan yhtä suuri paino kaikissa tilanteissa. Kun hississä on kompensaatioköysi, hissi saadaan liikkumaan pienemmällä voimalla ja energiaa säästyy.

Tehtävä 6.25.

a)



(akselit oikein päin ja yksiköt näkyvillä 1 p, mittauspisteet näkyvillä 1 p)

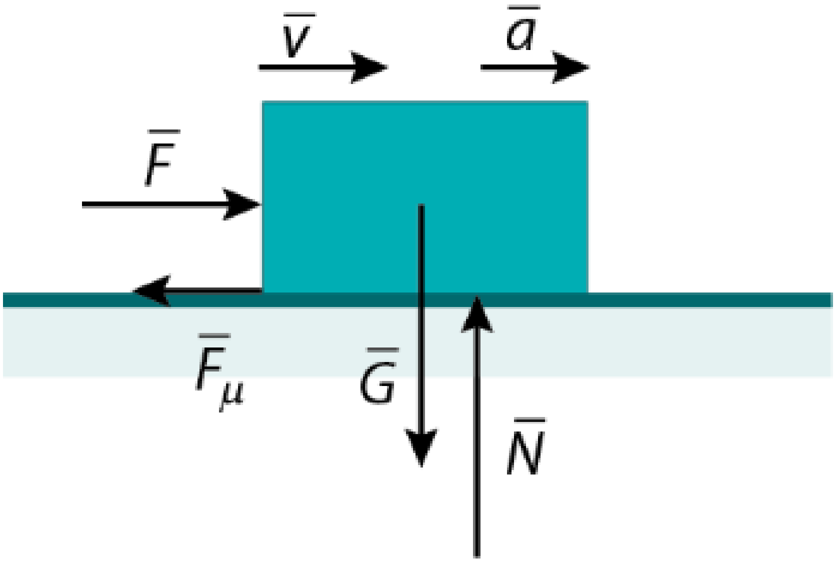
b) Kuvaajasta havaitaan, että alussa kiihtyvyys on positiivinen eli kappaleen nopeus kasvaa. Newtonin II lain mukaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima aiheuttaa kappaleelle kiihtyvän liikkeen. Tässä tilanteessa kiihtyvyys aiheutuu siitä, että eteenpäin vaikuttava käden tukivoima on suurempi kuin lattian ja kappaleen välillä liikkeelle vastakkaiseen suuntaan vaikuttava kitka. (1 p)

Työnnön aikana kappaleeseen vaikuttaa työntävä voima *F* ja kirjan ja lattian välinen kitka $\overline{F}_{\mu}$. Newtonin II lain mukaan $F - F_{\mu} = ma,$ jossa *m* on kappaleen massa ja *a* on kappaleen kiihtyvyys. (1 p)

Kun kappale irtoaa kädestä, kappaleeseen vaikuttaa vain kitka, joka aiheuttaa kappaleelle negatiivisen kiihtyvyyden. (1 p)

Newtonin II lain mukaan $F_{\mu} = ma$ kappale irtoaa kädestä, ajanhetkellä 0,44 s. (1 p)

c) Ajanhetkellä 0,35 s kappaletta työnnetään, ja se on kiihtyvässä liikkeessä.



$\bar{F}$ = käden tukivoima

$\bar{F}_{\mu}$ = kappaleen ja lattian välinen kitka

$\bar{N}$ = lattian kappaleeseen kohdistama tukivoima

$\bar{G}$ = kappaleen paino

Voimakuvion pisteytys:

Kuvaan on merkitty kaikki tilanteessa vaikuttavat voimavektorit oikeisiin suuntiin ja oikeille kohdilleen. (1 p)

Kappaleen paino painopisteestä.

Alustan tukivoima alkaa tai päättyy kappaleen alapinnasta.

Kitka alkaa kappaleen alareunasta.

Käden tukivoima päättyy kappaleen reunaan.

Voimavektorien pituudet ovat oikein. (1 p)

Vaakasuunnassa: käden tukivoima on pidempi kuin kitka.

Pystysuunnassa: tukivoima ja paino ovat yhtä pitkiä.

Voimat on nimetty listaan kuvion alle ja kuvioon on merkitty nopeus- ja kiihtyvyysvektorit. (1 p)

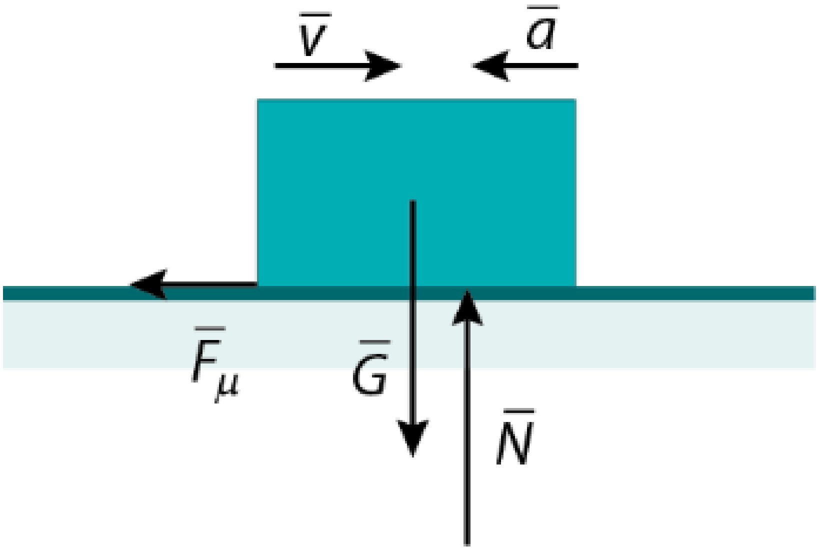
Huom!

- Jos voimakuviossa on yksikin ylimääräinen voima, ei voimakuviosta voi saada pisteitä, 0 p.

- Jos kaksi tai useampi voimista puuttuu, ei voimakuviosta voi saada pisteitä, 0 p.

- Jos voimavektorien vaikutuspisteet ovat väärin, esim. voima on piirretty irti kappaleesta sen vierelle tai eteen, kyseisestä voimasta ei anneta pisteitä. Jos kaksi tai useampi voima on näin piirretty, ei voimakuviosta voi saada pisteitä, 0 p.

d) Ajanhetkellä 1,0 s kappale on hidastuvassa liikkeessä.



$\bar{F}_{\mu} =$ kappaleen ja lattian välinen kitka

$\bar{N} =$ lattian kappaleeseen kohdistama tukivoima

$\bar{G} =$ kappaleen paino

Voimakuvion pisteytys:

Kuvaan on merkitty kaikki tilanteessa vaikuttavat voimavektorit oikeisiin suuntiin ja oikeille kohdilleen. (1 p)

Kappaleen paino painopisteestä.

Alustan tukivoima alkaa tai päättyy kappaleen alapinnasta.

Kitka alkaa kappaleen alareunasta.

Voimavektorien pituudet ovat oikein. (1 p)

Pystysuunnassa: tukivoima ja paino ovat yhtä pitkiä.

Voimat on nimetty listaan kuvion alle ja kuvioon on merkitty nopeus- ja kiihtyvyysvektorit. (1 p)

Huom!

- Jos voimakuviossa on yksikin ylimääräinen voima, ei voimakuviosta voi saada pisteitä, 0 p.

- Jos kaksi tai useampi voimista puuttuu, ei voimakuviosta voi saada pisteitä, 0 p.

- Jos voimavektorien vaikutuspisteet ovat väärin, esim. voima on piirretty irti kappaleesta sen vierelle tai eteen, kyseisestä voimasta ei anneta pisteitä. Jos kaksi tai useampi voima on näin piirretty, ei voimakuviosta voi saada pisteitä, 0 p.

e) Kappaleen massaa *m* = 0,715 kg

Kun kappale on irronnut kädestä ja liukuu lattiaa pitkin, Newtonin II lain mukaan $F_\mu = ma.$ (1 p) Kappaleen kiihtyvyys saadaan interpoloimalla kuvaajasta. Kiihtyvyys on −2,3 m/s². (1 p) Kappaleeseen vaikuttava kitka on

$$F_\mu = ma = 0{,}715\,\text{kg}\cdot(-2{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}) = -1{,}6445\,\text{N} \approx -1{,}6\,\text{N}.$$ (1 p)

7. Noste ja väliaineen vastus

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 7.1.

Väitteistä ovat oikein: a), b), d), e), g), h)

Korjaukset vääriin väitteisiin:

c) Nosteen suuruus lasketaan kertomalla keskenään ympäröivän kaasun tai nesteen tiheys, kappaleen upoksissa olevan osan tilavuus ja putoamiskiihtyvyys.

f) Kun jääpala kelluu veden pinnalla, jääpalaan vaikuttava noste on yhtä suuri kuin jääpalan paino.

i) Rajanopeus kertoo vapaasti putoavan kappaleen suurimman mahdollisen nopeuden väliaineessa.

Tehtävä 7.2.

Oikeat väittämät:

a) B

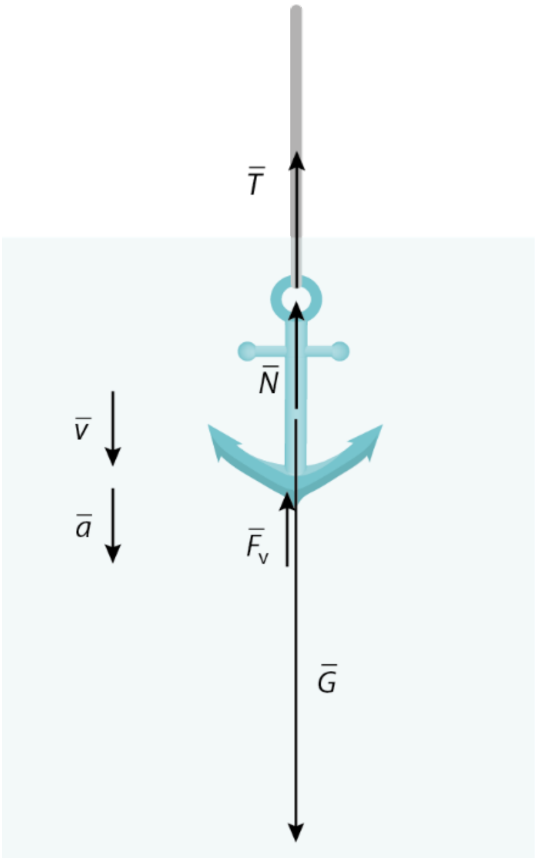
b) C

c) C

d) B

Tehtävä 7.3.

a)



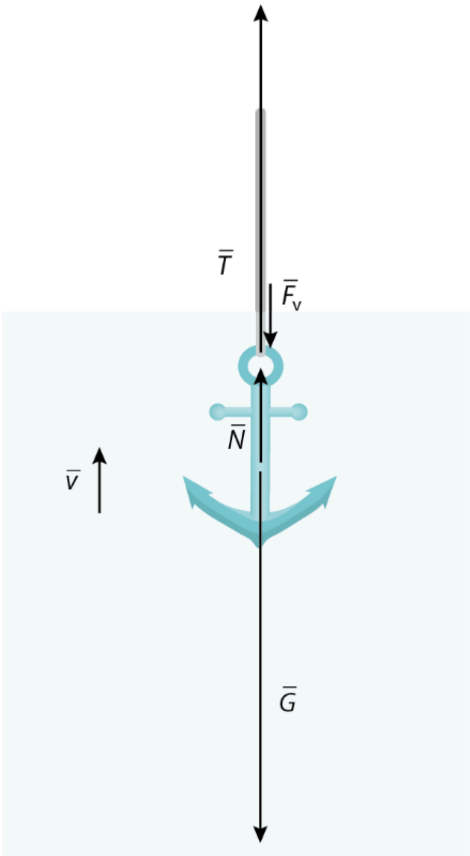
$\overline{F}_v =$ veden vastus

$\overline{N} =$ noste

$\overline{G} =$ kappaleen paino

$\overline{T} =$ vaijerin jännitysvoima

b)



$\overline{F}_v$ = veden vastus

$\overline{N}$ = noste

$\overline{G}$ = kappaleen paino

$\overline{T}$ = vaijerin jännitysvoima

Tehtävä 7.4.

Sukeltajan tilavuus V = 62 l

Veden tiheys ρ = 1 000 kg/m^3

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Veden sukeltajaan aiheuttama noste on

$$N = \rho g V = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}062\text{m}^3$$
$$= 608{,}22\text{N} \approx 610\text{N}.$$

Tehtävä 7.5.

a) Arkhimedeen lain mukaan väliaineessa olevaan kappaleeseen kohdistuu ylöspäin suuntautuva voima, noste. Noste on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän väliaineen paino.

b) Syrjäytetyn veden tilavuus V = 7,2 ml

Veden tiheys ρ = 1000 kg/m^3

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Veden messinkikuulaan aiheuttama noste

$$
\begin{aligned}
N &= \rho g V \\
&= 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}000\,0072\,\mathrm{m^3} \\
&= 0{,}070\,632\,\mathrm{N} \approx 71\,\mathrm{mN}.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 7.6.

a) Kuvan punnuksen paino on kuvan mukaisesti 3 N. Kun punnus upotetaan veteen, puntari kannattelee sitä voimalla 1 N. Vaikka punnuksen paino on sama, puntari kannattelee sitä pienemmällä voimalla. Veden nosteen on siis oltava 2 N. Kun punnus on upotettu astiaan, sen syrjäyttämä vesi on valunut ylivuotoastiaan. Syrjäytetyn veden paino on kuvan mukaisesti 2 N eli yhtä suuri kuin veden aiheuttama noste. Arkhimedeen lain mukaisesti kappaleeseen kohdistuva noste on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän väliaineen paino.

b) Raudan tiheys on suurempi kuin veden tiheys. Rautakuutio uppoaa, koska sen paino on suurempi kuin veden siihen kohdistama noste. Rautakuutio syrjäyttää tilavuutensa verran vettä. Rautakuution syrjäyttämän veden paino on pienempi rautakuution paino, joten kuutio uppoaa.

   Laiva syrjäyttää kuvan mukaisesti suuren määrän vettä. Syrjäytetyn vesimäärän paino on yhtä suuri kuin laivan paino, joten veden laivaan aiheuttama noste on yhtä suuri kuin laivan paino. Laiva kelluu.

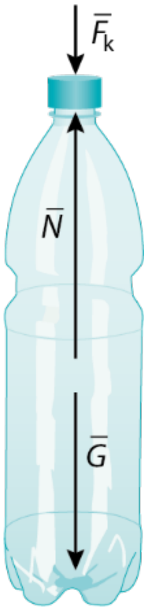
Tehtävä 7.7.

Autot liikkuvat moottoriveneitä nopeammin, koska tiellä liikkuvaan autoon vaikuttavat liikettä vastustavat voimat kuten ilmanvastus ja kitka ovat paljon pienemmät kuin moottoriveneeseen vaikuttava väliaineen eli veden vastus moottoriveneellä. Tämän vuoksi veneeseen vaikuttava kokonaisvoima on pienempi kuin autoon vaikuttava. Kun nopeus kasvaa, kasvaa myös väliaineen vastus vedessä nopeammin kuin ilmassa. Veneen rajanopeus on tällöin pienempi kuin auton.

Sovella

Tehtävä 7.8.

a)



$\overline{F}_k =$ käden tukivoima

$\overline{N} =$ noste

$\overline{G} =$ kappaleen paino

b) Syrjäytetyn veden tilavuus V = 1,5 l

Veden tiheys ρ = 1 000 kg/m^3

Pullon massa m = 73 g

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Pullo on paikallaan veden alla, jolloin Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Valitaan positiivinen suunta ylöspäin.

$$N - G - F_\mathrm{k} = 0.$$

Käden pulloon kohdistama voima

$$\begin{aligned} F_\mathrm{k} &= N - G \\ &= \rho g V - mg \\ &= 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}0015\mathrm{m}^3 - 0{,}073\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 13{,}99887\mathrm{N} \approx 14\mathrm{N}. \end{aligned}$$

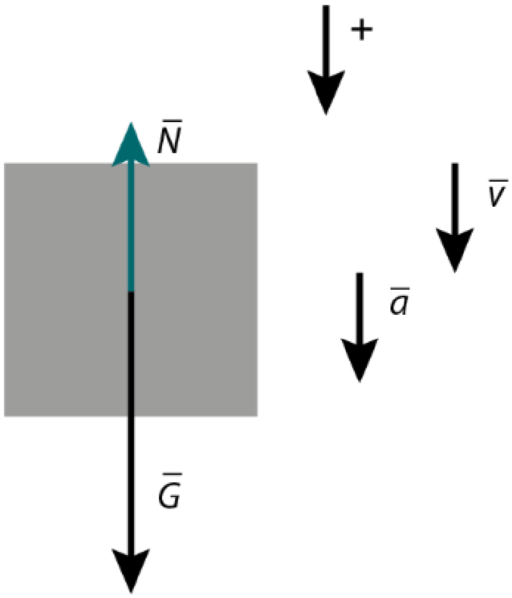
Tehtävä 7.9.

Veden tiheys $\rho_v = 1\,000\ \text{kg/m}^3$

Raudan tiheys $\rho_r = 7\,870\ \text{kg/m}^3$

Putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

a) Piirretään rautakappaleen voimakuvio.



$\bar{N} = $ noste

$\bar{G} = $ kappaleen paino

Rautakappale on aluksi kiihtyvässä liikkeessä. Tällöin Newtonin II lain mukaan $\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$. Valitaan positiivinen suunta alaspäin ja sijoitetaan massan ja nosteen lausekkeet.

$$G - N = ma$$

$$mg - \rho_v gV = ma$$

$$\rho_r \cancel{V} g - \rho_v g \cancel{V} = \rho_r \cancel{V} a$$

Ratkaistaan rautakappaleen kiihtyvyys

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{(\rho_\mathrm{r} - \rho_\mathrm{v})g}{\rho_\mathrm{r}} \\
&= \frac{(7870\,\mathrm{kg/m^3} - 1000\,\mathrm{kg/m^3}) \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{7870\,\mathrm{kg/m^3}} \\
&= 8{,}5635\,\mathrm{m/s^2} \approx 8{,}6\,\mathrm{m/s^2}.
\end{aligned}
$$

b) Kun työkalu päästetään putoamaan vedessä, veden aiheuttama väliaineenvastus alkaa vaikuttaa siihen. Väliaineen vastus pienentää työkalun kiihtyvyyttä. Työkalu saavuttaa vedessä rajanopeuden hyvin nopeasti. Tällöin väliaineen vastusvoiman ja nosteen summa on yhtä suuri kuin työkalun paino.

Tehtävä 7.10.

a) Kuumailmapallon sisällä olevaa ilmaa lämmitetään, jolloin ilma laajenee ja sen tiheys pienenee. Pallon sisällä olevan ilman tiheys on pienempi kuin sitä ympäröivän ilman tiheys. Osa lämmitetystä ilmasta virtaa pallon ulkopuolelle. Tasapainotilanteessa pallon syrjäyttämän ilman paino eli noste on yhtä suuri kuin pallon sisällä olevan ilman, pallon kuoren ja korin sekä kuorman paino. Näin pallo pysyy ilmassa.

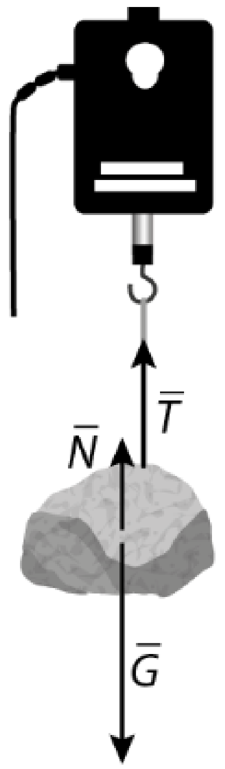
b) Pallon lentokorkeutta voidaan muuttaa säätämällä kaasupolttimen toimintaa.

Kun pallon sisällä olevaa ilmaa lämmitetään polttimella, pallon sisällä oleva ilma laajenee, joten sen tiheys pienenee. Tästä syystä myös pallon sisällä olevan ilman paino pienenee. Koska pallon koko ei muutu, noste pysyy samana ja pallo nousee ylöspäin.

Kun poltinta ei käytetä, kuumailmapallon sisällä oleva ilma jäähtyy. Tällöin pallon sisällä olevan ilman tiheys kasvaa ja ilman paino kasvaa. Koska pallon tilavuus pysyy samana, noste ei muutu ja pallo laskeutuu.

Tehtävä 7.11.

a)



$\overline{\mathrm{T}} =$ narun jännitysvoima

$\overline{N} =$ noste

$\overline{G} =$ kappaleen paino

b) Kiven tiheys ρ_k = 2 760 kg/m^3

Asetonin tiheys ρ_a = 790 kg/m^3

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Voima-anturin lukema, kun kivi on ilmassa T_1 = 31,3 N

Kivi on paikoillaan asetonissa, jolloin Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$.

Kun kivi on ilmassa, kiven paino on yhtä suuri kuin narun jännitysvoima,

$$T_1 = G = mg = \rho_k gV.$$

Tällöin kiven tilavuus on

$$V = \frac{T_1}{\rho_k g}.$$

Kun kivi on asetonissa paikallaan, Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Kun huomioidaan voimien suunnat, saadaan $G - N - T_2 = 0$.

Voima-anturin lukemaksi saadaan

$$T_2 = G - N$$
$$T_2 = G - \rho_a gV.$$

Sijoitetaan aiemmin saatu paino ja tilavuus tilanteesta, kun kivi oli ilmassa. Saadaan voima-anturin lukemaksi

$$T_2 = T_1 - \rho_a \cancel{g} \frac{T_1}{\rho_k \cancel{g}} = T_1 \cdot (1 - \frac{\rho_a}{\rho_k})$$

$$= 31{,}3\,\text{N} \cdot (1 - \frac{790\,\text{kg/m}^3}{2760\,\text{kg/m}^3}) = 22{,}34094\,\text{N} \approx 22{,}3\,\text{N}.$$

c) Koska vesi on asetonia tiheämpää, vesi aiheuttaa kiveen asetonia suuremman nosteen. Niinpä voima-anturin lukema on vedessä pienempi, sillä voima-anturin ei tarvitse kohdistaa kiveen yhtä suurta ylöspäin olevaa voimaa kuin asetonissa.

Tehtävä 7.12.

Vaa'an lukema suurenee. Sormeen kohdistuu veden aiheuttama noste, joka työntää sormea ylöspäin. Sormi on paikallaan, jolloin sormi painaa nestettä ja lasia alaspäin. Vaaka näyttää siihen kohdistuvan tukivoiman. Vaa'an lukema suurenee.

Tehtävä 7.13.

Ilmapallo vajoaa pohjaan. Hydrostaattinen paine on syvällä vedessä suurempi kuin veden pinnan lähellä. Paineen muutoksen takia pallossa oleva ilma puristuu kokoon ja ilmapallon tilavuus pienenee. Kun tilavuus pienenee, niin Arkhimedeen lain mukaan myös noste pienenee. Pallo vajoaa pohjaan.

Tehtävä 7.14.

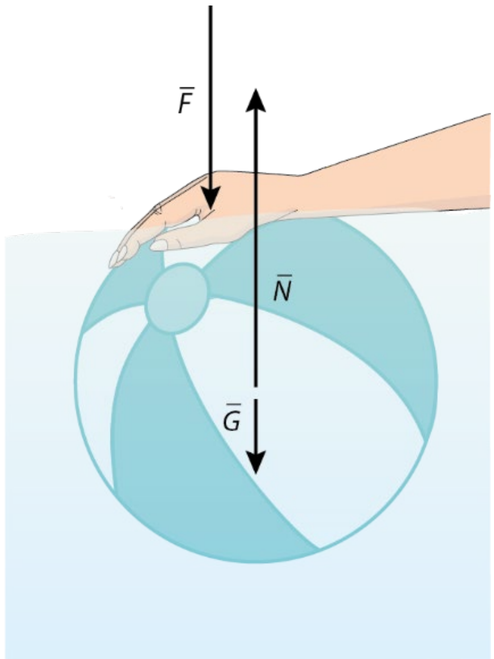
a) Pallon tilavuus V = 32 l = 32 dm^3 = 32 · 10^{-3} m^3

Pallon massa m = 45 g = 0,045 kg

Veden tiheys ρ = 1 000 kg/m^3

Veden alle painettu pallo on paikoillaan, joten Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$.

Piirretään pallon voimakuvio.



$\overline{F}$ = käden tukivoima

$\overline{N}$ = noste

$\overline{G}$ = kappaleen paino

Valitaan suunta ylöspäin positiiviseksi.

$N - G - F = 0$

Rantapalloa pitää painaa voimalla

$$F = N - G$$

$$F = \rho_{\mathrm{v}} gV - G$$

$$\begin{aligned} F &= \rho_{\mathrm{v}} gV - mg \\ &= (\rho_{\mathrm{v}} V - m)g \\ &= (1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}032\,\mathrm{m^3} - 0{,}045\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \\ &= 313{,}47855\,\mathrm{N} \approx 310\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

b) Kun pallo päästetään irti, pallo on nosteen vuoksi kiihtyvässä liikkeessä ylöspäin. Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$. Valitaan positiivinen suunta ylöspäin,

$$N - G = ma.$$

Pallon kiihtyvyys on

$$\begin{aligned} a &= \frac{N - G}{m} = \frac{(\rho_{\mathrm{v}} V - m)g}{m} \\ &= \frac{(1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}032\,\mathrm{m^3} - 0{,}045\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}045\,\mathrm{kg}} \\ &= 6966{,}19\,\mathrm{m/s^2} \approx 6970\,\mathrm{m/s^2}. \end{aligned}$$

c) Rantapallon suuri kiihtyvyys selittyy sen pienellä massalla ja suurella nosteella painoon nähden. Kun pallo liikkuu vedessä ylöspäin, siihen vaikuttaa veden vastus. Suuren pinta-alansa ja veden suuren tiheyden johdosta rantapallo saavuttaa rajanopeuden hyvin nopeasti. Rantapallo kulkee matkan kohti veden pintaa lähes vakionopeudella.

Tehtävä 7.15.

Auton alkunopeus v_0 = 66,9 m/s

Auton loppunopeus v_l = 33,8 m/s

Jarrutusmatka s = 145 m

Auton massa m = 850 kg

a) Kiihdytysauto on hidastuvassa liikkeessä. Auton kulkema matka jarrutuksen aikana saadaan tasaisesti kiihtyvän liikkeen mallin avulla,

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ eli tässä $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Jarrutukseen kulunut aika

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{t}$$
$$t = \frac{\Delta v}{a}.$$

Kiihdytysauton keskimääräiseksi hidastuvuudeksi saadaan

$$x = v_0 \frac{\Delta v}{a} + \frac{1}{2}\cancel{a}\frac{(\Delta v)^2}{a^{\cancel{2}}} = \frac{1}{a}(v_0 \cdot \Delta v + \frac{1}{2}(\Delta v)^2)$$

$$a = \frac{v_0 \cdot (v_\mathrm{l} - v_0) + \frac{1}{2}(v_\mathrm{l} - v_0)^2}{x}$$

$$= \frac{66{,}9\,\mathrm{m/s} \cdot (33{,}8\,\mathrm{m/s} - 66{,}9\,\mathrm{m/s}) + \frac{1}{2}(33{,}8\,\mathrm{m/s} - 66{,}9\,\mathrm{m/s})^2}{145\,\mathrm{m}}$$

$$= -11{,}4937\,\mathrm{m/s^2} \approx -11{,}5\,\mathrm{m/s^2}.$$

b) Jarruvarjon autoon kohdistama keskimääräinen ilmanvastus saadaan Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$. Auton hidastuvuus saadaan a-kohdasta, jolloin keskimääräinen ilmanvastus on

$$F_\mathrm{i} = ma$$

$$= 850\,\mathrm{kg} \cdot (-11{,}4937\,\mathrm{m/s^2})$$

$$= -9769{,}63\,\mathrm{N} \approx -9800\,\mathrm{N}.$$

c) Jarruvarjon avulla suurella nopeudella kulkevaan kiihdytysautoon saadaan aiheutettua suuri liikettä hidastava voima, joka pienentää auton nopeutta nopeasti. Myös auton ohjattavuus on parempi jarruvarjoa käytettäessä. Auton jarruttaminen pelkästään kitkaan perustuvilla jarruilla lämmittäisi auton jarrujen osia huomattavasti ja jarrut saattaisivat mennä rikki. Tämä lisäisi onnettomuuksien riskiä. Lämmenneet jarrulevyt voivat lukkiutua, jolloin auton ohjattavuus katoaisi.

Tehtävä 7.16.

Hydrostaattinen paine aiheuttaa lieriöiden pystypintoihin voiman joka suunnasta. Koska vastakkaissuuntaiset voimat ovat yhtä suuret, vaakatasossa vaikuttava kokonaisvoima on nolla.

Lieriöiden pohjiin kohdistuu suuremmat hydrostaattiset paineet kuin lieriöiden kansiin. Koska syvemmällä altaassa paine on suurempi, paine-erosta aiheutuva voima työntää lieriötä ylöspäin.

Ylöspäin työntävän voiman suuruus riippuu ylä- ja alapintojen välisestä paine-erosta ja lieriön pohjan pinta-alasta. Koska $F = \Delta pA$, voima on sitä suurempi, mitä suurempi on lieriön pohjan ala. Siten halkaisijaltaan suurimpaan lieriöön vaikuttaa suurin noste.

Arkhimedeen lain mukaan kappaleen syrjäyttämän aineen paino on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuva noste. Mitä suurempi lieriön tilavuus on, sitä suuremman määrän vettä se syrjäyttää ja sitä suurempi noste siihen kohdistuu.

Tehtävä 7.17.

a) Jään tiheys on pienempi kuin veden tiheys. Koska jääpala kelluu, siihen vaikuttavien voimien summa on nolla. Jääpalaan kohdistuva noste on yhtä suuri kuin kappaleen paino.

Newtonin II lain mukaan veden pinnalla paikoillaan kelluvalle jäälautalle $\Sigma \overline{F} = \overline{0}$. Voimien suunnat huomioituna

$$
\begin{aligned}
N - G &= 0 \\
N &= G \\
\rho_\text{v} \cancel{g} V_\text{v} &= m \cancel{g} \\
\rho_\text{v} V_\text{v} &= \rho_\text{j} V_\text{j} \\
V_\text{v} &= \frac{\rho_\text{j}}{\rho_\text{v}} \cdot V_\text{j}.
\end{aligned}
$$

Koska $\frac{\rho_\text{j}}{\rho_\text{v}} < 1$, on jääpalan veden alla oleva tilavuus pienempi kuin jään tilavuus. Eli osa jääpalan tilavuudesta on vedenpinnan päällä.

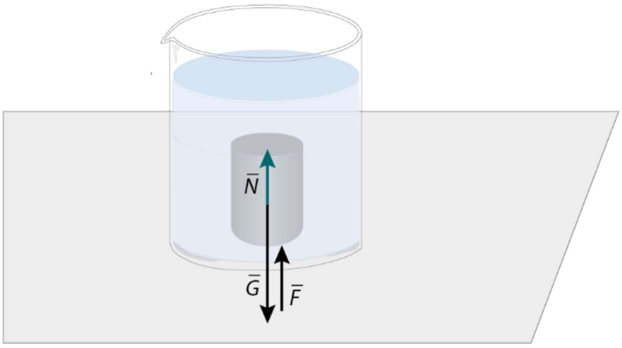
b) Kun voimien suunnat huomioidaan, vedessä kelluvalle jääpalalle pätee Newtonin II lain mukaan

$$
\begin{aligned}
N - G &= 0 \\
N &= G \\
\rho_{\mathrm{v}} \cancel{g} V_{\mathrm{v}} &= m \cancel{g} \\
\rho_{\mathrm{v}} V_{\mathrm{v}} &= \rho_{\mathrm{j}} V_{\mathrm{j}} \\
\frac{V_{\mathrm{v}}}{V_{\mathrm{j}}} &= \frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho_{\mathrm{v}}} = \frac{920\,\mathrm{kg/m^3}}{1000\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}92.
\end{aligned}
$$

Veden pinnan alapuolisen tilavuuden suhde jääpalan tilavuuteen on 92 %.

Tehtävä 7.18.

a)

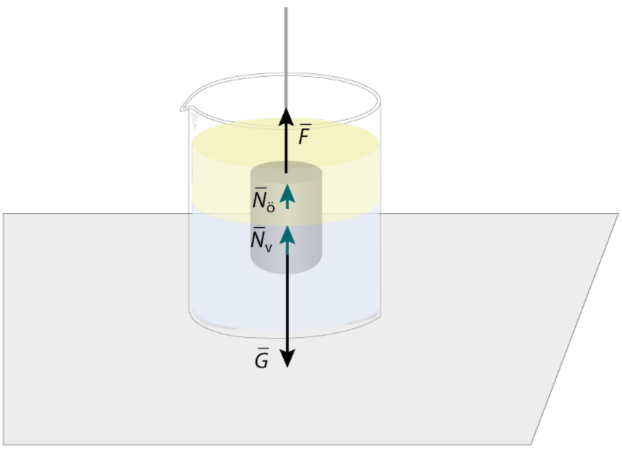


$\overline{F}$ = keitinlasin pohjan tukivoima

$\overline{N}$ = veden punnukseen aiheuttama noste

$\overline{G}$ = punnuksen paino

b)



$\overline{F}$ = narun jännitysvoima

$\overline{N}_v$ = veden punnukseen aiheuttama noste

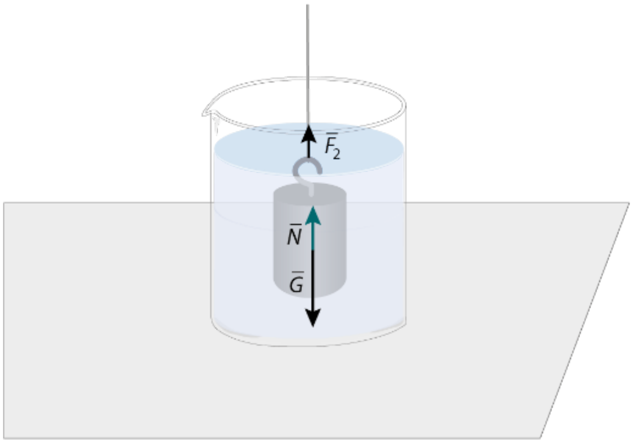
$\overline{N}_ö$ = öljyn punnukseen aiheuttama noste

$\overline{G}$ = punnuksen paino

Tehtävä 7.20.

a) Kun punnus roikkuu narun varassa voima-anturissa paikoillaan, on Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Silloin punnuksen paino yhtä suuri kuin voima-anturin lukema eli $F_1 = G = 1{,}56$ N.

Punnus upotetaan nesteeseen, jolloin punnukseen kohdistuvat voimat ovat:



$\overline{G} =$ punnuksen paino

$\overline{N} =$ punnukseen kohdistuva noste

$\overline{F}_2 =$ narun punnukseen kohdistama voima

Punnus on paikoillaan nesteessä, jolloin Newtonin II lain mukaan jälleen $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Kun positiivinen suunta valitaan ylöspäin, saadaan

$F_2 + N - G = 0.$

Nesteen punnukseen aiheuttama noste on

$N = G - F_2$

$N = F_1 - F_2 = 1{,}56\,\text{N} - 1{,}30\,\text{N} = 0{,}26\,\text{N}.$

b) Kun punnus upotettiin nesteeseen, on punnuksen tilavuus yhtä suuri kuin nesteen tilavuuden muutos. Kun punnus on ilmassa, on nesteen tilavuus 48,5 ml. Kun punnus on upotettuna nesteeseen, on nesteen tilavuus 71 ml.

Punnuksen tilavuus on V = 71 ml – 48,5 ml = 22,5 ml.

Punnuksen massa saadaan punnuksen painosta

$$G = F_1 = mg$$

$$m = \frac{F_1}{g}.$$

Punnuksen tiheys

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{F_1}{g}}{V} = \frac{F_1}{gV}$$

$$= \frac{1{,}56\,\mathrm{N}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 22{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3}} = 7067{,}62\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \approx 7100\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}.$$

c) Nesteen tiheys saadaan nosteen avulla

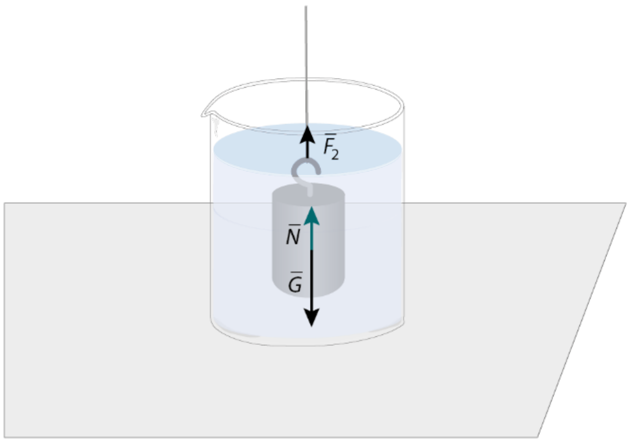
$$N = \rho_{\mathrm{neste}} V g$$

$$\rho_{\mathrm{neste}} = \frac{N}{gV} = \frac{0{,}26\,\mathrm{N}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 22{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3}} = 1177{,}94\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \approx 1200\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}.$$

Tehtävä 7.21.

Kun punnus on ilmassa, voima-anturin lukema F_1 on sama kuin punnuksen paino G.

Punnuksen voimakuvio nesteeseen upotettuna:



$\overline{G} =$ punnuksen paino

$\overline{N} =$ punnukseen kohdistuva noste

$\overline{F}_2 =$ narun punnukseen kohdistama voima

Kun punnus on upotettuna paikoillaan nesteeseen, on Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$.

Kun suunta ylöspäin valitaan positiiviseksi, saadaan

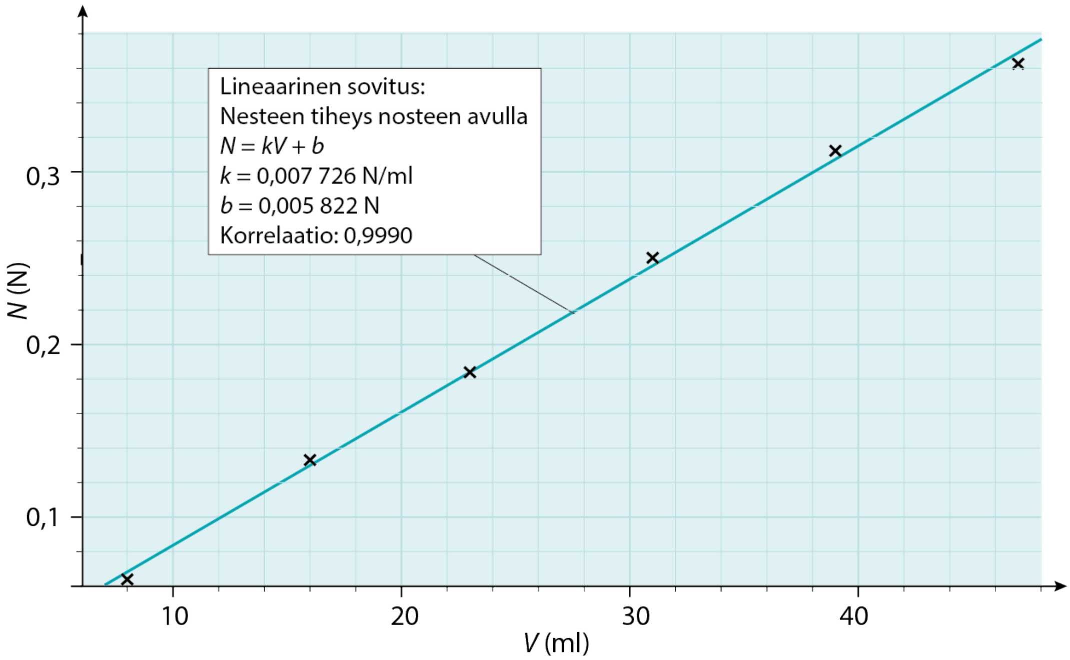
$$F_2 + N - G = 0$$
$$N = G - F_2$$
$$N = F_1 - F_2.$$

Lasketaan uusi sarake nosteelle jokaisesta mittauksesta.

***N* (N)**
0,063
0,132
0,183
0,250
0,312
0,362

b) Edellisessä kohdassa todettiin, että $F_1 - F_2 = N$.

Noste on suoraan verrannollinen punnuksen tilavuuteen yhtälön $N = \rho g V$ mukaisesti. Tällöin mittaustulosten pitäisi muodostaa (V, N)-koordinaatistoon suora, jonka fysikaalinen kulmakerroin on ρg. Määritetään kulmakerroin kuvaajan avulla.

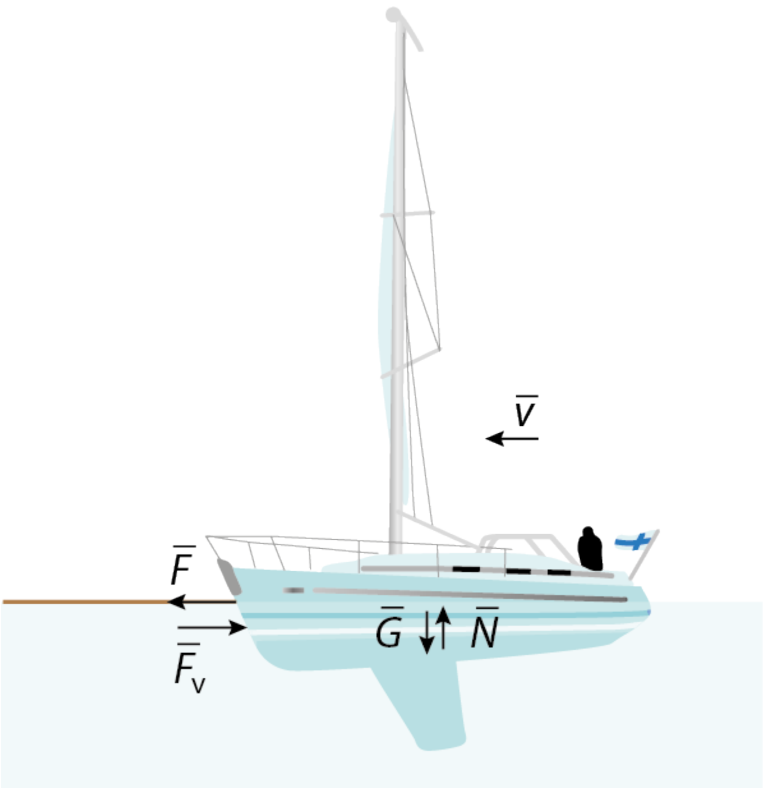


Kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin $\rho g = 0{,}007726$ N/ml, josta nesteen tiheydeksi saadaan

$$\rho = \frac{0{,}007726\,\mathrm{N/ml}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = \frac{0{,}007726 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m^3}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 787{,}56\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \approx 790\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}.$$

Tehtävä 7.22.

a) Piirretään purjeveneen voimakuvio.



$\overline{G}$ = purjeveneen paino

$\overline{N}$ = veden noste

$\overline{F}$ = vetävä voima

$\overline{F}_\mathrm{v}$ = veden väliaineen vastus

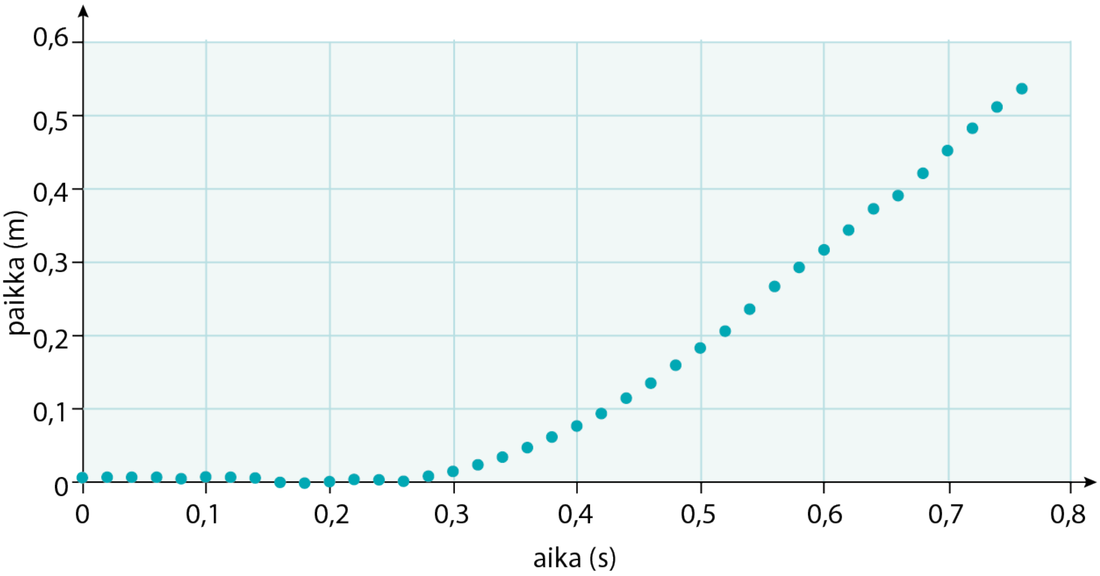
b) Lasketaan keskiarvot taulukkolaskentaohjelmalla.

	Nopeus veden suhteen *v* (kn)	Vetävä voima *F* (N)
	7,5	440980,4
	7,6	419011
	7,69	427874,2
	7,4	422688,3
	7,71	425705,6
	7,61	427402,8
ka:	7,585	427277,1

Koska purjevene on tasaisessa liikkeessä,
Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Tällöin vetävä voima on yhtä suuri kuin veden aiheuttama väliaineen vastus.
Veneen nopeuksien keskiarvo on v = 7,585 kn ≈ 7,59 kn.
Vetävän voima keskiarvo eli väliaineen vastus on
F_v = 427 277,1 N ≈ 427 000 N.

Tehtävä 7.23.

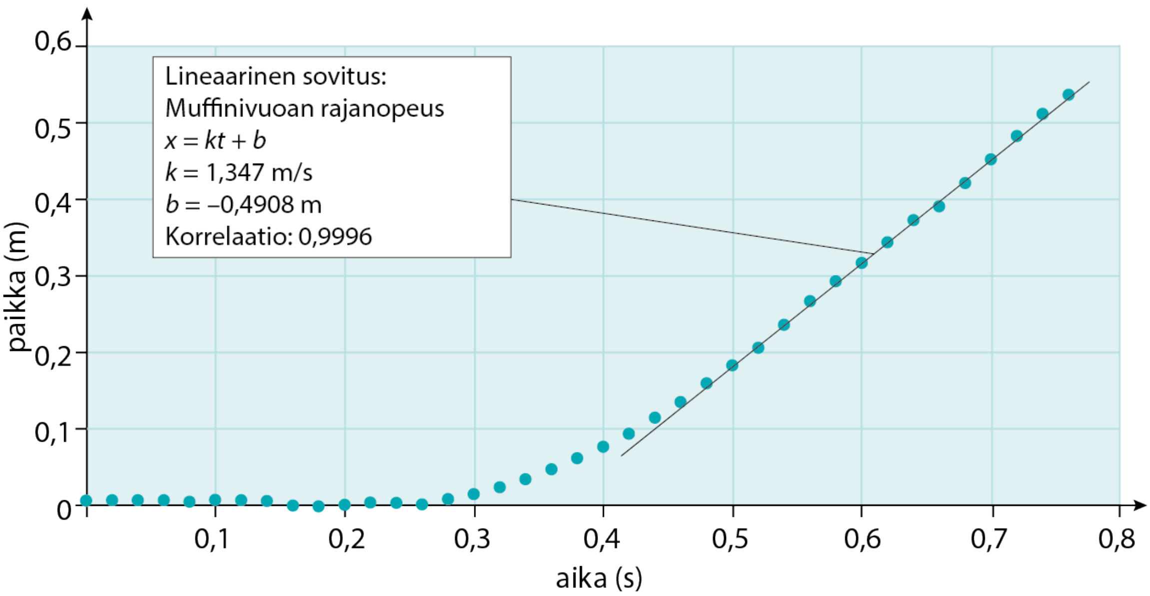
a)



b) (t, s)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan jyrkkyys kuvaa kappaleen nopeutta. Ajanhetkelle 0,26 s asti vuoka oli paikallaan. Tämän jälkeen kuvaajan jyrkkyys alkoi muuttua eli vuoan liike oli kiihtyvää. Ajanhetken 0,47 s jälkeen kuvaajan jyrkkyys pysyy samana. Tämän jälkeen vuoka oli tasaisessa liikkeessä.

c) Kun vuoka putoaa ilmassa vuokaan vaikuttaa paino ja ilmanvastus. Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$. Kun vuoka putoaa rajanopeudellaan, ilmanvastus ja paino yhtä suuret, joten vuoan kiihtyvyys on nolla.

Määritetään rajanopeus kuvaajan fysikaalisen kulmakertoimen avulla kohdasta, jossa kuvaajan jyrkkyys ei enää muutu.



Rajanopeudeksi saadaan v = 1,347 m/s ≈ 1,3 m/s.

Tehtävä 7.24.

Pallon ja varusteiden massa m_p = 540 kg

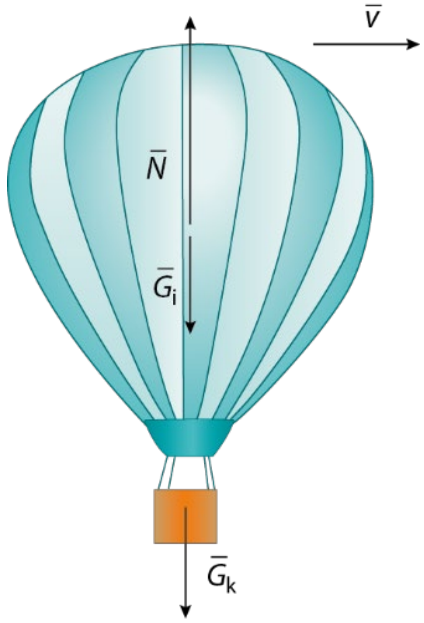
Kuumailmapallon tilavuus V = 4250 m^3

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Ilman tiheys ρ_i = 1,17 kg/m^3

Kuuman ilman tiheys ρ_k = 0,92 kg/m^3

a)



$\overline{N} =$ noste

$\overline{G}_i =$ ilman paino

$\overline{G}_k =$ pallon ja varusteiden paino

b) Kuumailmapallo tasaisessa liikkeessä, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Kun suunta ylöspäin valitaan positiiviseksi, saadaan kuumailmapallon liikeyhtälöksi

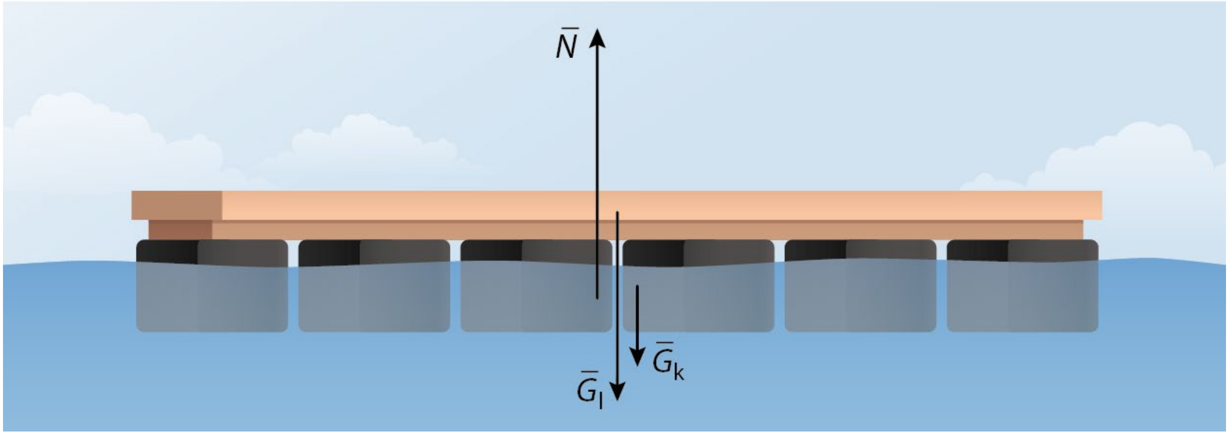
$N - G_{\mathrm{i}} - G_{\mathrm{k}} = 0.$

Kuumailmapallon, varusteiden ja kuorman kokonaismassaksi saadaan

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{k}} &= N - G_i \\
m\cancel{g} &= \rho_{\mathrm{i}}\cancel{g}V - \rho_{\mathrm{k}}V\cancel{g} \\
m &= (\rho_{\mathrm{i}} - \rho_{\mathrm{k}})V \\
m &= (1{,}17\,\mathrm{kg/m^3} - 0{,}92\,\mathrm{kg/m^3}) \cdot 4250\,\mathrm{m^3} = 1062{,}5\,\mathrm{kg}
\end{aligned}
$$

Koska pallon, varusteiden ja kuorman massa on m = 1062,5 kg on suurin mahdollinen kuorma
$m_{\mathrm{k}} = m - m_{\mathrm{p}}$ = 1062,5 kg – 540 kg =522,5 kg ≈ 520 kg

Tehtävä 7.25.



$\overline{N} =$ noste

$\overline{G}_k =$ ponttoonien paino

$\overline{G}_l =$ laiturin paino

b) Laiturin kannen massa m_l = 255 kg

Yhden kellukkeen massa m_k = 10 kg

Yhden kellukkeen koko 50 cm × 50 cm × 1,0 m

Veden tiheys ρ_v = 1 000 kg/m^3

Laituri on paikallaan veden pinnalla, joten Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}.$ Valitaan positiivinen suunta ylöspäin, jolloin voidaan kirjoittaa

$$N - G_\mathrm{k} - G_\mathrm{l} = 0.$$

Merkitään kellukkeiden veden alla olevaa tilavuutta tunnuksella V_v. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} N &= G_\mathrm{k} + G_\mathrm{l} \\ \rho_\mathrm{v} \cancel{g} V_\mathrm{v} &= m_\mathrm{k} \cancel{g} + m_\mathrm{l} \cancel{g} \\ V_\mathrm{v} &= \frac{m_\mathrm{k} + m_\mathrm{l}}{\rho_\mathrm{v}}. \end{aligned}$$

Kellukkeen veden pinnan alla oleva tilavuus on $V_\mathrm{v} = Ah$, jossa A on kellukkeiden pohjien yhteispinta-ala ja h on pinnan alla olevan kellukkeen osan korkeus.

Kuuden kellukkeen pohjien pinta-alat ovat yhteensä $A = 6 \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} \cdot 1{,}0\ \mathrm{m} = 3{,}0\ \mathrm{m}^2$.

Pinnan alla olevan kellukkeen osan korkeus on

$$Ah = \frac{m_{\mathrm{k}} + m_l}{\rho_v}$$

$$h = \frac{m_{\mathrm{k}} + m_{\mathrm{l}}}{A\rho_v} = \frac{6 \cdot 10\,\mathrm{kg} + 255\,\mathrm{kg}}{3{,}0\,\mathrm{m}^2 \cdot 1000\,\mathrm{kg/m}^3} = 0{,}105\,\mathrm{m}$$

Laiturin kannen ja vedenpinnan väliin jää siis

x = 0,5 m – 0,105 m = 0,395 m ≈ 40 cm.

Syvennä

Tehtävä 7.26.

Areometri eli hydrometri on mittalaite, jolla mitataan nesteen tiheyttä. Mittalaite on usein valmistettu lasista ja tasapainotettu pienillä punnuksilla. Areometri on nesteessä sitä syvemmällä, mitä pienempi nesteen tiheys on. Areometrin asteikko kertoo nesteen tiheyden. Areometriä voi käyttää esimerkiksi liuoksen väkevyyden tai pitoisuuden määrittämisessä.

Tehtävä 7.27.

Vedenpinnan korkeus ei muutu, kun jääpala sulaa. Kun jääpala kelluu veden pinnalla, veden jääpalaan aiheuttama noste on yhtä suuri kuin jääpalan paino. Tällöin Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$, ja voimien suunnat huomioiden

$$\begin{aligned} N - G &= 0 \\ N &= G. \end{aligned}$$

Merkitään vedenpinnan alapuolella olevan jään tilavuutta V_x. Veden pinnan alapuolella olevan jään tilavuudeksi saadaan

$$\begin{aligned} \rho_\mathrm{v} V_x \cancel{g} &= m_\mathrm{j} \cancel{g} \\ \rho_\mathrm{v} V_x &= \rho_\mathrm{j} V_\mathrm{j} \\ V_x &= \frac{\rho_\mathrm{j} V_\mathrm{j}}{\rho_\mathrm{v}}. \end{aligned}$$

Jääpalan jään massa on sama kuin jääpalassa olevan veden massa, jolloin

$$\begin{aligned} m_\mathrm{j} &= m_\mathrm{v} \\ \rho_\mathrm{j} V_\mathrm{j} &= \rho_\mathrm{v} V_\mathrm{v}. \end{aligned}$$

Tällöin jäästä sulaneen nestemäisen veden tilavuus on

$$V_\mathrm{v} = \frac{\rho_\mathrm{j} V_\mathrm{j}}{\rho_\mathrm{v}} = V_x.$$

Koska jäästä syntyneen nestemäisen veden tilavuus on sama, kuin nestepinnan alapuolella olevan jääpalan tilavuus, ei nestepinnan korkeus muutu, kun jää sulaa.

Tehtävä 7.28.

Keihään lähtönopeus $v_0 = 33$ m/s

Keihään lähtökulma $\theta = 45^\circ$

Putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

Keihään massa $m = 0{,}8$ kg

Keihään poikkipinta-ala $A = 10\ \text{cm}^2 = 10 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$

Ilman tiheys on $1{,}225\ \text{kg/m}^3$

a) Kun vastusvoimia ei huomioida, heiton pituudeksi saadaan

$$x = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = \frac{\left(33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ)}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 111{,}009\,17\,\text{m} \approx 110\,\text{m}.$$

Heiton pituus on 110 m, kun vastusvoimia ei huomioida.

b) Mallissa lähtökulma esiintyy vain sinilausekkeessa. Heiton pituuden maksimi saavutetaan, kun $\sin(2\theta)$ saa maksimiarvonsa.

$\sin(2\theta) = 1$, kun $2\theta = 90^\circ$, joten $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

c) Virtaviivaisen kappaleen ilmanvastuskerroin on taulukon mukaan C_d = 0,04. Keihään rajanopeudeksi saadaan

$$v_t = \sqrt{\frac{2mg}{\rho C_\mathrm{d} A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1{,}225\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0{,}04 \cdot 10 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}} = 565{,}974\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 566\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

d) Rajanopeus ratkaistiin edellä v_t = 565,974 m/s. Lähtönopeuden vaakasuora komponentti on $v_{0x} = 33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin 45^\circ = 23{,}33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kun ilmanvastus huomioidaan, keihään vaakasuoranopeus v_x ajanhetkellä t = 4,7 s

$$v_x = \frac{v_\mathrm{t}^2 v_{0x}}{v_\mathrm{t}^2 + g v_{0x} t} = \frac{\left(565{,}974\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 23{,}33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\left(565{,}974\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 23{,}33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4{,}7\,\mathrm{s}} = 23{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen kulkema matka voidaan laskea keskinopeuden avulla.

Heiton pituudeksi arvioidaan

$$x = v_\mathrm{k} t = \frac{v_0 + v_x}{2} t = \frac{23{,}33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 23{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} \cdot 4{,}7\,\mathrm{s} = 109{,}46\,\mathrm{m} \approx 109\,\mathrm{m}.$$

Tehtävä 7.29.

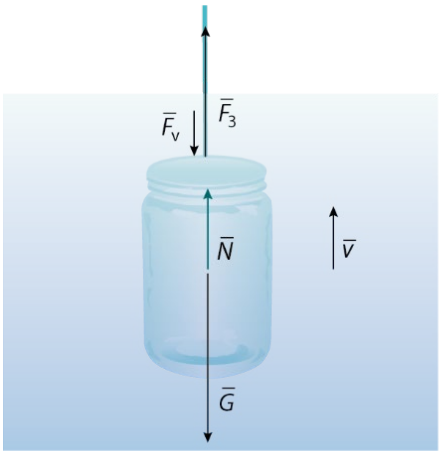
Voima-anturin lukema, kun purkki ilmassa $F_1 = 0{,}65\ \text{N}$

Voima-anturin lukema, kun purkki vedessä $F_2 = 0{,}23\ \text{N}$

Veden tiheys $\rho = 1\,000\ \text{kg/m}^3$

Putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

a) Purkkia nostetaan vedessä vakionopeudella.



$\overline{G} =$ purkin paino

$\overline{F}_3 =$ langan jännitysvoima

$\overline{F}_v =$ väliaineen vastus

$\overline{N} =$ veden purkkiin aiheuttama noste

Voimakuvion pisteytys:

Kuvaan on merkitty kaikki tilanteessa vaikuttavat voimavektorit oikeisiin suuntiin ja oikeille kohdilleen. (1 p)

Kappaleen paino painopisteestä

Alustan tukivoima alkaa tai päättyy kappaleen alapinnasta

Väliaineen vastus päättyy kappaleen yläreunaan

Langan jännitysvoima päättyy kappaleen reunaan

Voimavektorien pituudet ovat oikein. (1 p)

Pystysuunnassa: ylöspäin kohdistuvat voimat ovat yhtä pitkät kuin alaspäin kohdistuvat voimat

Voimat on nimetty listaan kuvion alle ja kuvioon on merkitty nopeus- ja kiihtyvyysvektorit (1 p)

Huom!

- Jos voimakuviossa on yksikin ylimääräinen voima, ei voimakuviosta voi saada pisteitä, 0 p.

- Jos kaksi tai useampi voimista puuttuu, ei voimakuviosta voi saada pisteitä, 0 p.

b) F_2 on voima-anturin voima, kun tölkki on nesteessä paikoillaan.

Kun purkki on vedessä paikallaan, Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Voimien suunnat huomioiden

$F_2 + N - G = 0.$ (1 p)

Kun purkkia pidetään langan varassa ilmassa, Newtonin II lain mukaan

$F_1 = G.$

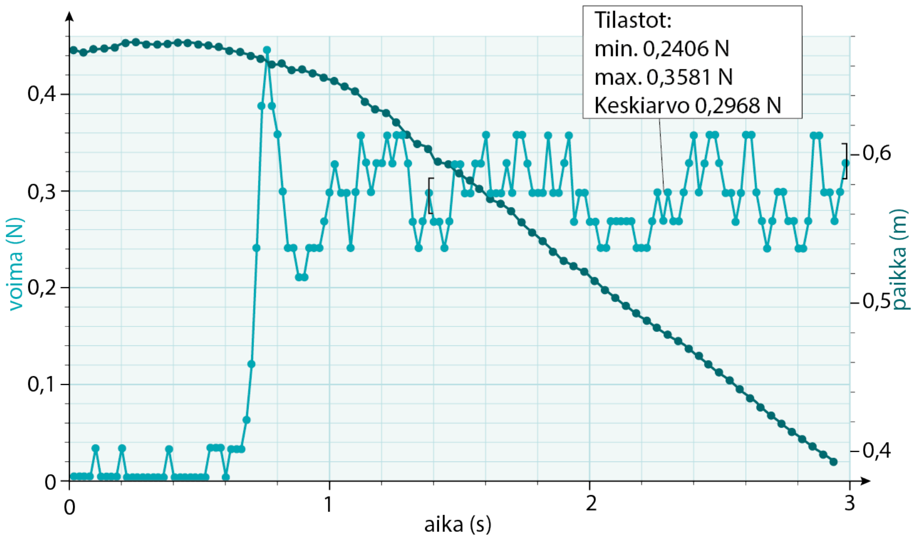
Purkin tilavuus saadaan nosteen avulla

$$\begin{aligned} F_2 + \rho g V - G &= 0 \\ F_2 + \rho g V - F_1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{(1 p)}$$

$$\rho g V = F_1 - F_2$$

$$V = \frac{F_1 - F_2}{\rho g} = \frac{0{,}65\,\text{N} - 0{,}23\,\text{N}}{1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4{,}28135 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^3 \approx 43\,\text{cm}^3. \quad \text{(2 p)}$$

c) Esitetään voima-anturin voima ja purkin paikka eri ajanhetkillä.



(2 p)

Paikan kuvaajasta nähdään, että voima-anturi liikkui tasaisella nopeudella aikavälillä 1,2 s – 2,9 s, sillä tällä välillä kuvaajan jyrkkyys ei muutu. (1 p) Voiman kuvaajasta määritetään langan jännitysvoiman suuruus F_3 = 0,2968 N. (1 p)

Kun purkki liikkuu vakionopeudella ylöspäin, Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioiden

$F_3 + N - G - F_v = 0$. (1 p)

Tehtävän aiemmista kohdista $N = F_2 - G_1$.

Ratkaistaan väliaineen vastus

$F_v = F_3 + N - G$ (1 p)

$F_v = F_3 + (G - F_2) - G$

$F_v = F_3 - F_2$ (1 p)

$F_v = 0{,}2968\,\mathrm{N} - 0{,}23\,\mathrm{N} = 0{,}0668\,\mathrm{N} \approx 67\,\mathrm{mN}$. (1 p)

8. Liikeyhtälö ja voimakuvio

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 8.1.

a) B

b) B

c) A

d) B

e) A

f) C

g) B

h) C

Tehtävä 8.2.

Voiman $\overline{T}_1$ komponentit:

$T_{1,x} = -30\ \text{N}$

$T_{1,y} = 10\ \text{N}$

Voiman $\overline{T}_2$ komponentit:

$T_{2,x} = 30\ \text{N}$

$T_{2,y} = 10\ \text{N}$

Painon $\overline{G}$ komponentit:

$G_x = 0$

$G_y = -20\ \text{N}$

Tehtävä 8.3.

a) Kappaleeseen vaikuttavat voimien suuruudet ovat
$F_1 = 12$ N ja $F_2 = 16$ N.

Voimat ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden, joten

kokonaisvoiman suuruus voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla.

$$F_1^2 + F_2^2 = F_{\text{kok}}^2$$

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(12\,\text{N})^2 + (16\,\text{N})^2} = 20\,\text{N}$$

Kokonaisvoiman ja vaakasuunnan väliselle kulmalle saadaan

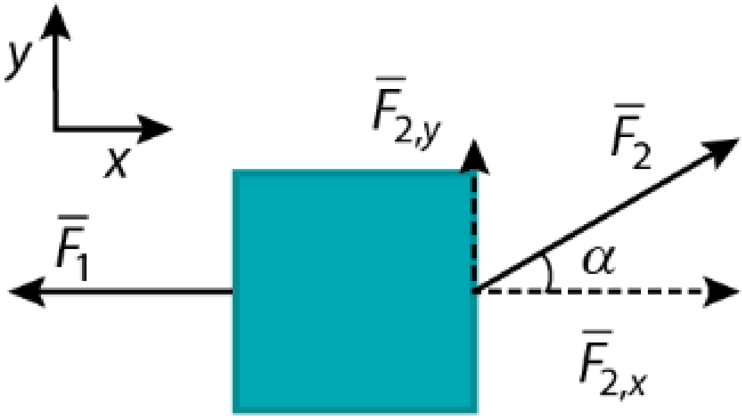
$$\tan\alpha = \frac{F_2}{F_1}$$

$$\tan\alpha = \frac{16\,\text{N}}{12\,\text{N}}$$

$$\alpha = 53{,}1301^\circ \approx 53^\circ.$$

Kokonaisvoiman suuruus on 20 N ja sen suunta on vasemmalle yläviistoon 53° kulmassa vaakasuuntaan nähden.

b) Jaetaan voimat vaaka- ja pystysuuntaisiin komponentteihin.



$F_{1,x} = F_1$

$F_{1,y} = 0$

$F_{2,x} = F_2 \cos\alpha$

$F_{2,y} = F_2 \sin\alpha$

Kokonaisvoimat *x*- ja *y*-suunnissa:

$F_x = -F_{1,x} + F_{2,x} = -F_1 + F_2 \cos\alpha$

$F_y = F_{2,y} = F_2 \sin\alpha$

Ratkaistaan kokonaisvoiman suuruus Pythagoraan lauseen avulla.

$$F_x^{\ 2}+F_y^{\ 2}=F^2$$

$$\begin{aligned}F&=\sqrt{F_x^{\ 2}+F_y^{\ 2}}\\&=\sqrt{(-F_1+F_2\cos\alpha)^2+(F_2\cdot\sin\alpha)^2}\\&=\sqrt{(-12\,\mathrm{N}+16\,\mathrm{N}\cdot\cos30^\circ)^2+(16\,\mathrm{N}\cdot\sin30^\circ)^2}\\&=8{,}21256\,\mathrm{N}\approx8{,}2\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

Kokonaisvoiman ja vaakasuunnan väliselle kulmalle saadaan

$$\tan\alpha=\frac{F_y}{F_x}$$

$$\tan\alpha=\frac{F_2\cdot\sin\alpha}{-F_1+F_2\cos\alpha}=\frac{16\,\mathrm{N}\cdot\sin30^\circ}{-12\,\mathrm{N}+16\,\mathrm{N}\cdot\cos30^\circ}$$

$$\alpha=76{,}9357^\circ\approx77^\circ.$$

Kokonaisvoiman suuruus on 8,2 N ja sen suunta on oikealle yläviistoon 77° kulmassa vaakasuuntaan nähden.

Tehtävä 8.4.

Kaappi ei lähde liukumaan, kun sen Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Valitaan koordinaatiston *x*-akseli rampin suuntaiseksi, jolloin *y*-akseli on kohtisuorassa pintaa vastaan.

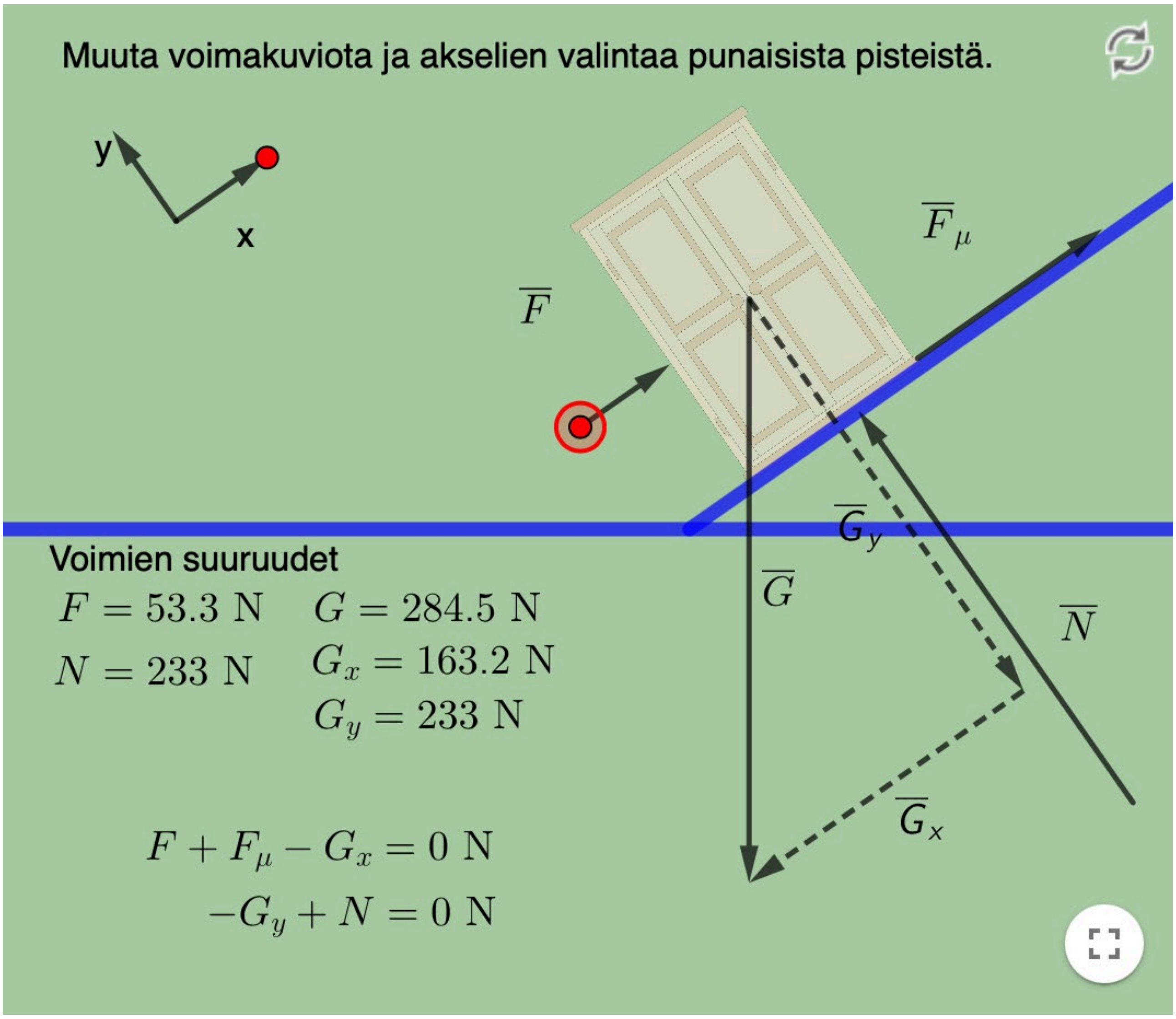
x-suunnassa: $F + F_{\mu} - G_x = 0$ eli $F = G_x - F_{\mu}$

y-suunnassa: $N - G_y = 0$ eli $N = G_y$

Muokataan simulaatiossa akselit sopivan suuntaisiksi.

Simulaatiosta havaitaan, että *y*-suunnan yhtälö toteutuu kaikilla työntävän voiman $\overline{F}$ suuruuksilla.

Liikeyhtälö toteutuu myös *x*-suunnassa, kun työntävän voiman suuruus on $F \approx 53$ N.



Muuta voimakuviota ja akselien valintaa punaisista pisteistä.
y
x
$\overline{F}$
$\overline{F}_\mu$
$\overline{G}_y$
$\overline{G}$
$\overline{N}$
$\overline{G}_x$
Voimien suuruudet
$F = 53.3$ N
$G = 284.5$ N
$N = 233$ N
$G_x = 163.2$ N
$G_y = 233$ N
$F + F_\mu - G_x = 0$ N
$-G_y + N = 0$ N

Tehtävä 8.5.

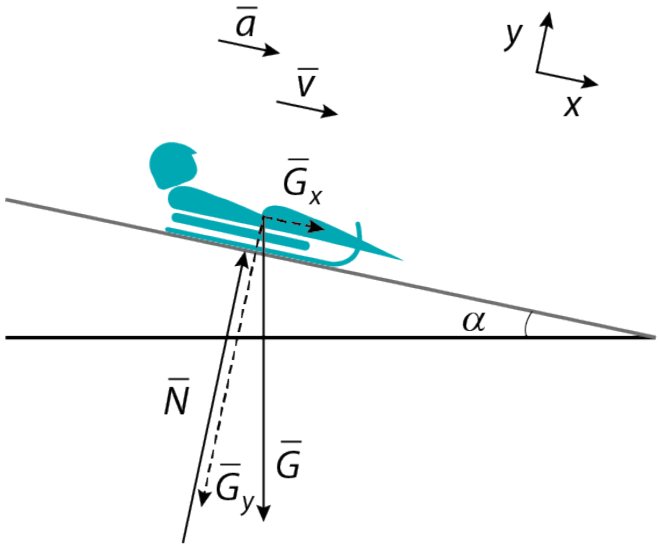
Kun selvitetään rakennuksen tai koneen osiin kohdistuvat voimat, voidaan varmistua, että rakenteet ovat riittävän kestäviä käyttötarkoitukseensa. Toisaalta voidaan säästää myös kustannuksissa, kun valitaan edullisimmat materiaalit, jotka täyttävät kestävyysvaatimukset.

Tehtävä 8.6.

a) Jos vastusvoimia ei huomioida, kelkkailijaan vaikuttavat vain paino ja pinnan tukivoima.

Merkitään kaltevan tason suuntaa *x*:llä ja sitä vastaan kohtisuoraa suuntaa *y*:llä.

Tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa ei ole kiihtyvyyttä, joten pinnan tukivoima $\overline{N}$ on yhtä suuri kuin painovoiman *y*-komponentti, G_y.



$\overline{G}$ = paino

$\overline{N}$ = pinnan tukivoima

b) Mäen kaltevuuskulma on $\alpha = 12°$.

Kelkkailija on kiihtyvässä liikkeessä, joten sen Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Muodostetaan liikeyhtälöt komponenttimuodossa.

x-suunnassa eli pinnan suunnassa: $G_x = ma$

y-suunnassa eli pintaa vastaan kohtisuorassa suunnassa: $N - G_y = 0$

Voimakuvion perusteella $\sin\alpha = \frac{G_x}{G}$, joten

$G_x = G\sin\alpha = mg\sin\alpha$.

Ratkaistaan kiihtyvyys pinnan suuntaisesta liikeyhtälöstä.

$$
\begin{aligned}
G_x &= ma \\
\cancel{m}g\sin\alpha &= \cancel{m}a \\
a &= g\sin\alpha \\
a &= 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin 12° = 2{,}039614\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}
\end{aligned}
$$

Tehtävä 8.7.

Kappaleen massa m = 1,2 kg

a) Kun suunta oikealle valitaan positiiviseksi, on kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima

$$\Sigma F = 14\,\text{N} - 8{,}5\,\text{N} = 5{,}5\,\text{N}.$$

Newtonin II lain mukaan $\Sigma F = ma$.

Kappaleen kiihtyvyys on kokonaisvoiman suuntaan eli oikealle

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{5{,}5\,\text{N}}{1{,}2\,\text{kg}} = 4{,}5833\,\text{m/s}^2 \approx 4{,}6\,\text{m/s}^2.$$

b) Lasketaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima Pythagoraan lauseella

$$\Sigma F = \sqrt{(18\,\mathrm{N})^2 + (12\,\mathrm{N})^2} = 21{,}6333\,\mathrm{N}.$$

Voiman suunta vaakasuuntaan nähden on

$$\tan\alpha = \frac{12\,\mathrm{N}}{18\,\mathrm{N}}$$
$$\alpha = 33{,}690^\circ \approx 34^\circ.$$

Newtonin II lain mukaan $\Sigma F = ma$.

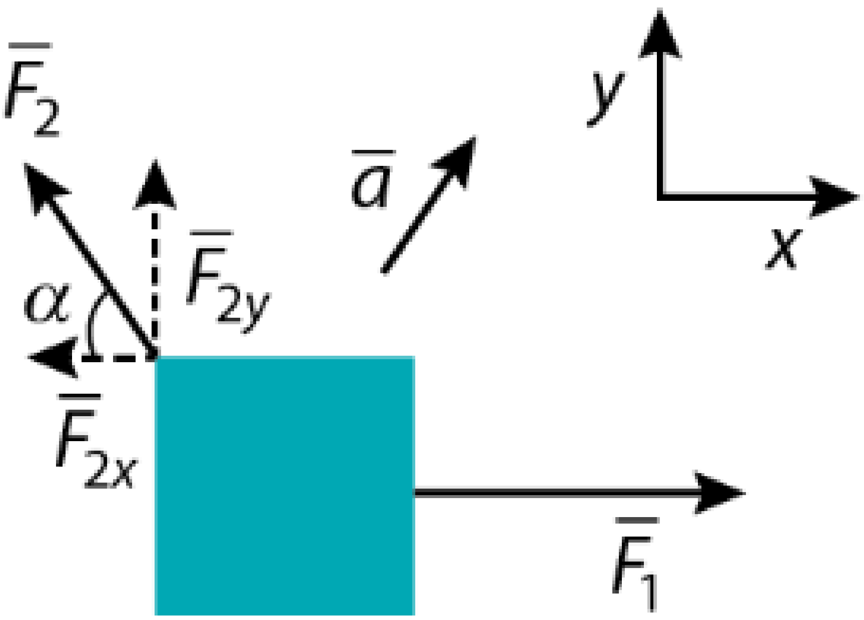
Kappaleen kiihtyvyys kokonaisvoiman suuntaan on

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{21{,}6333\,\mathrm{N}}{1{,}2\,\mathrm{kg}} = 18{,}03\,\mathrm{m/s^2} \approx 18\,\mathrm{m/s^2}.$$

Kappaleen kiihtyvyys on 18 $\mathrm{m/s^2}$ oikealle yläviistoon 34°kulmassa vaakasuuntaan nähden.

c) Kulma α = 30°

Jaetaan vino 10 N voima vaaka- ja pystysuuntaisiin komponentteihin.



Kokonaisvoima *x*-suunnassa on

$F_x = F_1 - F_2 \cos\alpha = 12\,\mathrm{N} - 10\,\mathrm{N} \cdot \cos 30° = 3{,}33975\,\mathrm{N}.$

Voima *y*-suunnassa $F_y = F_2 \sin\alpha = 10\,\mathrm{N} \cdot \sin 30° = 5{,}0\,\mathrm{N}.$

Lasketaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima Pythagoraan lauseella

$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = \sqrt{(3.33975\mathrm{N})^2 + (5{,}0\mathrm{N})^2} = 6{,}01281\,\mathrm{N}.$

Voiman suunta vaakasuuntaan nähden on

$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{5{,}0\,\text{N}}{3{,}33975\,\text{N}}$$

$$\alpha = 56{,}259° \approx 56°.$$

Newtonin II lain mukaan $\Sigma F = ma$.

Kappaleen kiihtyvyys kokonaisvoiman suuntaan

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{6{,}01281\,\text{N}}{1{,}2\,\text{kg}} = 5{,}0107\,\text{m/s}^2 \approx 5{,}0\,\text{m/s}^2.$$

Kappaleen kiihtyvyys on 5,0 m/s^2 oikealle yläviistoon 56° kulmassa vaakasuuntaan nähden.

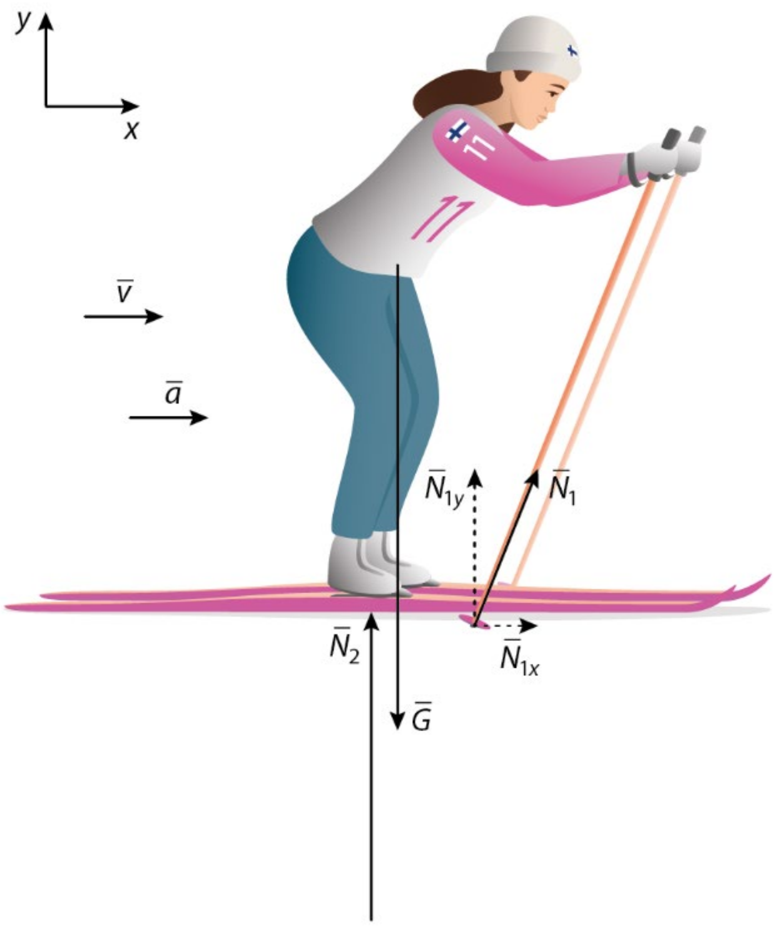
Sovella

Tehtävä 8.8.

Lumen sauvoihin kohdistama tukivoima N_1 = 250 N

Sauvojen ja maanpinnan välinen kulma $\alpha = 68^\circ$

Hiihtäjän massa m = 68 kg



$\bar{G}$ = hiihtäjän paino

$\bar{N}_1$ = lumen sauvoihin kohdistama tukivoima

$\bar{N}_2$ = lumen suksiin kohdistama tukivoima

Oletetaan, että suksien ja ladunpinnan välinen kitka on hyvin pieni.

a) Tarkastellaan voimia x-suunnassa, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$, ja hiihtäjää eteenpäin vievä voima on

$$N_{1x} = N_1 \cos\alpha = 250\,\text{N} \cdot \cos 68^\circ = 93{,}6516\,\text{N} \approx 94\,\text{N}.$$

b) Tarkastellaan voimia y-suunnassa, jossa ei ole kiihtyvyyttä, jolloin $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Pinnan hiihtäjään kohdistava tukivoima työntöhetkellä on

$$N_2 + N_{1y} - G = 0$$

$$N_2 = mg - N_1 \sin\alpha$$

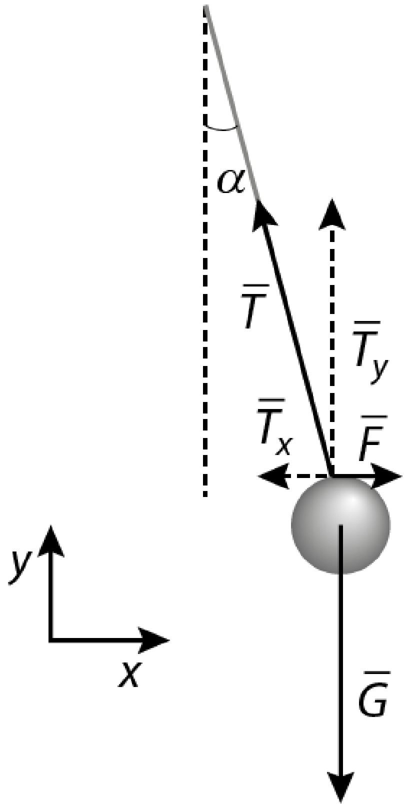
$$N_2 = 68\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 250\,\text{N} \cdot \sin 68^\circ = 435{,}28\,\text{N} \approx 440\,\text{N}.$$

Tehtävä 8.9.

Moukarikuulan massa m = 7,26 kg

Vaijerin ja pystysuoran muodostama kulma α = 15°

a)



$\overline{G} =$ moukarikuulan paino

$\overline{F} =$ narun jännitysvoima

$\overline{T} =$ vaijerin jännitysvoima

b) Tarkastellaan paikallaan olevaan kuulaan

x- ja *y*-suunnassa vaikuttavia voimia. Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli

x-suunnassa: $F - T_x = 0$

y-suunnassa: $T_y - G = 0$.

Esitetään vaijerin jännitysvoiman komponentit kulman avulla, jolloin yhtälöistä saadaan

x-suunnassa: $F = T\sin\alpha$

y-suunnassa: $T\cos\alpha = mg$.

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$ ja se sijoitetaan ylempään yhtälöön

$$F = T\sin\alpha = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha} = mg\tan\alpha$$
$$= 7{,}26\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \tan 15^\circ = 19{,}08\,\text{N} \approx 19\,\text{N}.$$

c) b-kohdan mukaan vaijerin jännitysvoima

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{7{,}26\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{\cos 15^\circ} = 73{,}73\,\text{N} \approx 73\,\text{N}.$$

d) Jos moukaria vedetään kauemmaksi, kasvaa kulma α. Aiempien kohtien mukaan vaijerissa vaikuttava voima on $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$. Jos kulma α kasvaa, niin $\cos\alpha$ pienenee ja tällöin kulman kasvaessa jännitysvoima kasvaa.

Tehtävä 8.10.

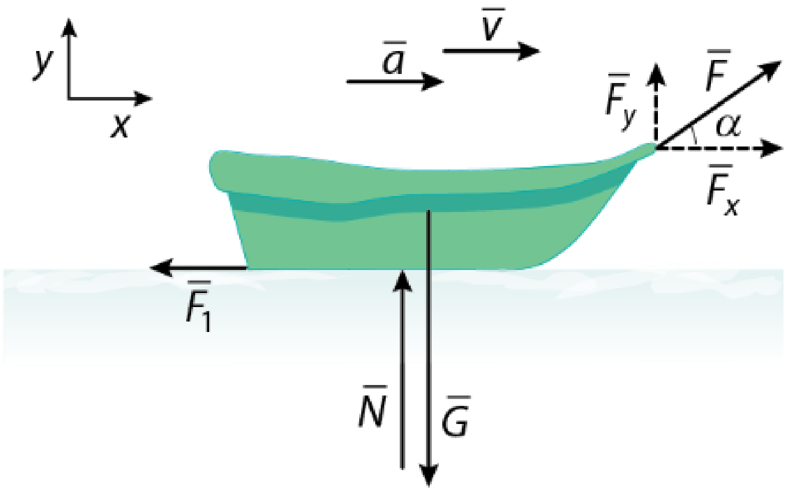
Pulkan massa m = 1,8 kg

Narun ja vaakasuoran muodostama kulma α = 35°

Narun jännitysvoima F = 8,8 N

Liikettä vastustavat voimat F_1 = 6,3 N

a)



$\overline{G}$ = pulkan paino

$\overline{F}$ = narun jännitysvoima

$\overline{F}_1$ = pulkan liikettä vastustavat voimat

$\overline{N}$ = pinnan pulkkaan kohdistama tukivoima

b) Tarkastellaan pulkkaan kohdistuvia voimia y-suunnassa. Pystysuunnassa Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli

$$F_y + N - G = 0.$$

Esitetään jännitysvoima kulman avulla.

Tällöin

$$N = mg - F\sin\alpha = 1{,}8\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 8{,}8\,\text{N} \cdot \sin 35^\circ = 12{,}611\,\text{N} \approx 13\,\text{N}.$$

c) Vaakasuunnassa pulkka on kiihtyvässä liikkeessä ja Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Pulkan kiihtyvyys on silloin

$$F_x - F_1 = ma$$

$$a = \frac{F\cos\alpha - F_1}{m} = \frac{8{,}8\,\text{N} \cdot \cos 35^\circ - 6{,}3\,\text{N}}{1{,}8\,\text{kg}} = 0{,}5047\,\text{m/s}^2 \approx 0{,}50\,\text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on kuvassa oikealle.

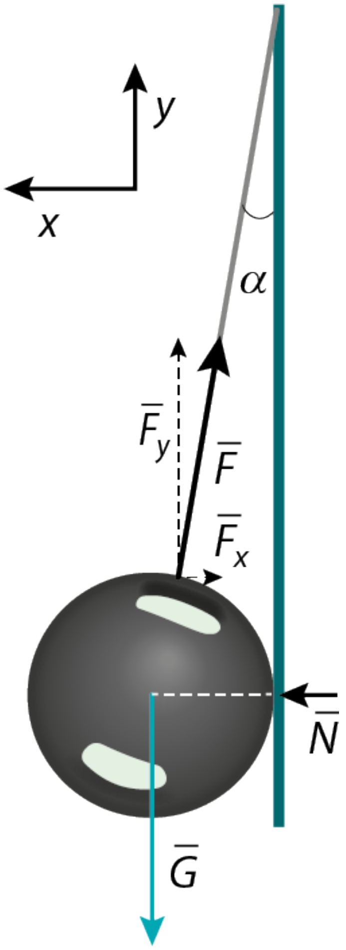
Tehtävä 8.11.

Kuntopallon massa m = 8,0 kg

Narun pituus l =0,72 m

Kuntopallon säde r = 0,15 m

a)



$\overline{G}$ = kuntopallon paino

$\overline{N}$ = seinän kuntopalloon kohdistama voima

$\overline{F}$ = narun jännitysvoima

b) Kuntopallon on paikoillaan, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$ ja

x-suunnassa: $N - F_x = 0$

y-suunnassa: $F_y - G = 0.$

Esitetään narun jännitysvoima kulman avulla

x-suunnassa: $N = F\sin\alpha$

y-suunnassa: $mg = F\cos\alpha.$

Narun ja pystysuunnan välinen kulma on

$$\sin\alpha = \frac{r}{l+r} = \frac{0{,}15\,\mathrm{m}}{0{,}72\,\mathrm{m} + 0{,}15\,\mathrm{m}}$$

$$\alpha = 9{,}928^\circ.$$

Ratkaistaan y-suunnan yhtälöstä narun jännitysvoima $F = \frac{mg}{\cos\alpha}$, ja sijoitetaan se x-suunnan yhtälöön.

Seinän tukivoimaksi saadaan

$$N = F\sin\alpha = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha = mg\tan\alpha$$

$$= 8{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \tan 9{,}928^\circ$$

$$= 13{,}7365\,\mathrm{N} \approx 14\ \mathrm{N}.$$

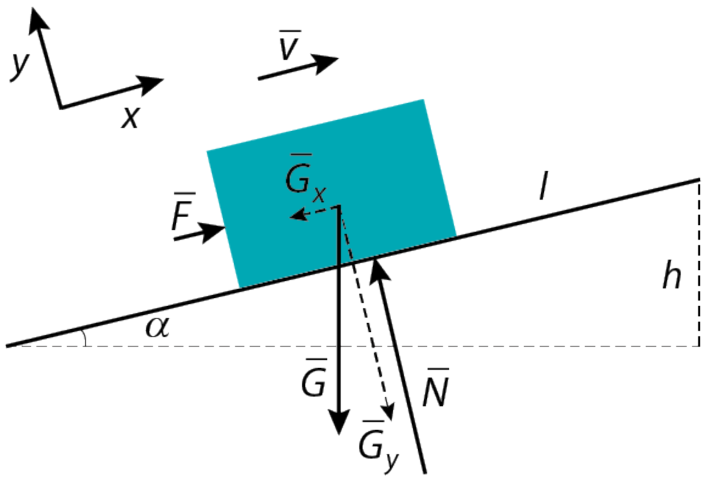
Tehtävä 8.12.

Rampin pituus l = 2,5 m

Rampin korkeus h = 0,15 m

Vaunun massa m = 130 kg

a)



$\overline{G}$ = vaunun paino

$\overline{N}$ = rampin vaunuun kohdistama tukivoima

$\overline{F}$ = vaunun työtämiseen tarvittava voima

b) Vaunu liikkuu vakionopeudella, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Vaunuun kohdistuvat voimat tason suunnassa ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa ovat

$$F - G_x = 0$$
$$N - G_y = 0.$$

Tason kaltevuuskulma

$$\sin\alpha = \frac{h}{l} = \frac{0{,}15\,\text{m}}{2{,}5\,\text{m}}$$
$$\alpha = 3{,}4398°.$$

Esitetään painon komponentit tason kaltevuuskulman avulla ja lasketaan vaunun työntämiseen tarvittava voima

$$F = mg\sin\alpha = mg\frac{h}{l}$$
$$= 130\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \frac{0{,}15\,\text{m}}{2{,}5\,\text{m}} = 76{,}518\,\text{N} \approx 77\,\text{N}.$$

c) Pinnan tukivoima b-kohdan mukaan

$$N = mg\cos\alpha$$

$$= 130\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 3{,}4398^\circ = 1\,273{,}0\,\text{N} \approx 1\,300\,\text{N}.$$

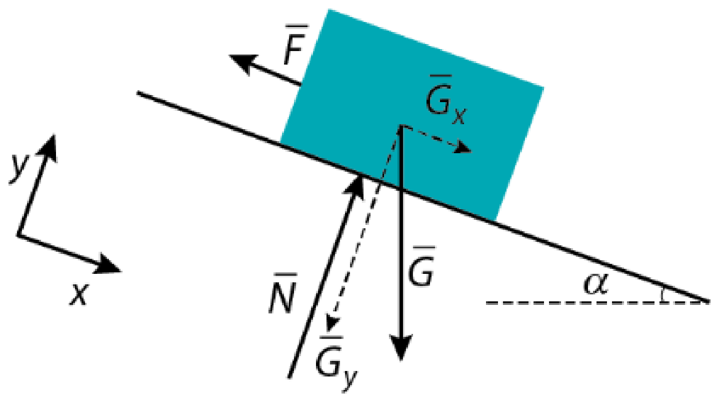
d) Työntämiseen tarvittava voima b-kohdan mukaan on

$$F = mg\sin\alpha = mg\frac{h}{l}.$$

Rampin pituuden kasvattaminen pienentää työntämiseen tarvittavaa voimaa.

Tehtävä 8.13.

Tehdään tilanteesta voimakuvio.



$\overline{G} =$ kappaleen paino

$\overline{F} =$ voima-anturin tukivoima

$\overline{N} =$ pinnan tukivoima

Kun kappale on paikallaan, on Newtonin II lain mukaan

$\sum \overline{F} = \overline{0}.$

Tarkastellaan kappaleeseen tilanteessa vaikuttavia tason suuntaisia voimia.

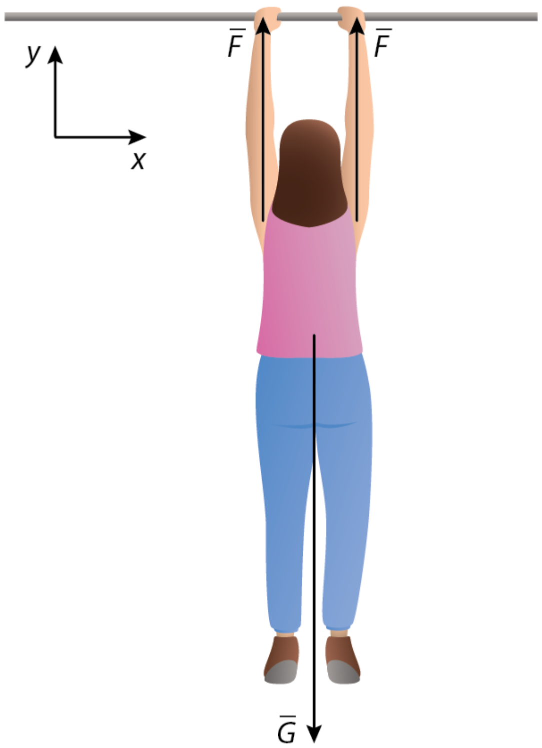
$$F - G_x = 0$$
$$F = G_x$$
$$F = G\sin\alpha.$$

Mitä suurempi on kaltevan tason kulma α, sitä suurempi on termi $G\sin\alpha$ ja sitä suurempi on voima-anturin lukema. Kaltevuuskulman α kasvattaminen kasvattaa myös voiman F suuruutta.

Tehtävä 8.14.

Kuntoilijan massa m = 63 kg

a)



$\overline{F} =$ kuntoilijan käteen vaikuttava voima

$\overline{G} =$ kuntoilijan paino

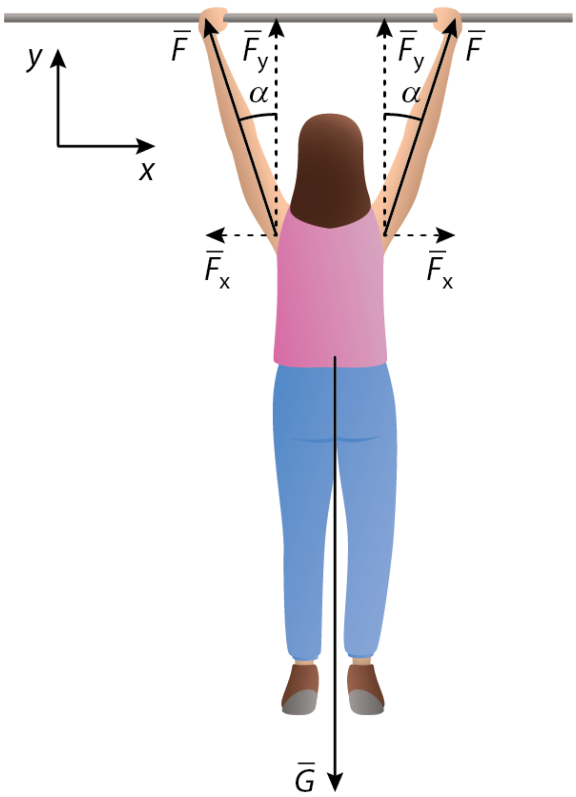
Kun kuntoilija roikkuu paikoillaan, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Voimien suunnat huomioituna

$F + F - G = 0.$

Kuntoilijan käteen vaikuttava voima

$$F = \frac{mg}{2} = \frac{63\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{2} = 309{,}015\,\text{N} \approx 310\,\text{N}.$$

b) Pystysuunnan ja käsien välinen kulma α = 18°



$\overline{F} =$ kuntoilijan käteen vaikuttava voima

$\overline{G} =$ kuntoilijan paino

Kun kuntoilija roikkuu paikoillaan, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$ ja pystysuunnassa

$$F_y + F_y - G = 0$$

$$2F\cos\alpha = mg.$$

Käsiin vaikuttava voima on

$$F = \frac{mg}{2\cos\alpha} = \frac{63\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{2\cos 18^\circ} = 324{,}917599\,\text{N} \approx 320\,\text{N}.$$

c) Jos käsiä vedetään kauemmaksi, kasvaa kulma α. Käsiin vaikuttava voima b-kohdan mukaan on

$$F = \frac{mg}{2\cos\alpha}.$$

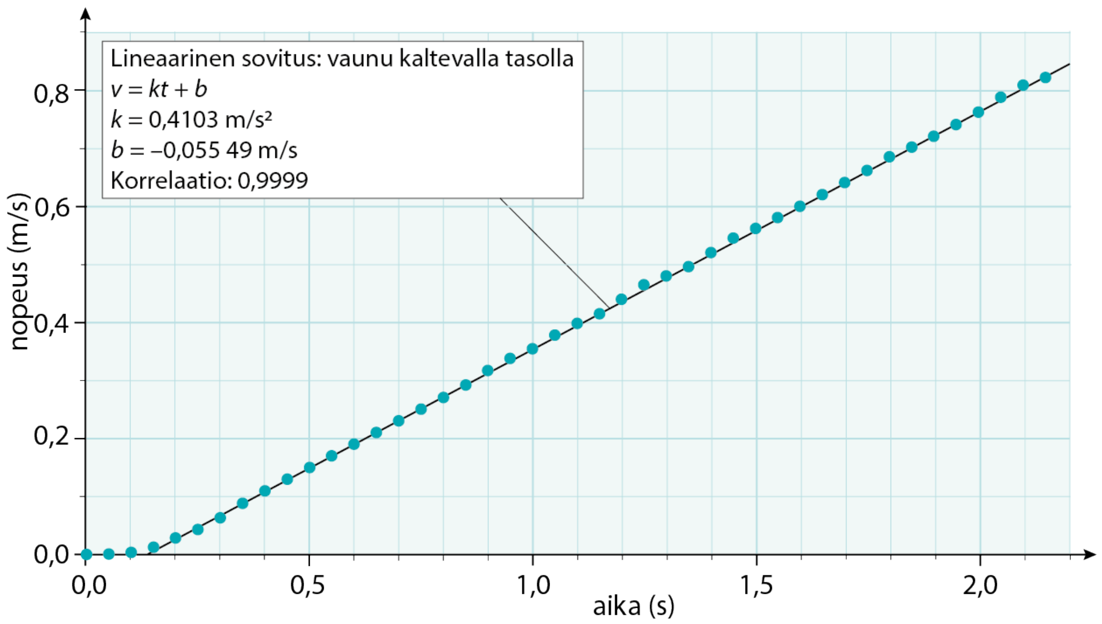
Jos kulma α kasvaa, niin $\cos\alpha$ pienenee ja tällöin kulman kasvaessa käsiin vaikuttava voima kasvaa.

Tehtävä 8.15.

Kitkattoman radan kaltevuuskulma vaakatasoon nähden α

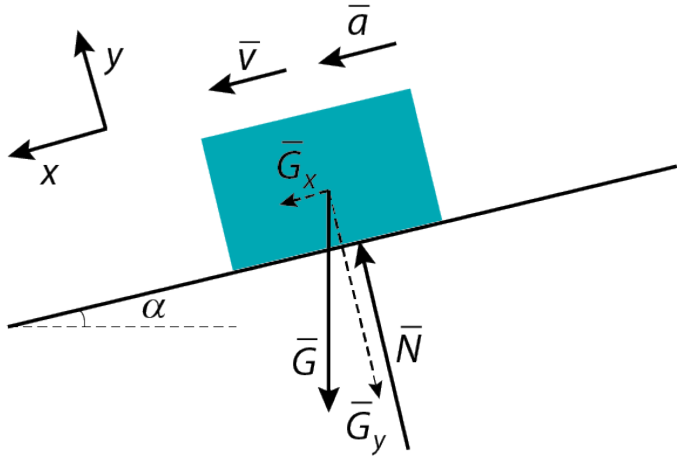
Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Vaunun kiihtyvyys on (t, v)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin.



Vaunun kiihtyvyys on a = 0,4103 m/s^2 $\approx$ 0,41 m/s^2.

b)



$\bar{G}$ = vaunun paino

$\bar{N}$ = radan vaunuun kohdistama tukivoima

Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = m\bar{a}$.

Suunnat huomioiden tason suunnassa

$$G_x = ma$$
$$\cancel{m}g\sin\alpha = \cancel{m}a$$
$$g\sin\alpha = a.$$

Radan ja vaakasuoran välinen kulma on

$$\sin\alpha = \frac{a}{g} = \frac{0{,}410\,\text{m/s}^2}{9{,}81\,\text{m/s}^2}$$
$$\alpha = 2{,}395° \approx 2{,}4°.$$

c) Edellisen kohdan mukaan vaunun kiihtyvyys on $a = g\sin\alpha$. Mitä suurempi on kulma α, sitä suurempi on $\sin\alpha$ ja sitä suurempi on kiihtyvyys. Kun kiihtyvyys kasvaa on, kasvaa kuvaajan jyrkkyys.

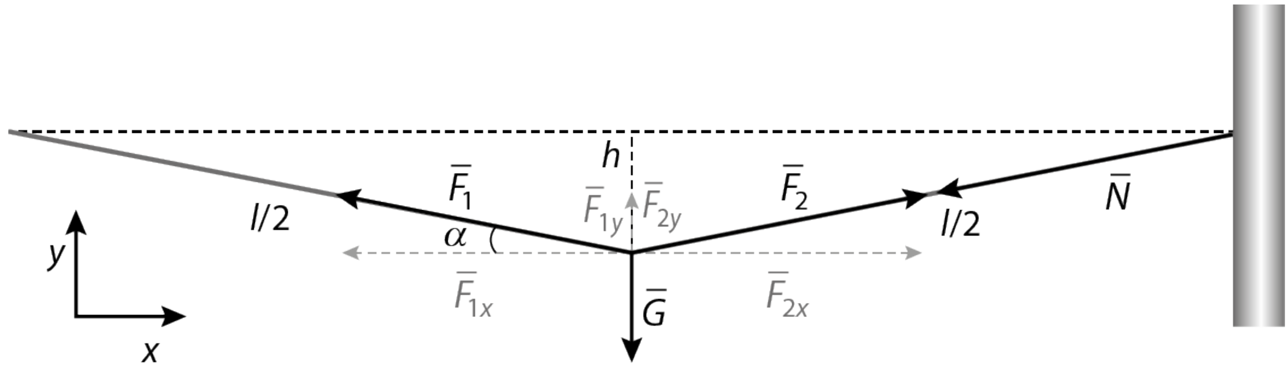
Tehtävä 8.16.

Vaijerin muutos vaakasuuntaan nähden h = 0,112 m

Vaijerin pituus l = 9,4 m

Trapetsitaiteilijan massa m = 52 kg

a) Piirretään tilanteesta voimakuvio.



$\overline{G} =$ trapetsitaiteilijan paino eli voima, jolla vaijeria painetaan alaspäin

$\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2 =$ vaijerissa vaikuttavat jännitysvoimat

$\overline{N} =$ voima, jolla vaijeri vetää tolppaa

Trapetsitaiteilija on paikallaan, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Voimat

x-suunnassa: $-F_{1x} + F_{2x} = 0$

y-suunnassa: $F_{1y} + F_{2y} - G = 0$.

Esitetään voimien komponentit kulman avulla

x-suunnassa: $F_1 \cos\alpha = F_2 \cos\alpha$

y-suunnassa: $F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha = mg.$

Ylemmän x-suunnan yhtälön perusteella vaijerissa vaikuttavat voimat ovat yhtä suuret, joten merkitään $F_1 = F_2 = F.$

Kulmasta vaakatasoon nähden saadaan $\sin\alpha = \dfrac{h}{\frac{l}{2}} = \dfrac{2h}{l}.$

Ratkaistaan alemman y-suunnan yhtälön avulla vaijerissa vaikuttava voima.

Vaijerissa vaikuttava voima on

$$F\sin\alpha + F\sin\alpha = mg$$

$$2F\sin\alpha = mg$$

$$F = \frac{mg}{2\sin\alpha} = \frac{mg}{2\cdot\frac{2h}{l}} = \frac{mgl}{4h}$$

$$= \frac{52\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 9{,}4\,\text{m}}{4\cdot 0{,}112\,\text{m}}$$

$$= 10703{,}4107\,\text{N} \approx 11\,\text{kN}.$$

b) Newtonin III lain mukaan palkki vaikuttaa vaijeriin yhtä suurella voimalla kuin vaijeri palkkiin. Palkkiin vaikuttava voima on yhtä suuri kuin vaijerissa vaikuttava voima, mutta vastakkaissuuntainen. Voiman suuruus on $N = F = 11$ kN.

Tehtävä 8.17.

Kuulista nopeiten kulki kuula, joka oli alaspäin kaarevalla radalla.

Tarkastellaan tilannetta kaltevana tasona. Kuulaan vaikuttaa sen paino, sekä pinnan tukivoima. Lisäksi kuulan saa vierimään pieni, liikkeen suuntaan nähden vastakkaissuuntainen lepokitka. Kuula kiihtyy, koska painovoiman pinnan suuntainen komponentti antaa kuulalle kiihtyvyyden.

Jätetään kitkan vaikutus vähäisenä huomioimatta. Newtonin II lain mukaan tason suunnassa

$$G_x = ma$$
$$G\sin\alpha = ma.$$

Kiihtyvyys on suoraan verrannollinen kaltevuuskulmasta riippuvaan sinα:n arvoon. Mitä suurempi kulma on, sitä suurempi on sinα:n arvo ja sitä suurempi on kuulan kiihtyvyys.

Mitä suurempi on kuulan kiihtyvyys, sitä nopeammin kuulan nopeus kasvaa ja sitä pidemmän matkan kuula kulkee suuremmalla nopeudella ja sitä nopeammin kuula on alhaalla radalla.

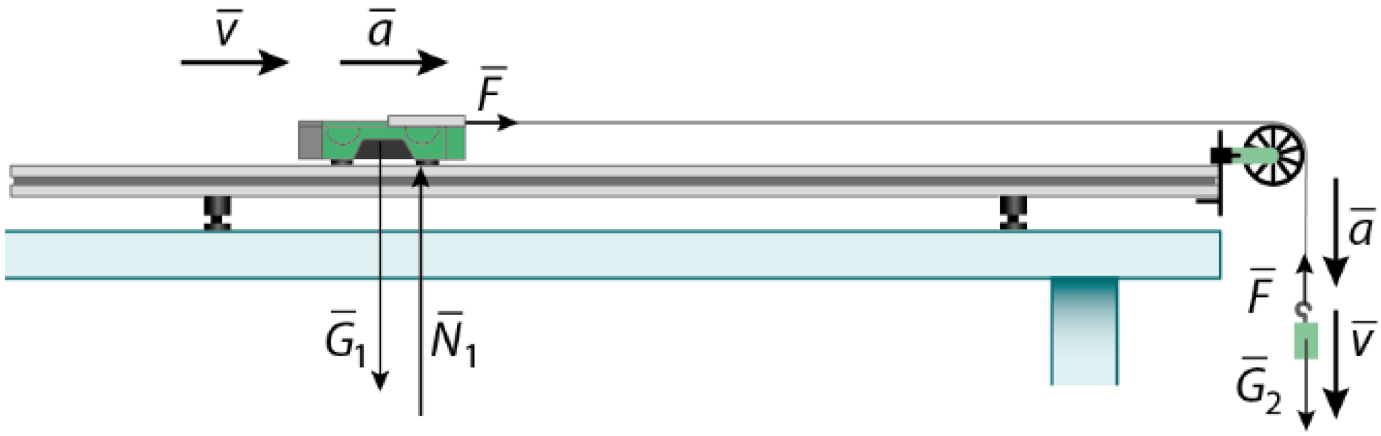
Kaikilla kuulilla on kuitenkin sama loppunopeus, mikä perustellaan luvussa 12.

Tehtävä 8.18.

Vaunun massa m_1 = 0,455 kg

Punnuksen massa m_2 = 0,0042 kg

a)



$\overline{G}_1$ = vaunun paino

$\overline{N}_1$ = radan vaunuun kohdistama tukivoima

$\overline{G}_2$ = punnuksen paino

$\overline{F}$ = langan jännitysvoima

b) Tarkastellaan vaunuun ja punnukseen vaikuttavia voimia ja kirjoitetaan vaunulle ja punnukselle Newtonin II lain mukaiset liikeyhtälöt suunnat huomioiden. Koska vaunu ja punnus on kytketty langalla toisiinsa, niillä on sama kiihtyvyys.

Valitaan vaunun kohdalla positiiviset suunnat ylös ja oikealle. Vaunun liikeyhtälöt vaaka- ja pysty suunnassa

$$
\begin{aligned}
F &= m_1 a \\
N_1 - G_1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Punnuksen kohdalla valitaan positiivinen suunta alaspäin. Punnuksen liikeyhtälö on silloin

$$G_2 - F = m_2 a.$$

Sijoitetaan vaunuun vaikuttavan voiman *F* lauseke punnuksen liikeyhtälöön,

$$m_2 g - m_1 a = m_2 a$$

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}0042\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}455\,\text{kg} + 0{,}0042\,\text{kg}} = 0{,}0897\,\text{m/s}^2 \approx 0{,}090\,\text{m/s}^2.$$

c) Langan jännitysvoima b-kohdan mukaan

$$F = m_1 a = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}455\,\text{kg} \cdot 0{,}0042\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}455\,\text{kg} + 0{,}0042\,\text{kg}} = 0{,}040825\,\text{N} \approx 41\,\text{mN}.$$

d) Punnuksen putoamismatka s = 0,58 m

Punnus ja vaunu ovat tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jolloin kuljetulle matkalle ja loppunopeudelle on voimassa

$$s = \frac{1}{2}at^2$$
$$v = at.$$

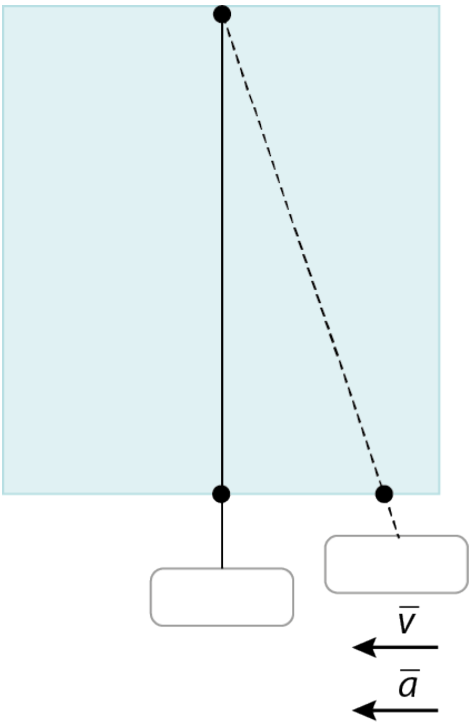
Ratkaistaan matkan yhtälöstä aika ja saadaan loppunopeudeksi

$$v = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2sa} = \sqrt{\frac{2sm_2g}{m_1 + m_2}}$$
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}58\,\mathrm{m} \cdot 0{,}0042\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}455\,\mathrm{kg} + 0{,}0042\,\mathrm{kg}}} = 0{,}3226\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tehtävä 8.19.

Esimerkiksi:

a) Rakennetaan langasta ja pyyhekumista heiluri, joka kiinnitetään auton kattoon tai pystysuoraan asetettuun pahviin. Pahvin yläosaan tehdään pieni kolo, johon voidaan kiinnittää langan toinen pää. Laitetaan narun varassa oleva pyyhekumi roikkumaan vapaasti kolosta. Asetetaan pahvi autossa vaakasuoralle pinnalle. Merkitään pahviin langan kiinnityskohta sekä langan sijainti, kun auto on paikallaan. Kun autolla kiihdytetään, merkitään langan uusi paikka pahvin alareunaan. Piirretään merkittyjen pisteiden välille kolmio ja lasketaan, kuinka suuri on langan heilahduskulma.

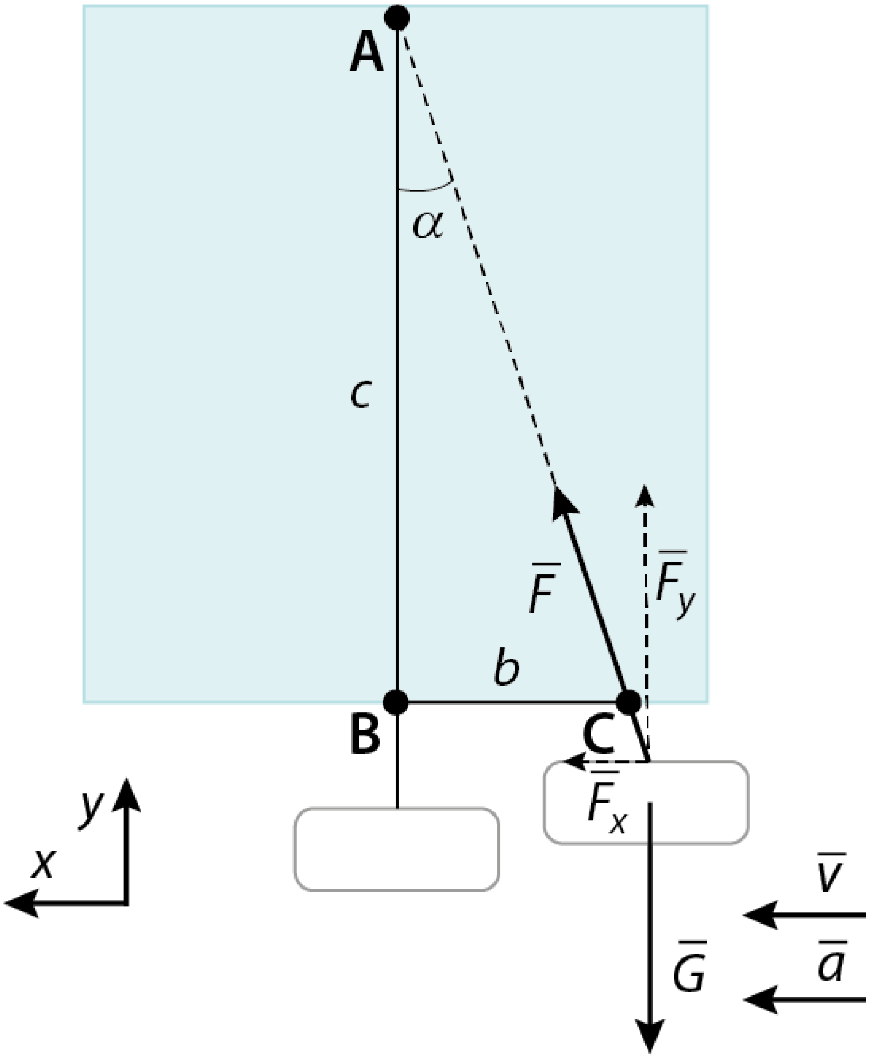


b) Koska heiluri oli kiinni autossa, heilurin ja auton kiihtyvyydet ovat samat. Tällöin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Vaakasuunnassa: $F_x = ma$

Pystysuunnassa: $F_y - G = 0$

Jaetaan vino voima komponentteihin.



$\overline{G} =$ kappaleen paino

$\overline{F} =$ langan jännitysvoima

$F_x = F\sin\alpha$

$F_y = F\cos\alpha.$

Voimien yhtälöiksi saadaan

$F\sin\alpha = ma$

$F\cos\alpha = mg.$

Jaetaan yhtälöt puolittain, jolloin

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{g}$ ja kiihtyvyydeksi saadaan

$a = g\tan\alpha.$

Kulma $\tan\alpha = \frac{b}{c}$ ja kulkuneuvon kiihtyvyys on

$a = g\frac{b}{c}.$

c) Kiihtyvyyden mittaamisen suuruus riippuu suureista

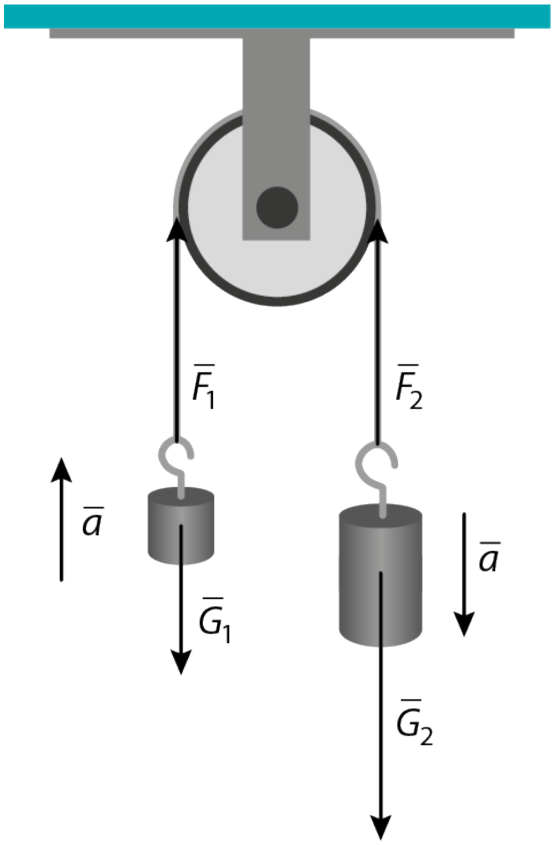
$a = g\frac{b}{c}$. Koska putoamiskiihtyvyys g on vakio, se ei vaikuta mittauksen virheeseen. Mittausvirheeseen vaikuttaa suureiden b ja c määrittäminen. Mitä pidempiä käytössä olevat pahvi ja lanka ovat, sitä pienempiä ovat suureiden b ja c määrittämisessä tehdyt virheet. Virhettä syntyy myös siinä, jos pahvi ei ole vaakasuorassa kulkuneuvon etenemissuuntaan nähden, jolloin pahviin muodostuva kolmio ei ole suorakulmainen.

Jos b:n ja c:n välinen kulma on suurempi kuin 90°, saatu kiihtyvyyden arvo on liian pieni, sillä b on pidempi kuin vaakasuoran tilanteen tapauksessa ja päinvastoin.

Narun ja pahvin välinen kitka pienentää maksimikiihtyvyyden arvoa, kun lanka heilahtaa kiihdytyksessä. Myös maksimikiihtyvyyden määrittämisessä eli pisteen C tarkassa piirtämisessä syntyy virhettä, joka vaikuttaa kiihtyvyyden suuruuteen.

Tehtävä 8.20.

a)



$\overline{F}_1 =$ narun jännitysvoima

$\overline{F}_2 =$ narun jännitysvoima

$\overline{G}_1 =$ punnuksen 1 paino

$\overline{G}_2 =$ punnuksen 2 paino

b) Tarkastellaan punnusten 1 ja 2 voimia Newtonin II lain mukaan pystysuunnassa. Valitaan punnuksen 1 positiiviseksi suunnaksi voiman F_1 suunta ja punnuksen 2 positiiviseksi suunnaksi G_2 suunta.

$$F_1 - G_1 = m_1 a_1$$
$$G_2 - F_2 = m_2 a_2.$$

Koska punnukset ovat kytkettynä toisiinsa, on punnuksilla sama kiihtyvyys ja sama nopeuden suuruus koko ajan. Molempiin punnuksiin kohdistuva narun jännitysvoima on yhtä suuri, $F_1 = F_2 = F$. Tällöin $a_1 = a_2 = a$ ja saadaan

$$F - m_1 g = m_1 a$$
$$m_2 g - F = m_2 a.$$

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä F ja sijoitetaan se ylempään yhtälöön.

$$m_2 g - m_2 a - m_1 g = m_1 a$$
$$m_2 g - m_1 g = m_1 a + m_2 a.$$

Punnusten kiihtyvyys on

$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)} = \frac{(14{,}1\,\text{kg} - 8{,}4\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{8{,}4\,\text{kg} + 14{,}1\,\text{kg}} = 2{,}4852\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c) Narun jännitysvoima saadaan b-kohdan mukaan voimayhtälöstä

$$
\begin{aligned}
F - m_1 g &= m_1 a \\
F &= m_1 a + m_1 g \\
&= m_1 \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)} + m_1 g \\
&= 8{,}4\,\text{kg} \cdot \frac{(14{,}1\,\text{kg} - 8{,}4\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{14{,}1\,\text{kg} + 8{,}4\,\text{kg}} + 8{,}4\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
&= 103{,}27968\,\text{N} \approx 100\,\text{N}
\end{aligned}
$$

Tehtävä 8.21.

Merkitään vaunun massaa m_1 ja punnuksen massaa m_2.

Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli voiman aiheuttama kiihtyvyys riippuu kiihdytettävän kappaleen massasta.

Kokeessa A punnuksen painon suuruinen voima aiheuttaa kiihtyvyyden vain vaunulle, jonka massa on m_1, mutta kokeessa B punnuksen paino kiihdyttää molempia kappaleita, eli yhteensä massaa $m_1 + m_2$. Koska massa on suurempi kokeessa B, jää kiihtyvyys siinä pienemmäksi.

Perustellaan tämä vielä kappaleiden liikeyhtälöiden avulla.

Kokeessa vaunun A Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m_1\overline{a}_\text{A}$ eli $\overline{F} + \overline{G}_1 + \overline{N}_1 = m_1\overline{a}_\text{A}$.

Kun valitaan positiiviset suunnat oikealle ja ylös, on liikeyhtälö komponenttimuodossa

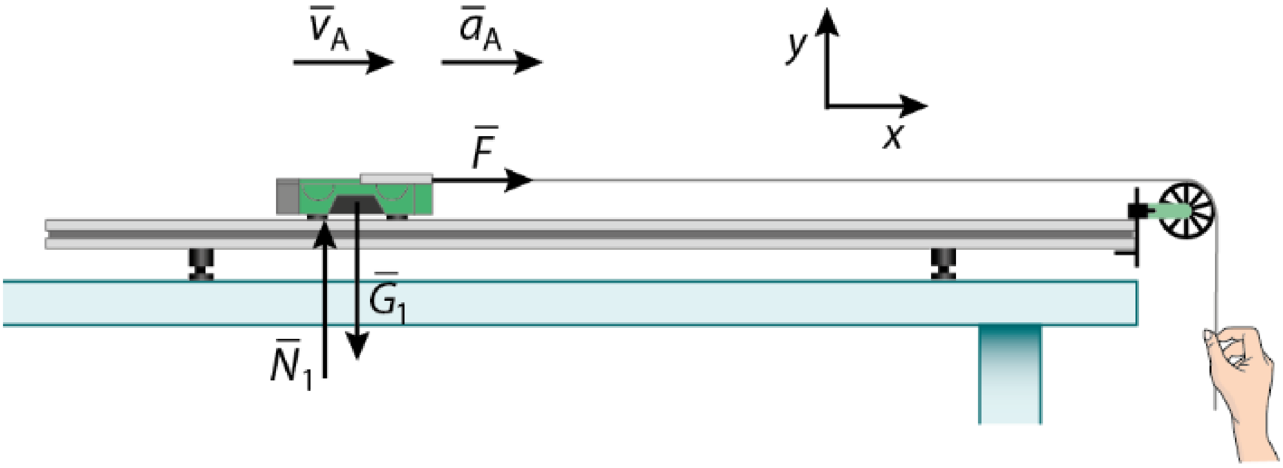
x: $F = m_1 a_\text{A}$

y: $N_1 - G_1 = 0$.

Vaunun kiihtyvyyden aiheuttaa vetävä voima, jonka suuruus on yhtä suuri kuin punnuksen paino eli

$$a_\text{A} = \frac{F}{m_1} = \frac{G_2}{m_1} = \frac{m_2 g}{m_1}.$$

Vaunun voimakuvio kokeessa A:



$\bar{G}_1$ = vaunun paino

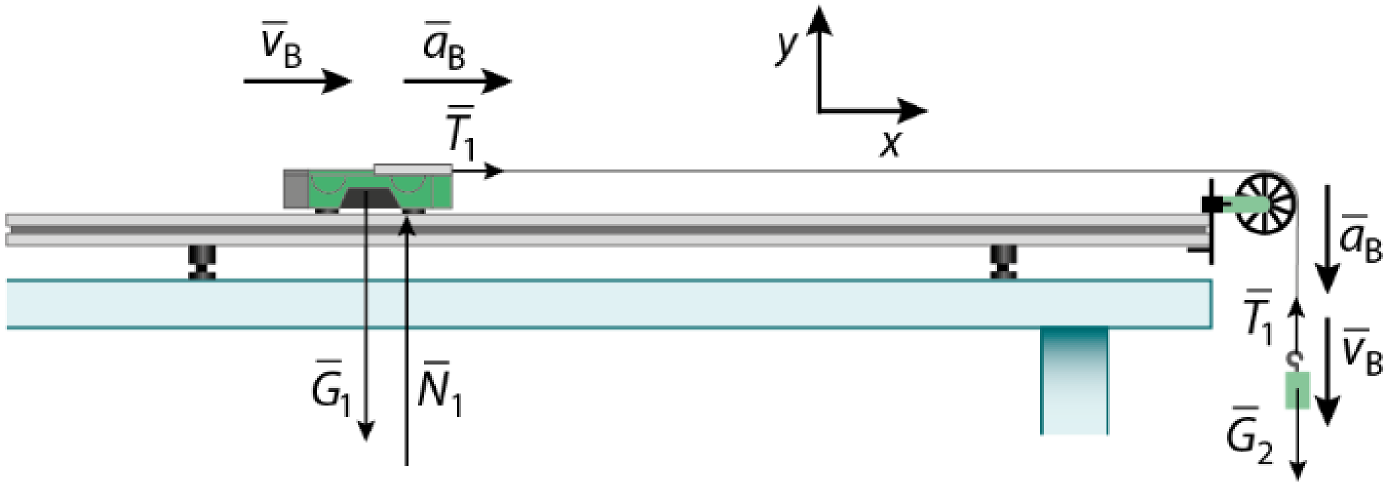
$\bar{N}_1$ = alustan tukivoima

$\bar{F}$ = voima, jolla vaunua vedetään

Kokeessa B on kaksi kappaletta, vaunu ja punnus. Koska vaunu ja punnus on kytketty toisiinsa, ne etenevät samalla nopeudella ja niillä on sama kiihtyvyys.

Tarkastellaan molempia erikseen, kirjoitetaan kappaleille Newtonin II lain mukaiset liikeyhtälöt ja piirretään voimakuviot.

Vaunun voimakuvio kokeessa B:



$\overline{G}_1$ = vaunun paino

$\overline{N}_1$ = alustan tukivoima

$\overline{T}_1$ = voima, jolla punnus vetää vaunua

$\overline{G}_2$ = punnuksen paino

$\overline{T}_2$ = voima, jolla vaunu vetää punnusta

Lanka välittää voimaa, joten voimat $\overline{T}_1$ ja $\overline{T}_2$ ovat yhtä suuria mutta vastakkaissuuntaisia voimia. Merkitään tätä langan välittämän voiman suuruutta T.

Vaunun liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m_1\overline{a}_B$ eli $\overline{T}_1 + \overline{G}_1 + \overline{N}_1 = m_1\overline{a}_B$.

Kun valitaan positiiviset suunnat oikealle ja ylös, on vaunun liikeyhtälö komponenttimuodossa

x: $T = m_1 a_B$

y: $N_1 - G_1 = 0$.

Punnuksen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m_2\overline{a}_\mathrm{B}$ eli $\overline{T}_2 + \overline{G}_2 = m_2\overline{a}_\mathrm{B}$.

Kun valitaan positiivinen suunta ylös, on punnuksen liikeyhtälö $T - G_2 = -m_2a_\mathrm{B}$.

Kun vaunun x-suunnan liikeyhtälö sijoitetaan punnuksen liikeyhtälöön, voidaan ratkaista systeemin kiihtyvyys.

$$\begin{cases} T = m_1a_\mathrm{B} \\ T - G_2 = -m_2a_\mathrm{B} \end{cases}$$

$$m_1a_\mathrm{B} + m_2a_\mathrm{B} = m_2g$$

$$(m_1 + m_2)a_\mathrm{B} = m_2g$$

$$a_\mathrm{B} = \frac{m_2g}{m_1 + m_2}$$

Kiihtyvyyksiä vertailemalla havaitaan, että $\frac{m_2g}{m_1} > \frac{m_2g}{m_1 + m_2}$,

joten $a_\mathrm{A} > a_\mathrm{B}$.

Syvennä

Tehtävä 8.22.

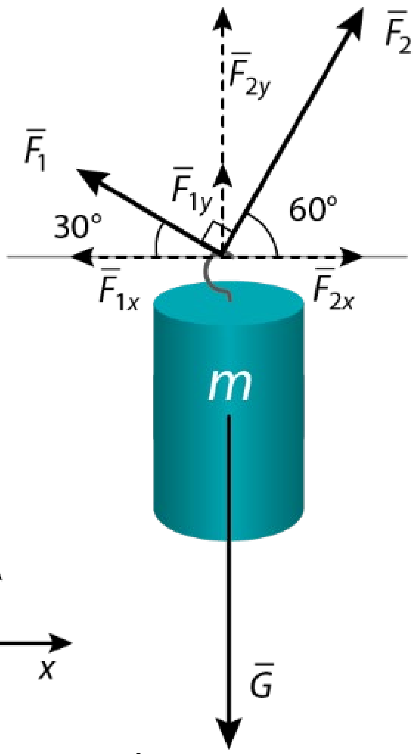
Punnuksen massa m = 500 g = 0,500 kg.

Kulmat α = 30° ja β = 60°.

Punnukseen vaikuttavat sen paino $\overline{G}$ sekä lankojen jännitysvoimat $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$. Jousivaa'at näyttävät lankojen jännitysvoimien suuruudet.

Piirretään punnuksen voimakuvio ja merkitään siihen langan jännitysvoiman *x*- ja *y*-suuntaiset komponentit.

Tehdään suuntasopimus, jossa suunnat oikealle ja ylös valitaan positiivisiksi suunniksi.



Kuvan perusteella voiman komponentit ovat:

$F_{1x} = F_1 \cos\alpha$

$F_{2x} = F_2 \cos\beta$

$F_{1y} = F_1 \sin\alpha$

$F_{2y} = F_2 \sin\beta$

$\overline{G}$ = punnuksen paino

$\overline{F}_1$ = langan jännitysvoima vasemmalle

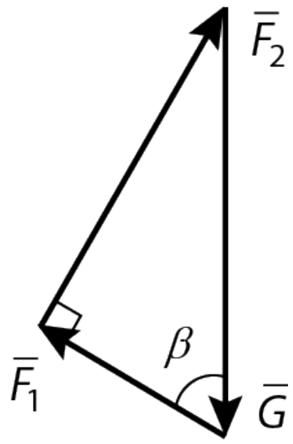
$\overline{F}_2$ = langan jännitysvoima oikealle

Koska punnus on paikallaan, siihen vaikuttava kokonaisvoima on nolla. Punnuksen Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Silloin vaakasuunnassa $F_{1x} = F_{2x}$ ja pystysuunnassa $F_{1y} + F_{2y} = G$

TAPA 1:

Punnukseen vaikuttavien voimien summa on nollavektori:



Voimien muodostamasta kolmiosta saadaan

$\frac{F_1}{G} = \cos\beta$ eli

$$F_1 = G\cos\beta = mg\cos\beta$$

$$= 0{,}500\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 60^\circ = 2{,}4525\,\text{N} \approx 2{,}5\,\text{N}$$

ja

$\frac{F_2}{G} = \sin\beta$ eli

$$F_2 = G\sin\beta = mg\sin\beta$$

$$= 0{,}500\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 60^\circ = 4{,}2479\,\text{N} \approx 4{,}2\,\text{N}.$$

Vasemmanpuoleisen jousivaa'an lukema on 2,5 N ja oikeanpuoleisen 4,2 N.

TAPA 2:

Kirjoitetaan liikeyhtälöt *x*- ja *y*-suunnissa

$$F_{2x} - F_{1x} = 0$$
$$F_{2y} + F_{1y} - G = 0$$

Vaaka- eli *x*-suunnassa

$$F_{2x} = F_{1x}$$
$$F_2 \cos\beta = F_1 \cos\alpha$$
$$F_2 = \frac{F_1 \cos\alpha}{\cos\beta}$$

Pysty- eli *y*-suunnassa

$$F_{2y} + F_{1y} = G$$
$$F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta = G$$

Sijoitetaan pystysuunnan yhtälöön vaakasuunnan yhtälöstä ratkaistu voima F_2, ja sijoitetaan siihen annetut arvot.

$$F_1 \sin\alpha + \frac{F_1 \cos\alpha}{\cos\beta} \sin\beta = G$$
$$F_1 (\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \sin\beta) = G$$
$$F_1 = \frac{G}{\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta} = \frac{0{,}500\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\sin 30° + \frac{\cos 30°}{\cos 60°}\sin 60°} = 2{,}4525\,\mathrm{N} \approx 2{,}5\,\mathrm{N}$$

Ratkaistaan voima F_2

$$F_2 = \frac{F_1 \cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{2{,}4525\,\mathrm{N} \cdot \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 4{,}2479\,\mathrm{N} \approx 4{,}2\,\mathrm{N}.$$

Vasemmanpuoleisen jousivaa’an lukema on 2,5 N ja oikeanpuoleisen 4,2 N.

Tehtävä 8.23.

a) Hämähäkin seitti rakentuu fibroosiproteiinista, ja lanka syntyy hämähäkin kehruurauhasissa.

b) Hämähäkin seitti on kestävää ja se kestää hyvin venytystä. Hämähäkin seitin kaltaisesta materiaalista voitaisiin valmistaa esimerkiksi erittäin kestäviä köysiä, luodinkestäviä vaatteita, kilpa-autoja tai keinotekoisia ihmisten jänteitä.

c) Langan myötöjännitysraja σ = 1 GPa
Langan halkaisija $d = 1 \cdot 10^{-6}$ m

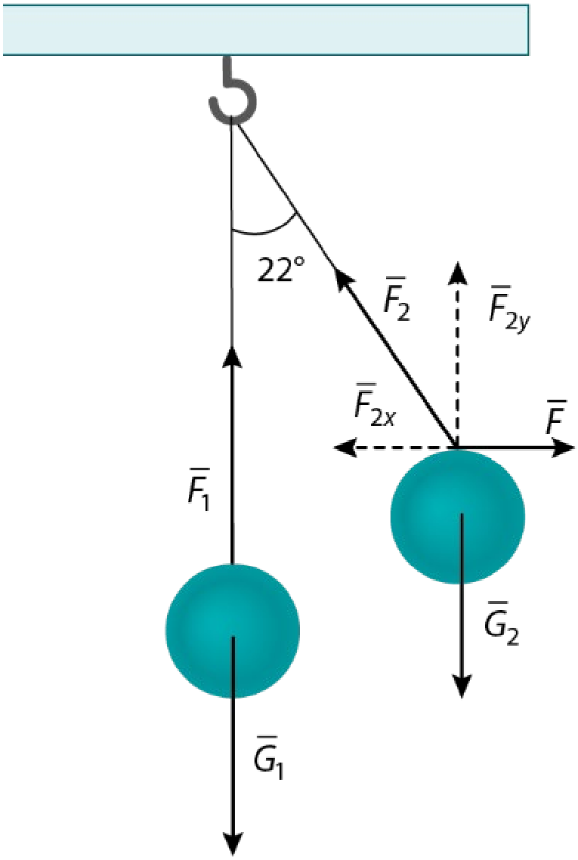
Myötöjännitysraja on suurin venytys, joka lankaan voidaan kohdistaa niin, että lanka palautuu alkuperäiseen muotoonsa. Venytys määritellään voiman ja pinta-alan suhteena

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$F = \sigma A = \sigma \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 1 \cdot 10^9\,\text{Pa} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1 \cdot 10^{-6}\,\text{m}}{2}\right)^2 = 7{,}854 \cdot 10^{-4}\,\text{N} \approx 0{,}8\,\text{mN}.$$

Tehtävä 8.24.

a)



$\bar{F}_1$ = punnukseen 1 kohdistuva langan jännitysvoima

$\bar{F}_2$ = punnukseen 2 kohdistuva langan jännitysvoima

$\bar{F}$ = punnukseen 2 kohdennettu voima

$\bar{G}_1$ = punnuksen 1 paino

$\bar{G}_2$ = punnuksen 2 paino

Pisteet:

- kappaleeseen 1 vaikuttavat voimat ja yhtä pitkinä (1 p)
- kappaleeseen 2 vaikuttavat voimat (3 p)
- pistevähennykset: jos narussa vaikuttavat voimat eri pituiset (–1 p), jos vaakasuuntaiset voimat ovat eri pituiset (–1 p)

b) Tarkastellaan punnusta, joka roikkuu vinon narun varassa. Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$, kun punnus on paikoillaan. Tarkastellaan vaaka- ja pystysuuntaisia voimia ja voimien komponentteja

x: $F - F_{2x} = 0$

y: $F_{2y} - G_2 = 0$ (1 p)

Tarkastellaan vinojen voimien komponentteja kulmien avulla

$$F_{2x} = F_2 \sin\alpha$$
$$F_{2y} = F_2 \cos\alpha.$$
(1 p)

Sijoitetaan komponentit yhtälöihin

$$F = F_2 \sin\alpha$$
$$m_2 g = F_2 \cos\alpha.$$
(1 p)

Jaetaan yhtälöt puolittain ja saadaan

$$\frac{F}{m_2 g}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.$$

Tällöin voiman *F* suuruus on

$$F=m_2 g\tan\alpha=1{,}2\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\tan 22^\circ=4{,}7562\,\text{N}\approx 4{,}8\,\text{N}.\ \text{(2 p)}$$

(TAI ratkaistaan alemmasta yhtälöstä F_2 ja sijoitetaan ylempään, jolloin

$$F=\frac{m_2 g\sin\alpha}{\cos\alpha}=m_2 g\tan\alpha.)$$

c) Kun punnus m_1 on paikoillaan, on Newtonin II mukaan $G_1 = F_1$.

Narussa vaikuttavat voimat F_1 ja F_2 ovat yhtä suuret voiman ja vastavoiman lain mukaan. (1 p)

Sijoitetaan b)-kohdan voiman F_2 saatu lauseke $F_2=\dfrac{m_2 g}{\cos\alpha}$, jolloin saadaan

$$G_1=F_1=F_2=\frac{m_2 g}{\cos\alpha}$$

$$m_1\cancel{g}=\frac{m_2\cancel{g}}{\cos\alpha}\quad \text{(1 p.)}$$

$$m_1=\frac{m_2}{\cos\alpha}=\frac{1{,}2\,\text{kg}}{\cos 22^\circ}=1{,}294\,\text{kg}\approx 1{,}3\,\text{kg}.\ \text{(1 p.)}$$

d) Massa m_2 ja voima F pysyvät vakiona. Jos pystysuorassa narussa roikkuvaan punnukseen lisätään punnus, kasvaa massa m_1 voiman yhtälöissä. b- ja c-kohdan mukaan saadaan voimayhtälö

$$m_1 g = \frac{m_2 g}{\cos\alpha}. \quad \text{(1 p)}$$

(Massa m_1 on kääntäen verrannollinen termiin $\cos\alpha$,

$m_1 \sim \frac{1}{\cos\alpha}$.)

Kun m_1 kasvaa, termi $\cos\alpha$ pienenee. (1 p) Tällöin myös kulma α pienenee (ja punnus m_1 siirtyy vähän alaspäin ja punnus m_2 ylöspäin.) (1 p)

9. Kitka

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 9.1.

Oikeat vastaukset:

a) C

b) A

c) A

d) B

e) B

f) A

Tehtävä 9.2.

Kitkan hyötyjä ovat esimerkiksi:

- liikenteessä renkaiden pito
- naulan tai ruuvin pysyminen puussa
- kynän pysyminen kädessä
- kirjan sivun kääntäminen
- pyörällä kiihdyttäminen ja jarruttaminen
- käveleminen

Kitkan haittoja ovat esimerkiksi:

- koneen osien hankaus
- mäenlasku
- sukan ja lattian välinen kitka kuluttaa sukanpohja

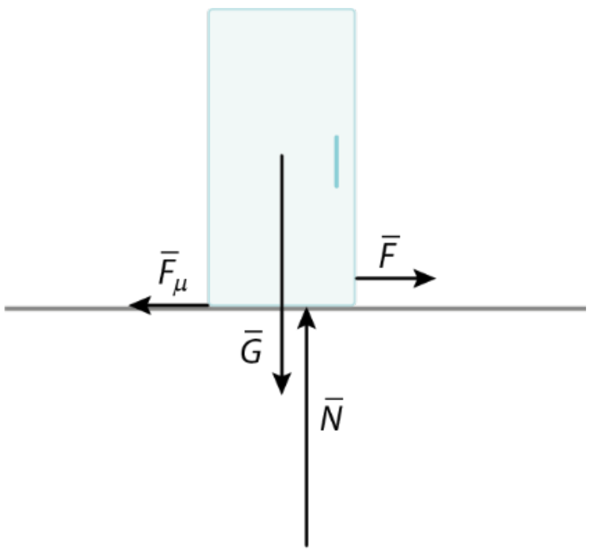
Tehtävä 9.3.

a) Jääkaappia vedetään voimalla F = 160 N.

Jääkaappiin vaikuttavat pystysuunnassa sen oma paino ja alustan tukivoima.

Vaakasuunnassa jääkaappiin vaikuttavat vetävä voima, ja alustan ja jääkaapin välinen kitka.

Koska kaappi liikkuu, kitka on liukukitkaa.



$\overline{G}$ = paino

$\overline{N}$ = pinnan tukivoima

$\overline{F}_\mu$ = kitka

$\overline{F}$ = vetävä voima

Kun jääkaappi liikkuu tasaisella nopeudella, siihen vaikuttavien voimien summa on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Sovitaan positiiviset suunnat alas ja oikealle, jolloin

Pystysuunnassa: $G - N = 0$ eli $G = N$

Vaakasuunnassa $F - F_\mu =$ eli $F_\mu = F$

Kitka on 160 N. Kitka on liukukitkaa.

b) Jääkaappia vedetään voimalla F = 10 N.

Kuten a-kohdassa, jääkaappiin vaikuttavat pystysuunnassa sen oma paino ja alustan tukivoima.

Vaakasuunnassa jääkaappiin vaikuttavat vetävä voima, ja alustan ja jääkaapin välinen kitka. Koska kaappi on paikallaan, kitka on lepokitkaa.

Kun jääkaappi on paikallaan, siihen vaikuttavien voimien summa on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

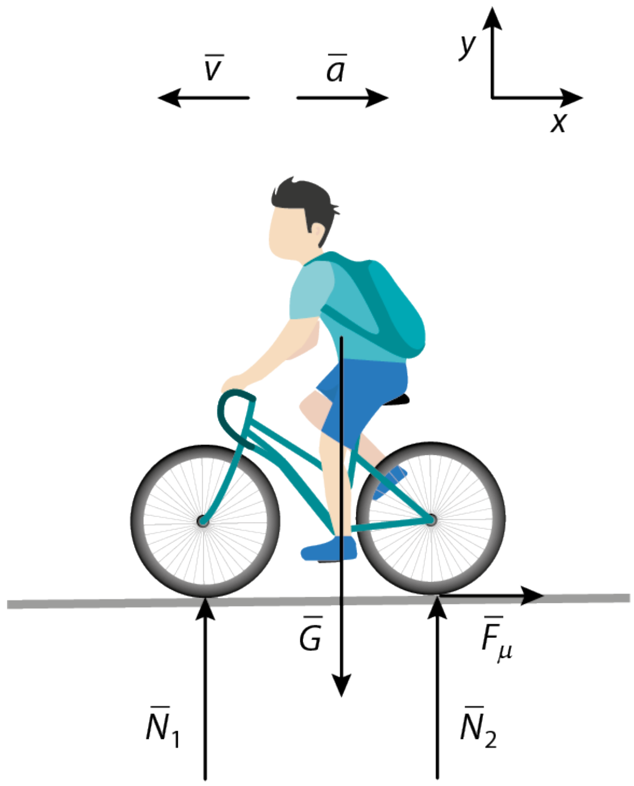
Pystysuunnassa: $G - N = 0$ eli $G = N$

Vaakasuunnassa $F - F_{\mu} = 0$ eli $F_{\mu} = F =$ 10 N.

Kitka on 10 N. Kitka on lepokitkaa.

Tehtävä 9.4.

a)



$\overline{G}$ = koululaisen ja polkupyörän paino

$\overline{N}_1$ = eturenkaaseen kohdistuva tukivoima

$\overline{N}_2$ = takarenkaaseen kohdistuva tukivoima

$\overline{F}_{\mu}$ = takarenkaan ja alustan välinen liukukitka

b) Koululaisen ja polkupyörän massa m = 58 kg

Takapyörälle kohdistuu puolet painosta, joten takapyörään kohdistuva tukivoima on $N_2 = \frac{mg}{2}$.

Asfalttiin tulee jarrutusjälkiä, kun koululainen tekee lukkojarrutuksen. Tällöin kyseessä on liukukitka. Kumin ja kuivan asfaltin välinen liukukitkakerroin on μ = 0,7.

Takarenkaan kitka on

$$F_\mu = \mu N = \mu \frac{mg}{2} = 0{,}7 \cdot \frac{58\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} = 199{,}143\,\text{N} \approx 200\,\text{N}.$$

Tehtävä 9.5.

a) Kirja pysyy paikallaan, kun kitka on yhtä suuri kuin kirjan painon pinnan suuntainen komponentti. Tämä toteutuu, kun kallistuskulma on enintään 30°.

b) Kirjan ja tason välinen lepokitka on suurimmillaan, kun tason kallistuskulma α = 30°. Tällöin pinnan tukivoiman suuruus on $N = G_y = G \cos \alpha$ ja kitka on yhtä suuri kuin kirjan painon pinnan suuntainen komponentti, $F_\mu = G_x = G \sin \alpha$.

Kitkakerroin on siis

$$\mu = \frac{F_\mu}{N} = \frac{\cancel{G}\sin\alpha}{\cancel{G}\cos\alpha} = \tan\alpha$$
$$= \tan 30^\circ = 0{,}5773503 \approx 0{,}58.$$

c) Kun kirja lähtee liukumaan, alkaa tason ja kirjan välillä vaikuttaa liukukitka. Liukukitka on pienempi kuin lepokitka, joten painon pinnan suuntainen komponentti on selvästi suurempi kuin kitka. Kirjaan vaikuttava kokonaisvoima on nollaa suurempi, joten kirja on Newtonin II lain nojalla kiihtyvässä liikkeessä.

Tehtävä 9.6.

Pyörättömän matkalaukun ja lattian välillä vaikuttaa liukukitka. Pyörällisen matkalaukun pyörien vierimisvastus on tätä liukukitkaa pienempi. Siksi pyörällisen matkalaukun vetämiseen tarvitaan pienempi voima.

Sovella

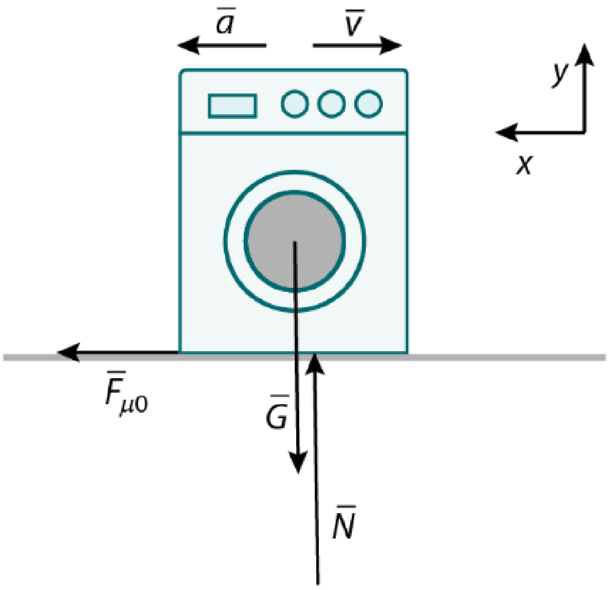
Tehtävä 9.7.

a) Jos pesukonetta ei ole kiinnitetty esimerkiksi kuormaliinoilla, äkkijarrutuksessa pesukone jatkaa liikettään alkuperäiseen suuntaan eli liikkuu kuorma-auton lavalla eteenpäin. Newtonin I lain mukaisesti kappale jatkaa liikettään samaan suuntaan muuttumattomalla nopeudella, jos mikään voima ei vaikuta.

b) Pesukoneen massa $m = 70$ kg

Lepokitkan suurin arvo $F_{\mu 0} = 340$ N

Jos pesukone pysyy auton lavalla samalla paikalla, eikä lähde liukumaan, on pesukoneen kiihtyvyys sama kuin auton. Piirretään pesukoneen voimakuvio ja kirjoitetaan pesukoneen liikeyhtälö.



$\bar{G}$ = pesukoneen paino

$\bar{N}$ = lavan tukivoima

$\bar{F}_{\mu 0}$ = lepokitka

Pesukoneen Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Kun positiiviset suunnat valitaan vasemmalle ja ylöspäin, saadaan laatikon liikeyhtälö komponenttimuodossa

vaakasuunnassa: $F_{\mu 0} = ma$

pystysuunnassa: $N - G = 0$.

Vaakasuunnan yhtälöstä saadaan ratkaistua suurin kiihtyvyys, jolla lepokitka vielä riittää antamaan pesukoneelle saman kiihtyvyyden kuin autolla.

Ratkaistaan kiihtyvyys.

$$a = \frac{F_{\mu 0}}{m} = \frac{340\,\text{N}}{70\,\text{kg}} = 4{,}8571\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 4{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Pesukone lähtee liikkeelle, jos auton kiihtyvyys ylittää 4,9 m/s^2.

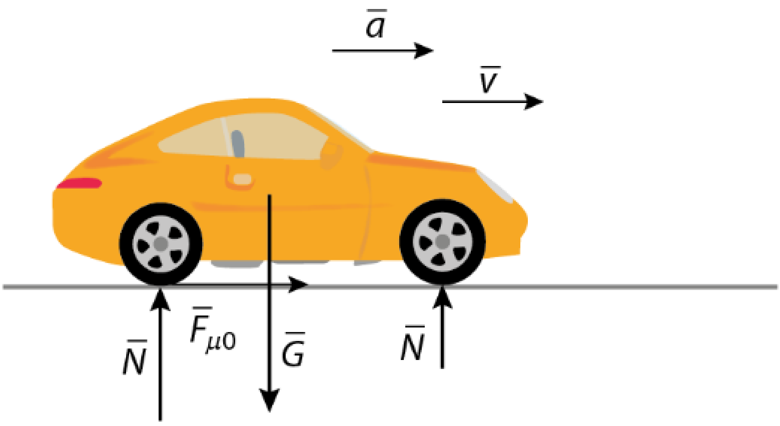
Huom. Ajoneuvolain (11.12.2002/1090) mukaan kuljettajan on huolehdittava kuorman turvallisesta ja tarkoituksenmukaisesta sitomisesta.

Tehtävä 9.8.

Renkaan ja lattian välinen lepokitkakerroin on μ = 0,27

Auton massa m = 1,35 kg

a) Piirretään auton voimakuvio.



$\bar{F}_{\mu 0} =$ lepokitka yhdessä renkaassa

$\bar{G} =$ auton paino

$\bar{N} =$ alustan tukivoima

Auton painon oletetaan jakautuvan tasaisesti neljälle renkaalle, jolloin yhden renkaan ja lattian välinen kitka on

$$F_{\mu 0} = \mu N = \mu \frac{mg}{4} = 0{,}27 \cdot \frac{1{,}35\,\text{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4} = 0{,}8939\,\text{N} \approx 0{,}89\,\text{N}.$$

b) Autolla on suurin kiihtyvyys, kun renkaat eivät sudi paikallaan vaan kahden vetävän renkaan lepokitka välittää suurimman työntövoiman autolle. Kun auto on kiihtyvässä liikkeessä, Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Auton liikeyhtälö komponenttimuodossa

vaakasuunnassa: $2F_{\mu 0} = ma$

pystysuunnassa: $N - G = 0$.

Vaakasuunnan yhtälöstä saadaan ratkaistua suurin kiihtyvyys, jolla lepokitka vielä riittää antamaan pitoa renkaille ilman sutimista.

Ratkaistaan kiihtyvyys.

$$a = \frac{2F_{\mu 0}}{m} = \frac{2\mu \frac{\cancel{m}g}{4}}{\cancel{m}} = \mu g$$

$$= \frac{0{,}27 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} = 1{,}3244\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

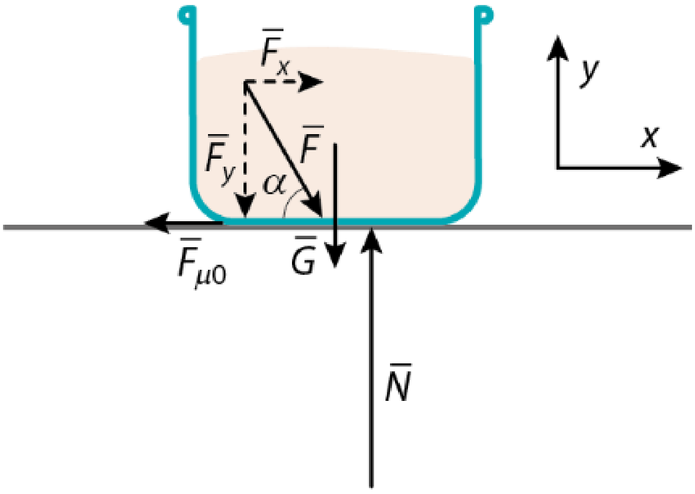
Auton suurin kiihtyvyys on 1,3 m/s^2.

Tehtävä 9.9.

a) pullataikinan ja kulhon massa m = 1,6 kg

taikinaa työntävä voima F = 9,4 N

työntävän voiman kulma pöydän pintaan nähden
α = 75°



$\overline{G}=$ taikinan ja kulhon paino

$\overline{N}=$ pöydän pinnan tukivoima

$\overline{F}=$ taikinaa työntävä voima

$\overline{F}_{\mu 0}=$ kulhon ja pöydän pinnan välinen kitka

b) Kun pullataikinaa työnnetään niin, että kulho pysyy paikallaan, Newtonin II lain mukaan kulhoon vaikuttavien voimien summa on nollavektori $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Kun positiiviset suunnat valitaan vasemmalle ja ylöspäin, saadaan kulhon ja taikinan liikeyhtälöiksi

vaakasuunnassa: $F_{\mu 0} - F_x = 0$

pystysuunnassa: $N - G - F_y = 0$.

Tarkastellaan voimia pystysuunnassa

$$
\begin{aligned}
N - G - F_y &= 0 \\
N - G - \sin\alpha \cdot F &= 0 \\
N &= G + \sin\alpha \cdot F \\
&= mg + \sin\alpha \cdot F \\
&= 1{,}6\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \sin 75^\circ \cdot 9{,}4\,\text{N} \\
&= 24{,}7757\,\text{N} \approx 25\,\text{N}.
\end{aligned}
$$

c) b-kohdan vaakasuuntaisesta liikeyhtälöstä saadaan

$$
\begin{aligned}
&F_{\mu 0} - F_x = 0 \\
&F_{\mu 0} = F_x \\
&F_{\mu 0} = F \cdot \cos\alpha = 9{,}4\,\text{N} \cdot \cos 75^\circ = 2{,}4329\,\text{N} \approx 2{,}4\,\text{N}.
\end{aligned}
$$

Kitka on vastakkaiseen suuntaan työntävän voiman vaakakomponenttiin nähden.

d) Pöydän pinnan ja kulhon välinen lepokitka $F_{\mu 0}$ on tilanteessa taikinaa työntävän voiman vaakakomponentin suuruinen.

Lepokitkan arvot vaihtelevat nollan ja maksimiarvon välillä. Tilanteessa lepokitka ei välttämättä ole vielä saavuttanut suurinta arvoaan, mutta olettamalla näin, voidaan päätellä lepokitkakertoimelle minimiarvo.

Lepokitkan maksimiarvo on tukivoiman N ja lepokitkakertoimen μ_0 tulo, jolloin saadaan

$$F_{\mu 0} = \mu_0 N$$

$$\mu_0 = \frac{F_{\mu 0}}{N} = \frac{2{,}4329\,\mathrm{N}}{24{,}7757\,\mathrm{N}} = 0{,}0982 \approx 0{,}10.$$

Lepokitkakertoimen arvo on tilanteessa vähintään 0,10.

Tehtävä 9.10.

Paketin massa $m = 4{,}1$ kg

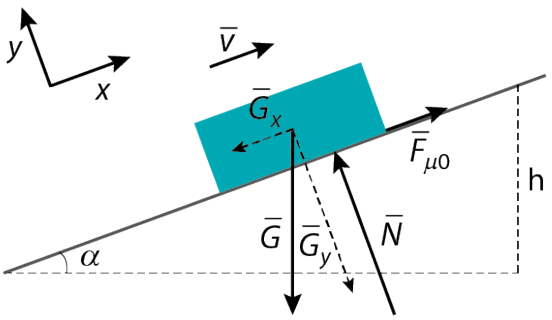
Paketin korkeus maan tasalta $h = 1{,}6$ m

Liukuhihnan kulma vaakatasoon nähden $\alpha = 23°$

Paketin nopeus $v = 0{,}54$ m/s

Putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81$ m/s^2

a)



$\overline{G} =$ laatikon paino

$\overline{N} =$ liukuhihnan laatikkoon kohdistama tukivoima

$\overline{F}_{\mu 0} =$ liukuhihnan ja laatikon välinen lepokitka

b) Paketin kulkema matka *x* maan pinnalta korkeudelle *h* = 1,6 m saadaan ratkaistua trigonometrian avulla

$$\sin\alpha = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1{,}6\,\text{m}}{\sin 23^{o}} = 4{,}0949\,\text{m}.$$

Kun liukuhihnan nopeus *v* = 0,54 m/s. Paketti on tasaisessa liikkeessä. Paketin kulkemaan matkaan kuluu aikaa

$$t = \frac{x}{v} = \frac{4{,}0949\,\text{m}}{0{,}54\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 7{,}5831\,\text{s} \approx 7{,}6\,\text{s}.$$

c) Jotta paketti liikkuu tasaisella nopeudella hihnalla, Newtonin II lain mukaan pakettiin vaikuttavien voimien summa on nolla. Tarkastellaan pakettiin vaikuttavia voimia liukuhihnan suunnassa x

$$\begin{aligned} F_{\mu 0} - G_x &= 0 \\ F_{\mu 0} &= G_x \\ &= \sin\alpha \cdot G = mg\sin\alpha \\ &= 4{,}1\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 23^\circ = 15{,}715597\,\text{N}. \end{aligned}$$

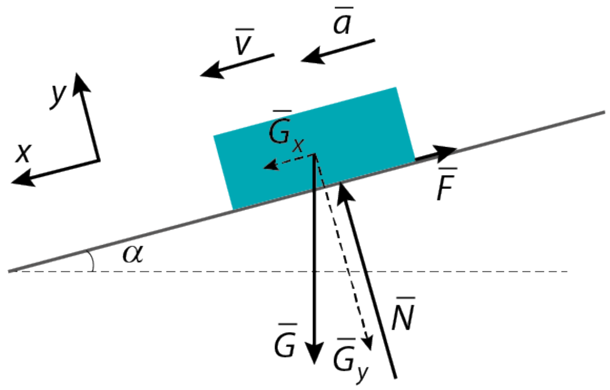
Pakettiin vaikuttava kitka $F_{\mu 0}$ on tukivoiman N ja lepokitkakertoimen μ tulo, kun taas tukivoiman suuruus N on sama kuin painon y-komponentti G_y

$$F_{\mu 0} = \mu_0 N$$

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{F_{\mu 0}}{N} = \frac{F_{\mu 0}}{G_y} = \frac{\cancel{mg}\sin\alpha}{\cancel{mg}\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \\ &= \tan 23^\circ = 0{,}424475 \approx 0{,}42. \end{aligned}$$

Tehtävä 9.11.

a)



$\overline{G}=$ pulkkailijan paino

$\overline{N}=$ mäen pinnan pulkkailijaan kohdistama tukivoima

$\overline{F}=$ pulkkailijan liikettä vastustavat voimat

b) Pulkkailijan massa m = 38 kg

Mäen kulma vaakatasoon nähden α = 15°, sama kulma on G ja G_y välillä

Liikettä vastustavat voimat yhteensä F = 12 N

Koska pulkka ei liiku y-suunnassa, Newtonin II lain mukaan kokonaisvoima on nollavektori y-suunnassa. Siksi pinnan tukivoima N on yhtä suuri kuin pulkkailijan painon y-suuntainen komponentti G_y

$$N = G_y = G\cos\alpha = mg\cos\alpha = 38\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\cos 15^\circ = 360{,}078\,\text{N} \approx 360\,\text{N}.$$

c) Tarkastellaan ensin pulkkailijaan kohdistuvaa painon *x*-komponenttia G_x,

$$G_x = G\sin\alpha = mg\sin\alpha = 38\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin 15^\circ = 96{,}4826\,\text{N}.$$

Koska $G_x > F$, pulkkailija on kiihtyvässä liikkeessä *x*-suunnassa mäkeä alaspäin. Newtonin II mukaan pulkkailijan liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$, eli

$$G_x - F = ma.$$

Pulkkailijan kiihtyvyys on

$$a = \frac{G_x - F}{m} = \frac{G\sin\alpha - F}{m} = \frac{mg\sin\alpha - F}{m}$$

$$= \frac{38\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin 15^\circ - 12\,\text{N}}{38\,\text{kg}}$$

$$= 2{,}2232\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

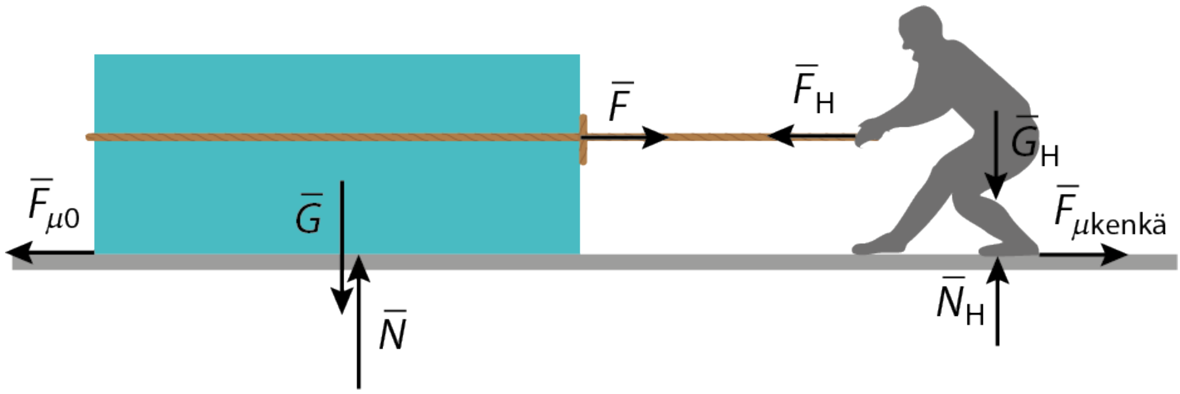
Tehtävä 9.12.

Henkilön massa $m_{\text{henkilö}} = 85$ kg

Laatikon massa $m_{\text{laatikko}} = 120$ kg

a) Lepokitkakerroin $\mu_0 = 0{,}5$

Hahmotellaan tilanteen voimakuviota.



$\overline{G}$ = laatikon paino

$\overline{N}$ = pinnan tukivoima

$\overline{F}_{\mu 0}$ = laatikon ja alustan lepokitka

$\overline{F}$ = voima, jolla henkilö vetää laatikkoa

$\overline{G}_{\text{H}}$ = henkilön paino

$\overline{N}_{\text{H}}$ = pinnan tukivoima

$\overline{F}_{\mu\text{kenkä}}$ = kengän ja alustan lepokitka

$\overline{F}_{\text{H}}$ = voima, jolla laatikko vetää henkilöä

Kun systeemi on paikallaan tai juuri lähdössä liikkeelle, ovat kummankin kappaleen Newtonin II lain mukaiset liikeyhtälöt $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Silloin laatikkoa vedettäessä kaikki vaakasuuntaiset voimat ovat yhtä suuria.

Laatikkoon kohdistuvan vetävän voiman ja siten myös laatikkoon kohdistuvan lepokitkan suuruus riippuu vetävän henkilön kengän ja alustan välisestä lepokitkasta. Koska laatikon massa on suurempi kuin vetäjän, laatikko ei lähde liikkeelle, kun sekä laatikon että kenkien lepokitkakertoimet ovat samat.

Määritetään suurin voima, jolla henkilö pystyy vetämään laatikkoa vaakasuoraan niin, että kengät eivät liu’u. Tämä voima on samansuuruinen kuin laatikkoon kohdistuva lepokitka, kun laatikko pysyy paikallaan. Laatikkoon kohdistuva lepokitka on suurimmillaan

$$F_{\mu 0} = \mu_0 N = \mu_0 m_{\text{henkilö}} g = 0{,}50 \cdot 85\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 416{,}925\,\text{N} \approx 420\,\text{N}.$$

b) Määritetään uusi lepokitkakerroin kenkien ja pinnan välille $\mu_{\text{kenkä}}$, joka vastaa laatikkoon kohdistuvaa suurinta kitkaa $F_{\mu 0}$.

$$F_{\mu\text{kenkä}} = F_{\mu 0}$$

$$\mu_{\text{kenkä}} m_{\text{henkilö}} \cancel{g} = \mu_0 m_{\text{laatikko}} \cancel{g}$$

$$\mu_{\text{kenkä}} = \frac{\mu_0 m_{\text{laatikko}}}{m_{\text{henkilö}}} = \frac{0{,}50 \cdot 120\,\text{kg}}{85\,\text{kg}} = 0{,}7059 \approx 0{,}71.$$

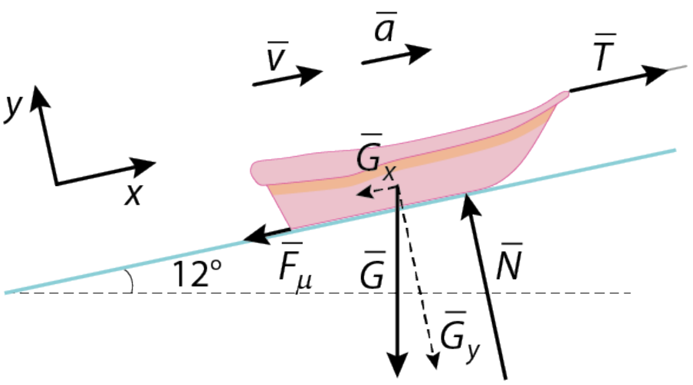
Tehtävä 9.13.

Pulkkailijan ja pulkan yhteinen massa m = 22 kg

Pulkan ja lumen liukukitkakerroin μ = 0,24

Rinteen kaltevuuskulma vaakasuoraan nähden α = 12°

a) Piirretään pulkan voimakuvio.



$\overline{G}$ = pulkkailijan paino

$\overline{T}$ = narun jännitysvoima

$\overline{N}$ = mäen pinnan pulkkailijaan kohdistama tukivoima

$\overline{F}_\mu$ = liukukitka

Koska pulkka ei liiku y-suunnassa, Newtonin II lain mukaan kokonaisvoima on nollavektori y-suunnassa. Pinnan tukivoima N on yhtä suuri kuin pulkkailijan painon y-suuntainen komponentti G_y.

Pulkkaan vaikuttaa kitka

$$F_\mu = \mu N = \mu G_y = \mu mg \cos\alpha$$

$$= 0{,}24 \cdot 22\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 12^\circ = 50{,}6649\,\text{N} \approx 51\,\text{N}.$$

b) Pulkkailija on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Newtonin II lain mukaan tason suunnassa $\sum \overline{F} = m\overline{a}$, ja suunnat huomioiden

$$T - F_\mu - G_x = ma.$$

Sijoitetaan yhtälöön a-kohdasta kitkan lauseke, $F_\mu = \mu mg\cos\alpha$, sekä painon *x*-komponentin lauseke, $G_x = mg\sin\alpha$, ja ratkaistaan narun jännitysvoima.

Narun jännitysvoima on

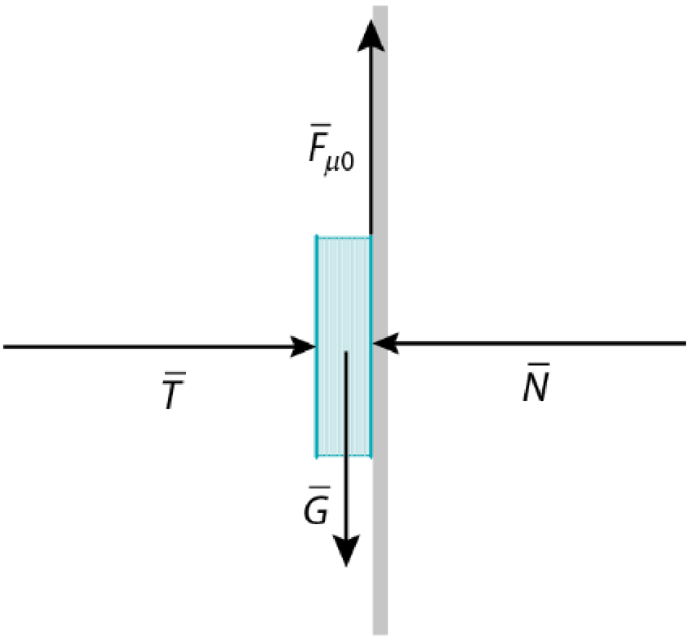
$$\begin{aligned}
T &= F_\mu + G_x + ma \\
&= \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha + ma \\
&= 0{,}24 \cdot 22\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 12^\circ + 22\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 12^\circ + 22\,\text{kg} \cdot 0{,}16\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
&= 99{,}0564\,\text{N} \approx 99\,\text{N}.
\end{aligned}$$

Tehtävä 9.14.

a) Kirjan massa m = 0,712 kg

Kirjan ja seinän lepokitkakerroin μ_0 = 0,36

Piirretään kirjan voimakuvio.



$\overline{G} =$ kirjan paino

$\overline{F}_{\mu 0} =$ kirjan ja seinän välinen lepokitka

$\overline{N} =$ seinän kirjaan kohdistama tukivoima

$\overline{T} =$ käden kirjaan kohdistama voima

Kun kirja pysyy paikallaan, Newtonin II lain mukaan kirjaan vaikuttavien voimien summa on nollavektori $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Tarkastellaan voimien suuruuksia pysty- ja vaakasuunnassa

vaakasuunnassa: $T - N = 0$

pystysuunnassa: $F_{\mu 0} - mg = 0$

Toisaalta kitka on $F_{\mu 0} = \mu_0 N$, jolloin

vaakasuunnassa: $T = N$

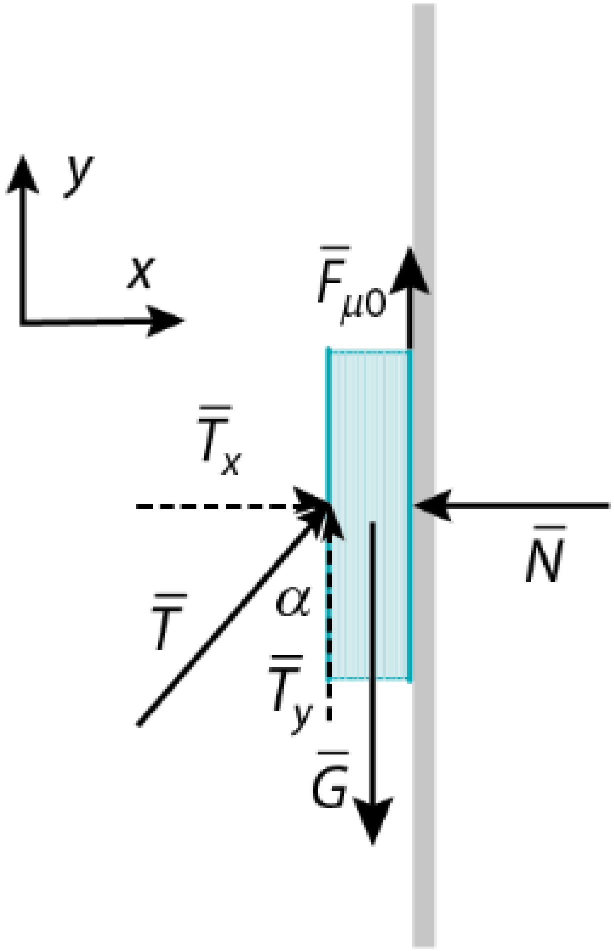
pystysuunnassa: $\mu_0 N = mg$.

Käden kirjaan kohdistama voima on

$$\mu_0 T = mg$$

$$T = \frac{mg}{\mu_0} = \frac{0{,}712 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}36} = 19{,}402\,\text{N} \approx 19\,\text{N}$$

b)



$\overline{G}$ = kirjan paino

$\overline{F}_{\mu 0}$ = kirjan ja seinän välinen lepokitka

$\overline{N}$ = seinän kirjaan kohdistama tukivoima

$\overline{T}$ = käden kirjaan kohdistama voima

Kirja pysyy edelleen paikallaan, vaikka työntävän voiman ja seinän välinen kulma α = 18°, joten Newtonin II lain mukaan kirjaan vaikuttavien voimien summa on nollavektori $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Tarkastellaan voimien suuruuksia

vaakasuunnassa: $T_x - N = 0$

pystysuunnassa: $F_{\mu 0} + T_y - mg = 0$.

Lisätään yhtälöihin lepokitka $F_{\mu 0} = \mu_0 N$ ja esitetään voiman T komponentit kulmien avulla,

vaakasuunnassa: $N = T \sin \alpha$

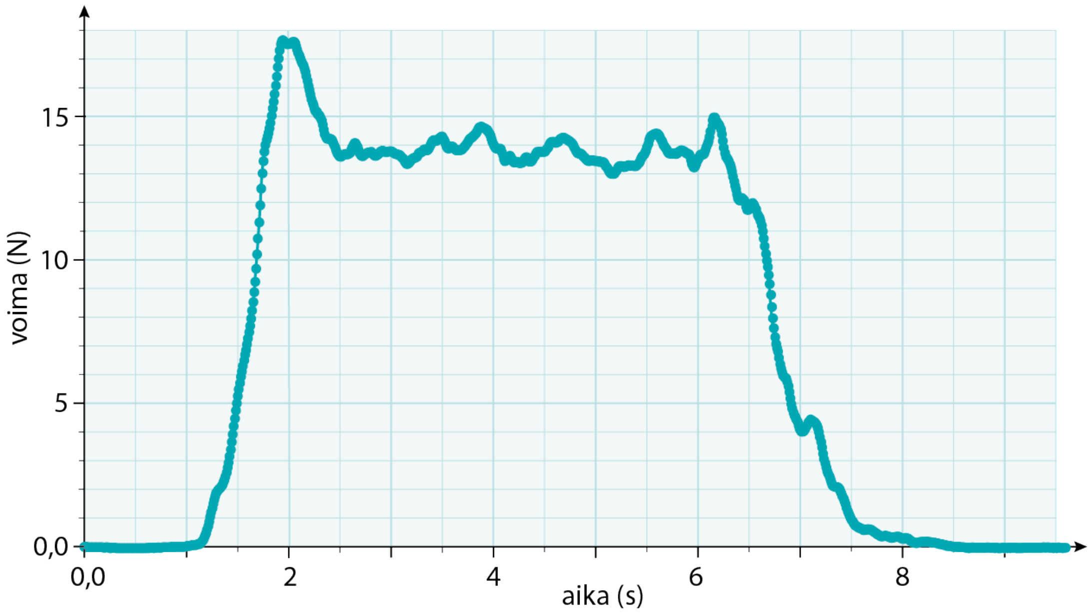
pystysuunnassa: $\mu_0 N + T \cos \alpha - mg = 0$.

Pystysuunnan yhtälöstä saadaan käden kirjaan kohdistama voima

$$\mu_0 T \sin\alpha + T \cos\alpha = mg$$
$$T(\mu_0 \sin\alpha + \cos\alpha) = mg$$
$$\begin{aligned} T &= \frac{mg}{\mu_0 \sin\alpha + \cos\alpha} \\ &= \frac{0{,}712\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}36 \cdot \sin 18^\circ + \cos 18^\circ} = 6{,}575\,\text{N} \approx 6{,}6\,\text{N}. \end{aligned}$$

Tehtävä 9.15.

a)

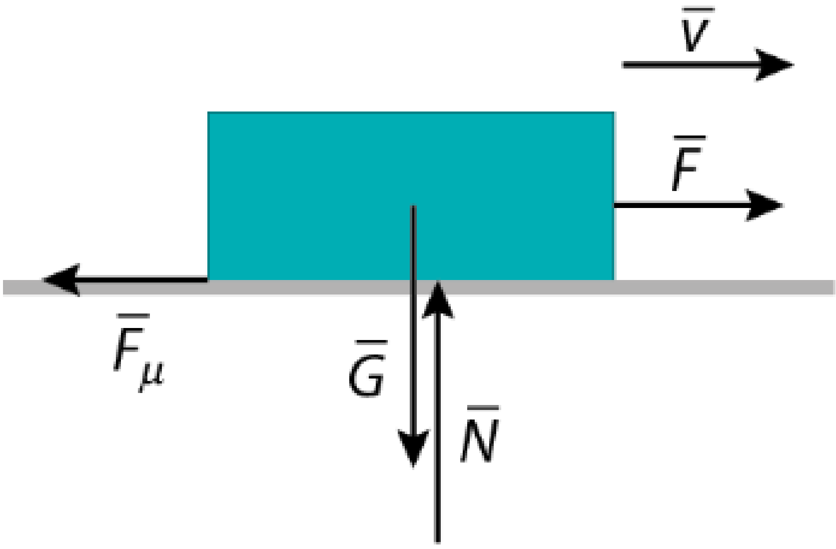


Kuvaajasta havaitaan, että voima-anturin lukema kasvoi nollasta maksimiarvoon, 18 N:iin, jonka jälkeen voima-anturin lukema pieneni arvoon 14 N. Koska alussa pakkaus oli paikallaan, Newtonin II mukaan voima-anturin lukema on yhtä suuri kuin pakkauksen ja lattian pinnan välinen kitka. Voima-anturin lukema kasvaa nollasta maksimiarvoon, joten myös lepokitka kasvaa samalla tavalla.

b) Pakkauksen massa m = 5,1 kg.

Pakkaus lähti liukumaan ajanhetkellä 2,5 s. Pakkausta vedettiin vaakasuoralla tasolla vakionopeudella, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Piirretään tilanteesta voimakuvio.



$\overline{G}$ = paino

$\overline{N}$ = pinnan tukivoima

$\overline{F}_\mu$ = kitka

$\overline{F}$ = vetävä voima

Kun positiiviset suunnat valitaan oikealle ja alaspäin, saadaan

vaakasuunnassa: $F - F_\mu = 0$

pystysuunnassa: $G - N = 0$

Kitka $F_\mu = \mu N$ ja paino $G = mg$, joten

vaakasuunnassa: $F = \mu N$

pystysuunnassa: $N = mg$.

Sijoittamalla alempi yhtälö ylempään saadaan

$F = \mu mg$.

Liukukitkakerroin on

$$\mu = \frac{F}{mg} = \frac{13{,}8\,\mathrm{N}}{5{,}1\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}2758 \approx 0{,}28.$$

c) Kun pakkaus on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, on pakkauksen liikeyhtälö Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Silloin vaakasuunnassa $F - F_{\mu} = ma$

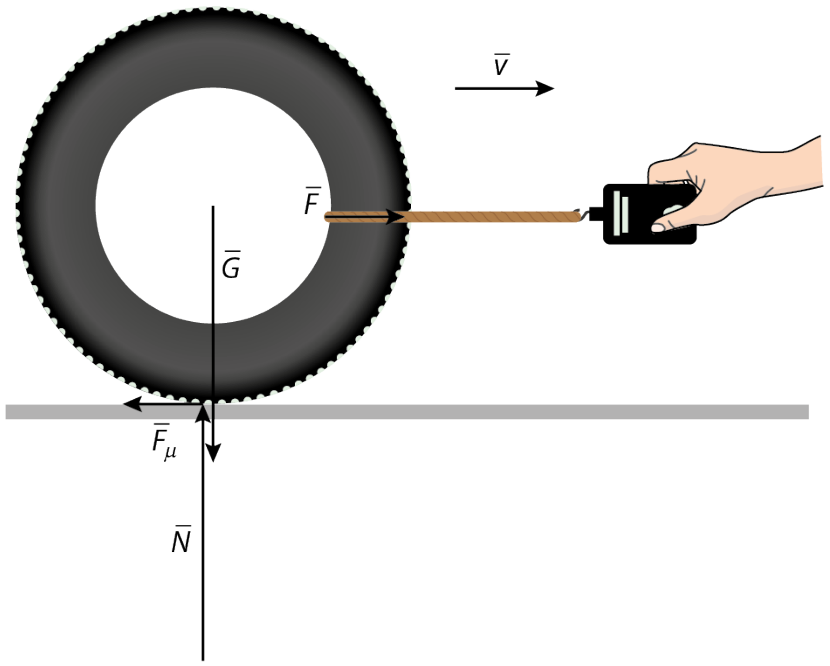
ja vetämiseen tarvittava voima on $F = F_{\mu} + ma$.

Koska varsinaisessa mittauksessa pakkaus oli tasaisessa liikkeessä, oli Newtonin II mukaan $F = F_{\mu}$.

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan pakkauksen vetäminen vaatii suuremman voiman, jolloin paketin liikkuessa kuvaajan pystyakselin arvot kasvavat sitä suuremmiksi, mitä suurempi on kiihtyvyys. Paketin kiihtyvä liike ei kuitenkaan muuta alun lepokitkan arvoa.

Tehtävä 9.16.

Piirretään renkaaseen vaikuttavat voimat.



$\overline{F}$ = voima-anturin renkaaseen kohdistama voima

$\overline{F}_\mu$ = renkaan ja lattian välinen liukukitka

$\overline{G}$ = renkaan paino

$\overline{N}$ = lattian renkaaseen kohdistama tukivoima

Kun rengas liukuu vakionopeudella, Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Valitaan suunnat oikealle ja ylös positiivisiksi

vaakasuunnassa: $F - F_{\mu} = 0$

pystysuunnassa: $G - N = 0$.

Kitka $F_{\mu} = \mu N$ ja paino $G = mg$, joten

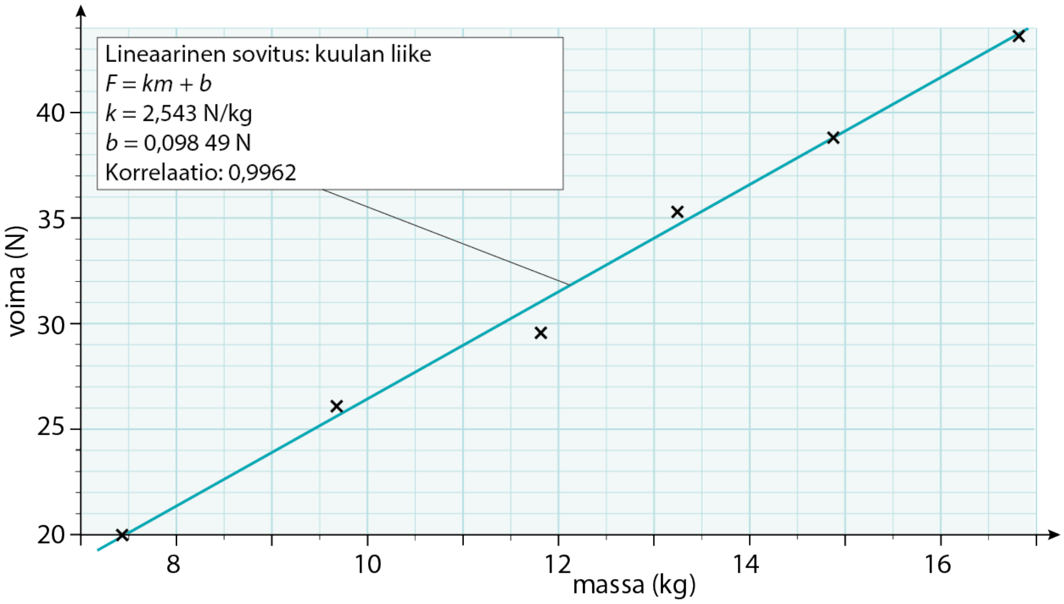
vaakasuunnassa: $F = \mu N$

pystysuunnassa: $N = mg$.

Sijoittamalla alempi yhtälö ylempään saadaan

$F = \mu mg$.

Tällöin (m, F)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin on $k = \mu g$. Määritetään fysikaalinen kulmakerroin.



Lattian ja renkaan väliseksi liukukitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{k}{g} = \frac{2{,}543\ \text{N/kg}}{9{,}81\,\text{m/s}^2} = 0{,}25922 \approx 0{,}26.$$

Kokeellinen tehtävä 9.17.

a) Mittauksen perusteella nähdään, että kirjan liike liu'un aikana on likimain tasaisesti hidastuvaa, sillä kiihtyvyys on likimain vakio.

b) Liu'un aikana kirjaan kohdistuu vaakasuunnassa vain kirjan ja lattian välinen kitka. Pystysuunnassa vaakasuoralla pinnalla kirjan paino G on yhtä suuri kuin pinnan kirjaan kohdistama tukivoima *N*. Newtonin II lain mukaan vaakasuunnassa suunnat huomioituna

$$\begin{aligned} F_\mu &= ma \\ \mu N &= ma \\ \mu \cancel{m} g &= \cancel{m} a \\ \mu &= \frac{a}{g}. \end{aligned}$$

Määritetään mittauksesta liu'un kiihtyvyys ja sijoitetaan saatu arvo edellä olevaan lausekkeeseen.

Tehtävä 9.18.

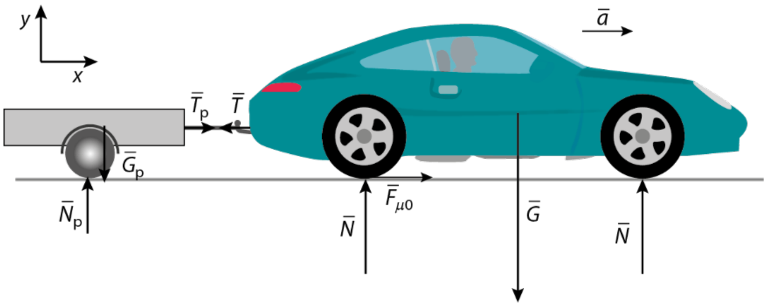
a) Auton massa m_{auto} = 1340 kg

Peräkärryn massa $m_{\text{kärry}}$ = 420 kg

Auton kiihtyvyys a = 0,47 m/s^2

Autoa kiihdyttävä lepokitkavoima $F_{\mu 0}$

Peräkärryn aisaan kohdistava voima T



$\bar{G}$ = auton paino

$\bar{N}$ = pinnan tukivoima autoon

$\bar{F}_{\mu 0}$ = lepokitka

$\bar{T}$ = voima, jolla peräkärryn aisa vetää autoa

$\bar{G}_{\text{p}}$ = peräkärryn paino

$\bar{N}_{\text{p}}$ = pinnan tukivoima peräkärryyn

$\bar{T}_{\text{p}}$ = voima, jolla auto vetää peräkärryä

b) Autoa ja peräkärryä kiihdyttää auton renkaiden ja pinnan välinen lepokitka, $F_{\mu 0}$. Riippuen siitä onko auto nelivetoinen vai ei, lepokitka jakaantuu neljälle tai kahdelle renkaalle, mutta kitkan kokonaissuuruus on $F_{\mu 0}$. Newtonin II lain mukaan autoa ja peräkärryä kiihdyttää voima vaakasuunnassa $\sum F = (m_{\text{auto}} + m_{\text{kärry}})a$.

Koska vierimiskitka ja ilmanvastus ovat hyvin pieniä, x-suuntainen liikeyhtälö on

$$F_{\mu 0} = (m_{\text{auto}} + m_{\text{kärry}})a = (1340\,\text{kg} + 420\,\text{kg}) \cdot 0{,}47\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 827{,}2\,\text{N} \approx 830\,\text{N}.$$

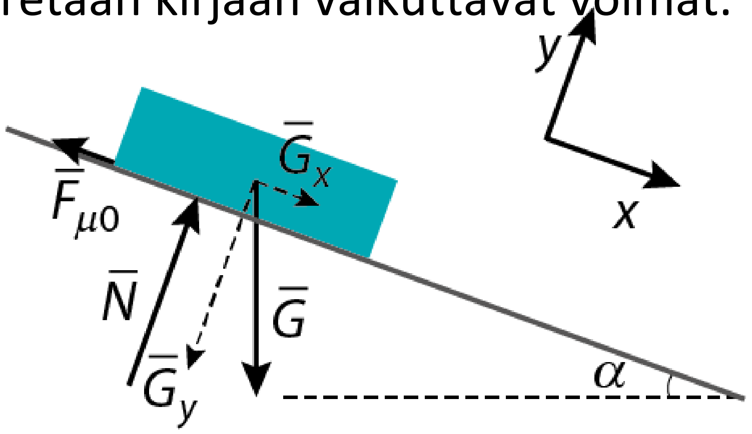
c) Peräkärry on kiihtyvässä liikkeessä. Peräkärry aiheuttaa aisaan voiman, jonka suuruus on sama kuin voiman suuruus T, jolla auto vetää kärryä. Newtonin II lain mukaan

$$T = m_{\text{kärry}}a = 420\,\text{kg} \cdot 0{,}47\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 197{,}4\,\text{N} \approx 200\,\text{N}.$$

Tehtävä 9.19.

a) Kun kirja lähtee liikkeelle, on kallistuskulma 10 °

b) Piirretään kirjaan vaikuttavat voimat.



$\overline{G} =$ kirjan paino

$\overline{F}_{\mu 0} =$ kirjan ja tason välinen lepokitka

$\overline{N} =$ tason pinnan kirjaan kohdistama tukivoima

Tarkastellaan lepokitkan suurinta arvoa. Newtonin II lain mukaan paikallaan olevalle kirjalle pätee $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Kun voimien suunnat huomioidaan, saadaan x- ja y-suunnissa

$$G_x - F_{\mu 0} = 0$$

$$N - G_y = 0.$$

Esitetään painon komponentit ja kitkalle Fμ0 = μ0N

$$G\sin\alpha = \mu_0 N$$

$$N = G\cos\alpha.$$

Sijoitetaan alempi yhtälö ylempään, jolloin saadaan lepokitkakertoimen suurimmaksi arvoksi

$$mg\sin\alpha = \mu_0 mg\cos\alpha$$

$$\mu_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan 10^\circ = 0{,}1763 \approx 0{,}18.$$

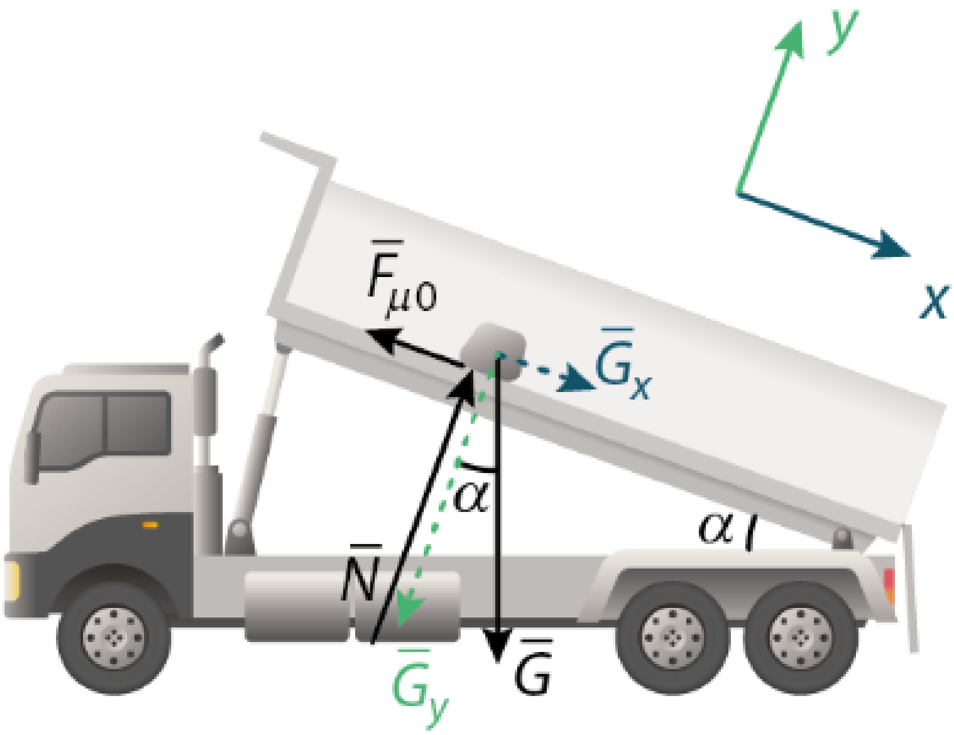
Tehtävä 9.20.

Kiven massa m = 1,6 kg

Lepokitkakerroin μ_0 = 0,55

Liukukitkakerroin μ = 0,42

a) Kun α = 20°, kivi on paikallaan. Kitka on lepokitkaa.



$\overline{G}$ = paino

$\overline{N}$ = alustan tukivoima

$\overline{F}_{\mu 0}$ = lepokitka

Kiven Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Kun huomioidaan suunnat, saadaan

tason suunnassa: $F_{\mu 0} - G_x = 0$

tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa: $N - G_y = 0$

Tarkastellaan voimien komponentteja

tason suunnassa: $F_{\mu 0} - G \sin \alpha = 0$

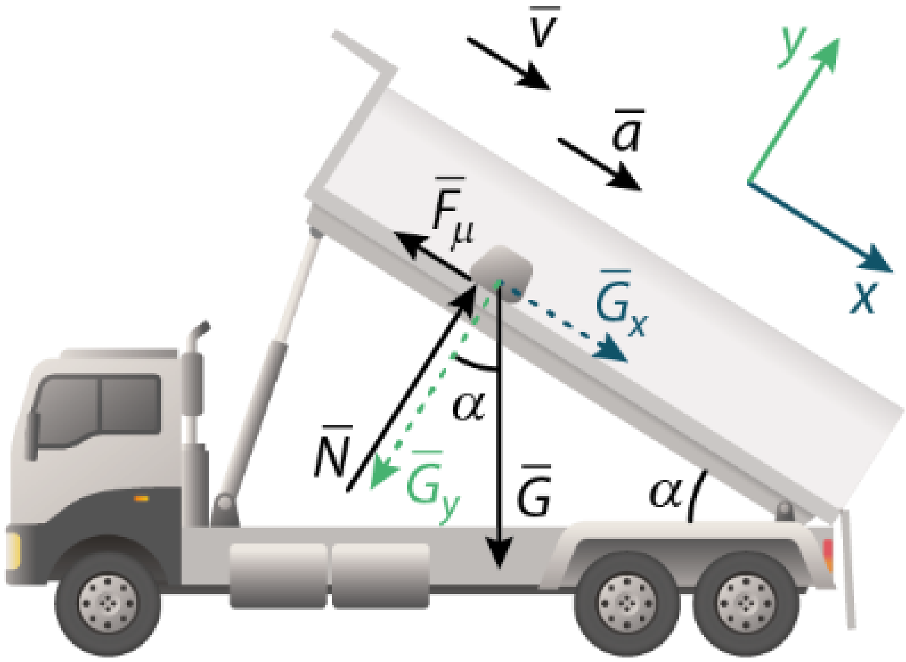
tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa: $N - G \cos \alpha = 0$.

Ylemmästä x-suunnan yhtälöstä saadaan

$$F_{\mu 0} = mg\sin\alpha = 1{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \sin 20^\circ = 5{,}3683\,\mathrm{N} \approx 5{,}4\,\mathrm{N}.$$

Kun $\alpha = 20°$, lepokitkan suuruus on 5,4 N.

b) Kun α = 32°, kivi liukuu ja kitka on liukukitkaa.



$\overline{G}$ = paino

$\overline{N}$ = alustan tukivoima

$\overline{F}_{\mu}$ = liukukitka

Kiven Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Komponenttimuodossa

tason suunnassa: $F_{\mu} - G_x = ma$

tasoa vastaan kohtisuorassa: $N - G_y = 0$

Tarkastellaan voimien komponentteja

$F_\mu - G \sin \alpha = ma$

$N - G \cos \alpha = 0.$

Alemmasta y-suunnan yhtälöstä saadaan $N = mg \cos \alpha$.

Liukukitka on $F_\mu = \mu N$, joten voidaan kirjoittaa

$$F_\mu = \mu mg \cos\alpha = 0{,}42 \cdot 1{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cos 32^\circ = 5{,}5906\,\mathrm{N} \approx 5{,}6\,\mathrm{N}.$$

Kun $\alpha = 32°$, liukukitkan suuruus on 5,6 N.

Tehtävä 9.21.

Laatikon massa m = 425 kg

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s2

Lastaussillan kaltevuuskulma vaakatasoon nähden α = 35o

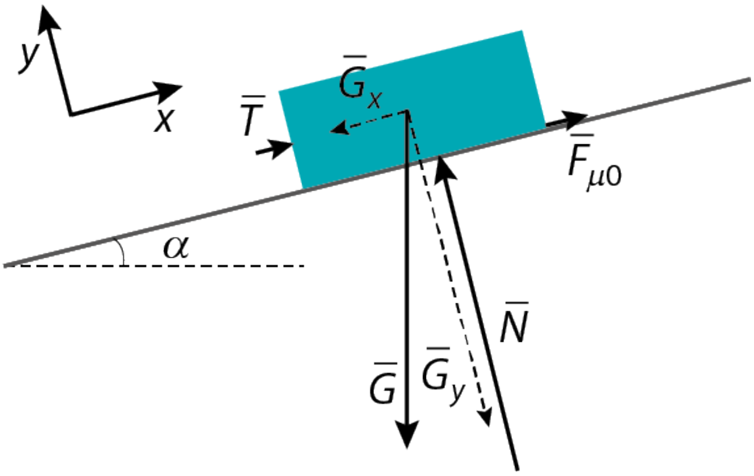
Lepokitkakerroin μ_0 = 0,52

Tapaus 1: Kun laatikkoa tuetaan pienimmällä mahdollisella voimalla, se on lähtemäisillään liukuun alaspäin kaltevaa tasoa pitkin. Lepokitka vaikuttaa ylöspäin.

Tapaus 2: Kun työntövoiman *T* suuruutta kasvatetaan, laatikko lähtee lopulta liukumaan ylöspäin *x*-suunnassa. Kun laatikkoa tuetaan suurimmalla mahdollisella voimalla, se on lähtemäisillään liukuun ylöspäin kaltevaa tasoa pitkin. Lepokitka vaikuttaa alaspäin.

Molemmissa tilanteissa lepokitka estää kappaleen liukumista ja saa suurimman arvonsa.

Tutkitaan ensin tapausta 1. Piirretään tilanteesta voimakuvio.



$\overline{G} =$ laatikon paino

$\overline{N} =$ lastaussillan laatikkoon kohdistama tukivoima

$\overline{F}_{\mu 0} =$ lastaussillan ja laatikon välinen lepokitka

$\overline{T} =$ laatikkoa työntävä voima

Koska laatikko pysyy paikallaan, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Tarkastellaan laatikkoon vaikuttavien voimien suuruuksia kaltevan tason suunnassa ja kohtisuoran suunnassa.

y-suunnassa: $N - G\cos\alpha = 0$

x-suunnassa: $F_{\mu 0} + T - G\sin\alpha = 0$.

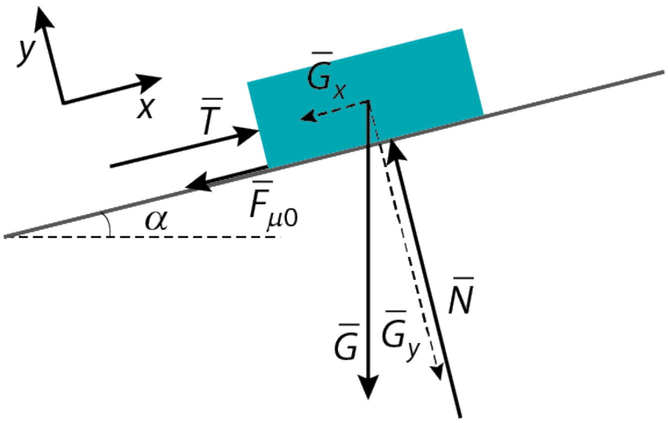
Koska lepokitka $F_{\mu 0} = \mu_0 N$ riippuu tukivoimasta, ratkaistaan ensin tukivoiman suuruus N

$$N = G\cos\alpha = mg\cos\alpha$$
$$= 425\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 35^\circ = 3415{,}2497\,\text{N}.$$

Sitten ratkaistaan pienin työntövoiman suuruus T siten, että laatikko ei lähde liukumaan alaspäin

$$T = G\sin\alpha - F_{\mu 0} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$
$$= 425\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 35^\circ - 0{,}52 \cdot 425\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 35^\circ$$
$$= 615{,}454\,\text{N} \approx 620\,\text{N}.$$

Tutkitaan tapausta 2. Piirretään tilanteesta voimakuvio.



Liikeyhtälöstä saadaan nyt

$$T - G\sin\alpha - F_{\mu 0} = 0$$

$$\begin{aligned} T &= G\sin\alpha + F_{\mu 0} = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha \\ &= 425\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 35^\circ + 0{,}52 \cdot 425\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 35^\circ \\ &= 4167{,}3134\,\text{N} \approx 4200\,\text{N}. \end{aligned}$$

Syvennä

Tehtävä 9.22.

a) Kitka aiheuttaa häviöitä monissa teollisuuden prosesseissa ja sovelluksissa. Jos kitkaa voitaisiin pienentää hallitusti, niin saavutettaisiin merkittäviä kustannussäästöjä.

b) Aineiden pinnat eivät ole mikroskooppisesti tarkasteltuna tasaisia. Tämän takia toisiaan hankaavat kappaleet eivät ole kontaktissa toisiinsa koko liukupinnan alueelta. Pintojen väliset kontaktialueet voivat olla mikroskooppisen pieniä.

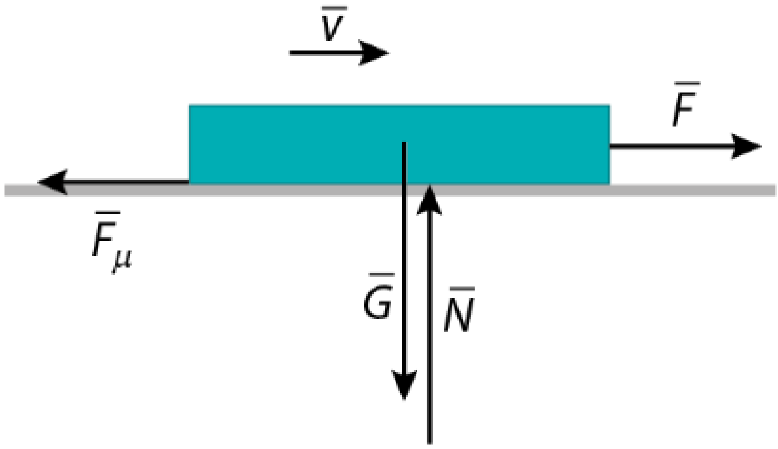
c) Paljastuneen pinnan sisäenergia on suurempi kuin kontaktialueen sisäenergia. Kun kontaktialue häviää, atomien välisiä sidoksia katkeaa ja paljastuvan pinta-alueen sisäenergia kasvaa.

d) Kappaleen mekaanista liike-energiaa muuntuu paljastuneen pinnan sisäenergiaksi, kun kontaktipintoja häviää ja sidoksia katkeaa.

e) Raudan koheesioenergia on suuri eli raudan sidosten katkeamiseen tarvitaan paljon energiaa. Voiteluaineessa on vetysidoksia, joiden koheesioenergia on paljon pienempi. Kun kontaktipintojen atomien sidosten katkeaminen ja muodostuminen tapahtuvat voiteluöljyssä rautalevyn sijaan, kitkan tekemä työ pienenee.

Tehtävä 9.23.

a)



$\overline{G} =$ punnuslaatikon paino

$\overline{F} =$ voima, jolla punnuslaatikkoa vedetään

$\overline{F_\mu} =$ punnuslaatikon ja pöydän pinnan välinen liukukitka

$\overline{N} =$ pöydän pinnan punnuslaatikkoon kohdistama tukivoima.

Voimakuvion pisteytys:

Kuvaan on merkitty kaikki tilanteessa vaikuttavat voimavektorit oikeisiin suuntiin ja oikeille kohdilleen. (1 p)

Kappaleen paino painopisteestä

Alustan tukivoima alkaa tai päättyy kappaleen alapinnasta

Kitka alkaa kappaleen alareunasta

Käden tukivoima päättyy kappaleen reunaan

Voimavektorien pituudet ovat oikein. (1 p)

vaakasuunnassa: käden tukivoima on pidempi kuin kitka

pystysuunnassa: tukivoima ja paino ovat yhtä pitkiä

Voimat on nimetty listaan kuvion alle ja kuvioon on merkitty nopeus- ja kiihtyvyysvektorit (1 p)

Huom!

- Jos voimakuviossa on yksikin ylimääräinen voima, ei voimakuviosta voi saada pisteitä, 0 p.

- Jos kaksi tai useampi voimista puuttuu, ei voimakuviosta voi saada pisteitä, 0 p.

b) Tarkastellaan vakionopeudella liukuvaa punnuslaatikkoa Newtonin II lain mukaan, jolloin $\sum \overline{F} = \overline{0}.$ Sovitaan suunnat ja muodostetaan liikeyhtälöt vaaka- ja pystysuunnassa

vaakasuunta: $F - F_{\mu} = 0$

pystysuunta: $N - G = 0.$ (2 p)

(Jos Newtonin II lakia ei ole mainittu, enintään 1 p.)

Kitkalle $F_{\mu} = \mu N$. Saadaan voimille

vaakasuuntaan: $F = \mu N$

pystysuuntaan: $N = mg.$

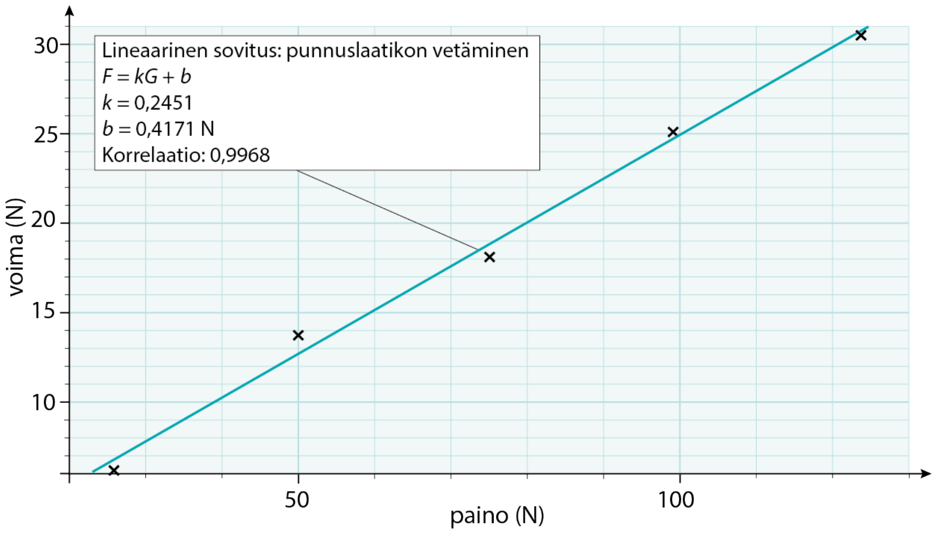
Vetävän voiman ja massan välille saadaan

$F = \mu mg$ (1 p).

Voima-anturin lukeman F ja painon mg välillä on lineaarinen riippuvuus. Tällöin kitkakerroin saadaan (mg, F)-kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. (1 p)

Lasketaan uusi sarake $G = mg$, tehdään kuvaaja ja sovitetaan mittauspisteisiin suora. Määritetään suoran fysikaalinen kulmakerroin.

Massa (kg)	Voima (N)	Paino (N)
2,65	6,2	25,997
5,1	13,8	50,031
7,65	18,1	75,047
10,1	25,1	99,081
12,6	30,5	123,606



(kuvaajan akselit oikein päin 1 p., mittauspisteet ja sovitus 1 p)

Punnuslaatikon pohjan ja pöydän pinnan välinen liukukitkakerroin on kuvaajan kulmakerroin $\mu = 0{,}2451 \approx 0{,}25$. (1 p)

Huom. Jos tehtävän on tehnyt vain yhdellä mittapisteellä max. 3 p. Jos määrittänyt keskiarvona max. 4 p

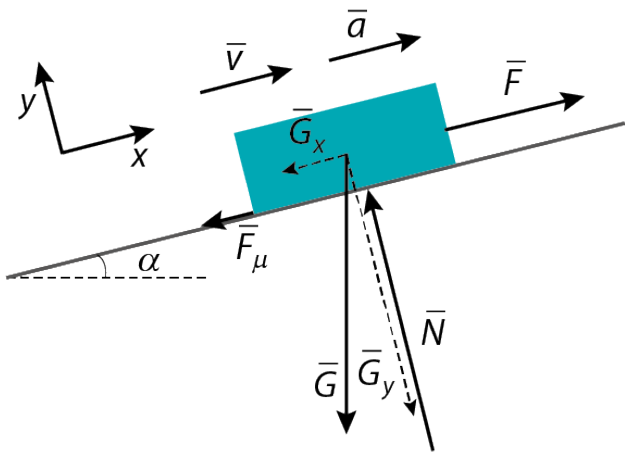
c) Punnuslaatikon kiihtyvyys a = 1,4 m/s^2

Punnuslaatikon massa m = 2,65 kg

Tason kaltevuuskulma α = 25°

Pöydän pinnan ja punnuslaatikon pohjan välinen kitkakerroin on b-kohdan mukaan μ = 0,2451

Piirretään punnuslaatikon voimakuvio.



$\bar{N}$ = pöydänpinnan tukivoima

$\bar{F}$ = punnuslaatikon vetämiseen tarvittava voima

$\bar{F}_\mu$ = punnuslaatikon ja pöydän välinen kitka

$\bar{G}$ = punnuslaatikon paino

Tarkastellaan punnuslaatikon liikettä tason suunnassa ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Tason suunnassa laatikko on kiihtyvässä liikkeessä ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa laatikko on paikallaan. Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioiden

tason suunnassa: $F - F_\mu - G_\mathrm{x} = ma$

tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa: $N - G_\mathrm{y} = 0$.

(2 p, pitää olla maininta Newtonin II laista, jos ei mainintaa 1 p)

Kitka $F_\mu = \mu N$. Esitetään painon komponentit

$F = \mu N + G\sin\alpha + ma$

$N = G\cos\alpha$

(1 p)

Sijoitetaan tukivoima N ja $G = mg$ ylempään yhtälöön, jolloin saadaan

$F = \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha + ma$
$F = m(\mu g\cos\alpha + g\sin\alpha + a)$.

(1 p)

$$F = 2{,}65\,\mathrm{kg}(0{,}2451\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\cos 25^\circ + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\sin 25^\circ + 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$$
$$= 20{,}471\,\mathrm{N} \approx 20\,\mathrm{N}.\ (1\ \mathrm{p.})$$

10. Voiman tekemä työ

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 10.1.

Oikeat vastaukset:

a) B

b) A

c) B

d) C

e) A

f) B

Tehtävä 10.2.

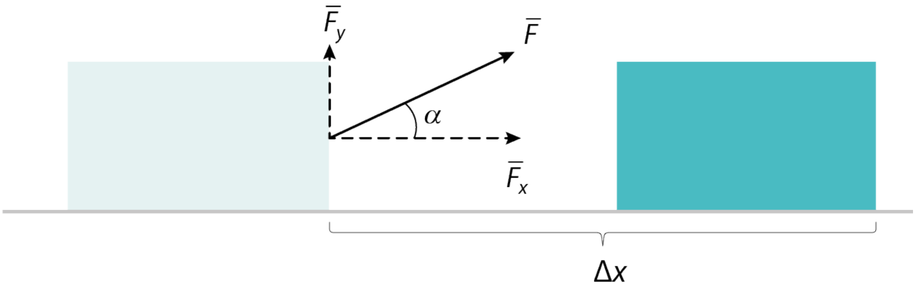
Siirtymä $\Delta x = 2{,}0$ m

Vetävä voima $F = 15$ N

a) Voima on siirtymän suuntainen, joten vetävän voiman tekemä työ on $W = F\Delta x = 15\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} = 30\ \text{J}$.

b) Vain siirtymän suuntainen voiman komponentti tekee työtä. Kun voima on siirtymään nähden kohtisuora, on siirtymän suuntainen voiman komponentti 0. Tällöin myös voiman tekemä työ on 0.

c) Siirtymän ja vetävän voiman välinen kulma α = 60°



Siirtymän suuntainen voiman komponentti $\overline{F}_x$ tekee työtä. Voiman vaakasuuntainen komponentti voidaan ratkaista trigonometrian avulla.

$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}$ eli $F_x = F \cos \alpha$

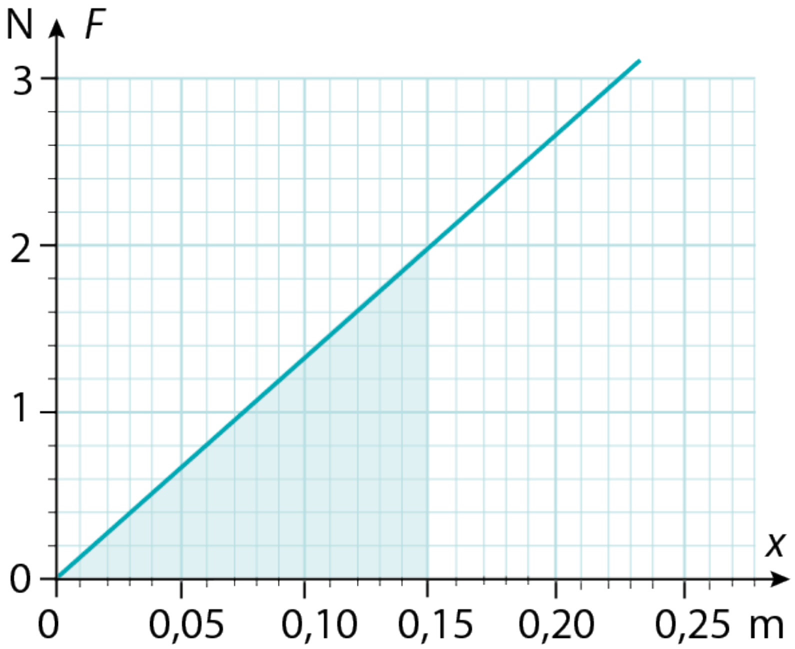
Työ saadaan, kun kerrotaan voiman siirtymän suuntainen komponentti F_x siirtymällä Δx.

Voiman tekemä työ on

$W = F\Delta x \cos \alpha = 15\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} \cdot \cos 60° = 15\ \text{J}$.

Tehtävä 10.3.

Koska työ on voiman ja matkan tulo, voiman tekemä työ saadaan (x, F)-koordinaatistoon piirretyn kuvaajan ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-alan avulla.



Voiman tekemä työ on $W = \dfrac{2{,}0\,\mathrm{N} \cdot 0{,}15\,\mathrm{m}}{2} = 0{,}15\,\mathrm{J}.$

Tehtävä 10.4.

Pianon massa m = 193 kg

Nostokorkeus h = 1,3 m

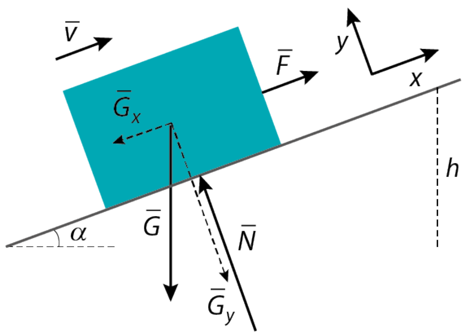
Putoamiskiihtyvyys g= 9,81 m/s^2

a) Kun piano etenee vakionopeudella $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Nostamiseen tarvittava voima on silloin yhtä suuri kuin pianon paino

$F = G = mg = 193\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 1\ 893{,}33\ \text{N} \approx 1{,}9\ \text{kN}.$

b) Kaltevan tason pituus s = 3,0 m

Piirretään voimakuvio.



$\overline{G}$ = pianon paino

$\overline{F}$ = pianon vetämiseen tarvittava voima

$\overline{N}$ = tason tukivoima

Tason kaltevuuskulma on

$$\sin\alpha = \frac{h}{s}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{h}{s}\right).$$

Tarkastellaan tason suuntaisia voimia, kun piano vedetään vakionopeudella kaltevaa tasoa pitkin.

Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Valitaan voiman *F* suunta positiiviseksi.

Voiman suuruus on

$$F - G_x = 0$$

$$\begin{aligned} F &= G\sin\alpha = mg\sin\alpha = mg\frac{h}{s} \\ &= 193\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1{,}3\,\text{m}}{3{,}0\,\text{m}} \\ &= 820{,}443\,\text{N} \approx 820\,\text{N}. \end{aligned}$$

Tehtävä 10.5.

Vaiheessa 1 tukin kulkema matka s_1 = 0,50 m

Vaiheessa 1 tukkiin kohdistuva voima F_1 = 880 N

Vaiheessa 2 tukin kulkema matka s_2 = 8,3 m

Vaiheessa 2 tukkiin kohdistuva voima F_2 = 620 N

Tukkiin kohdistuva liikettä vastustava voima F_3 = 620 N

a) Vaijerin jännitysvoiman tekemä työ on

$$W = F_1 s_1 + F_2 s_2 = 880\,\text{N} \cdot 0{,}50\,\text{m} + 620\,\text{N} \cdot 8{,}3\,\text{m} = 5586\,\text{J} \approx 5{,}6\,\text{kJ}.$$

b) Kaikkien tukkiin vaikuttavien voimien tekemien töiden summa on

$$\begin{aligned}\Sigma W &= W_1 + W_2 - W_3 = F_1 s_1 + F_2 s_2 - F_3 (s_1 + s_2) \\ &= 880\,\text{N} \cdot 0{,}50\,\text{m} + 620\,\text{N} \cdot 8{,}3\,\text{m} - 620\,\text{N} \cdot (8{,}3\,\text{m} + 0{,}50\,\text{m}) = 130\,\text{J}.\end{aligned}$$

Tehtävä 10.6.

Pyöräilijän kulkema matka s = 390 m

Pyöräilijän nopeus v = 11,4 m/s

Pyöräilijän teho P = 249 W

Koska pyöräilijä liikkuu vakionopeudella, on vastusvoimien oltava yhtä suuret kuin pyöräilijää eteenpäin vievät voimat. Pyöräilijän voiman aiheuttama teho on $P = Fv$, missä F on vastusvoimien suuruus. Vastusvoimien suuruudeksi saadaan

$$F = \frac{P}{v}.$$

Vastusvoimien tekemä työ on

$$W = Fs = \frac{P}{v}s = \frac{Ps}{v} = \frac{249\,\mathrm{W} \cdot 390\,\mathrm{m}}{11{,}4\,\mathrm{m/s}} = 8518{,}42\,\mathrm{J} \approx 8{,}52\,\mathrm{kJ}.$$

Tehtävä 10.7.

Liuskan pituus $s = 6{,}3\ \mathrm{m}$

Nousukorkeus $h = 0{,}50\ \mathrm{m}$

Pyörätuolin ja asiakkaan massa $m = 87\ \mathrm{kg}$

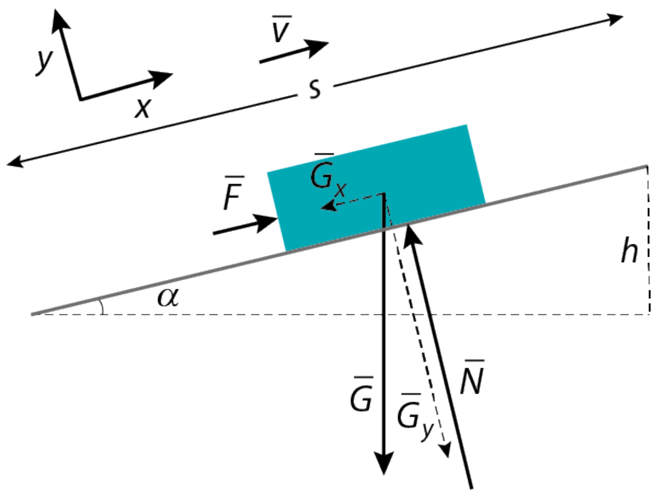
Putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

a) Kun asiakas työnnetään kirjastoon, hän siirtyy pystysuunnassa 50 cm. Tällöin tehty työ on yhtä suuri kuin painovoimaa vastaan tehty työ

$W = Gh = mgh$

$= 87\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}50\ \mathrm{m} = 426{,}735\ \mathrm{J} \approx 430\ \mathrm{J}.$

b) Hahmotellaan tilanteesta yksinkertaistettu voimakuvio. Ei huomioida mitään vastusvoimia.



$\overline{G} =$ pyörätuolin ja asiakkaan paino

$\overline{N} =$ luiskan tukivoima

$\overline{F} =$ työntävä voima

Kun pyörätuoli etenee vakionopeudella, Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Tason suunnassa

$$F - G_x = 0$$
$$F = mg\sin\alpha.$$

Kuvan perusteella saadaan $\sin\alpha = \dfrac{h}{s}$.

Työntämiseen tarvittava voima on

$$F = mg\frac{h}{s} = \frac{mgh}{s} = \frac{87\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}50\,\text{m}}{6{,}3\,\text{m}} = 67{,}7357\,\text{N} \approx 68\,\text{N}.$$

c) Mitä pidempi luiska on, sitä suurempi on matka *s*. Tarkastellaan työntämiseen tarvittavaa voimaa. Edellisen b-kohdan perusteella $F = mg\frac{h}{s}$, joten voima ja matka ovat kääntäen verrannollisia. Mitä suurempi on matka *s*, sitä pienempi on työntämiseen tarvittava voima *F*.

Jos vierimisvastusta ei huomioida, on työntämisessä tehty työ koko ajan sama, vaikka luiskan kaltevuus muuttuisi, sillä $W = Fs = F = mg\frac{h}{s} \cdot s = mgh$.

Työ *W* = *mgh* pysyy koko ajan samana, sillä se riippuu ainoastaan korkeudesta ja massasta, jotka tilanteessa eivät muutu. Tehty työ varastoituu pyörätuolin ja asiakkaan potentiaalienergiaksi.

Sovella

Tehtävä 10.8.

Juoksumatka s = 48 m
Nopeus v = 0,52 m/s
Kuntoilijan massa m = 61 kg
Portaiden kaltevuus α = 18°
Hyötysuhde η = 0,21
Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Kun kuntoilija juoksee juoksuportaita, muuttuu hänen paikkansa pystysuunnassa. Tällöin tehty työ on yhtä suuri kuin painovoimaa vastaan tehty työ

$W = Gh = mgh$

Määritetään nousukorkeus juoksun aikana

$$\sin\alpha = \frac{h}{s}$$
$$h = s\sin\alpha.$$

Nousuun tehty työ

$$W = mgh = mgs\sin\alpha$$
$$= 61\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 48\,\text{m} \cdot \sin 18^\circ = 8876{,}1\,\text{J} \approx 8{,}9\,\text{kJ}.$$

b) Keskimääräinen nousuteho saadaan energian muutoksen avulla.

Nousuteho on $P = \dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \dfrac{W}{t}$.

Koska juoksija etenee likimain vakionopeudella,

saadaan juoksuajaksi

$$s = vt$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Keksimääräinen nousuteho on

$$P = \frac{W}{\frac{s}{v}} = \frac{vW}{s} = \frac{vmgs\sin\alpha}{s} = vmg\sin\alpha$$

$$= 0{,}52\,\text{m/s} \cdot 61\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \sin 18^\circ$$

$$= 96{,}1578\,\text{W} \approx 96\,\text{W}.$$

c) Hyötysuhteen avulla ihmisen tarvitsema energia nousuun on a-kohdan tulosta apuna käyttäen

$$\eta = \frac{W}{E}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{W}{\eta} \\ &= \frac{mgs\sin\alpha}{\eta} \\ &= \frac{61\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 48\,\text{m} \cdot \sin 18^\circ}{0{,}21} \\ &= 42267{,}1679\,\text{J} \approx 42\,\text{kJ}. \end{aligned}$$

Tehtävä 10.9.

Kiihdytysaika t = 4,1 s

Loppunopeus v = 6,2 m/s

Potkulautailijan ja laudan massa m = 81 kg

a) Potkulautailija on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Lautailijan nopeus on aluksi nolla.

Lautailijan kiihtyvyys on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} = \frac{6{,}2\,\text{m/s}}{4{,}1\,\text{s}} = 1{,}512\,\text{m/s}^2 \approx 1{,}5\,\text{m/s}^2.$$

b) Pyöräilijää eteenpäin vievä voima on Newtonin II lain mukaan

$$F = ma = \frac{mv}{t} = \frac{81\,\text{kg} \cdot 6{,}2\,\text{m/s}}{4{,}1\,\text{s}} = 122{,}4878\,\text{N} \approx 120\,\text{N}.$$

c) Lautailija on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jolloin kiihdytysmatka saadaan tasaisesti kiihtyvän liikkeen matkan ja nopeuden yhtälön perusteella

$s = \frac{1}{2}at^2$

$v = at$, josta

$$s = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2\frac{v}{t}} = \frac{vt}{2}.$$

Eteenpäin vievän voiman tekemä työ

$$W = Fs = mas = \frac{mv\frac{vt}{2}}{t} = \frac{mv^2}{2} = \frac{81\,\text{kg} \cdot (6{,}2\,\text{m/s})^2}{2} = 1\,556{,}82\,\text{J} \approx 1{,}6\,\text{kJ}.$$

Tehtävä 10.10.

Auton nopeus v = 79 km/h = $\frac{79}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Kitkakerroin μ = 0,27

Auton massa m = 1420 kg

a) Eturenkaiden päällä oleva auton massa m_1 = 0,58m

Auto etenee vaakasuoralla tiellä vakionopeudella, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Silloin

$N = G = mg$ ja

$F_\mu = \mu N = \mu m_1 g = 0{,}58\mu mg$

$= 0{,}58 \cdot 0{,}27 \cdot 1420\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 2\ 181\text{N} \approx 2{,}2\ \text{kN}.$

b) Auton kulkema matka s = 850 m

Koska auto etenee vakionopeudella, on Newtonin II lain mukaan vastusvoimien suuruus yhtä suuri kuin eteenpäin vievien voimien suuruus.

Tällöin vastusvoimien tekemä työ on

$$W = Fs = F_{\mu}s = 0{,}58\mu mgs$$
$$= 0{,}58 \cdot 0{,}27 \cdot 1420\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 850\,\text{m}$$
$$= 1854248{,}9\,\text{J} \approx 1{,}9\,\text{MJ}.$$

c) Kitka liikuttaa autoa teholla $P = F_{\mu}v$.

a-kohdan mukaan saadaan kitkan autoa liikuttavaksi tehoksi

$$P = 0{,}58\mu mgv$$
$$= 0{,}58 \cdot 0{,}27 \cdot 1420\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \frac{79}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$= 47871\,\text{W} \approx 48\,\text{kW}.$$

Tehtävä 10.11.

Kuljettu matka s = 4,6 km

Kävelynopeus v = 3,1 km/h

Elimistön teho kävelyssä P = 290 W

Juoksunopeus v = 9,8 km/h

Elimistön teho juoksussa P = 700 W

a) Eteenpäin vievä voima saadaan tehon avulla

$P = Fv$ eli $F = \frac{P}{v}$.

Kävelyssä: $F = \frac{P}{v} = \frac{290\,\text{W}}{\frac{3{,}1}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 336{,}77\,\text{N} \approx 340\,\text{N}$

Juoksussa: $F = \frac{P}{v} = \frac{700\,\text{W}}{\frac{9{,}8}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 257{,}14\,\text{N} \approx 260\,\text{N}$

b) Tarvittava energia saadaan voiman tekemän työn avulla,

$$E = W = Fs = \frac{P}{v}s.$$

Kävelyssä:

$$E = \frac{P}{v}s = \frac{290\,\text{W}}{\frac{3{,}1}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot 4600\,\text{m}$$
$$= 1549161\,\text{J} \approx 1{,}5\,\text{MJ}$$

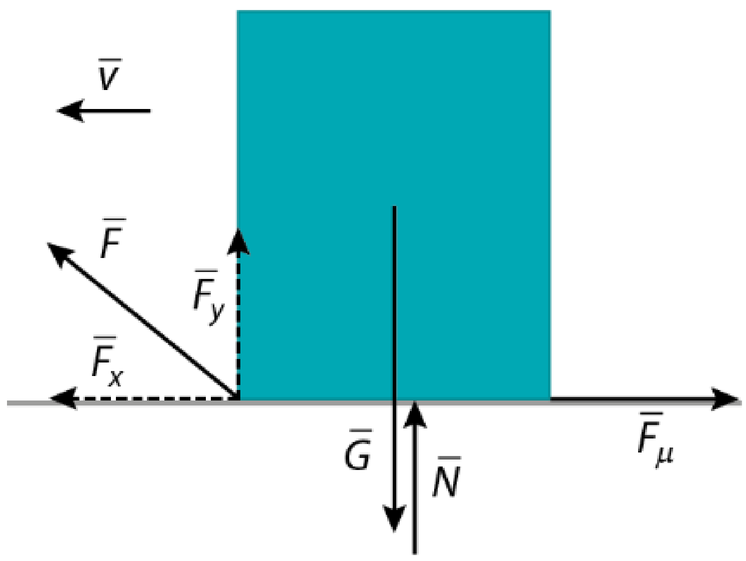
Juoksussa:

$$E = \frac{P}{v}s = \frac{700\,\text{W}}{\frac{9{,}8}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot 4600\,\text{m}$$
$$= 1\,182\,857{,}14\,\text{J} \approx 1{,}2\,\text{MJ}$$

Tehtävä 10.12.

Vetokulma α = 40 °
Kaapin massa m = 120 kg
Maton ja lattian välinen kitkakerroin μ = 0,18
Kaappia siirretty matka s = 2,4 m
Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Esitetään kaappiin vaikuttavat voimat



$\bar{G}$ = kaapin paino

$\bar{N}$ = lattian tukivoima

$\bar{F}_\mu$ = liukukitka

$\bar{F}$ = vetävä voima

Kun kaappi liikkuu vakionopeudella, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Liikeyhtälöt vaaka- ja pystysuunnassa

$$F_x - F_\mu = 0$$
$$N + F_y - G = 0.$$

Kun esitetään voiman F komponentit kulman α avulla ja kirjoitetaan kitkalle $F_\mu = \mu N$, saadaan

$$F\cos\alpha = \mu N$$
$$N = G - F\sin\alpha.$$

Sijoitetaan alempi yhtälö ylempään ja ratkaistaan F.

$$F\cos\alpha = \mu(mg - F\sin\alpha)$$
$$F\cos\alpha = \mu mg - \mu F\sin\alpha$$
$$F\cos\alpha + \mu F\sin\alpha = \mu mg$$
$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Tällöin kitka on

$$F_\mu = F\cos\alpha = \frac{\mu mg\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$
$$= \frac{0{,}18 \cdot 120\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ + 0{,}18 \cdot \sin 40^\circ}$$
$$= 184{,}09\,\text{N} \approx 180\,\text{N}.$$

b) Kun kaappia siirretään matka *s* vakionopeudella, on kaapin siirtämisen suunnassa tehty työ yhtä suuri kuin kitkan tekemä työ.

$$W = F_x s = F_\mu s = \frac{\mu mg \cos\alpha s}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}$$

$$= \frac{0{,}18 \cdot 120\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 40^\circ \cdot 2{,}4\,\text{m}}{\cos 40^\circ + 0{,}18 \cdot \sin 40^\circ}$$

$$= 441{,}8\,\text{J} \approx 440\,\text{J}.$$

c) Elimistön elintoiminnot tarvitsevat myös energiaa, jolloin elintoimintoihin ja siirtämiseen tarvitaan enemmän energiaa kuin vain siirtämiseen tarvittavaan työhön.

Tehtävä 10.13.

Matka s = 8,2 m

Nousuaika t = 17,0 s

Nostoteho P = 7,8 kW = 7 800 W

a) Palkki liikkuu vakionopeudella, jolloin palkin nopeus on

$$v = \frac{s}{t} = \frac{8{,}2\,\mathrm{m}}{17{,}0\,\mathrm{s}} = 0{,}482\,\mathrm{m/s} \approx 0{,}48\,\mathrm{m/s}.$$

b) Nosturin nostoteho P = Gv = mgv. a-kohdan mukaan nopeus ja teräspalkin massa voi olla

$$m = \frac{Pt}{gs} = \frac{7800\,\mathrm{W} \cdot 17{,}0\,\mathrm{s}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 8{,}2\,\mathrm{m}} = 1648\,\mathrm{kg} \approx 1600\,\mathrm{kg}.$$

Tehtävä 10.14.

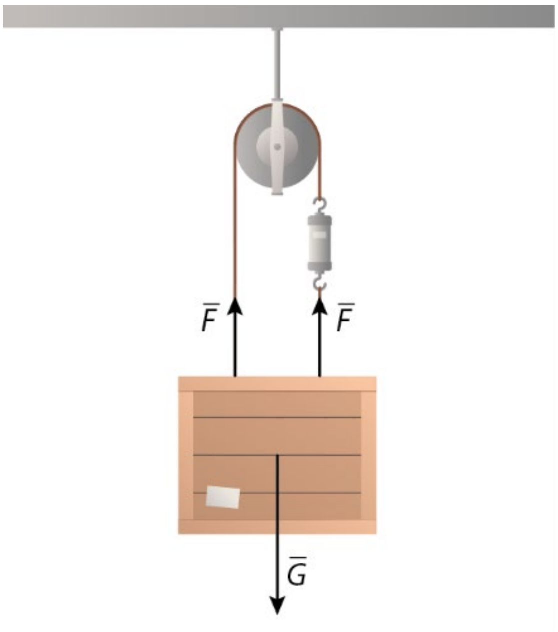
a) Opiskelijan väkipyörässä olevaan köyteen kohdistama voima välittyy nostettavaan kappaleeseen. Opiskelija pystyy nostamaan oman painonsa suuruisen kappaleen. Tällöin opiskelija pystyy nostamaan m = 84 kg tai

$G = mg = 84\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 824{,}04\,\text{N} \approx 820\,\text{N}$ suuruisen kuorman.

b) Kuorman massa m = 6,4 kg

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



$\overline{G}$ = punnuksen paino

$\overline{F}$ = narun punnukseen kohdistama voima

Kun kuorma on paikoillaan, Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Suunnat huomioituna $F + F - G = 0$.

Voima-anturin lukema on

$$F = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{6{,}4\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{2} = 31{,}392\,\text{N} \approx 31\,\text{N}.$$

c) Kuorman massa m = 18 kg

Väkipyörässä oleva naru muuttaa vain voiman suuntaa, joten kulma, millä narusta vedetään ei vaikuta voiman suuruuteen. Narussa vaikuttava voima on yhtä suuri kuin kuorman paino

$F = G = mg = 18\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 176{,}58\,\mathrm{N} \approx 180\,\mathrm{N}.$

Tehtävä 10.15.

Nostomatka s = 2,8 m

Säkin massa m_1 = 25 kg

Lavan massa m_2 = 2,9 kg

Säkin nopeus v = 0,32 m/s

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Kun säkki liikkuu vakionopeudella, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Köydestä on tällöin vedettävä voimalla

$$F = G_1 + G_2 = m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2)g$$
$$= (25\,\text{kg} + 2{,}9\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 273{,}699\,\text{N} \approx 270\,\text{N}.$$

b) Säkin nostamisessa tehdään painovoimaa vastaan työtä. Säkin nostamisessa tehty työ on

$$W = G_1 s + G_2 s = m_1 gs + m_2 gs = (m_1 + m_2)gs$$
$$= (25\,\text{kg} + 2{,}9\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 2{,}8\,\text{m} = 766{,}3572\,\text{J} \approx 770\,\text{J}.$$

c) Säkkiä nostetaan teholla

$$P = Fv = (m_1 + m_2)gv$$
$$= (25\,\text{kg} + 2{,}9\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}32\,\text{m/s} = 87{,}58\,\text{W} \approx 88\,\text{W}.$$

Tehtävä 10.16.

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Lintulaudan massa m = 1,8 kg

Naru kestää voiman F_j = 17 N

a) Lintulauta on paikoillaan, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Huomioidaan suunnat, jolloin

$F + F - G = 0.$

Narussa vaikuttava voima on

$$F = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 1{,}8\,\text{kg}}{2} = 8{,}829\,\text{N} = 8{,}8\,\text{N}.$$

Koska $F_j > F$, niin naru kestää.

b) Lintulauta on paikoillaan, jolloin Newtonin II lain mukaan

$F - G = 0.$

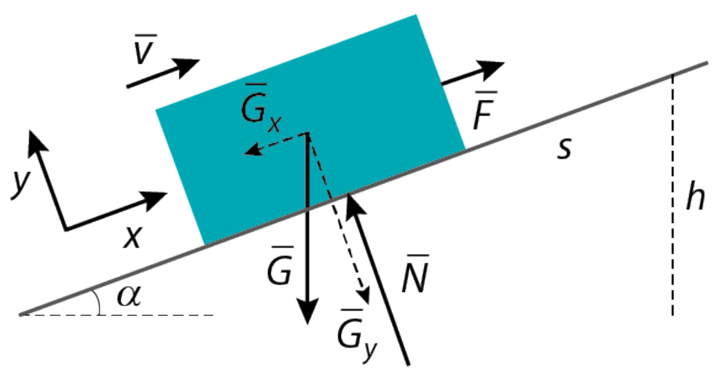
Narussa vaikuttava voima on

$F = G = mg = 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 1{,}8\,\text{kg} = 17{,}658\text{N} = 18\,\text{N}.$

Koska $F_\text{j} < F$, niin naru ei kestä.

Tehtävä 10.17.

a) Tarkastellaan tilannetta voimakuviolla.



$\overline{G} =$ kappaleen paino

$\overline{F} =$ narun kappaleeseen kohdistama voima

s = vedettävän matkan pituus = kaltevan tason pituus

$h =$ korkeus, jolle kappale vedetään

Kun kappaletta vedetään vakionopeudella pitkin kaltevaa tasoa, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Kun huomioidaan suunnat, saadaan

x-suunnassa: $F - G_x = 0$
y-suunnassa: $N - G_y = 0.$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan

$$F = G_x = G\sin\alpha = G\frac{h}{s}.$$

Jos nostokorkeus *h* pysyy samana, niin mitä pidempi on kaltevan tason pituus *s*, sitä pienempi on vetämiseen tarvittava voima *F*.

b) Jos vastusvoimia ei oteta huomioon, on nostamiseen tarvittava työ painovoimaa vastaan tehtyä työtä, joka ei riipu matkasta, vaan pelkästään nostokorkeudesta. Tällöin sanonta voisi olla: ”Nostamisessa tehty työ ei riipu nostoreitistä, vaan ainoastaan nostokorkeudesta ja kappaleen painosta.”

c) Kun kitka huomioidaan, vaikuttaa tason ja kappaleen välillä kitkavoima. Tällöin pitää tehdä työtä myös kitkavoiman tekemän työn verran nostotyön lisäksi. Mitä pidempi on kaltevan tason pituus, sitä suurempi on kitkan tekemä työ. Sanonta ei siis pidä tällöin paikkaansa.

Tehtävä 10.18.

Kun noustaan portaissa ylöspäin, tehdään painovoimaa vastaan työtä. Nousuteho pystysuunnassa on

$$P=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{\Delta mgh}{\Delta t}.$$

Elimistön toimintoihin tarvitaan energiaa, mikä lisää elimistön tehoa.

Tehtävä 10.19.

a) Palikan painon tason suuntaisen komponentin suunta on sama kuin palikan liikkeen suunta. Palikan ja kiskon välisen kitkan suunta on palikan liikkeen suuntaan nähden vastakkainen.

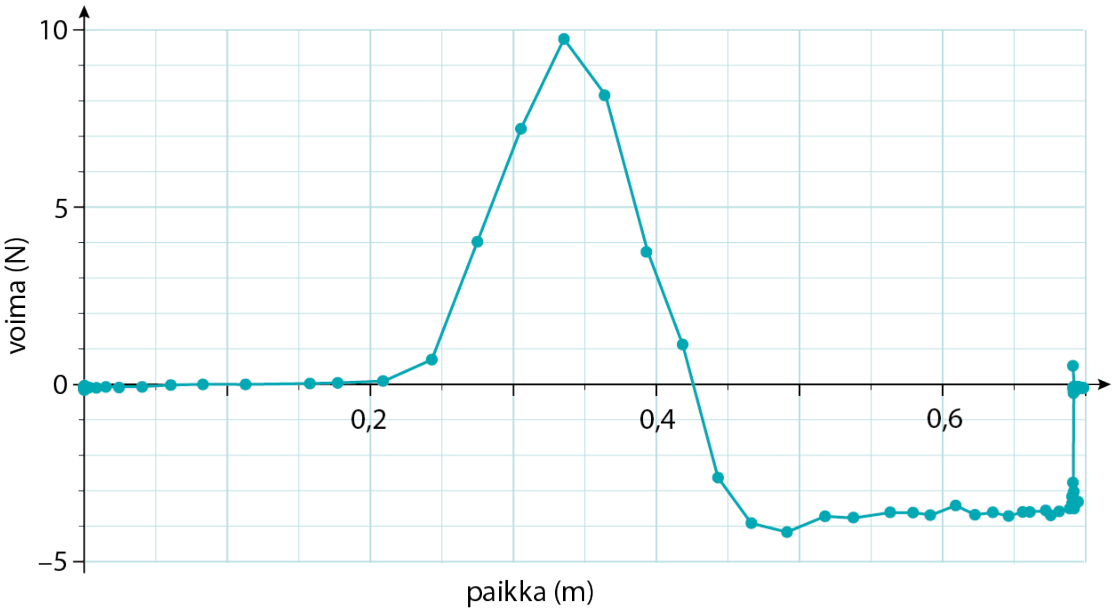
b) Koska palikka lähtee liikkeelle ja palikan nopeus kasvaa, palikan painon tason suuntainen komponentti on suurempi kuin kitka.

   Voiman tekemä työ on $W = F\Delta x$. Mitä suurempi vaikuttava voima on, sitä suuremman työn se tekee. Nyt liikkeen suuntaisen voiman tekemä työ on suurempi kuin kitkan tekemä työ.

c) Mitä jyrkemmin kisko on asetettu, sitä pienempi on tukivoima, jolla kisko tukee palikkaa. Kitkan suuruus riippuu tukivoimasta $F_\mu = \mu N$, joten kitka on sitä pienempi, mitä pienempi tukivoima on. Toisaalta jyrkkää tasoa pitkin palikka liukuu lyhyemmän matkan, koska lähtökorkeuden ja loppukorkeuden ero on joka liu'ussa yhtä suuri. Kitkan tekemä työ on $W = F_\mu\Delta x$, joten mitä jyrkempi taso on, sitä pienempi on kitkan tekemä työ.

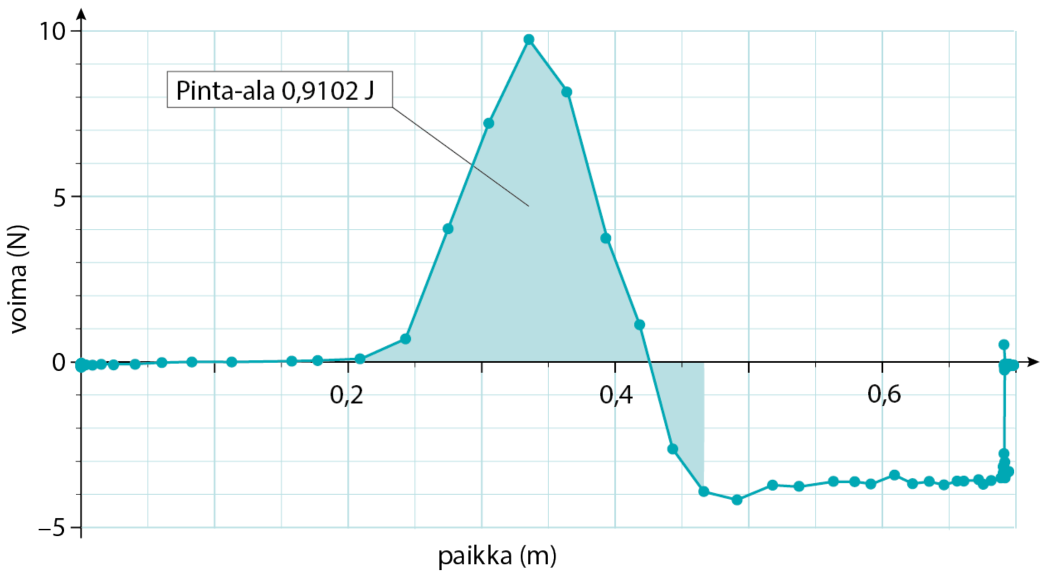
Tehtävä 10.20.

a)



b) Kokonaisvoiman tekemä työ saadaan (*x*, *F*)-koordinaatiston kuvaajan ja akselien rajoittaman alueen fysikaalisena pinta-alana. Alussa laatikon nopeus kasvaa, ja sen kiihtyvyys sekä siihen vaikuttava kokonaisvoima ovat positiivisia. Kun työntävä voima pienenee, kokonaisvoima muuttuu negatiiviseksi, ja laatikon liike alkaa hidastua. Kun voima ei enää muutu, käsi on irronnut laatikosta, ja laatikkoon vaikuttaa vain liikkeen suunnalle vastakkainen liukukitka.

Määritetään tämän alueen fysikaalinen pinta-ala.

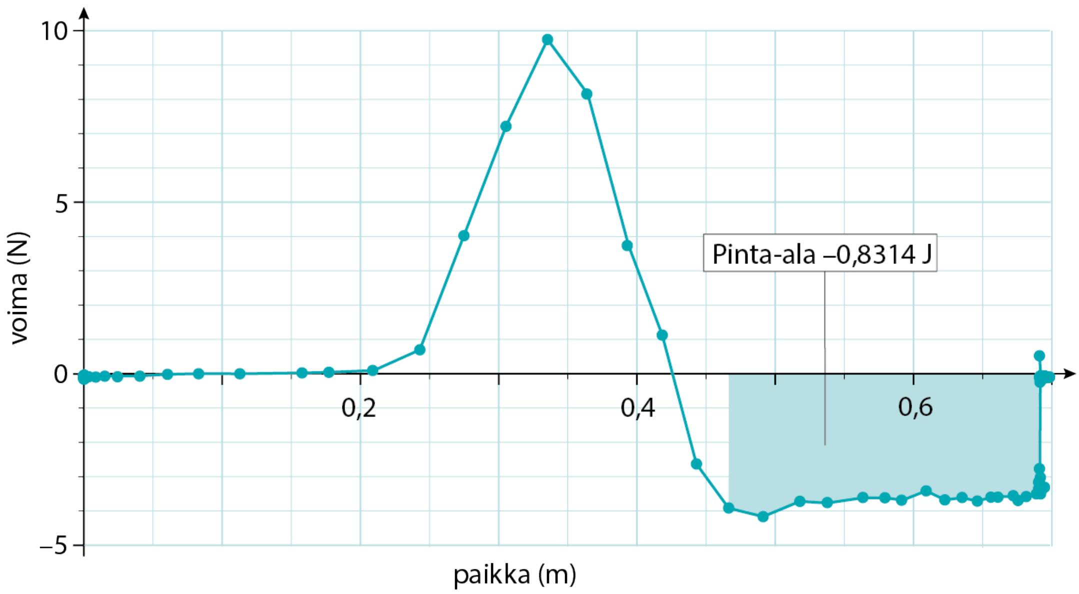


Tehty työ on W = 0,9102 J ≈ 0,91 J.

Kokonaisvoima on summa kaikista laatikkoon vaikuttavista voimista. Pystysuunnassa laatikkoon vaikuttaa sen paino ja alustan tukivoima. Vaakasuunnassa laatikkoon vaikuttaa alussa käden työntävä voima ja koko liu’un ajan liukukitka.

Laatikkoa työntävän voiman tekemä työ on positiivinen ja kitkan tekemä työ on negatiivinen. Kokonaisvoiman tekemä työ on näiden töiden summa.

c) Kun laatikko on irronnut kädestä, laatikkoon vaikuttaa liikkeen suunnassa vain liukukitka (ilmanvastus voidaan olettaa merkityksettömäksi). Kitkan tekemä työ saadaan kuvaajan ja vaaka-akselin rajoittaman alueen fysikaalisesta pinta-alasta. Määritetään pinta-ala.



Kitkan tekemä työ, kun laatikko on irronnut kädestä
W = –0,8314 J ≈ –0,83 J.

Tehtävä 10.21.

Pulkan nopeus v = 0,65 m/s

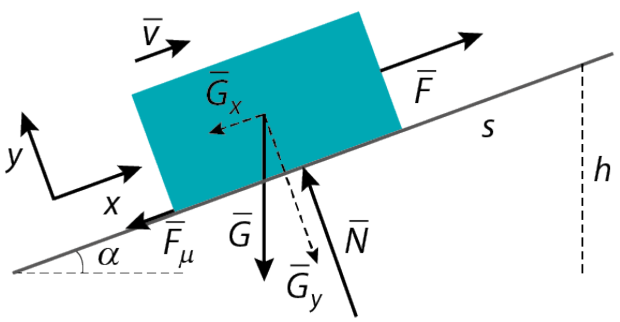
Kaltevan tason kulma $\alpha = 11^\circ$

Pulkkailijan massa m = 15 kg

Liukukitkakerroin μ = 0,056

Mäen korkeus h = 3,5 m

a) Piirretään tilanteesta voimakuvio.



$\bar{G} =$ kappaleen paino

$\bar{F} =$ narun kappaleeseen kohdistama voima

$\bar{F}_\mu =$ pulkan ja mäen välinen liukukitka

Kun pulkkailijaa vedetään vakionopeudella, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Kun huomioidaan suunnat, saadaan

x-suunnassa: $F - G_x - F_\mu = 0$

y-suunnassa: $N - G_y = 0$.

Esitetään voimien komponentin kulmien avulla ja tarkastellaan vetävää voimaa.

x-suunnassa: $F = G\sin\alpha + F_\mu$

y-suunnassa: $N = G\cos\alpha$.

Kitkalle $F_\mu = \mu N$ ja $G = mg$. Sijoitetaan alempi yhtälö ylempään, jolloin vetäväksi voimaksi saadaan

$$\begin{aligned}
F &= G\sin\alpha + \mu G\cos\alpha \\
&= mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha \\
&= mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \\
&= 15\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot (\sin 11^\circ + 0{,}056 \cdot \cos 11^\circ) \\
&= 36{,}1665\,\text{N} \approx 36\,\text{N}.
\end{aligned}$$

b) Vetävän voiman tekemä työ on

$$W = Fs = F\frac{h}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{mgh(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{15\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 3{,}5\,\text{m} \cdot (\sin 11^\circ + 0{,}056 \cdot \cos 11^\circ)}{\sin 11^\circ}$$

$$= 663{,}4011\,\text{J} \approx 660\,\text{J}.$$

Syvennä

Tehtävä 10.22.

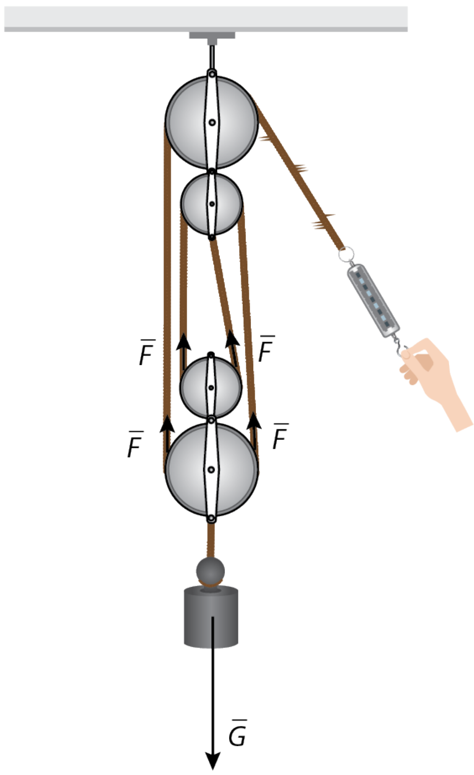
a) Punnuksen massa m = 1,0 kg

Punnuksen siirtymä h = 10 cm

Punnuksen paino jakautuu kuvan mukaisesti neljälle köydelle. Jousivaaka kannattelee systeemiä voimalla, joka on neljäsosa punnuksen painosta.

$$F=\frac{G}{4}=\frac{mg}{4}=\frac{1{,}0\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4}=2{,}4525\,\text{N}\approx 2{,}5\,\text{N}$$

Jousivaa'an lukema on sama kuin köyden jännitysvoima eli 2,5 N.



$\overline{G}$ = punnuksen paino

$\overline{F}$ = köyden jännitysvoima

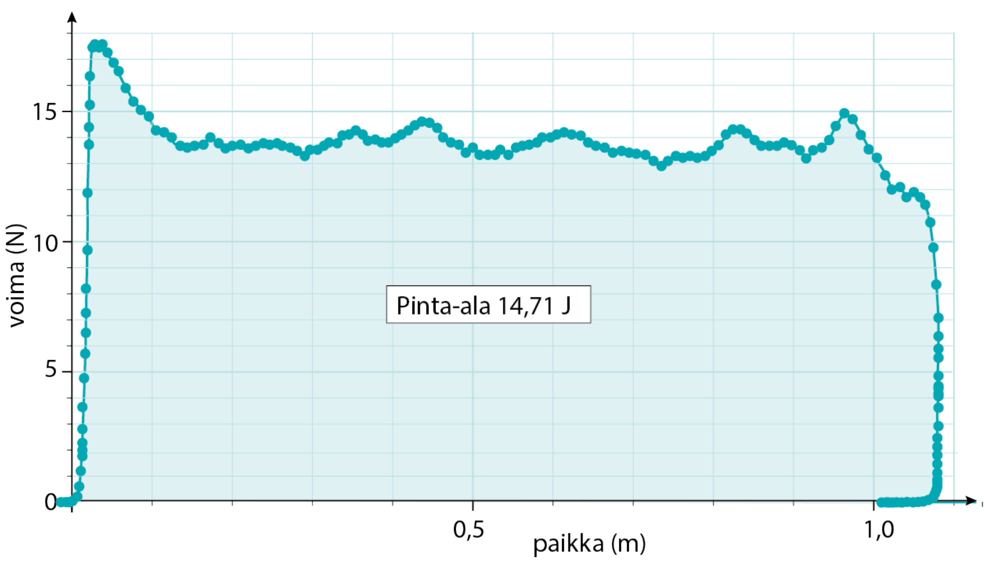
b) Nostamisessa tehty työ on
W = *Gh* = *Fs*, jossa *s* on langan vedon pituus

$$s = \frac{Gh}{F} = \frac{Gh}{\frac{G}{4}} = 4h = 4 \cdot 10\,\text{cm} = 40\ \text{cm}.$$

Tehtävä 10.23.

a) Voiman tekemä työ saadaan, kun määritetään (x, F)-koordinaatistossa olevan kuvaajan ja akselin rajoittaman alueen fysikaalinen pinta-ala. (1 p)

Esitetään voima-anturin kappaleeseen kohdistama voima paikan suhteen eli kuvataan mittaustulokset (x, F)-koordinaatistossa. Määritetään kuvaajan ja akselin rajaaman alueen fysikaalinen pinta-ala.



(kuvaajan akselit oikein päin 1 p,

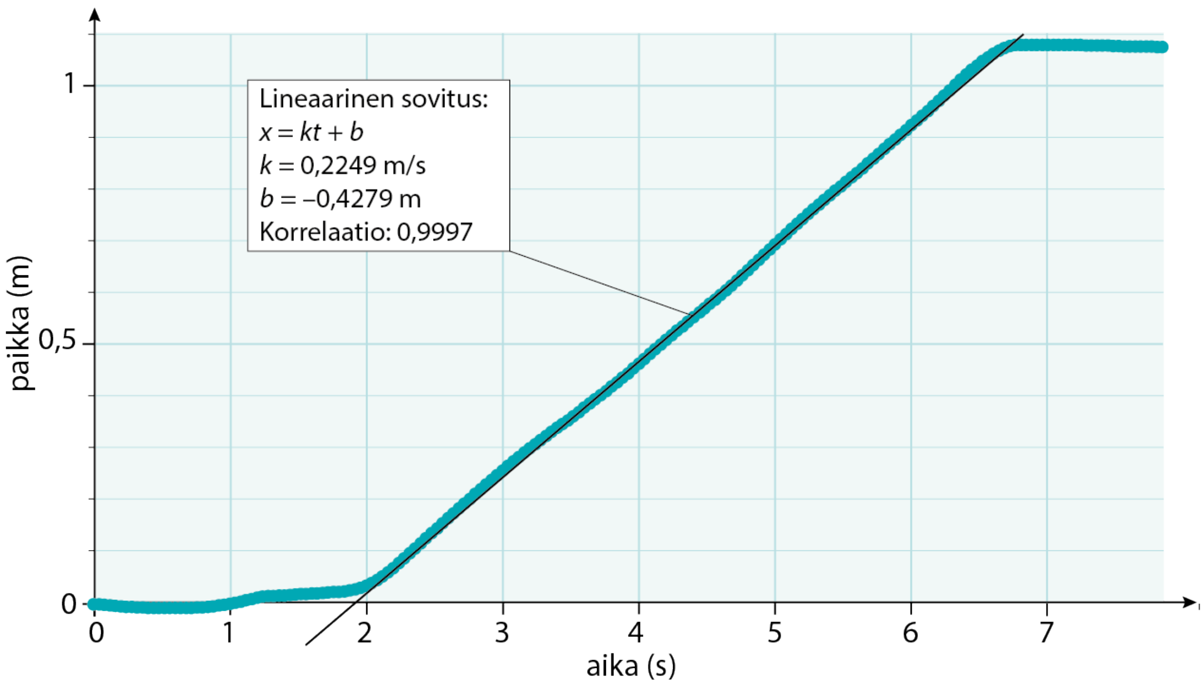
mittauspisteet näkyvät kuvaajassa 1 p,

pinta-alan määritys 1 p)

Voiman tekemä työ W = 14,71 J ≈ 15 J. (1 p)

b) Kappaleen liikuttelemiseen tarvittava teho saadaan yhtälöllä $P = Fv$. (1 p)

Laaditaan mittaustuloksista kuvaaja (t, x)-koordinaatistoon. Kappale liikkuu vakionopeudella, kun kuvaaja on nouseva suora. Tutkitaan, millä aikavälillä kappale liikkui vakionopeudella ja määritetään sitten kappaleen nopeus (t, x)-koordinaatistossa kulkevan suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta.



(kuvaaja 2 p, sovitus kuvaajan tasaisesti nousevaan osaan 1 p)

Kappaleen nopeus on $v = 0{,}2249$ m/s.

Määritetään (x, F)-koordinaatistoon laaditusta kuvaajasta voimien keskiarvo tasaisen liikkeen ajalta. (1 p). Voiman keskiarvo eli vetovoima tasaisen liikkeen aikana on keskimäärin F = 13,81 N. (1 p)

TAI

Valitaan (x, F)-koordinaatistoon laaditusta kuvaajasta voiman tasaisen liikkeen ajalta. Voiman arvo vetovoima tasaisen liikkeen aikana on F = 13,81 N. (1 p)

Vetämiseen tarvittava teho

$P = Fv = 13{,}81\ \text{N} \cdot 0{,}2249\ \text{m/s} = 3{,}105869\ \text{W} \approx 3{,}1\ \text{W}$. (1 p)

c) Jos kappaletta olisi vedetty kallistettua pöytää pitkin ylöspäin, työ olisi ollut suurempi kuin vaakasuoran pöydän tapauksessa. (1 p)

Vetämiseen olisi tarvittu enemmän voimaa, sillä kappaleeseen olisi tällöin kohdistunut kitkan lisäksi myös kappaleen paino (1 p)

Koska matka olisi ollut yhtä pitkä sekä vaakasuoralla että kallistetulla pöydällä, myös vetävän voiman tekemä työ $W = F\Delta x$ olisi ollut myös suurempi. (1 p)

11. Mekaaninen energia

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 11.1.

Väittämät a), c), d) ja f) ovat oikein.

Korjaukset väittämiin:

b) Kappaleen liike-energia on verrannollinen kappaleen nopeuden neliöön.

e) Kappaleen liike-energia ei voi olla negatiivinen, koska nopeuden neliö ja kappaleen massa eivät voi olla negatiivisia.

g) Tuulivoimalassa liikkuvan ilman liike-energiaa muuntuu turbiinin lapojen pyörimisen liike-energiaksi.

Tehtävä 11.2.

Muuttohaukan massa m = 980 g = 0,980 kg

Muuttohaukan nopeus v = 30 m/s

Lentokorkeus h = 1 500 m

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Muuttohaukan liike-energia on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}980\,\text{kg} \cdot (30\,\text{m/s})^2 = 441\,\text{J} \approx 440\,\text{J}.$$

b) Muuttohaukan potentiaalienergia on

$$\begin{aligned} E_\text{p} &= mgh = 0{,}980\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 1500\,\text{m} \\ &= 14\,420{,}7\,\text{J} \approx 14\,400\,\text{J}. \end{aligned}$$

Tehtävä 11.3

Lapsen massa $m_1 = 25$ kg

Aikuisen massa $m_2 = 75$ kg

Tornin korkeus h = 72 m

Putouskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Potentiaalienergiat ovat

$$E_{\mathrm{p1}} = m_1 gh = 25\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 72\,\mathrm{m} = 17658\ \mathrm{J} \approx 18\,\mathrm{kJ}$$

$$E_{\mathrm{p2}} = m_2 gh = 75\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 72\,\mathrm{m} = 52974\ \mathrm{J} \approx 53\,\mathrm{kJ}.$$

Lapsen potentiaalienergia on kasvanut 18 kJ ja aikuisen 53 kJ.

b) Koska potentiaalienergia E_p riippuu suoraan verrannollisesti kappaleen massasta, kappaleiden potentiaalienergioiden suhde on sama kuin kappaleiden massojen suhde

$$\frac{E_\mathrm{p2}}{E_\mathrm{p1}} = \frac{m_2gh}{m_1gh} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{75\,\mathrm{kg}}{25\,\mathrm{kg}} = 3.$$

Aikuisen potentiaalienergia on kolme kertaa suurempi kuin lapsen potentiaalienergia, kun he saapuvat tornin huipulle.

Tehtävä 11.4

Hyppääjän massa m = 70 kg

Hyppytornin korkeus h = 10 m

Putoamiskiihtyvyys maanpinnan läheisyydessä
g = 9,81 m/s^2

a) Hyppääjän potentiaalienergia E_p riippuu putoamiskiihtyvyydestä ja hyppääjän massasta sekä korkeudesta

$$E_\mathrm{p} = mgh = 70\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10\,\mathrm{m}$$
$$= 6867\,\mathrm{J} \approx 6900\,\mathrm{J}.$$

Hyppääjän potentiaalienergia on 6 900 J.

b) Hyppääjän alkunopeus v_a = 0 m/s

Hyppääjän potentiaalienergia muuntuu liike-energiaksi, jolloin

$$E_p = \Delta E_k = E_{kl} - E_{ka}.$$

Koska hyppääjän nopeus alussa oli nolla, myös liike-energia oli nolla, joten

$$E_p = E_{kl}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_l^2$$

$$v_l = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10\,\text{m}} = 14{,}00714\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Hyppääjä osuu veteen nopeudella 14 m/s.

Tehtävä 11.5

Merkitään voimistelijan alkunopeutta v_a = 5,0 m/s.

Työperiaatteen mukaan voimistelijaan vaikuttavien voimien tekemä työ W on yhtä suuri kuin voimistelijan liike-energian muutos: $W = \Delta E_k$. Koska voimistelijan nopeus on hypyn korkeimmassa kohdassa nolla, myös liike-energia E_{kl} on nolla.

Toisin sanoen $W = -E_{ka}$. Painovoiman tekemä työ on negatiivinen, koska painovoiman suunta on alaspäin ja hypyn suunta on ylöspäin. Kun ilmanvastus oletetaan nollaksi, painovoima on ainoa vastusvoima. Tällöin $W = Gs = mgh$. Niinpä

$$mgh = \frac{1}{2}mv_a^2$$

$$h = \frac{v_a^2}{2g} = \frac{\left(5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1{,}274\,\text{m} \approx 1{,}3\,\text{m}.$$

Hypyn korkeus on 1,3 m.

Tehtävä 11.6

Pudotuskorkeus h = 180 m

Vettä virtaa sekunnissa $m = 116 \cdot 10^6$ kg

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Veden potentiaalienergian muutos sekunnissa on

$$\begin{aligned}\Delta E_\mathrm{p} &= \Delta mgh \\ &= 116 \cdot 10^6\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 180\ \mathrm{m} \\ &= 204{,}8328 \cdot 10^9\ \mathrm{J} \approx 205\ \mathrm{GJ}.\end{aligned}$$

Veden potentiaalienergian muutos on 205 GJ sekunnissa. Potentiaalienergia pienenee veden pudotessa voimalaitoksen läpi.

Tehtävä 11.7.

Kelkkailijan massa m_1 = 65 kg

Potkukelkan massa m_2 = 10 kg

Potkukelkan nopeus alussa v_1 = 22 km/h

Potkukelkan nopeus lopussa v_2 = 0 km/h

a) Liikettä vastustavat voimat, esimerkiksi kitka ja ilmanvastus, pysäyttävät potkukelkan liikkeen.

b) Työperiaatteen mukaisesti vastusvoimien tekemä työ muuttaa kelkan liike-energiaa. Kelkka on lopussa paikallaan, joten liike-energia lopussa on nolla.

$$
\begin{aligned}
W &= \Delta E_\mathrm{k} = \cancel{E}_\mathrm{kl} - E_\mathrm{ka} = -E_\mathrm{ka} \\
&= -\frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 = -\frac{1}{2}(65\,\mathrm{kg} + 10\,\mathrm{kg})\left(\frac{22}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \\
&= -1400{,}4629\,\mathrm{J} \approx -1{,}4\,\mathrm{kJ}.
\end{aligned}
$$

c) Kokonaisvoima on kitkan ja ilmanvastuksen summa, koska tilanteessa ei vaikuta muita voimia. Kitka ja ilmanvastus pysäyttävät kelkan liikkeen. Samalla liike-energia muuntuu alustan, potkukelkan jalasten ja ilman sisäenergiaksi. Tästä saadaan ratkaistua kokonaisvoiman suuruus.

$$W = \Delta E_k$$
$$W = \cancel{E}_{kl} - E_{ka}$$
$$-Fs = -E_{ka}$$
$$F = \frac{\frac{1}{2}mv_a^2}{s} = \frac{\frac{1}{2}(65\,\text{kg} + 10\,\text{kg})\left(\frac{22}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{27\,\text{m}} = 51{,}869\,\text{N} \approx 52\,\text{N}.$$

Liu’un aikana kelkkaan vaikuttaa keskimäärin 53 N:n suuruinen voima liikkeelle vastakkaiseen suuntaan.

Tehtävä 11.8.

a) Tuulivoimalan tehoa mallinnetaan yhtälöllä

$P=\frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3$, jossa

η on voimalan hyötysuhde,

ρ on ilman tiheys,

r on tuuliturbiinin lavan pituus ja

v on tuulen nopeus.

Teho siis riippuu tuulen nopeuden kolmannesta potenssista, $P \sim v^3$.

b) Tuulivoimalan hyötysuhde η = 0,50

Ilman tiheys ρ = 1,225 kg/m^3

Lavan pituus r = 60 m

Tuulen nopeus v = 15 m/s

Lasketaan tuulivoimalan teho

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 0{,}50\cdot 1{,}225\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot\pi\cdot\left(60\,\text{m}\right)^2\cdot\left(15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^3 \\ &= 11689669{,}914\ \text{W}\approx 12\,\text{MW}.\end{aligned}$$

Tuulivoimalan teho on 12 megawattia.

Sovella

Tehtävä 11.9.

Rullalaudan ja lehtipuhaltimen massa m = 7,2 kg

Rullalaudan nopeus alussa v_1 = 0,65 m/s

Rullalaudan nopeus kiihdytyksen jälkeen v_2 = 1,8 m/s

a) Lehtipuhaltimen tekemä työ muuttaa rullalaudan liike-energiaa. Lehtipuhaltimen tekemä työ on

$$\begin{aligned}W &= \Delta E_k = E_{kl} - E_{ka}\\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 7{,}2\,\text{kg}\cdot((1{,}8\,\text{m/s})^2 - (0{,}65\,\text{m/s})^2)\\ &= 10{,}143\,\text{J} \approx 10\,\text{J}.\end{aligned}$$

b) Lehtipuhaltimen keskimääräinen voima saadaan lehtipuhaltimen tekemän työn avulla. Voiman tekemä työ muuttaa rullalaudan liike-energiaa

$$W = \Delta E_k$$

$$Fs = E_{kl} - E_{ka}$$

$$F = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}{s} = \frac{\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)}{s}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 7{,}2\,\text{kg} \cdot ((1{,}8\,\text{m/s})^2 - (0{,}65\,\text{m/s})^2)}{5{,}4\,\text{m}}$$

$$= 1{,}878\,\text{N} \approx 1{,}9\,\text{N}.$$

Voima on liikkeen suuntaan.

Tehtävä 11.10.

Moottoripyörän ja -pyöräilijän massa m = 550 kg

Moottoripyörän nopeus alussa v_1 = 60 km/h

Moottoripyörän nopeus lopussa v_2 = 80 km/h

a) Verrataan lopputilanteen liike-energiaa alkutilanteeseen.

$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2}{\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{\left(\frac{80}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\left(\frac{60}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 1{,}778.$$

Liike-energia kasvaa 78 %.

b) Merkitään, että lopputilanteen liike-energia on yhtä suuri kuin alkutilanteen liike-energia kolminkertaisena ja ratkaistaan yhtälöstä loppunopeus v_2.

$$\begin{aligned}
E_{kl} &= 3E_{ka} \\
\frac{1}{2}mv_2^2 &= 3 \cdot \frac{1}{2}mv_1^2 \\
v_2^2 &= 3 \cdot v_1^2 \\
v_2 &= \sqrt{3} \cdot v_1 \\
&= \sqrt{3} \cdot 60 \text{km/h} \\
&= 103{,}92 \text{km/h} \approx 104 \text{km/h}.
\end{aligned}$$

Liike-energia on alkutilanteeseen verrattuna kolminkertainen, kun nopeus on 104 km/h.

Tehtävä 11.11.

a) Kuulan potentiaalienergian muutos nostossa on

$\Delta E_\mathrm{p} = mg\Delta h$.

Kuulat nostetaan yhtä korkealle, joten Δh on molemmilla sama. Myös putoamiskiihtyvyys g on sama kuulille.

Kuulan potentiaalienergian muutos on suoraan verrannollinen kappaleen massaan. Koska kuulan 1 massa on puolet kuulan 2 massasta, myös kuulan 1 potentiaalienergia on puolet kuulan 2 potentiaalienergiasta.

b) Oletetaan, että ilmanvastuksen vaikutus on merkityksetön. Tällöin kuulan potentiaalienergia muuntuu kokonaan kuulan liike-energiaksi.

$$E_\mathrm{p} = E_k$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Koska massat supistuvat yhtälöistä pois, voidaan päätellä, että kuulan massa ei vaikuta nopeuteen, jolla kuula osuu lattiaan. Vain pudotuskorkeus vaikuttaa.

Tehtävä 11.12.

Pudotuskorkeus h = 30 m

Virtausnopeus kuutiometreinä $\frac{\Delta V}{\Delta t} = 750\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

Veden tiheys ρ = 1 000 kg/m^3,

a) Kun vesi putoaa voimalaitoksen kohdalla, painovoima tekee putoamisessa työtä. Työ kasvattaa veden liike-energiaa, eli veden nopeus kasvaa samalla kun vesi virtaa kohti alhaalla sijaitsevaa voimalan turbiinia. Toisin sanoen veden potentiaalienergiaa muuntuu veden liike-energiaksi. Kun vesi kulkee edelleen turbiinin läpi, veden liike-energiaa muuntuu turbiinin liike-energiaksi.

b) Veden virtausnopeus kilogrammoina saadaan ratkaistua, kun veden tiheys tunnetaan

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = 750\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 750\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Vuorokaudessa vettä kulkee voimalaitoksessa

$$\Delta m = 750\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 3600\,\frac{\text{s}}{\text{h}} \cdot 24\text{ h} = 6{,}48 \cdot 10^{10}\text{ kg}.$$

c) Veden potentiaalienergian muutos vuorokaudessa on

$$E_\mathrm{p} = mgh = 6{,}48 \cdot 10^{10}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 30\ \mathrm{m}$$
$$= 1{,}907064 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J} \approx 19\ \mathrm{TJ}.$$

Yhden vuorokauden aikana koskessa virtaavalla vedellä voisi tuottaa energiaa 19 TJ, jos vesivoimalan hyötysuhde olisi 100 %.

Tehtävä 11.13.

Pudotuskorkeus h = 6,1 m

Virtausaika t = 7,5 h

Virranneen veden tilavuus V = $9{,}7 \cdot 10^6$ m^3

Veden tiheys $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m^3

a) Veden potentiaalienergian muutos 7,5 tunnin aikana on

$$E_\mathrm{p} = mgh = \rho V g h$$

$$= 1{,}0 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^3 \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 6{,}1\ \mathrm{m}$$

$$= 580{,}4577 \cdot 10^9\ \mathrm{J} \approx 580\ \mathrm{GJ}.$$

b) Voimalaitoksen hyötysuhde $\eta = 0{,}42$

Voimalaitos ottaa energiaa veden potentiaalienergiasta ja siirtää energiaa sähköverkkoon. Hyötysuhteen avulla.

$$\eta = \frac{E_{\text{anto}}}{E_{\text{otto}}} = \frac{E_{\text{a}}}{E_{\text{o}}} = \frac{P_{\text{a}}}{P_{\text{o}}}.$$

Antotehoksi saadaan

$$P_{\text{a}} = \eta P_{\text{o}}.$$

Tehon ja energian välillä on yhtälö *E* = *Pt*. Vesivoimalaitoksen antoteho on

$$\begin{aligned} P_{\text{a}} &= \eta \frac{E_{\text{o}}}{t} = \eta \frac{\rho V g h}{t} \\ &= 0{,}42 \cdot \frac{1{,}0 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \cdot 9{,}7 \cdot 10^6\ \text{m}^3 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 6{,}1\,\text{m}}{7{,}5 \cdot 3600\,\text{s}} \\ &= 9{,}029 \cdot 10^6\ \text{W} \approx 9{,}0\,\text{MW}. \end{aligned}$$

c) Omakotitalon energian tarve E_t = 18 000 kWh

Voimalaitoksen tuottama energia on yhtä suuri kuin omakotitalon vastaanottama energia

$$E_\mathrm{a} = E_\mathrm{t}$$
$$P_\mathrm{a}t = E_\mathrm{t}.$$

Aika, joka tarvitaan omakotitalon energian tuottoon b-kohdan tehon tuloksen mukaan

$$t = \frac{E_\mathrm{t}}{P_\mathrm{a}} = \frac{18\,000\,000\,\mathrm{Wh}}{9{,}029 \cdot 10^6\ \mathrm{W}} = 1{,}9935\,\mathrm{h} \approx 2{,}0\ \mathrm{h}.$$

Tehtävä 11.14.

Liukumismatkan pitäisi kasvaa lähtökorkeuden kasvaessa. Jos vastusvoimat ovat liukumisen aikana merkityksettömät, on liukumismatka suoraan verrannollinen kirjan lähtökorkeuteen, $s \sim h$.

Perustelu:

Kaltevalla tasolla liukuessa kirjan potentiaalienergian muutos on $\Delta E_p = mgh$.

Potentiaalienergia muuntuu liu'un aikana liike-energiaksi, mutta samalla vastusvoimien tekemä työ pienentää liike-energiaa niin, että liu'un lopuksi kirja pysähtyy ja sen liike-energia on nolla.

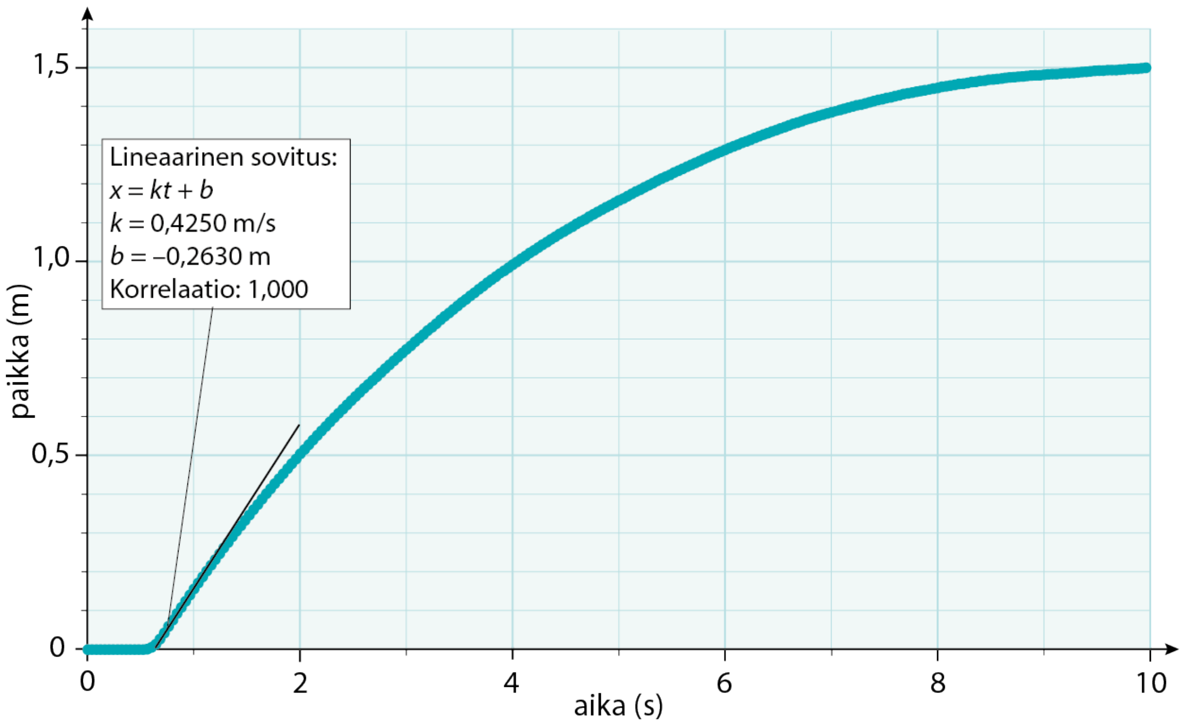
Työperiaatteen mukaan $W = \Delta E_k$ eli $-Fs = \Delta E_k$. Nyt kaikki liike-energia oli peräisin potentiaalienergiasta, joten

$$-Fs = -mgh$$

$$s = \frac{mg}{F}h$$ eli $s \sim h$.

Tehtävä 11.15.

a)



Vaunun nopeus saadaan (t, x)-koordinaatistoon piirretyn tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta. Nopeus alussa oli v_1 = 0,4250 m/s ≈ 0,43 m/s.

Mittauksen lopussa paikan kuvaaja on vaakasuora, joten vaunun nopeus on nolla, v_2 = 0 m/s.

b) Vaunun liike-energian muutos on

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{kl}} - E_{\mathrm{ka}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{l}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{a}}^2 = \frac{1}{2}m(v_{\mathrm{l}}^2 - v_{\mathrm{a}}^2).$$

Sijoitetaan a-kohdassa saadut tulokset nopeuksille. Saadaan liike-energian muutokseksi

$$\begin{aligned}\Delta E_{\mathrm{k}} &= \frac{1}{2}m(v_{\mathrm{l}}^2 - v_{\mathrm{a}}^2)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 1{,}29\,\mathrm{kg}\cdot((0\,\mathrm{m/s})^2 - (0{,}4250\,\mathrm{m/s})^2)\\ &= -0{,}1165\,\mathrm{J} \approx -0{,}12\,\mathrm{J}.\end{aligned}$$

c) Vastusvoimien tekemä työ muuttaa vaunun liike-energiaa. Työperiaatteen mukaan $W = \Delta E_\mathrm{k}$.

Vastusvoimien keskimääräinen suuruus on

$$Fs = \Delta E_\mathrm{k}$$
$$F = \frac{\Delta E_\mathrm{k}}{s}.$$

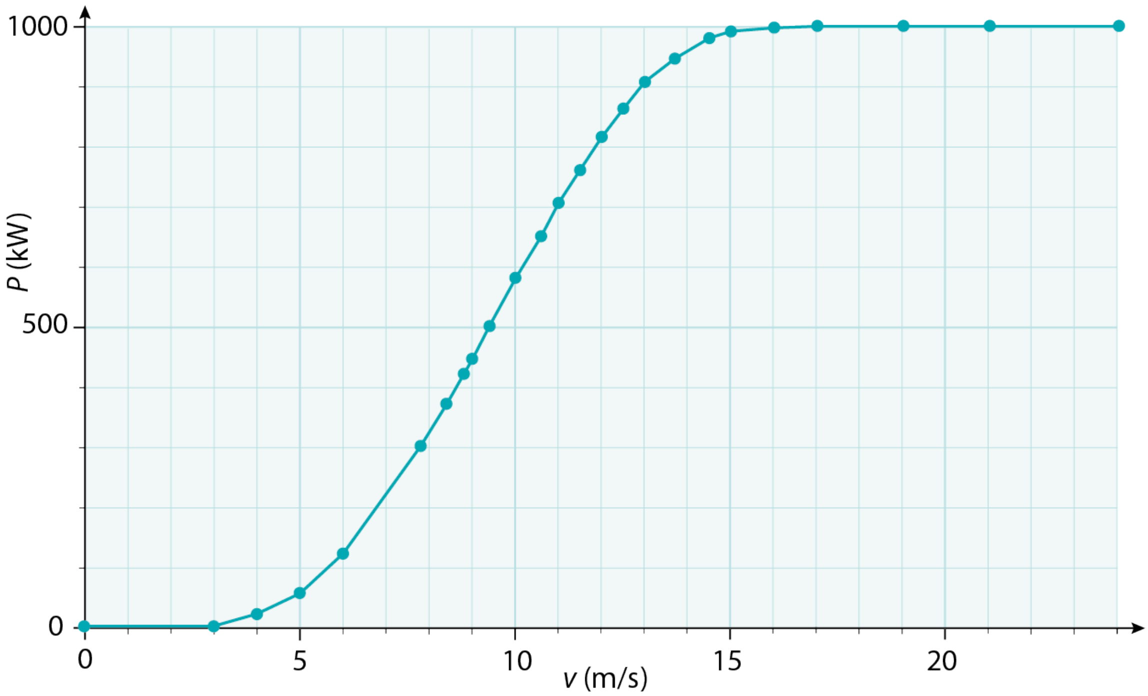
Kuvaajan perusteella vaunu liikkui työnnön jälkeen matka s = (1,50 − 0,03) m. b-kohdan mukaan liike-energian muutos on –0,1165 J. Vastusvoimien keskimääräinen suuruus on

$$F = \frac{\Delta E_\mathrm{k}}{s} = \frac{-0{,}1165\,\mathrm{J}}{1{,}47\,\mathrm{m}} = -0{,}07925\,\mathrm{N} \approx -79\,\mathrm{mN}.$$

Miinusmerkki tuloksessa tarkoittaa, että vastusvoimien suunta on vaunun alkuperäistä liikkeen suuntaa vastaan.

Tehtävä 11.16.

a)



b) Ilman tiheys ρ = 1,23 kg/m^3

Tuulivoimalan lapojen pituus on r = 54,2 m

Kuvaajasta interpoloituna tuulivoimalan sähköteho tuulen nopeudella 7,0 m/s on P_1 = 221 kW.

Tuulivoimalan teho

$$P = \frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3.$$

Ratkaistaan tuulivoimalan hyötysuhde

$$\eta = \frac{2P}{\rho\pi r^2 v^3}.$$

Hyötysuhde tuulen nopeudella 7,0 m/s on

$$\eta = \frac{2P}{\rho\pi r^2 v^3} = \frac{2 \cdot 221000\ \mathrm{W}}{1{,}23\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \pi \cdot (54{,}2\ \mathrm{m})^2 (7{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^3} = 0{,}1135 \approx 11\,\%.$$

c) Tuulipuiston teho $P = 14{,}7\ \text{MW}$

Tuotantoaika $t = 13\ \text{h}$.

Tuulipuiston tuottama energia 13 h:n aikana

$$E = Pt$$

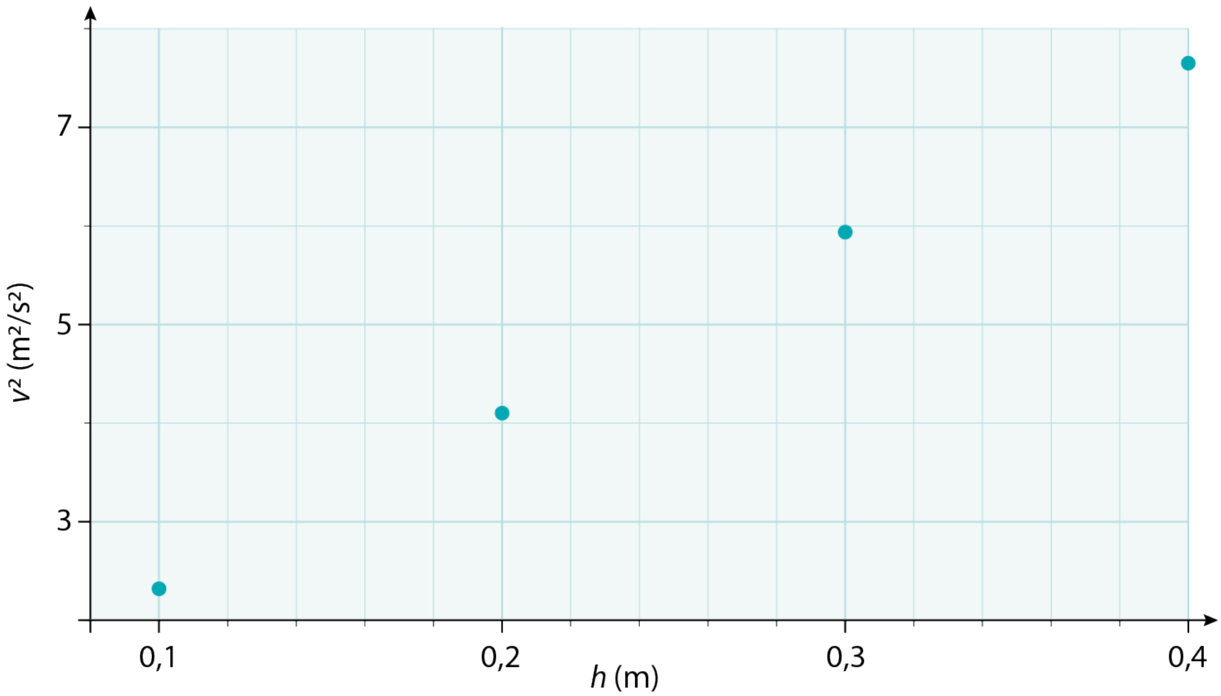
$$= 14{,}7 \cdot 10^6\ \text{W} \cdot 13 \cdot 3\,600\ \text{s}$$

$$= 6{,}8796 \cdot 10^{11}\ \text{J} = 690\ \text{GJ}.$$

Tehtävä 11.17.

a) ja b)

h (m)	v (m/s)	v^2(m^2/s^2)
0,10	1,522	2,316
0,20	2,030	4,121
0,30	2,446	5,978
0,40	2,777	7,712



c) Mekaanisen energian säilymisperiaatteella, kun palikka lähtee paikoiltaan ja potentiaalienergian nollataso valoportin kohdalla on nolla

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{p}} &= E_{\mathrm{k}} \\
mgh &= \frac{1}{2}mv^2 \\
gh &= \frac{1}{2}v^2.
\end{aligned}
$$

Loppunopeuden neliö on suoraan verrannollinen lähtökorkeuteen, v^2 = vakio · h.

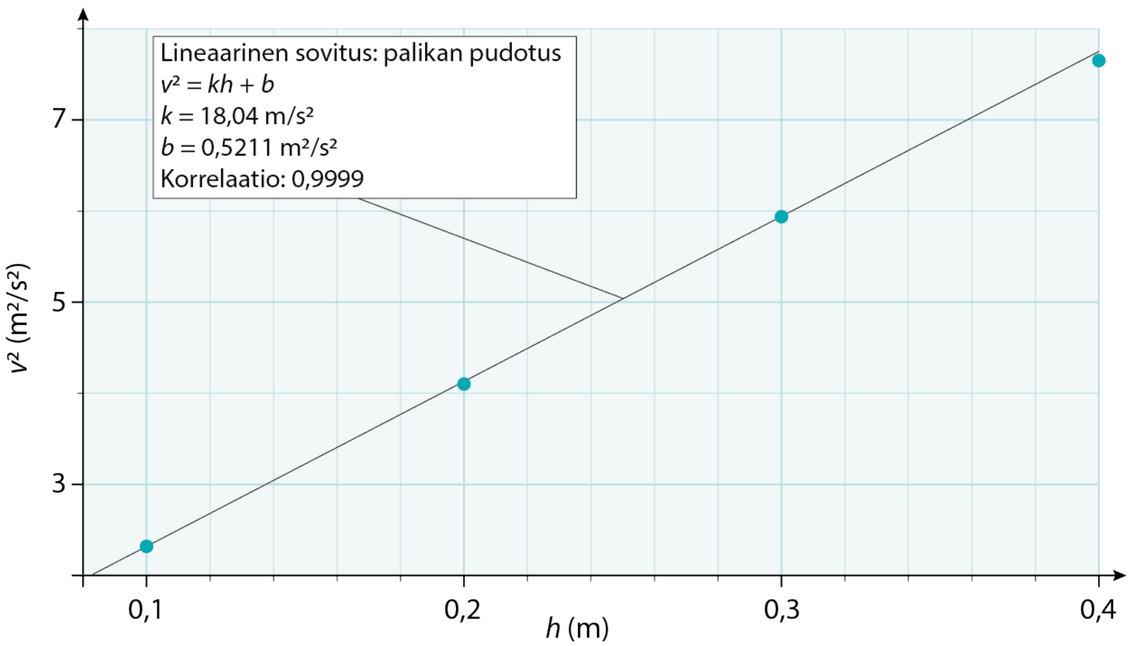
d) c-kohdan mekaanisen energian säilymisperiaatteella

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Saadaan

$$v^2 = 2gh.$$

(h, v^2)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta saadaan $2g$. Määritetään fysikaalinen kulmakerroin.



Kulmakertoimen avulla saadaan putoamiskiihtyvyys,

$$2g = 18{,}04\,\mathrm{m/s^2}$$

$$g = \frac{18{,}04\,\mathrm{m/s^2}}{2} = 9{,}02\,\mathrm{m/s^2}.$$

Tehtävä 11.18.

a) Vesivoimala tuottaa energiaa tuulivoimalaa tasaisemmin ja vesivoimalan energiantuotantoa voidaan säädellä patoluukkujen avulla. Tuulivoimala tuottaa sähköä vain, kun tuulee sopivasti. Molempien näiden sähköntuotantotapojen etu on se, että ne eivät aiheuta hiilidioksidipäästöjä käytön aikana.

Tuulivoimala voidaan rakentaa paikkaan, jossa sähköä ei ole, esimerkiksi saaristoon. Vesivoimala tarvitsee aina virtaavan veden ja veden potentiaalienergian muutoksen. Siksi vesivoimala vaatii patoaltaita, jotka aiheuttavat ympäristöhaittaa yläjuoksulle. Vastaavasti alajuoksulla virtaava vesi aiheuttaa joen varsien maa-alueiden vajoamista jokiuomiin. Tuulivoimaloiden käytössä ei ole tätä ongelmaa.

b) Kun vesi putoaa, painovoima tekee työtä. Veden liike-energia ja nopeus kasvavat, kun vesi putoaa kohti alhaalla sijaitsevaa voimalan turbiinia.

c) Veden kaikkea mekaanista energiaa ei pystytä ottamaan talteen vedestä, sillä veden liike-energia ei täysin muunnu voimalaitoksen turbiinin liike-energiaksi, vaan turbiinista ulos tulevalla vesimassalla on vielä liike-energiaa. Turbiiniin ja generaattoriin vaikuttaa myös ulkoisia voimia (esim. kitka), joiden tekemä työ kasvattaa laitteiden rakenteiden ja ympäristön sisäenergiaa. Osa energiasta siirtyy siis ympäristöön, joka lämpenee.

Syvennä

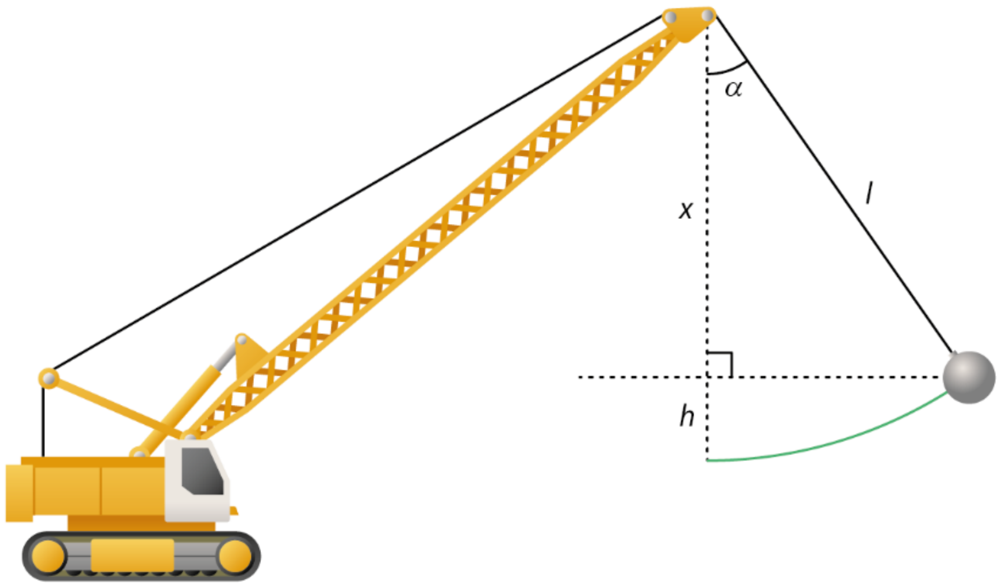
Tehtävä 11.19.

Purkupallon massa m = 450 kg

Heilahduskulma α = 35°

Vaijerin pituus l = 12 m

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2



a) Kuvan avulla saadaan $\cos\alpha = \dfrac{x}{l}$, josta $x = \cos\alpha$.

Purkupallon korkeus muuttuu

$$h = l - x$$
$$h = l(1-\cos\alpha)$$
$$h = 12\,\text{m}\cdot(1-\cos 35°)$$
$$= 2{,}170\,\text{m} \approx 2{,}2\,\text{m}.$$

b) Purkupallon potentiaalienergia on suurimmillaan heilahduksen yläasemassa.

$$E_\text{p} = mgh = mg(l-x)$$
$$= mgl(1-\cos\alpha)$$
$$= 450\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 12\,\text{m}\cdot(1-\cos 35°)$$
$$= 9580{,}24\,\text{J} \approx 9600\,\text{J}$$

c) Jos potentiaalienergia muuntuisi kokonaisuudessaan liike-energiaksi,

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2.$$

Silloin kuulan nopeus on suurimmillaan alimmassa asemassa

$$\cancel{m}gl(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$v^2 = 2gl(1-\cos\alpha)$$

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$$

$$= \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 12\,\mathrm{m}(1-\cos 35^\circ)}$$

$$= 6{,}525\,\mathrm{m/s} \approx 6{,}5\,\mathrm{m/s}.$$

Tehtävä 11.20.

a) Tuulienergian käyttö ei aiheuta käytön aikana hiilidioksidipäästöjä. Tuulivoimalan huonona puolena on, että tuulisähköntuotanto vaihtelee ajallisesti. Siksi tuulivoiman yhteyteen tarvitaan sähkönvarastointitekniikkaa tai täydentäviä sähköntuotantotapoja.

b) Tuulivoimalan teho on suoraan verrannollinen tuulen nopeuden kolmanteen potenssiin, eli $P \sim v^3$.

Kun tuulen nopeus kaksinkertaistuu, tuulivoimalan teho $2^3 = 8$- kertaistuu.

c) Tuulivoimalan tehoa voidaan mallintaa kaavalla

$P = \eta \frac{E_\text{k}}{\Delta t} = \eta \frac{\frac{1}{2}\rho \pi r^2 v^3 \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = \frac{1}{2}\eta \rho \pi r^2 v^3$, jossa η on voimalan hyötysuhde, ρ on ilman tiheys, r on tuuliturbiinin lavan pituus ja v on tuulen nopeus. Teho on suoraan verrannollinen ilman tiheyteen. Ilmaa voidaan mallintaa ideaalikaasuna, jonka tiheys on kääntäen verrannollinen kaasun lämpötilaan $\rho \sim \frac{1}{T}$. Jos ilmanpaine ei muutu, niin tuulivoimalan teho pienenee, kun ilman lämpötila kasvaa.

Tehtävä 11.21.

a) Ruokasuolakiteen muodostuessa Na-atomi luovuttaa elektronipilvensä uloimman elektronin Cl-atomin elektronipilven uloimpaan osaan, jolloin muodostuu Na^{+}- ja Cl^{-}-ionit, joiden välillä on sähköinen vetovoima.

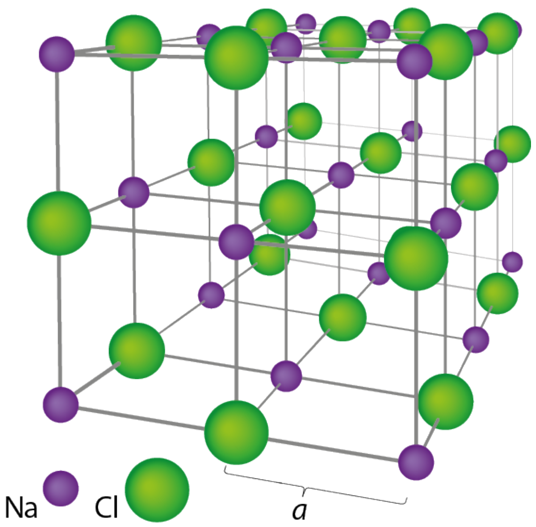
b) Ioniparin sähkömagneettinen potentiaalienergia voidaan ratkaista kaavan

$E_{p12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ avulla.

Kaavassa k on Coulombin vakio k = 8,98755·109 Nm^2/C^2. Oletetaan että ionien etäisyys r_{12} on sama. Kun ionien varaukset q_1 ja q_2 ovat samanmerkkiset, varausten tulo on positiivinen. Jos ionien varaukset ovat erimerkkiset, potentiaalienergiasta tulee negatiivinen, eli pienempi kuin ensimmäisessä tapauksessa.

c) Natriumkloridikiteen rakenneosien eli Na^+- ja Cl^--ionien joukon sähkömagneettinen potentiaalienergia on tärkeä osa kiteen sisäenergiaa rakenneosien liike-energian (lämpöliikkeen) lisäksi. Koska natrium- ja kloridi-ionit ovat erimerkkiset, niiden muodostaman ioniparin potentiaalienergia on negatiivinen. Natriumkloridikiteen sähkömagneettinen potentiaalienergia on näin ollen pienempi kuin vastaavien erillisten ionien potentiaalienergiat yhteensä. Siksi NaCl-kiteitä esiintyy luonnossa.

Atomimallista nähdään, että kiteen keskellä olevalla Na^+-ionilla on sidos kuuteen viereiseen Cl^--ioniin. Seuraavaksi lähimmät ionit ovat Na^+-ioneja, joita on 12 kappaletta. Tämän takia ensimmäisten termien kertoimet ovat −6 ja +12. Termien nimittäjät kuvaavat naapuri-ionien etäisyyttä Na^+-ionista. Lähimmät Cl^--sidosionit sijaitsevat etäisyydellä *a*, ja seuraavat Na^+-ionit sijaitsevat etäisyydellä $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$



Tehtävä 11.22.

Vesivoimalan veden pudotuskorkeus h = 8,2 m

Veden virtaama $\frac{\Delta V}{\Delta t} = 460\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$

Tuulivoimalan teho P_{t} = 5,6 MW

Tuulivoimalan lavan pituus r = 89 m

a) Veden tiheys ρ_{v} = 1 000 kg/m^3

Vettä virtaa sekunnissa

$m = \rho_{\mathrm{v}} V = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 460\,\mathrm{m}^3 = 460000\,\mathrm{kg}.$ (1 p)

Veden potentiaalienergian muutos padossa

$E_{\mathrm{p}} = mgh$ = 460 000 kg · 9,81 m/s^2 · 8,2 m

= 37 003 320 J = 37 MJ. (2 p)

b) Jos kaikki veden potentiaalienergia muuntuu veden liike-energiaksi, on

$$E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{k}}$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \quad \text{(1 p)}$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Veden nopeus putoamisen jälkeen

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 8{,}2\,\mathrm{m}} = 12{,}68\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(kaava ratkaistu oikein 1 p, nopeuden vastaus oikein 1 p)

c) Tuulivoimalan hyötysuhde η = 0,41

Ilman tiheys ρ_i = 1,23 kg/m^3

Tuulivoimalan teho on $P=\frac{1}{2}\eta\rho_\mathrm{i}\pi r^2 v^3$.

Tällöin 5,6 MW tuottoteholla pitää tuulen nopeuden olla

$$v^3=\frac{2P}{\eta\rho_\mathrm{i}\pi r^2}$$

$$\begin{aligned}v&=\sqrt[3]{\frac{2P}{\eta\rho_\mathrm{i}\pi r^2}}\\&=\sqrt[3]{\frac{2\cdot 5{,}6\cdot 10^6\ \mathrm{W}}{0{,}41\cdot 1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot\pi\cdot(89\,\mathrm{m})^2}}\\&=9{,}6279\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=9{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.\end{aligned}$$

(kaavan ratkaisu oikein 1 p, nopeuden vastaus oikein 1 p)

d) Tarkastellaan vesivoimalan tehoa tuulivoimalan tehoon nähden, jolloin saadaan tarvittavien tuulivoimaloiden lukumäärä *n*.

Oletetaan, että voimaloiden hyötysuhteet η ovat yhtä suuret, jolloin *n* kappaletta tuulivoimalan tehoa on yhtä suuri kuin vesivoimalan teho.

$nP_\mathrm{t} = P_\mathrm{v}$. (1 p)

Vesivoimalan teho

$$\begin{aligned} P_\mathrm{v} &= \frac{\Delta E_\mathrm{v,anto}}{\Delta t} = \frac{\eta \Delta E_\mathrm{v,otto}}{\Delta t} = \frac{\eta \Delta mgh}{\Delta t} \\ &= \frac{\Delta V \eta \rho_\mathrm{v} gh}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \eta \rho_\mathrm{v} gh. \end{aligned} \quad (2\ \mathrm{p})$$

Tuulivoimalan teho on

$$P_\mathrm{t} = \frac{1}{2}\eta\rho_\mathrm{i}\pi r^2 v^3.$$

Tarvittavien tuulivoimaloiden määrä

$$n = \frac{P_\mathrm{v}}{P_\mathrm{t}} = \frac{\frac{\Delta V}{\Delta t}\cancel{\eta}\rho_\mathrm{v} g h}{\frac{1}{2}\cancel{\eta}\rho_\mathrm{i}\pi r^2 v^3} = \frac{\frac{\Delta V}{\Delta t}\rho_\mathrm{v} g h}{\frac{1}{2}\rho_\mathrm{i}\pi r^2 v^3}$$

$$= \frac{460\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \cdot 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 8{,}2\,\mathrm{m}}{\frac{1}{2} \cdot 1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \pi \cdot (89\,\mathrm{m})^2 \left(8{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^3}$$

$$= 3{,}67179 \approx 3{,}7.$$

Tuulivoimaloita tarvitaan 4 kappaletta tuottamaan yhtä suuri teho.

(lauseke supistetussa muodossa 2 p, vastaus 1 p)

12. Mekaniikan energiaperiaate

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 12.1.

Väittämät a), b) ja c) ovat oikein.

Korjaukset väittämiin:

d) Mekaaninen energia pienenee, kun kitka aiheuttaa kappaleiden lämpenemistä.

f) Ajonopeuden puolittuessa liike-energia pienenee neljäsosaan, jolloin jarrutusmatkakin lyhenee likipitäen neljäsosaan alkuperäisestä.

Tehtävä 12.2.

Valitaan punnus tarkasteltavaksi systeemiksi, jonka mekaaninen energia säilyy. Heilurin langan ja muiden ulkoisten voimien yhteisvaikutus punnukseen on pieni, kun punnus päästetään heilumaan. Heilumista voidaan siis mallintaa mekaanisen energian säilymislain avulla

$E_{pa} + E_{ka} = E_{pl} + E_{kl}$,

jossa $E_{ka} = 0$ ja $E_{pl} = 0$, koska punnuksella ei ole liike-energia alussa eikä potentiaalienergiaa lopussa.

Saadaan yhtälö, josta lähtökorkeus voidaan ratkaista.

$$E_{pa} = E_{kl}$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$
$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Heilurilla on eniten energiaa heilahduksen korkeimmassa kohdassa. Jotta loppunopeus olisi v = 2,0 m/s, on lähtökorkeuden oltava

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(2{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}20387\,\mathrm{m} \approx 20\,\mathrm{cm}$$

Punnuksen nopeus on enintään 2,0 m/s, jos se lähetetään 20 cm:n korkeudelta.

Tehtävä 12.3.

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Vaunujen nostokorkeus h = 24 m

a) Kun vaunuja vedetään vaijerin avulla radan lakipisteeseen, työtä tekevät vaijerin jännitysvoima, painovoima, kitka ja ilmanvastus.

b) Vaunujen teoreettinen maksiminopeus voidaan laskea mekaanisen energian säilymislain avulla, jonka mukaan vaunun potentiaalienergia muuntuu kokonaan vaunun liike-energiaksi. Alkutilanteessa vaunu on paikallaan, joten $E_{k1} = 0$ ja lopputilanteessa vaunu on sovitulla nollatasolla eli maan pinnan tasolla, joten $E_{p2} = 0$. Ratkaistaan yhtälöstä loppunopeus v_2.

$$\cancel{E}_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + \cancel{E}_{p2}$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 24\,\text{m}} = 21{,}70\,\text{m/s} \approx 22\,\text{m/s}.$$

c) Vastusvoimien eli kitkan ja ilmanvastuksen tekemä työ muuntaa osan vaunun potentiaalienergiasta ilman, vaunun ja kiskojen sisäenergiaksi. Tämän vuoksi vaunun liike-energia on pienempi kuin liike-energian teoreettinen maksimi. Näin ollen myös vaunun nopeus on pienempi.

Tehtävä 12.4.

Muuttohaukan massa m = 980 g

Muuttohaukan nopeus alussa v_1 = 25 m/s

Muuttohaukan nopeus lopussa v_2 = 350 km/h

Lentokorkeus h_1 = 1 500 m

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Koska vastusvoimat jätetään huomiotta, muuttohaukan mekaaninen energia säilyy syöksyn aikana. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi korkeus, jolla muuttohaukka saavuttaa huippunopeuden 350 km/h. Näin ollen E_{p2} = 0. Mekaanisen energian säilymislain mukaan haukan alkutilanteen mekaaninen energia muuntuu kokonaan haukan liike-energiaksi.

$$E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+\cancel{E_{p2}}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2+\cancel{m}gh=\frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2$$

$$\frac{1}{2}v_1^2+gh=\frac{1}{2}v_2^2.$$

Ratkaistaan yhtälöstä sovitun nollatason ja lähtökorkeuden etäisyys *h*.

$$h = \frac{\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)}{g}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{350}{3{,}6}\mathrm{m/s}\right)^2 - (25\mathrm{m/s})^2\right)}{9{,}81\mathrm{m/s^2}} = 449{,}9\mathrm{m}.$$

Nopeus saavutetaan korkeudella
$h_2 = h_1 - h = 1\,500\ \mathrm{m} - 449{,}9\ \mathrm{m} = 1\,050\ \mathrm{m} \approx 1100\ \mathrm{m}$

b) Tilanteessa vaikuttava vastusvoima on ilmanvastus. Jos ilmanvastuksen vaikutus otetaan huomioon, syöksymatkan pituus kasvaa, sillä ilmanvastuksen tekemä työ muuntaa osan muuttohaukan alkutilanteen mekaanisesta energiasta ilman ja muuttohaukan sisäenergiaksi.

Tehtävä 12.5.

Rullaluistelijan alkunopeus v_1 = 0,35 m/s

Rullaluistelijan nopeus mäen alaosassa v_2 = 6,2 m/s

Mäen korkeus h = 3,1 m

Rullaluistelijan massa m = 72 kg

Tarkastellaan tilannetta mekaniikan energiaperiaatteella. Sovitaan potentiaalienergian nollatasoksi mäen alaosa. Tällöin

$$E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{p1}} - W = E_{\mathrm{k2}} + \cancel{E_{\mathrm{p2}}}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - W = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Vastusvoimien tekemä työ on

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 72\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}35\,\mathrm{m/s})^2 + 72\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 3{,}1\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}\cdot 72\,\mathrm{kg}\cdot(6{,}2\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 810{,}162\,\mathrm{J} \approx 810\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Tehtävä 12.6.

Kun lautasen etäisyys lattiasta pienenee ja lautasen vauhti kasvaa, lautasen potentiaalienergiaa muuntuu lautasen liike-energiaksi, Ilmanvastus tekee työtä ja muuntaa pienen osan lautasen mekaanisesta energiasta ilman molekyylien ja lautasen pinnan sisäenergiaksi. Kun lautanen osuu lattiaan, lattian tukivoima tekee työtä ja muuntaa osan mekaanisesta liike-energiasta lautasen sisäenergiaksi. Atomien välisiä sidoksia katkeaa ja lautanen menee rikki. Osa lattian tukivoiman tekemästä työstä muuntuu lautasen palasten mekaaniseksi liike-energiaksi.

Tehtävä 12.7.

Kirpun massa m_k = 0,65 mg = 0,65 · 10^{-3} g = 0,65 · 10^{-6} kg
Hypyn korkeus h = 0,15 m
Ihmisen massa m_i = 95 kg.

a) Kirpun potentiaalienergia

$$\begin{aligned} E_\mathrm{p} &= m_\mathrm{k}gh \\ &= 0{,}65 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}15\,\mathrm{m} \\ &= 0{,}9565\,\mu\mathrm{J} \approx 0{,}96\,\mu\mathrm{J} \end{aligned}$$

b) Oletetaan, että hypyn alussa liike-energia on yhtä suuri kuin potentiaalienergia hypyn lakipisteessä. Mekaanisen energian säilymislain mukaan kirpun liike-energia muuntuu kirpun potentiaalienergiaksi

$$E_k = E_p$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m_\mathrm{k}}v^2 = \cancel{m_\mathrm{k}}gh$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gh.$$

Kirppu irtosi maasta nopeudella

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}15\mathrm{m}} = 1{,}71552\mathrm{m/s} \approx 1{,}7\mathrm{m/s}.$$

c) Kirpun energiantuotto kilogrammaa kohden on

$$\frac{E}{m_\mathrm{k}} = \frac{\cancel{m_\mathrm{k}}gh}{\cancel{m_\mathrm{k}}} = gh = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}15\,\mathrm{m} = 1{,}4715\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}.$$

Jos ihmisellä olisi sama energiantuotto kilogrammaa kohden kuin kirpulla, ihmisen energiantuotto kilogrammaa kohden olisi

$$E_\mathrm{i} = \frac{E}{m_\mathrm{k}}m_\mathrm{i}.$$

Koko ihmisen tuottama energia muuntuu potentiaalienergiaksi. Ratkaistaan yhtälöstä hypyn korkeus *h*.

$$E_\mathrm{i} = E_\mathrm{p}$$

$$\frac{E}{m_\mathrm{k}}\cancel{m_\mathrm{i}} = \cancel{m_\mathrm{i}}gh$$

$$h = \frac{E}{m_\mathrm{k}g} = \frac{\cancel{g}h}{\cancel{g}} = h = 0{,}15\,\mathrm{m}.$$

Sovella

Tehtävä 12.8.

Kuulan massa *m* = 50,0 g

Kuulan nopeus lopussa *v* = 5,2 m/s

Kuulan lähtökorkeus *h* = 0,45 m

a) Valitaan vedenpinnan taso potentiaalienergian nollatasoksi. Mekaanisen energian säilymislain mukaan kuulan alkutilanteen liike-energia ja potentiaalienergia muuntuvat kokonaan kuulan lopputilanteen liike-energiaksi.

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + \cancel{E_{p2}}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2$$

$$v_1^2 - 2gh = v_2^2.$$

Kuulan lähtönopeus oli

$$v_1 = \sqrt{v_2^2 - 2gh} = \sqrt{(5{,}2\,\mathrm{m/s})^2 - 2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}45\,\mathrm{m}}$$

$$v_1 = 4{,}2674\,\mathrm{m/s} \approx 4{,}3\,\mathrm{m/s}.$$

b) Kuulan maksimikorkeus voidaan laskea mekaanisen energian säilymislain avulla, kun oletetaan, että kuulalla lakipisteessä oleva potentiaalienergia muuntuu kokonaan kuulan liike-energiaksi.

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^{\,2}$$

Kuulan lakipisteen korkeus oli

$$h = \frac{\frac{1}{2}v_2^2}{g} = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{(5{,}2\,\text{m/s})^2}{2\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2} = 1{,}378\,\text{m} \approx 1{,}4\,\text{m}.$$

Tehtävä 12.9.

Hiihtäjän massa m = 65 kg.

Hiihtäjän nopeus alussa v_1 = 6,0 m/s

Ladulla olevien havujen pituus s = 0,48 m.

Suksen ja havujen välinen kitkakerroin μ = 0,37

Mäen korkeus h = 3,2 m

a) Hiihtäjään vaikuttavat voimat havupatjan päällä.

Havujen ja suksien välisen kitkan tekemä työ on

$$W = Fs = F_\mu s.$$

Hiihtäjä liukuu tasaisella pinnalla, jolloin $N = G$ ja $F_\mu = \mu N$.

Kitkan tekemä työ on

$$\begin{aligned} W &= \mu Ns = \mu Gs = \mu mgs \\ &= 0{,}37 \cdot 65\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}48\,\text{m} \\ &= 113{,}2466\,\text{J} \approx 110\,\text{J}. \end{aligned}$$

b) Työperiaatteen mukaan kitkan tekemä työ pienentää hiihtäjän liike-energiaa.

$$W = \Delta E_{\mathrm{k}}$$

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - W.$$

Hiihtäjän nopeus havupatjan jälkeen on

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{W}{\frac{1}{2}m}} = \sqrt{v_1^2 - \frac{2W}{m}} = \sqrt{v_1^2 - \frac{2\mu \cancel{m} gs}{\cancel{m}}}$$

$$= \sqrt{v_1^2 - 2\mu gs}$$

$$= \sqrt{(6{,}0\,\mathrm{m/s})^2 - 2 \cdot 0{,}37 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}48\,\mathrm{m}}$$

$$= 5{,}7022\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 5{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

c) Hiihtäjä liukuu jäistä alamäkeä, jolloin voidaan olettaa, että hiihtäjän potentiaalienergia muuntuu kokonaan hiihtäjän liike-energiaksi.

Valitaan mäen alaosa potentiaalienergian nollatasoksi, jolloin mekaanisen energian säilymislain mukaan

$$
\begin{aligned}
E_{k1} + E_{p1} &= E_{k2} + \cancel{E}_{p2} \\
\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + \cancel{m}gh &= \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 \\
v_2^2 &= v_1^2 + 2gh \\
v_2 &= \sqrt{v_1^2 + 2gh} \\
&= \sqrt{(5{,}7022\,\mathrm{m/s})^2 + 2\cdot 9{,}81\mathrm{m/s^2}\cdot 3{,}2\,\mathrm{m}} \\
&= 9{,}76213\,\mathrm{m/s} \approx 9{,}8\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 12.10.

a) Kun ensimmäinen kivi on saavuttanut lakipisteensä, se alkaa pudota. Koska mekaaninen energia säilyy, putoavalla kivellä on heittokohdassa yhtä suuri nopeus alaspäin kuin sen alkunopeus oli ylöspäin. Näin ollen molemmilla kivillä on heittokohdassa sama nopeus. Siten kivillä on myös yhtä paljon mekaanista energiaa. Jos potentiaalienergian nollatasoksi valitaan veden pinta, niin kivien mekaaninen energia muuntuu lopulta kokonaan liike-energiaksi. Kivillä on siten yhtä suuri nopeus, kun ne osuvat veden pintaan.

b) Ylöspäin heitetyllä kivellä osa energiasta muuntuu ilmanvastuksen tekemän työn takia muuksi kuin potentiaalienergiaksi, kun kivi liikkuu ylöspäin. Kun kivi tulee lakipisteestä alaspäin, ilmanvastus tekee työtä kiven liikettä vastaan ja pienentää kiven liike-energiaa. Kun kivi on heittäjän kohdalla menossa alaspäin, on kiven liike-energia pienempi kuin alaspäin heitetyn kiven liike-energia. Ilmanvastuksen tekemä työ on muuntanut osan kiven liike-energiasta esimerkiksi ilman molekyylien liike-energiaksi. Tällöin alaspäin heitetty kivi osuu suuremmalla nopeudella vedenpintaan kuin ylöspäin heitetty kivi.

Jos jyrkänne on riittävän korkea, niin molemmat kivet saavuttavat rajanopeuden ennen osumistaan vedenpintaan. Silloin kivien nopeudet ovat yhtä suuret.

Tehtävä 12.11.

Pyöräilijän nopeus mäen päällä $v_1 = 18\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{18}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Mäen korkeus h = 12 m

Pyöräilijän nopeus mäen alla $v_2 = 28{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{28{,}4}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Pyöräilijän massa m = 81 kg

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Mäen pituus s = 78 m

a) Valitaan mäen alaosa potentiaalienergian nollatasoksi. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$E_{\text{k1}} + E_{\text{p1}} - W = E_{\text{k2}} + E_{\text{p2}}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - W = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Vastusvoimien tekemä työ

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 81\,\text{kg}\cdot\left(\frac{18}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 81\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 12\,\text{m} - \frac{1}{2}\cdot 81\,\text{kg}\cdot\left(\frac{28{,}4}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \\ &= 8027{,}32\,\text{J} \approx 8{,}0\,\text{kJ}. \end{aligned}$$

b) Vastusvoimien suuruus saadaan työn avulla ja a-kohdan tuloksen mukaan

$$W = Fs$$

$$F = \frac{W}{s} = \frac{8027{,}32\ \text{J}}{78\ \text{m}} = 102{,}91\ \text{N} \approx 100\ \text{N}.$$

c) Tarkastellaan tilannetta mekaniikan energiaperiaatteella ja määritetään pyöräilijän loppunopeus

$$E_{\text{k1}} + E_{\text{p1}} - W = E_{\text{k2}} + E_{\text{p2}}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - W$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh - \frac{2Fs}{m}$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh - \frac{2Fs}{m}}.$$

Loppunopeuteen siis vaikuttaa alkunopeus, mäen korkeus, mäen pituus ja vastusvoimien suuruus. Mitä jyrkempi mäki aluksi on, sitä suuremman nopeuden pyöräilijä saa mäen alkuosassa. Vastusvoimista ilmanvastus muuttuu, kun mäen jyrkkyys muuttuu. Mitä suurempi pyöräilijän nopeus on, sitä suurempi on ilmanvastus. Mitä jyrkempi on mäki, sitä suurempi on koko matkan aikana vaikuttava ilmanvastus ja ilmanvastuksen tekemä työ. Loppunopeus on siis pienempi, jos mäki on aluksi jyrkempi.

Tehtävä 12.13.

a) Mekaanisen energian säilymislain mukaan
$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$ eli

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$
$$gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = gh_2 + \frac{1}{2}v_2^2$$

Yhtälöistä punnuksen massa supistuu pois eikä massa näin ollen vaikuta nopeuteen, kun tilannetta tarkastellaan mekaanisen energian säilymislain avulla

b) Alussa punnus on paikallaan, joten $E_{k1} = 0$. Ala-asennossa punnuksella ei ole potentiaalienergiaa, jos nollatasoksi on sovittu punnuksen radan alin kohta. Tällöin $E_{p2} = 0$. Nyt $E_{p1} = E_{k2}$

$$gh_1 = \frac{1}{2}v_2^2$$
$$v_2 = \sqrt{2gh_1}.$$

Punnuksen nopeus ala-asennossa on siis suoraan verrannollinen punnuksen alkukorkeuden neliöjuureen.

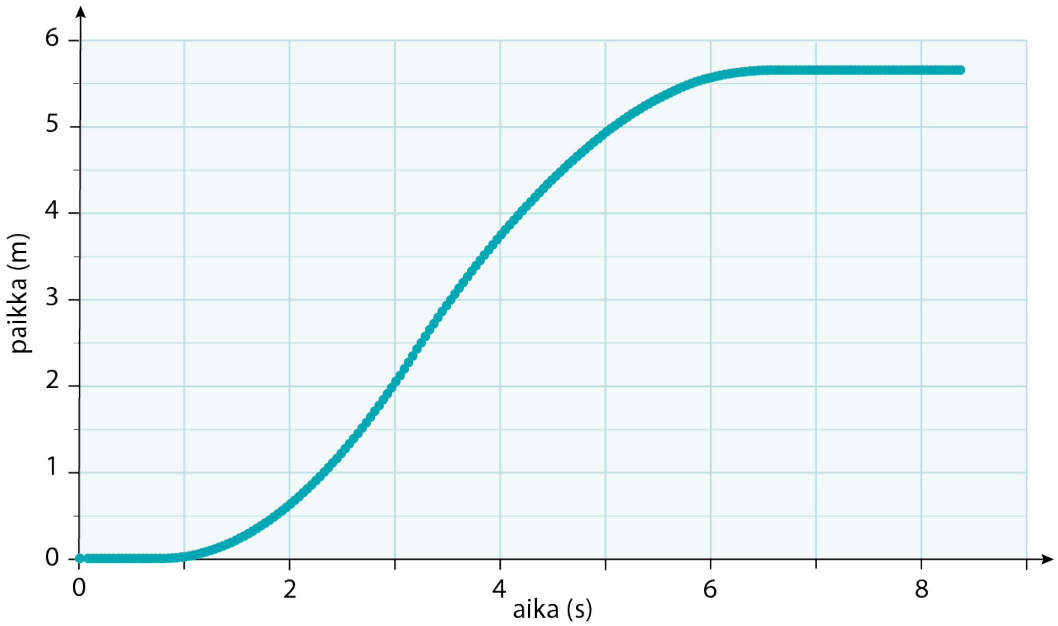
Tehtävä 12.14.

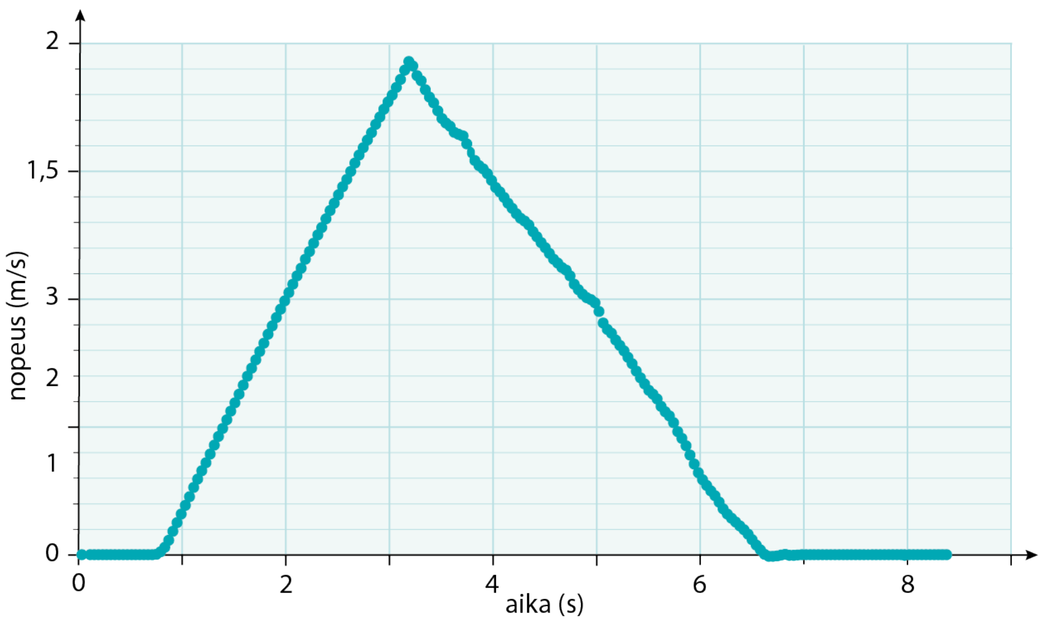
a) Metallikappale liukuu alumiinikiskoa pitkin. Tilanteessa kitka, ilmanvastus ja painovoima tekevät työtä.

b) Metallikappale saa sitä suuremman nopeuden, mitä jyrkempi liukumiskulma on. Mitä loivempi kalteva taso on, sitä pidemmällä matkalla kitka vaikuttaa. Metallikappale hankaa myös alumiinikiskon seinämiin. Kitkan tekemä työ muuntaa kappaleen liike-energiaa pintojen sisäenergiaksi sitä enemmän, mitä pidemmän matkan kappale liukuu. Tällöin nopeuden mitattu arvo on sitä pienempi, mitä loivempi taso on.

Tehtävä 12.15.

a)





Vaunu lähtee liikkeelle ajanhetkellä 0,75 s. Vaunun nopeus kasvoi ajanhetkelle 3,2 s asti, jonka jälkeen nopeus alkoi pienentyä. Vaunu pysähtyy 6,6 s kohdalla.

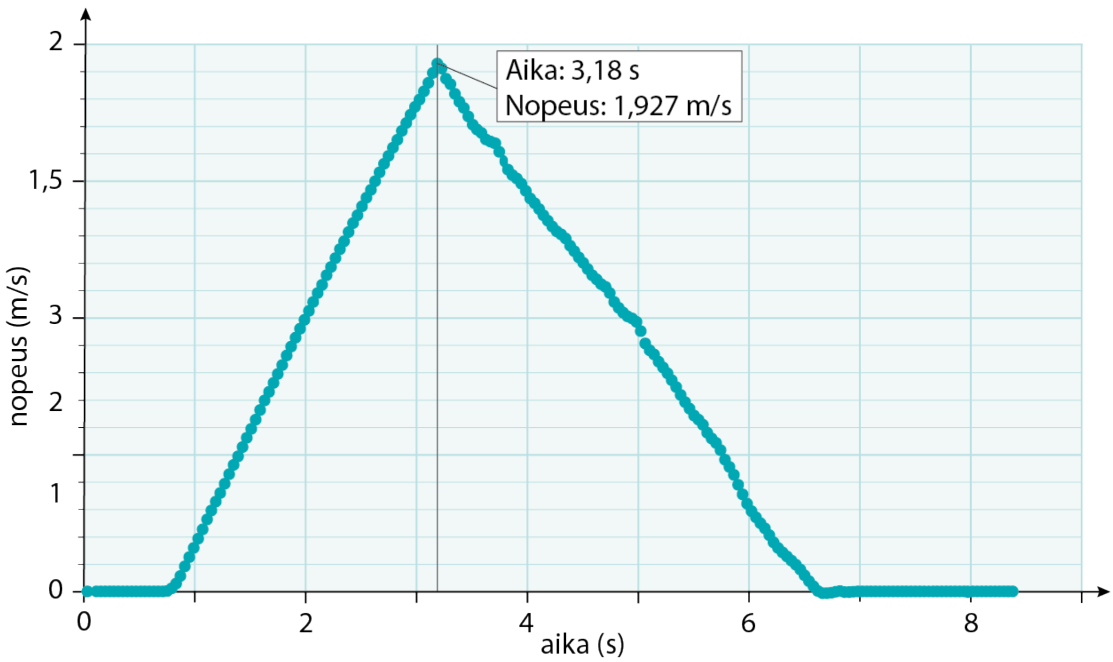
Painovoiman kaltevan tason suuntainen komponentti aiheutti vaunulle kiihtyvyyden, joten vaunun nopeus kasvoi siihen asti, kun vaunu oli kaltevalla tasolla. Tämän jälkeen vaunuun vaikutti liikkeen suunnassa vain liikkeelle vastakkaisia voimia, jotka pienensivät vaunun nopeutta. Siten vaunu saapuu lattialle ajanhetkellä 3,2 s.

b) Vaunun massa m = 1,315 kg

Kaltevan tason korkeus h = 20,4 cm = 0,204 m

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s2

Määritetään vaunun nopeus kaltevan tason lopussa.



Nopeus tason lopussa on v_2 = 1,927 m/s.

Valitaan mäen alaosa potentiaalienergian nollatasoksi. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$E_{k1} + E_{p1} - W = E_{k2} + E_{p2}$$

$$mgh - W = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Vastusvoimien tekemä työ

$$W = mgh - \frac{1}{2}mv_2^2$$
$$= 1{,}315\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}204\,\text{m} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}315\,\text{kg} \cdot \left(1{,}927\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$
$$= 0{,}1901\,\text{J} \approx 190\,\text{mJ}.$$

c) Mekaniikan energiaperiaatteella, kun vaunu liikkuu vaakasuoraan, vaunun potentiaalienergia ei muutu. Lopuksi vaunu pysähtyy paikoilleen

$$E_{\text{k1}} + E_{\text{p1}} - W = E_{\text{k2}} + E_{\text{p2}}$$
$$\frac{1}{2}mv^2 - W = 0.$$

Vaunu liikkui lattialla aikavälillä 3,2 s – 6,6 s kuvaajan perusteella matkan *s* = 3,298 m.

Vastusvoimien suuruus

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2$$
$$F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{1{,}315\,\text{kg} \cdot (1{,}927\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 3{,}298\,\text{m}}$$
$$= 0{,}74030\,\text{N} \approx 740\,\text{mN}.$$

Tehtävä 12.16.

Alussa punnuksella on potentiaalienergiaa, joka muuntuu heilahduksessa ensin liike-energiaksi ja sitten takaisin potentiaalienergiaksi. Vaikka vastusvoimat ovat tilanteessa pieniä, osa alkutilanteen potentiaalienergiasta muuntuu vastusvoimien tekemäksi työksi. Punnus ei saavuta tämän vuoksi lähtökorkeuttaan, joten opettaja on turvassa.

Tehtävä 12.17.

Puupalikan massa m_1 = 0,350 kg

Punnuksen massa m_2 = 0,410 kg

Punnuksen ja palikan liikkuma matka s = 0,62 cm

Putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

Puupalikan ja pinnan välinen kitkakerroin μ = 0,22

Puupalikan potentiaalienergia ei muutu. Määritetään punnuksen potentiaalienergian nollatasoksi lattian taso, missä punnus on lopussa. Puupalikka ja punnus lähtevät paikoltaan, jolloin niiden nopeudet alussa ovat nollat.

Tarkastellaan tilannetta mekaniikan energiaperiaatteella

$$E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{p1}} - W = E_{\mathrm{k2}} + E_{\mathrm{p2}}$$

$$m_2 gh - W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Kitkan tekemä työ on W = $F_\mu s$ ja koska kappaleet ovat kytkettyinä toisiinsa, on kappaleilla sama loppunopeus v. Saadaan mekaniikan energiaperiaatteeksi

$$m_2 gh - F_\mu s = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2.$$

Puupalikka liikkuu vaakasuoralla pinnalla, jolloin
$N = G = mg$ ja kitkalle $F_\mu = \mu N$.

$$\begin{aligned}
m_2gs - \mu m_1gs &= \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 \\
2m_2gs - 2\mu m_1gs &= (m_1 + m_2)v^2 \\
v^2 &= \frac{2m_2gs - 2\mu m_1gs}{m_1 + m_2} \\
v^2 &= \frac{2gs(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2}
\end{aligned}$$

Punnus osuu lattiaan nopeudella

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{2gs(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2}} \\
&= \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}62\,\mathrm{m} \cdot (0{,}410\,\mathrm{kg} - 0{,}22 \cdot 0{,}35\,\mathrm{kg})}{0{,}410\,\mathrm{kg} + 0{,}35\,\mathrm{kg}}} \\
&= 2{,}30866\,\mathrm{m/s} \approx 2{,}3\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}$$

Syvennä

Tehtävä 12.18.

Rullalautailijan massa $m = 67$ kg

Etenemistä vastustava voima $F = 20$ N

Rampin kaltevuuskulma $\alpha = 35°$

Rampin kaarevuussäde $r = 2{,}0$ m

Hypyn korkeus $h = 3{,}0$ m

Lisäksi merkitään

- Hyppyrin nokkaan liittyviin kirjaintunnuksiin alaindeksi A.
- Rampin alimpaan kohtaan liittyviin kirjaintunnuksiin alaindeksi B.
- Lähtöpisteen liittyviin kirjaintunnuksiin alaindeksi C.

a) Ilmalennon aikana rullalautailijan liike-energia muuntuu potentiaalienergiaksi. Hypyn korkeimmassa kohdassa lautailijan liike-energia on nolla.

Kun valitaan potentiaalienergian nollataso hyppyrin nokalle, saadaan mekaanisen energian säilymislain mukaisesti

$$E_{\mathrm{kA}} = E_{\mathrm{p}}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_{\mathrm{A}}^2 = \cancel{m}gh.$$

Ratkaistaan tästä nopeus hyppyrin nokalla

$$v_{\mathrm{A}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 3{,}0\,\mathrm{m}} = 7{,}6720\,\mathrm{m/s} \approx 7{,}7\,\mathrm{m/s}$$

b) Valitaan nyt potentiaalienergian nollataso rampin alimpaan kohtaan B.

Hyppyrin nokka A on rampin kaarevuussäteen verran ylempänä kuin rampin alin kohta B, joten nyt $h_{\mathrm{A}} = r$.

Edellä saatiin nopeus hyppyrin nokalla $v_{\mathrm{A}} = \sqrt{2gh}$.

Laakerivian vuoksi vastusvoimien tekemä työ pienentää rullalautailijan mekaanista energiaa matkalla rampin alimmasta kohdasta B hyppyrin nokalle A.

Matka kohdasta B hyppyrin nokalle kohtaan A on neljännesympyrän mittainen, joten $s_{\mathrm{BA}} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{1}{2}\pi r.$

Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{kB}} + \cancel{E_{\mathrm{pB}}} + W &= E_{\mathrm{kA}} + E_{\mathrm{pA}} \\
\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 - Fs &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 + mgh_{\mathrm{A}} \\
\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 + mgh_{\mathrm{A}} + Fs_{\mathrm{BA}} \\
\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 + mgr + F \cdot \frac{1}{2}\pi r \\
mv_{\mathrm{B}}^2 &= mv_{\mathrm{A}}^2 + 2mgr + F\pi r \\
v_{\mathrm{B}}^2 &= \frac{mv_{\mathrm{A}}^2 + 2mgr + F\pi r}{m} \\
v_{\mathrm{B}}^2 &= v_{\mathrm{A}}^2 + 2gr + \frac{F\pi r}{m} \\
v_{\mathrm{B}}^2 &= 2gh + 2gr + \frac{F\pi r}{m}.
\end{aligned}
$$

Rullalautailijan nopeus rampin alimmassa kohdassa

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{B}} &= \sqrt{2gh + 2gr + \frac{F\pi r}{m}} \\
&= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 3{,}0\,\mathrm{m} + 2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m} + \frac{20\,\mathrm{N} \cdot \pi \cdot 2{,}0\,\mathrm{m}}{67\,\mathrm{kg}}} \\
&= 9{,}998878\,\mathrm{m/s} \approx 10\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}
$$

c) Merkitään rampin korkeutta alimpaan kohtaan nähden h_C. Rampin alussa lautailija on paikallaan ja lautailijan liike-energia on nolla. Valitaan potentiaalienergian nollataso rampin alimpaan kohtaan B.

Edellä saatiin nopeudelle rampin alimmassa kohdassa

$$v_B^2 = 2gh + 2gr + \frac{F\pi r}{m}$$

Laakerivian vuoksi vastusvoimien tekemä työ pienentää rullalautailijan mekaanista energiaa matkalla rampin ylimmästä kohdasta C alimpaan kohtaan B. Merkitään tätä matkaa s_{CB}.

Rampin korkeuden ja pituuden välillä on yhteys,

$$\sin\alpha = \frac{h_C}{s}.$$

Mekaniikan energiaperiaatteen mukaisesti

$$\cancel{E}_{kC} + E_{pC} + W = E_{kB} + \cancel{E}_{pB}$$

$$mgh_C - Fs = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$mgh_C - F\frac{h_C}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}m\left(2gh + 2gr + \frac{F\pi r}{m}\right)$$

$$h_C\left(mg - \frac{F}{\sin\alpha}\right) = gmh + gmr + \frac{F\pi r}{2}.$$

Rampin korkeus on

$$h_{\mathrm{c}} = \frac{gmh + gmr + \dfrac{F\pi r}{2}}{\left(mg - \dfrac{F}{\sin\alpha}\right)}$$

$$= \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 67\,\mathrm{kg} \cdot 3{,}0\,\mathrm{m} + 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 67\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m} + \dfrac{20\,\mathrm{N} \cdot \pi \cdot 2{,}0\,\mathrm{m}}{2}}{\left(67\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} - \dfrac{20\,\mathrm{N}}{\sin 35^\circ}\right)}$$

$$= 5{,}381\,\mathrm{m} \approx 5{,}4\,\mathrm{m}.$$

Tehtävä 12.19.

Auton nopeus v = 80 km/h

Kitkakerroin (min) μ_{min} = 0,25

Kitkakerroin (max) μ_{max} = 0,29

a) Auton pysähtymismatka muodostuu reaktiomatkasta ja jarrutusmatkasta. Reaktiomatka on kuljettajan reaktioaikana edetty matka. Yleisesti reaktioaikana käytetään arvoa t = 1,0 s. Reaktioaikaan vaikuttaa lisäksi kuljettajan vireystila sekä mahdolliset häiriötekijät. Jarrutusmatkaan vaikuttaa kitkakerroin, joka riippuu renkaiden kunnosta ja ajokelistä. Talvikelillä vaikuttaa myös, onko tienpinta jäinen ja onko autossa kitka- vai nastarenkaat.

b) Selvitetään, kuinka kitkakerroin vaikuttaa kiihtyvyyteen.

Jarrutuksen aikana liike on tasaisesti hidastuvaa.

Newtonin II lain mukaan

$$\begin{aligned}\sum F &= ma\\ -F_{\mu} &= ma\\ -\mu N &= ma\\ -\mu G &= ma\\ -\mu \cancel{m} g &= \cancel{m} a\\ a &= -\mu g\end{aligned}$$

Jarrutuksen aloituksen jälkeen auton kulkema matka on $x_{\mathrm{j}} = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ ja loppunopeus on $v = v_0 + at$.

Jarrutusmatkan jälkeen auto on paikallaan, joten auton nopeus v = 0. Auton jarrutukseen kulunut aika saadaan loppunopeuden lausekkeesta $t = -\frac{v_0}{a}$.

Sijoitetaan tämä jarrutusmatkan yhtälöön.

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{j}} &= v_0\left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2\\ &= -\frac{{v_0}^2}{a} + \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{a} = -\frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{a} = -\frac{{v_0}^2}{2a}.\end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälöön aiemmin ratkaistu kiihtyvyys

$a = -\mu g$

$$x_{\mathrm{j}} = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2(-\mu g)} = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

Renkaiden ja tien välinen kitkakerroin on esimerkiksi kuivalla asfaltilla 0,8 ja märällä jäällä 0,1.

Oletetaan reaktioajaksi t_{r} =1,0 s

Reaktiomatka on tällöin

$$x_r = v_0 t_r = \frac{80}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}0\,\mathrm{s} = 22{,}222\,\mathrm{m}.$$

Pysähtymismatka on

$$x = x_{\mathrm{r}} + x_{\mathrm{j}} = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2\mu_{\mathrm{min}} g}.$$

Lasketaan jarrutusmatka kuivalla asfaltilla ja märällä jäällä

$$x_{\mathrm{asfaltti}} = x_r + \frac{v_0^2}{2\mu_{\mathrm{min}} g} = 22{,}222\,\mathrm{m} + \frac{\left(\frac{80}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}8 \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} = 53{,}684\,\mathrm{m} \approx 50\,\mathrm{m}$$

$$x_{\mathrm{jää}} = x_r + \frac{v_0^2}{2\mu_{\mathrm{max}} g} = 22{,}222\,\mathrm{m} + \frac{\left(\frac{80}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} = 273{,}918\,\mathrm{m} \approx 300\,\mathrm{m}$$

Tehtävä 12.20.

Auton kiihdytyksen teho P = 80 kW

Auton massa m = 1450 kg

Kiihdytysmatka s = 100 m

a) Auton kiihtyvyys on vakio. Määritetään loppunopeuden lauseke tasaisesti kiihtyvän liikkeen lausekkeesta. Auton loppunopeus on $v = at$, joten kiihtyvyys on $a = \frac{v}{t}$.

Auto etenee kiihdytyksen aikana matkan $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Alussa s_0 = 0 m ja auto on paikallaan eli v_0 = 0 m/s, joten yhtälö saadaan muotoon $s = \frac{1}{2}at^2$.

Sijoitetaan nopeuden lausekkeesta kiihtyvyys, jolloin saadaan

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\cancel{t}}\right)t^{\cancel{2}} = \frac{1}{2}vt.$$

Ratkaistaan yhtälöstä nopeus, jolloin saadaan $v = \frac{2s}{t}$.

Kiihdytyksen keskimääräinen teho on autolle tehdyn työn ja siihen käytetyn ajan suhde. Työperiaatteen mukaan autolle tehty työ muuntaa energiaa auton liike-energiaksi, joten työn suuruus saadaan selville, kun tiedetään auton liike-energia juuri ennen törmäystä. Sijoitetaan auton liike-energian lauseke tehon yhtälöön.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{t} = \frac{\frac{1}{2}m\left(\frac{2s}{t}\right)^2}{t}$$

$$P = \frac{m\left(\frac{4s^2}{t^2}\right)}{2t} = \frac{m \cdot 4s^2}{2t^3} = \frac{2ms^2}{t^3}$$

Ratkaistaan yhtälöstä kiihdyttämiseen tarvittava aika.

$$t^3 = \frac{2ms^2}{P}$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{2ms^2}{P}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1450\,\text{kg} \cdot (100\,\text{m})^2}{80\,\text{kW}}}$$

$$= 7{,}1302\,\text{s} \approx 7{,}1\,\text{s}$$

b) Lasketaan auton loppunopeus a-kohdan tietojen perusteella.

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 100\,\text{m}}{7{,}13021\,\text{s}} = 28{,}049\,\text{m/s} \approx 101\,\text{km/h}$$

c) Lasketaan auton liike-energia juuri ennen törmäystä b-kohdan tietojen perusteella.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1450\,\text{kg} \cdot \left(28{,}04964\,\text{m/s}\right)^2 = 570\,417{,}25\,\text{J} \approx 570\,\text{kJ}.$$

Tehtävä 12.21.

a) Kolaritilanteessa törmäykseen liittyvä energia ohjataan auton rakenteeseen. Auton korissa on kohtia, jotka antavat törmäyksessä periksi ja vaimentavat siten ohjaamoon kohdistuvaa iskua.

b) Kitkaa on pyritty parantamaan esimerkiksi renkaiden kuviointia kehittämällä. Renkaiden pintamateriaali tai talviolosuhteissa käytettävät nastat parantavat renkaiden pitoa. Teiden suunnittelussa ja kunnossapidossa huomioidaan liikenneturvallisuus. Esimerkiksi tienpinnoille satanut tai sulanut vesi valuu kaltevalta tien pinnalta ojaan, jolloin tie kuivuu nopeammin. Talviolosuhteissa teitä hiekoitetaan kitkan parantamiseksi tai suolataan, jolloin saadaan tien pinnassa olevaa jääkerrosta sulatettua.

c) Turvavyöt estävät äkkipysähdyksessä matkustajan sinkoutumisen kohti auton kojelautaa tai tuulilasia kohti. Matkustajaan kohdistuvia iskuja vaimentavat useat autoon asennetut turvatyynyt. Myös energiaa sitova kori pienentää matkustajaan kohdistuvia iskuja.

Autossa käytetään useita havaintolaitteita. Esimerkiksi tutkia käytetään autoa lähellä olevien kohteiden kuten muiden autojen tai jalankulkijoiden havainnointiin. Tutkat hyödyntävät sähkömagneettisen säteilyn eri aallonpituusalueita. RADAR eli radio detection and ranging hyödyntää radiosignaaleja ja LIDAR eli light detection and ranging hyödyntää näkyvää valoa. Lisäksi autoissa on erilaisia kameroita ja ultraääneen perustuvia tutkia. Niitä voidaan hyödyntää esimerkiksi autojen pysäköinnissä.

Ajoneuvon hallinnassa kuljettajaa auttavat esimerkiksi lukkiutumattomat jarrut (ABS) ja luistonestojärjestelmä (ESC). Lisäksi uusissa autoissa on muun muassa kuljettajan vireystilan valvontajärjestelmä, hätäjarrutusjärjestelmä ja nopeudenseurantajärjestelmä.

Tehtävä 12.22.

Auton nopeus v = 97,2 km/h

Hirven etäisyys s = 83 m

Reaktioaika t = 1,0 s

Kitkakerroin kuiva asfaltti μ_1 = 0,8

Kitkakerroin märkä asfaltti μ_2 = 0,6

a) Auto kulkee reaktioaikana vakionopeudella v = 97,2 km/h. Auton kulkema matka

$$x = \cancel{x_0} + v_0 t + \frac{1}{2}\cancel{a}t^2$$

$$x = v_0 t = \left(\frac{97{,}2}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}\right)\cdot 1{,}0\,\mathrm{s} = 27{,}0\,\mathrm{m} \approx 27\,\mathrm{m}$$

b) Kyseessä on tasaisesti hidastuva liike. Newtonin II lain mukaisesti:

$$\sum F = ma$$

$$-F_\mu = ma$$

$$-\mu_1 N = ma$$

$$-\mu_1 G = ma$$

$$-\mu_1 \cancel{m}g = \cancel{m}a$$

$$a = -\mu_1 g$$

Oletetaan auton nopeuden hidastuminen tasaisesti kiihtyväksi liikkeeksi. Auton jarrutusmatkaksi saadaan:

$$x = \cancel{x_0} + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0\left(\frac{\cancel{v} - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{\cancel{v} - v_0}{a}\right)^2$$

$$= \frac{-v_0^2}{a} + \frac{1}{2}\cancel{a}\frac{v_0^2}{a^{\cancel{2}}} = -\frac{v_0^2}{2a}$$

Sijoitetaan kiihtyvyyden lauseke yhtälöön

$$x = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2(-\mu_1 g)} = \frac{v_0^2}{2\mu_1 g}$$

Lasketaan jarrutusmatka

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_1 g} = \frac{\left(\frac{97{,}2}{3{,}6}\mathrm{m/s}\right)^2}{2\cdot 0{,}8\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 46{,}445\,\mathrm{m} \approx 46{,}4\,\mathrm{m}$$

Pysähtymismatka 27 m + 46,445 m = 73,4 m.

Koska auton pysähtymismatka on pienempi kuin auton ja hirven välinen etäisyys, niin auto pysähtyy ennen kohtaamista eikä törmäystä tapahdu.

c) Lasketaan jarrutusmatka märällä asfaltilla.

Lasketaan jarrutusmatka kuten b-kohdassa

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_2 g} = \frac{\left(\frac{97{,}2}{3{,}6}\text{m/s}\right)^2}{2 \cdot 0{,}6 \cdot 9{,}81\text{m/s}^2} = 61{,}9266\text{m} \approx 61{,}9\text{m}$$

Pysähtymismatka x = 27 m + 61,9 m = 88,9 m. Auto törmää kohteeseen, koska pysähtymismatka on pidempi kuin auton etäisyys hirvestä havaintohetkellä. Lasketaan auton nopeus törmäämishetkellä.

Jarrutusmatka ennen kohdetta:

x_2 = 83 m – 27 m = 56 m.

Selvitetään missä ajassa auto etenee hidastuvassa liikkeessä 56 metriä.

$$x_2 = \cancel{x_0} + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x_2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\frac{1}{2}at^2 + v_0 t - x_2 = 0$$

Saadaan toisen asteen yhtälö, joka voidaan ratkaista ratkaisukaavalla tai laskimella.

$$t=\frac{-v_0\pm\sqrt{v_0^2-4\cdot\frac{1}{2}a\cdot(-x_2)}}{2\cdot\frac{1}{2}a}=\frac{-v_0\pm\sqrt{v_0^2+2ax_2}}{a}$$

Sijoitetaan kiihtyvyyden arvo $a=-\mu_2 g$ yhtälöön.

$$t=\frac{-v_0\pm\sqrt{v_0^2-2\mu_2 g x_2}}{-\mu_2 g}$$

$$=\frac{-\left(\frac{97{,}2}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{97{,}2}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2-2\cdot 0{,}6\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 56\text{m}}}{-0{,}6\cdot 9{,}81\text{m/s}^2}$$

$t_1=3{,}1681\text{s}$, $t_2=6{,}0062\text{s}$,

Toisen asteen yhtälöstä saadaan kaksi ratkaisua. Ajoista pienempi kuvaa hetkeä, jolloin auto törmää hirveen. (Ajoista suurempi kuvaa tilannetta, jossa auto ajaisi hirven ohi, pysähtyisi ja palaisi takaisin hirven luo yhtä suurella, mutta vastakkaissuuntaisella nopeudella.)

Lasketaan loppunopeus:

$$v=v_0+at_1=v_0-\mu_2 g t_1$$

$$=27\,\frac{\text{m}}{\text{s}}-0{,}6\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 3{,}1681\,\text{s}$$

$$=8{,}3527\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 8{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nopeus 8,4 m/s on noin 30 km/h.

Tehtävä 12.23.

a) Energian säilymislain mukaan energia voi muuntua muodosta toiseen, mutta sitä ei koskaan synny tyhjästä tai häviä. Eristetyn systeemin kokonaisenergia säilyy.

b) 1) Tapahtuma on mahdollinen. Tapahtumassa auton liike-energia muuntuu auton pellin ja lyhtypylvään sisäenergioiksi.

2) Tapahtuma ei ole mahdollinen. Biljardipöydällä pallon liike-energiaa ei juurikaan muunnu muiksi energialajeiksi, koska biljardipallot ovat kovia ja kimmoisia. Siksi törmäyksen jälkeen ainakin toisella pallolla on liike-energiaa.

3) Tapahtuma on energian säilymislain näkökulmasta mahdollinen. Johtumisessa energiaa siirtyy aina korkeammasta lämpötilasta matalampaan, joten lämpöopin näkökulmasta tapahtuma ei ole mahdollinen.

c) Massan muutos m = 1,00 g = 1,00 · 10^{-3} kg

Valonnopeus c = 299 792 458 m/s

Energian ja massan yhteyttä kuvaavan yhtälön mukaan

$$E = mc^2 = 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \left(299792458\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$

$$= 8{,}9875510 \cdot 10^{13}\ \text{J} \approx 8{,}99 \cdot 10^{13}\ \text{J}.$$

d) Kopterin massa m = 249 g = 0,249 kg

Nousukorkeus h = 25 m

Nopeus v = 8,0 m/s

Energian säilymislain mukaan $\Delta E_p + \Delta E_k + \Delta U = 0$. Kuvauskopterin akun sisäenergia U pienenee yhtä paljon, kuin mitä kopterin potentiaali- ja liike-energia kasvavat.

$$\Delta U = \Delta E_p + \Delta E_k = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

Kopterin liike on tasaisesti kiihtyvää, joten liikettä voidaan mallintaa tasaisesti kiihtyvän liikkeen yhtälöillä, $v = at$ ja $h = \frac{1}{2}at^2$.

Ratkaistaan nousuaika.

$$h = \frac{1}{2}at^2 \quad ||\text{sij. } a = \frac{v}{t}$$

$$h = \frac{1}{2}\frac{v}{t}t^2$$

$$h = \frac{1}{2}vt$$

$$t = \frac{2h}{v}$$

Kopterin nousuteho

$$P=\frac{\Delta U}{t}=\frac{mgh+\frac{1}{2}mv^2}{\frac{2h}{v}}$$

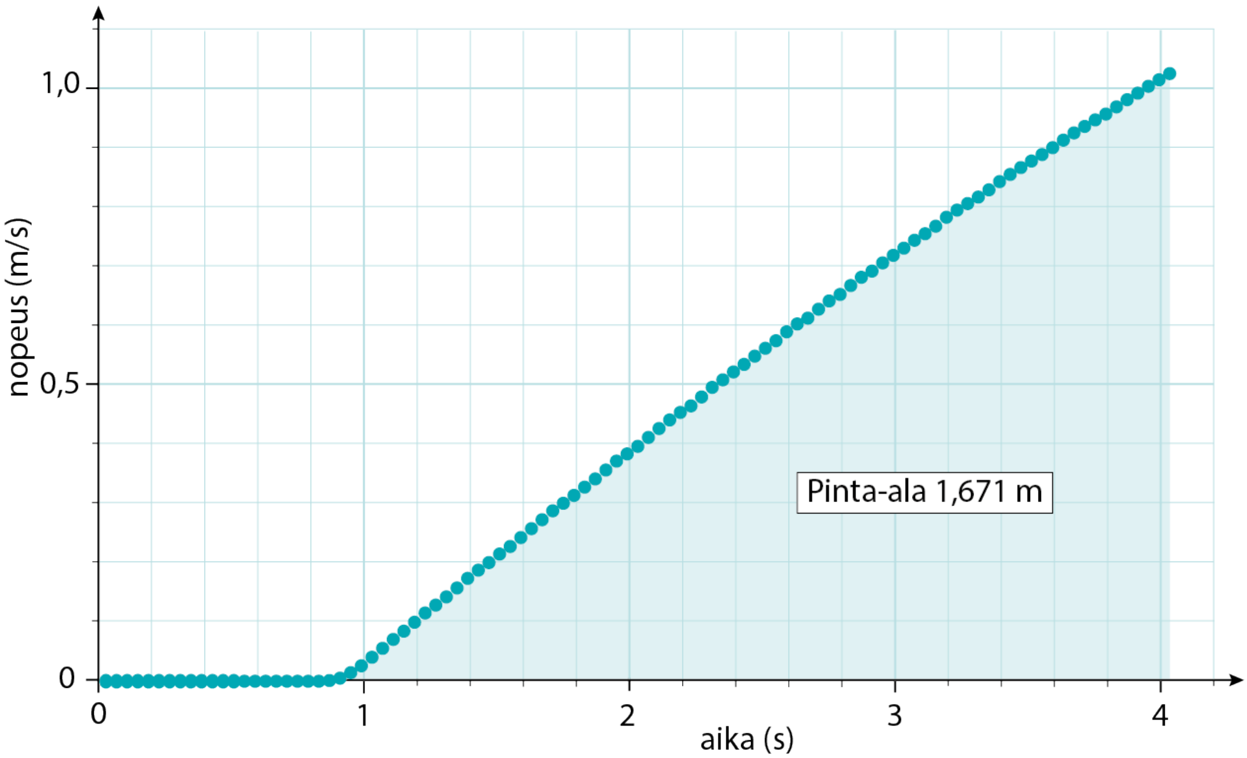
$$=\frac{0{,}249\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 25\,\text{m}+\frac{1}{2}\cdot 0{,}249\,\text{kg}\cdot\left(8{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\frac{2\cdot 25\,\text{m}}{8{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

$$=11{,}04564\,\text{W}\approx 11\,\text{W}$$

Kopterin nousuteho on 11 W. Akun sisäenergia pienenee vähintään samalla teholla.

Tehtävä 12.24.

a)

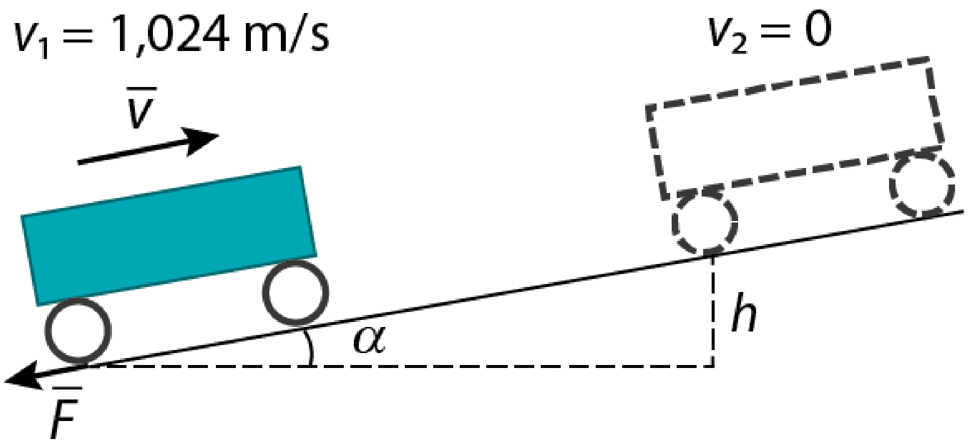


(akselit oikein päin 1 p, mittauspisteet näkyvät kuvaajassa 1 p)

Vaunun kulkema matka saadaan (t, v)-koordinaatiston ja aika-akselinrajoittaman alueen fysikaalisena pinta-alana. (1 p)

Määritetään pinta-ala s = 1,671 m ≈ 1,67 m. (1 p)

b) $v_1 = 1{,}024$ m/s



Vaunun massa m = 1,315 kg

Vaunun lähtökorkeus h = 8,4 cm

Tarkastellaan vaunua mekaniikan energiaperiaatteella. Sovitaan vaunun potentiaalienergian nollatasoksi kaltevan tason alapää. Paikaltaan lähtevän vaunun potentiaalienergia muuntuu vastusvoimien tekemäksi työksi ja vaunun liike-energiaksi

$$\cancel{E_{ka}} + E_{pa} + W = E_{kl} + \cancel{E_{pl}}$$

$$E_{pa} + W = E_{kl} \qquad \text{(2 p)}$$

$$mgh + (-Fs) = \frac{1}{2}mv^2.$$

Vaunun kulkema matka on a-kohdan mukaan s = 1,671 m ja vaunun nopeus tason alaosassa saadaan kuvaajasta, v = 1,024 m/s. (1 p)

Vaunun liikettä vastustavan keskimääräisen voiman suuruus on

$$Fs = mgh - \frac{1}{2}mv^2$$

$$F = \frac{mgh - \frac{1}{2}mv^2}{s}$$

$$= \frac{1{,}315\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}084\,\text{m} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}315\,\text{kg} \cdot \left(1{,}024\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1{,}671\,\text{m}}$$

$$= 0{,}23589\,\text{N} \approx 0{,}24\,\text{N}.$$

(kaava ratkaistussa muodossa 1 p, oikea vastaus oikealla tarkkuudella 1 p)

c) Tason kaltevuuskulma $\alpha = 4{,}5°$

Tarkastellaan vaunua mekaniikan energiaperiaatteella. Vaunun liikettä vastustavan voimien tekemä työ muuttaa vaunun liike-energiaa. Osa liike-energiasta muuntuu myös vaunun potentiaalienergiaksi,

$$E_{k\mathrm{a}} + W = E_{\mathrm{pl}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-Fs) = mgh \qquad \text{(2 p)}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - Fs = mgh.$$

Vaunun korkeus voidaan esittää vaunun kulkeman matkan avulla $h = s \cdot \sin\alpha$.

Mekaniikan energiaperiaate saadaan nyt muotoon

$$\frac{1}{2}mv^2 - Fs = mgs\sin\alpha. \quad \text{(1 p)}$$

Vaunun liikettä vastustava voima ja nopeus saadaan tehtävien aiemmista kohdista. Vaunun ylämäkeen kulkema matka on

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs\sin\alpha + Fs$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = s(mg\sin\alpha + F)$$

$$s = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg\sin\alpha + F} = \frac{mv^2}{2(mg\sin\alpha + F)}$$

$$= \frac{1{,}315\,\text{kg}\cdot(1{,}024\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2(1{,}315\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin 4{,}5^\circ + 0{,}23589\,\text{N})}$$

$$= 0{,}552\,\text{m} \approx 55\text{ cm.}$$

(matkan kaava 2 p, tulos 1 p)

13. Liikemäärä ja impulssi

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 13.1.

Väittämät b), c) ja f) ovat oikein.

Korjaukset väittämiin:

a) Liike-energia on skalaarisuure eli liike-energialla ei ole suuntaa.

d) Jos kappaleen vauhti kaksinkertaistuu, kappaleen liikemäärän suuruus kaksinkertaistuu, mutta kappaleen liike-energia nelinkertaistuu.

e) Impulssiperiaatteen mukaan kappaleeseen vaikuttavan voiman suunta on sama kuin kappaleen liikemäärän muutoksen suunta. Liikemäärän suunta voi olla siis lopussa eri kuin siihen vaikuttavan impulssin suunta.

Tehtävä 13.2

a) Koiran massa m_1 = 25 kg

Koiran nopeus v_1 = 3,4 m/s

Koiran liikemäärä on

$$p_1 = m_1 v_1 = 25\,\text{kg} \cdot 3{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 85\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}}.$$

b) Kissan massa m_2 = 5,2 kg

Kissan liikemäärä on $p_2 = m_2 v_2$. Kissalla on sama liikemäärä kuin koiralla, kissan nopeuden pitäisi olla

$p_2 = p_1$

$m_2 v_2 = m_1 v_1$

$$v_2 = \frac{p_2}{m_2} = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{25\,\text{kg} \cdot 3{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5{,}2\,\text{kg}} = 16{,}346\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 16\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehtävä 13.3.

a) Matkustajalaivan massa m = 63 000 t = 63 · 10^6 kg

Matkustajalaivan nopeus
v = 21 kn = 21 · 0,5144 m/s = 10,8024 m/s

Matkustajalaivan liikemäärä on

$$p = mv = 63 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 10{,}8024 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6{,}805512 \cdot 10^8 \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \approx 6{,}8 \cdot 10^8 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}.$$

b) Liikettä vastustavien voimien suuruus
F = 2,4 MN = 2,4 · 10^6 N

Matkustajalaiva pysähtyy, joten matkustajalaivan liikemäärän muutos on $\Delta p = -6{,}805512 \cdot 10^8 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$.

Impulssiperiaatteen mukaan

$$\overline{I} = \Delta\overline{p}$$
$$\overline{F}\Delta t = \Delta\overline{p}$$

Kun valitaan laivan liikkeen suunta positiiviseksi, saadaan a-kohdan tulosta käyttämällä

$$-F\Delta t = \Delta p$$

$$\Delta t = \frac{\Delta p}{-F} = \frac{-6{,}805512 \cdot 10^8 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}}{-2{,}4 \cdot 10^6 \text{ N}} = 283{,}563 \text{ s} = 4 \text{ min} 43{,}565 \text{ s} \approx 4 \text{ min} 40 \text{ s}.$$

Tehtävä 13.4.

Kiekon massa m = 160 g = 0,16 kg

Kiekon nopeus alussa $v_1 = 45\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Voiman vaikutusaika Δt = 41 ms = 0,041 s

Kiekon nopeus lopussa on $v_2 = 0$, joten liikemäärän muutos on $\Delta p = -mv_1$.

Kiekko osuu räpylään nopeudella $\overline{v}_1$. Räpylä kohdistaa kiekkoon voiman $\overline{F}$ ja aiheuttaa siten impulssin $\overline{I}$. Impulssi pysäyttää kiekon.

Impulssiperiaatteen mukaan

$$\overline{I} = \Delta\overline{p}$$

$$\overline{F}\Delta t = m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1.$$

Koska kiekon nopeus lopussa on nolla, on

$$\overline{F}\Delta t = -m\overline{v}_1$$

Kun kiekon lentosuunta valitaan positiiviseksi, saadaan

$$-\overline{F}\Delta t = -m\overline{v}_1$$

Ratkaistaan yhtälöstä kiekon pysäyttämiseen tarvittava voima

$$F = \frac{mv_1}{\Delta t} = \frac{0{,}16\,\text{kg} \cdot 45\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}041\,\text{s}} = 175{,}60976\,\text{N} \approx 180\,\text{N}.$$

Tehtävä 13.5.

Kun kuljetettavaan esineeseen aiheutuu ulkoisten voimien aiheuttamia impulsseja, pehmusteet pidentävät esineen liikemäärän muutokseen kuluvaa aikaa.
Impulssiperiaatteen mukaan liikemäärän muutos on yhtä suuri kuin kappaleeseen voiman aiheuttama impulssi.
$\Delta p = I$ ja $I = F\Delta t$. Kun voiman vaikutusaika pitenee, esineeseen vaikuttava keskimääräinen voima pienenee.
Tällöin esine ei vaurioidu.

Tehtävä 13.6.

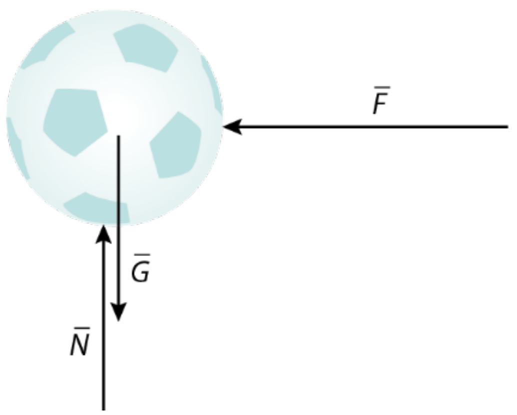
Jalkapallon nopeus alussa v_1 = 3,2 m/s

Jalkapallon nopeus lopussa v_2 = 11,8 m/s

Voiman vaikutusaika Δt = 21 ms

Jalkapallon massa m = 0,427 kg

a)



$\overline{G} =$ pallon paino

$\overline{F} =$ jalan palloon kohdistama voima

$\overline{N} =$ maanpinnan tukivoima

b) Pallon liikemäärän muutos

$$\Delta p = m\Delta v = 0{,}427\,\text{kg} \cdot (11{,}8\,\text{m/s} + 3{,}2\,\text{m/s}) = 6{,}405\,\text{kgm/s} \approx 6{,}4\ \text{kgm/s}.$$

c) Impulssiperiaatteen mukaan jalan palloon kohdistamaksi keskimääräiseksi voimaksi saadaan

$$I = \Delta p$$

$$F\Delta t = m\Delta v$$

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{0{,}427\,\text{kg} \cdot (11{,}8\,\text{m/s} + 3{,}2\,\text{m/s})}{21 \cdot 10^{-3}\,\text{s}} = 305\,\text{N} \approx 310\,\text{N}.$$

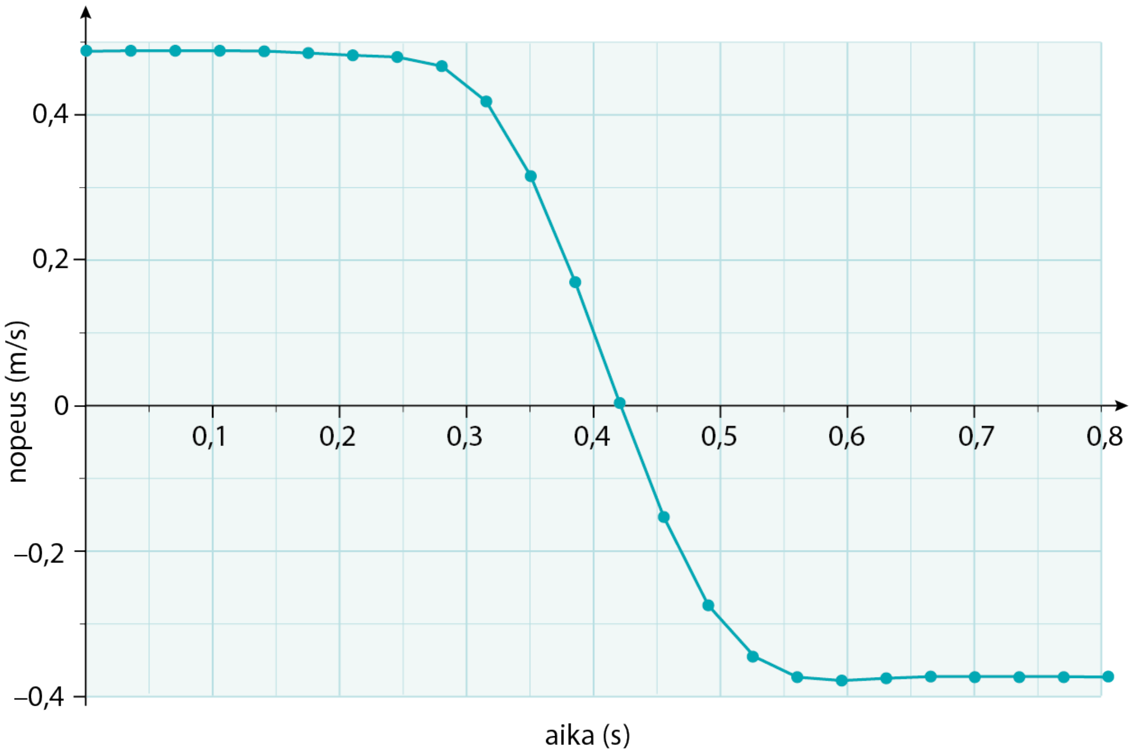
Tehtävä 13.7.

a) Kun tennispallo osuu seinään tai pressuun, aiheuttaa seinä ja pressu tennispalloon voiman. Kun pallon osuu pressuun, on pallon törmäysaika huomattavasti pidempi kuin kiviseinään osuessa. Seinän ja pressun voiman impulssi aiheuttaa pallon liikemäärän muutoksen. Mitä suurempi on pallon ja seinän tai pressun vaikutusaika, sitä pienempi on voima. Tällöin pressun palloon kohdistama voima on pienempi kuin kiviseinän palloon kohdistama voima, joten turkoosi matalampi käyrä esittää pallon osumista pressuun ja vihreä korkeampi käyrä osumista seinään.

b) Impulssiperiaatteen mukaan impulssi aiheuttaa liikemäärän muutoksen $I = \Delta p$. Impulssi saadaan (t, F)-koordinaatiston kuvaajan ja t-akselin rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. Koska kiviseinän aiheuttaman impulssi on suurempi kuin pressun, on kiviseinän aiheuttama liikemäärän muutos suurempi kuin pressun.

Tehtävä 13.8.

a)



b) Määritetään kuvaajasta nopeus ennen törmäystä ja törmäyksen jälkeen. Nopeus ennen törmäystä on v_1 = 0,484 m/s ja jälkeen törmäyksen v_2 = –0,367 m/s.

Vaunun liikemäärän muutos on

$$\Delta p = m\Delta v = 0{,}291\,\text{kg}\cdot(0{,}367\,\text{m/s} + 0{,}484\,\text{m/s})$$
$$= 0{,}247641\,\text{kgm/s} \approx 0{,}248\,\text{kgm/s}.$$

c) Törmäysaika oli Δt = 0,595 s – 0,21 s = 0,385 s.

Impulssiperiaatteen mukaan saadaan voima, joka kohdistui vaunuun

$$I = \Delta p$$

$$F\Delta t = m\Delta v$$

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{0{,}291\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}367\,\mathrm{m/s} + 0{,}484\,\mathrm{m/s})}{0{,}385\,\mathrm{s}} = 0{,}6432\,\mathrm{N} \approx 0{,}643\,\mathrm{N}.$$

Tehtävä 13.9.

Opiskelijan massa ja tuolin massa m = 76 kg

Impulssiperiaatteen mukaan voimalevyn tukivoiman opiskelijaan aiheuttama impulssi on yhtä suuri kuin opiskelijan ja tuolin liikemäärän muutos.

$$\begin{aligned} \overline{I} &= \Delta\overline{p} \\ \overline{F}\Delta t &= \Delta m\overline{v} \\ \overline{F}\Delta t &= m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1. \end{aligned}$$

Alussa opiskelija ja tuoli oli paikoillaan v_1 = 0. Sovitaan positiiviseksi suunnaksi voiman ja opiskelijan liikkeen suunta ja saadaan

$$F\Delta t = mv_2.$$

Voiman aiheuttama impulssi saadaan (t, F)-koordinaatiston fysikaalisesta pinta-alasta, $I = F\Delta t$ = 130,4 Ns. Opiskelijan ja tuolin nopeudeksi saadaan

$$v_2 = \frac{F\Delta t}{m} = \frac{130{,}4\,\text{Ns}}{76\,\text{kg}} = 1{,}715789\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Sovella

Tehtävä 13.10.

a) Pingispallon massa m_1 = 2,7 g = 0,0027 kg

Golfpallon massa m_2 = 45 g = 0,0045 g

Pingispallon nopeus v_1 = 30 m/s

Pingispallon liikemäärä on $p_1 = m_1v_1$ ja golfpallon liikemäärä $p_2 = m_2v_2$.

Merkitään pallojen liikemäärä yhtä suuriksi ja ratkaistaan golfpallon nopeus.

$$p_1 = p_2$$

$$m_1v_1 = m_2v_2$$

$$v_2 = \frac{m_1v_1}{m_2} = \frac{0{,}0027\,\text{kg} \cdot 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}045\,\text{kg}} = 1{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Pingispallon liike-energia on

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0027\,\text{kg} \cdot \left(30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 1{,}215\,\text{J} \approx 1{,}2\,\text{J}.$$

Golfpallon liike-energia on

$$E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}045\,\text{kg} \cdot \left(1{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 0{,}0729\,\text{J} \approx 73\,\text{mJ}.$$

Pingispallolla on merkittävästi suurempi nopeus ja liike-energia kuin golfpallolla, joten pingispallon osuma on kivuliaampi. Tosin pingispallonkin liike-energia on melko pieni.

Tehtävä 13.11.

a) Nurmikko on pehmeämpää kuin asfaltti. Kun harrastaja putoaa nurmikolle tai asfaltille, hänen liikemääränsä muuttuu yhtä paljon. Impulssiperiaatteen mukaan nurmikon tai asfaltin harrastajaan kohdistama tukivoima muuttaa harrastajan liikemäärää. Saadaan

$$I = \Delta p$$
$$F\Delta t = \Delta p.$$

Koska nurmikko on pehmeämpää, impulssin voiman vaikutusaika on pidempi ja näin ollen voima on pienempi.

b) Törmäyksessä liikemäärä muuttuu. Turvatyynyn päähän kohdistama voima aiheuttaa päähän impulssin, joka muuttaa pään liikemäärää.

Impulssiperiaatteen mukaan

$$I = \Delta p$$
$$F\Delta t = \Delta p.$$

Turvatyyny pidentää törmäysaikaa, ja näin ollen voima on pienempi.

c) Valtamerilaivalla on suuri liikemäärä. Valtamerilaivan liikkeen pysäyttää väliaineen vastus ja moottorit. Jos valtamerilaivan liikemäärän muutos haluttaisiin nopeasti, täytyisi laivan moottorien aiheuttaman liikettä hidastavan voiman olla erittäin suuri. Tämä vaatisi isot moottorit hidastamaan laivan liikettä. Ne olisivat kalliita valmistaa ja myös kalliita sekä ympäristölle haitallisia käyttää.

d) Kun pikajuoksija juoksee 60 m matkan, on hänellä liikemäärää juoksun lopussa. Liikemäärä pitää saada nollaan ennen seinää, jos seinän edessä ei olisi patjaa. Tällöin juoksijan jalkoihin kohdistuisi suuria voimia ja nämä voimat saattaisi vahingoittaa juoksijan jalkojen rakenteita. On siis juoksijan kehon kannalta parempi aiheuttaa liikemäärän muutos pehmeällä patjalla, sillä tällöin patjan juoksijaan kohdistama voima on pieni voiman vaikutusajan ollessa pitkä.

Tehtävä 13.12.

Puhelimen etäisyys lattiasta h = 1,1 m
Puhelimen massa m = 0,225 kg
Puhelimen nopeus lattialle törmäämisen jälkeen
v_2 = 0,17 m/s

a) Tarkastellaan tilanne mekaniikan energiaperiaatteella. Puhelimen potentiaalienergia muuntuu puhelimen liike-energiaksi, sillä alussa puhelin oli paikoillaan. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi lattia.

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k}$$
$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$
$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Puhelin osuu lattiaan nopeudella

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}1\,\mathrm{m}} = 4{,}6456\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 4{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) Puhelimen ja lattian törmäysaika t = 14 ms

Kun puhelin osuu lattiaan, puhelimella on liikemäärää. Lattian tukivoima aiheuttaa puhelimelle impulssin ja muuttaa puhelimen liikesuuntaa. Impulssiperiaatteella ennen ja jälkeen törmäyksen

$$\overline{I} = \Delta\overline{p}$$
$$\overline{F}\Delta t = \Delta m\overline{v}.$$

Sovitaan positiiviseksi suunnaksi suunta ylöspäin. Lattian puhelimeen kohdistama keskimääräinen voima F on

$$F\Delta t = mv_2 - (-mv_1)$$

$$F = \frac{mv_2 + mv_1}{\Delta t} = \frac{m(v_2 + \sqrt{2gh})}{\Delta t}$$

$$F = \frac{0{,}225\,\text{kg} \cdot (0{,}17\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}1\,\text{m}})}{14 \cdot 10^{-3}\,\text{s}} = 77{,}394\,\text{N} \approx 77\,\text{N}.$$

c) Puhelimen suojakuoret on tehty yleensä pehmeästä ja joustavasta materiaalista. Joustava materiaali pidentää törmäyksen kestoaikaa, jolloin impulssin mukaan voima pienenee, sillä $I = F\Delta t$. Puhelin ei rikkoudu yhtä helposti, kun käytetään suojakuoria.

Tehtävä 13.13.

Juomatölkin massa m = 0,346 kg

Auton ja juomatölkin nopeus $v = \frac{96}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}}$

a) Koska juomatölkki on auton kyydissä, on juomatölkin nopeus sama kuin auton nopeus.

Juomatölkin liikemäärä

$$p = mv = 0{,}346\,\text{kg} \cdot \frac{96}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 9{,}222\,\text{kgm/s} \approx 9{,}2\,\text{kgm/s}.$$

b) Juomatölkin törmäysaika t = 36 ms

Juomatölkin liikemäärä lopussa on nolla, koska juomatölkki pysähtyy. Impulssiperiaatteen mukaan impulssi aiheuttaa liikemäärän muutoksen. Koska lopussa liikemäärä on nolla, on impulssi yhtä suuri kuin tölkin liikemäärä ennen törmäystä.
Impulssiperiaatteesta

$$\begin{aligned} I &= p_{\text{alussa}} \\ Ft &= mv. \end{aligned}$$

Matkustajan tölkkiin kohdistama tukivoima pysäyttää tölkin ja tämä voima on yhtä suuri kuin juomatölkin matkustajaan kohdistama voima.

Juomatölkki kohdistaa matkustajaan voiman

$$F = \frac{mv}{t} = \frac{0{,}346\,\text{kg} \cdot \frac{96}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{36 \cdot 10^{-3}\,\text{s}} = 256{,}296\,\text{N} \approx 260\,\text{N}.$$

c) Törmäyspainolla tarkoitetaan voimaa, joka pienentäisi ihmisen liikemäärän nollaan törmäyksessä. Jos tarkastellaan b-kohdan mukaisesti ihmisen törmäysaikaa yhtä suurena kuin tölkin törmäysaika *t* = 36 ms, on impulssiperiaatteen mukaan törmäyspaino

$$Ft = mv$$

$$F = \frac{mv}{t}.$$

Sijoitetaan nopeus ja törmäysaika voiman yhtälöön.

$$F = \frac{mv}{t} = m \cdot \frac{\frac{40}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{36 \cdot 10^{-3}\ \text{s}} = 308{,}64 \cdot m \approx 310 \cdot m.$$

Jos ihmisen pysähtymisaika olisi sama kuin tölkillä olisi törmäyspaino 310- kertainen. Todellisuudessa ihminen pysähtyy lähes kymmenen kertaa pidemmässä ajassa kuin tölkki, joten törmäyspaino on luokkaa 40-kertainen.

Tehtävä 13.14.

Luun murtumiseen tarvittava voima pinta-alaa kohden
F_A = $1{,}01 \cdot 10^8$ N/m^2
käden pinta-ala A = 3,6 cm^2
maalarin massa m = 84 kg

a) Käteen kohdistuva voima, jotta luu murtuisi on

$$F = F_A A = 1{,}01 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2 = 36360\,\mathrm{N} \approx 36\,\mathrm{kN}.$$

b) Törmäyksen kesto t = 17,2 ms

Törmäyksen jälkeen maalarin nopeus on nolla. Impulssiperiaatteen mukaan voiman aiheuttama impulssi on tällöin yhtä suuri kuin maalarin liikemäärä ennen törmäystä.

Suurin nopeus, jotta luu ei murru on impulssiperiaatteella ja a-kohdan mukaan

$$I = mv$$

$$Ft = mv$$

$$v = \frac{Ft}{m} = \frac{36360\,\mathrm{N} \cdot 17{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}}{84\,\mathrm{kg}} = 7{,}445\,\mathrm{m/s} \approx 7{,}4\,\mathrm{m/s}.$$

c) Tarkastellaan maalarin putoamista mekaanisen energian säilymisperiaatteella ja asetetaan maanpinta potentiaalienergian nollatasoksi. Maalarin potentiaalienergia muuntuu maalarin liike-energiaksi

$$E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{k}}$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Maalari voi pudota korkeudelta

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(7{,}445\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 2{,}825\,\mathrm{m} \approx 2{,}8\,\mathrm{m}.$$

Tehtävä 13.15.

a) Kappaleen liikemäärä on $p = mv$ ja kappaleen liike-energia on $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$.

Yleisemmin kappaleen liike-energia voidaan kirjoittaa muodossa

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Jos kappaleiden liikemäärät ovat samat, niin erimassaisilla kappaleilla on eri suuret liike-energiat. Mitä suurempi kappaleen massa on, sitä pienempi on kappaleen liike-energia.

b) a-kohdassa saadun liike-energian ja liikemäärän välinen riippuvuus on

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Kappaleen liikemäärä ja liike-energia eivät ole suoraan verrannollisia. Sen sijaan kappaleen liike-energia on suoraan verrannollinen kappaleen liikemäärän neliöön $E_\mathrm{k} \sim p^2$.

Tehtävä 13.16.

Kuorma-auton nopeus alussa v_1 = 78 km/h = $\frac{78}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Kuorma-auton nopeus jarrutuksen jälkeen on v_2 = 0 m/s

Kuorma-auton jarrutusmatka s = 61 m

Sidontaliinan niemellislujuus F_1 = 20 kN

a) Kuorma-auton on jarrutuksen aikana tasaisesti hidastuvassa liikkeessä, jolloin jarrutusmatkalle ja nopeudelle on voimassa jarrutuksen jälkeen

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$
$$0 = v_0 - at.$$

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä hidastuvuus $a = \frac{v_0}{t}$ ja sijoitetaan se ylempään yhtälöön. Jarrutusajaksi saadaan

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}\frac{v_0}{\cancel{t}}t^{\cancel{2}}$$
$$s = \frac{1}{2}v_0 t$$
$$t = \frac{2s}{v_0} = \frac{2 \cdot 61\,\text{m}}{\frac{78}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 5{,}630769\,\text{s} \approx 5{,}6\,\text{s}.$$

b) Liina aiheuttaa voiman, joka on vain 35 % liinan nimellislujuudesta. Kuorma on sidottu kahdella liinalla, jolloin kuorman eteenpäin liikkumisen estävä voima suurimmillaan on

$$F = 2 \cdot 0{,}35 \cdot F_1 = 2 \cdot 0{,}35 \cdot 20000\,\text{N} = 14\,000\,\text{N} = 14\,\text{kN}.$$

c) TAPA 1.

Tarkastellaan jarrutusta impulssiperiaatteella. Kuorman liikemäärän muutos jarrutuksen aikana on yhtä suuri kuin sidontaliinojen kuormaan kohdistaman voiman impulssi. Jarrutuksen jälkeen nopeus on nolla, joten impulssi on yhtä suuri kuin kuorman liikemäärä alussa. Impulssiperiaatteella

$$I = mv_0$$
$$Ft = mv_0$$
$$m = \frac{Ft}{v_0}.$$

a-kohdan mukaan kuorman hidastumisaika on $t = \frac{2s}{v_0}$.

Kuorman massaksi saadaan

$$m = \frac{F\frac{2s}{v_0}}{v_0} = \frac{2Fs}{{v_0}^2} = \frac{2 \cdot 14000\,\text{N} \cdot 61\,\text{m}}{\left(\frac{78}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 3638{,}3\,\text{kg} \approx 3600\,\text{kg}.$$

TAPA 2.

Newtonin II lain mukaan liinat aiheuttavat kuormalle hidastuvuuden. a-kohdan mukaan kuorman hidastumisaika on $t = \frac{2s}{v_0}$ ja loppunopeus $0 = v_0 - at$.

Sijoitetaan hidastumisaika loppunopeuden yhtälöön ja ratkaistaan hidastuvuus

$$0 = v_0 - a\frac{2s}{v_0}$$

$$a = \frac{{v_0}^2}{2s}.$$

Newtonin II lain mukaan sidontaliinat aiheuttavat kuorman hidastuvan liikkeen

$$F = ma$$

$$F = m\frac{{v_0}^2}{2s}.$$

Kuorman massa voi olla

$$m = \frac{2Fs}{{v_0}^2} = \frac{2 \cdot 14\,000\,\mathrm{N} \cdot 61\,\mathrm{m}}{\left(\frac{78}{3,6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 3638,3\,\mathrm{kg} \approx 3600\,\mathrm{kg}.$$

Tehtävä 13.17.

a) Vesimelonit pudotetaan yhtä korkealta. Molemmilla meloneilla on yhtä suuri potentiaalienergia. Potentiaalienergia muuntuu melonin liike-energiaksi, jolloin mekaniikan energiaperiaatteen mukaan molemmilla meloneilla on yhtä suuri nopeus, kun ne osuvat lattiaan.

b) Ilman kypärää lattiaan osunut meloni hajosi, mutta pyöräilykypärän sisällä oleva vesimeloni ei hajonnut.

c) Liikkuvalla vesimelonilla on liikemäärää, mutta osuman jälkeen paikallaan olevalla melonilla liikemäärä on nolla. Vesimelonin liikemäärä muuttuu ja liikemäärän muutos aiheutuu lattian tukivoiman vesimeloniin aiheuttamasta impulssista. Impulssiperiaatteen mukaan $I = \Delta p$ eli $F\Delta t = \Delta mv$. Ennen osumaa molempien vesimelonien nopeus oli yhtä suuri ja osuman jälkeen ne olivat paikoillaan. Molempien vesimelonien liikemäärä muuttui yhtä paljon, kun kypärän massa on merkityksetön.

Pyöräilykypärä on tehty joustavasta materiaalista, mikä pidentää pyöräilykypärän sisällä olevan vesimelonin törmäysaikaa. Kun voiman vaikutusaika pitenee, impulssiperiaatteen mukaan törmäyksessä vesimeloniin kohdistuva voima pienenee. Pyöräilykypärän sisällä olevaan vesimeloniin siis kohdistuu pienempi voima kuin vesimeloniin, joka ei ole kypärän sisällä. Vesimelonin pinnan tukivoima kestää tämän pienemmän voiman, ja siksi se ei halkea. Tämä on juuri pyöräilykypärän tarkoitus. Kun polkupyöräilijän pää osuu kovaan pintaan, pyöräilykypärä pidentää voiman vaikutusaikaa. Näin päähän kohdistuva voima pienenee, mikä vähentää vammojen vakavuutta.

Tehtävä 13.18.

a) Newtonin II laki ilmenee mittauksessa siinä, että kappaleiden nopeudet muuttuvat ja kappaleet ovat tällöin kiihtyvässä liikkeessä voiman vaikutuksesta.

Newtonin III laki ilmenee törmäyshetkellä, jolloin vaunut aiheuttavat joka hetki toisiinsa yhtä suuret, mutta vastakkaissuuntaiset voimat.

Newtonin I laki ilmenee ennen törmäystä ja törmäyksien jälkeen, sillä tällöin kappaleet etenevät vakionopeuksilla, kun niihin ei vaikuta liikkeen suunnassa voimia.

b) Nopeuden kuvaajan perusteella vaunuun 1 vaikuttava impulssi on I_1 = 0,3098 Ns ja vaunuun 2 vaikuttava impulssi I_2 = 0,3005 Ns. Vaunun 1 nopeuden muutos nopeuden kuvaajan perusteella on

$$\Delta v_1 = 0{,}04\,\mathrm{m/s} - (-0{,}36\,\mathrm{m/s}) = 0{,}40\,\mathrm{m/s}.$$

Vaunun 2 nopeuden muutos $\Delta v_2 = (0{,}67 + 0{,}39)\,\mathrm{m/s} = 1{,}06\,\mathrm{m/s}.$

Tarkastellaan törmäyksiä impulssiperiaatteella

$I_1 = m_1 \Delta v_1$ ja
$I_2 = m_2 \Delta v_2.$

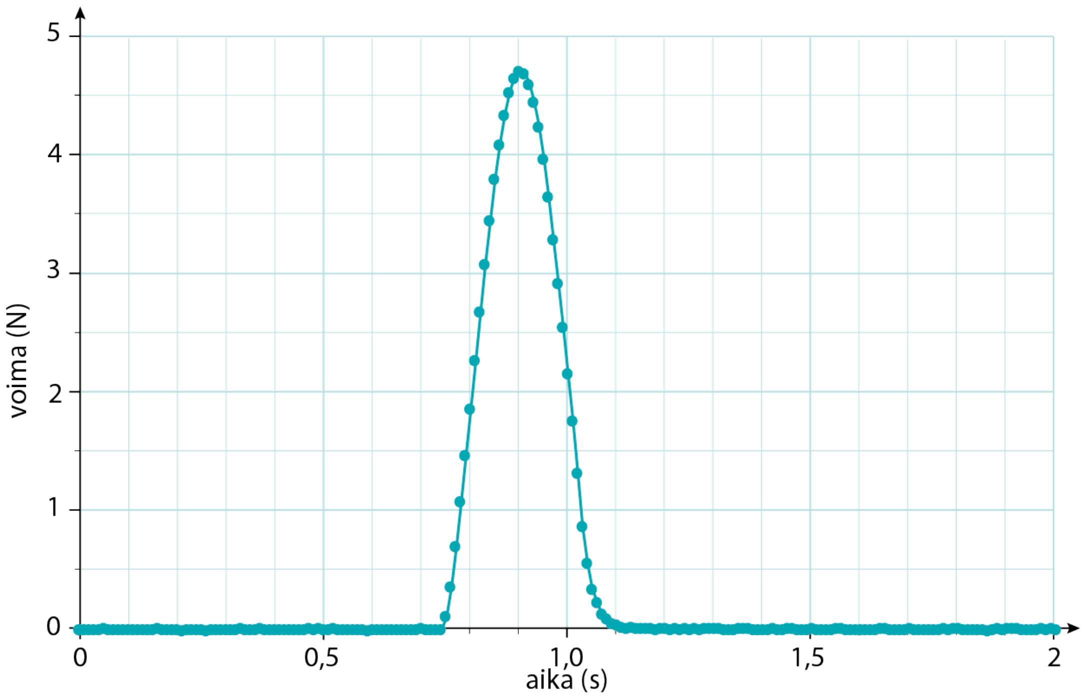
Vaunujen massat ovat

$$m_1 = \frac{I_1}{\Delta v_1} = \frac{0{,}3098\,\mathrm{Ns}}{0{,}40\,\mathrm{m/s}} = 0{,}7745\,\mathrm{kg} \approx 770\,\mathrm{g}$$

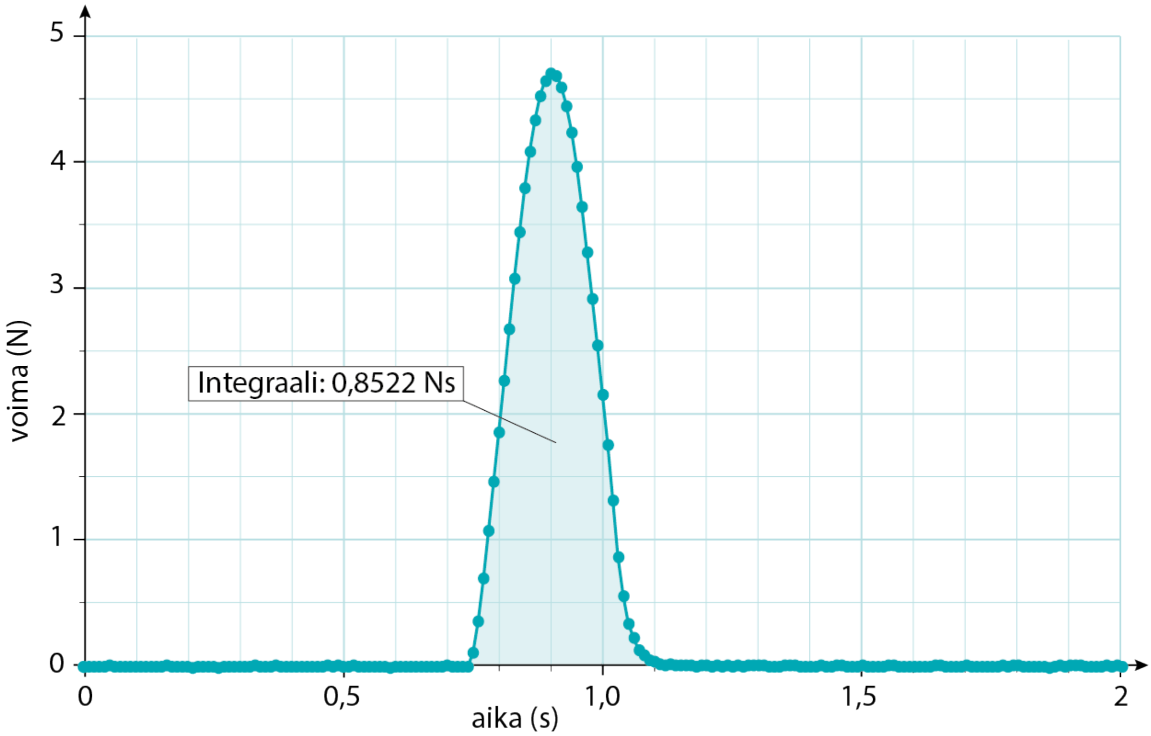
$$m_2 = \frac{I_2}{\Delta v_2} = \frac{0{,}3005\,\mathrm{Ns}}{1{,}06\,\mathrm{m/s}} = 0{,}283\,\mathrm{kg} \approx 280\,\mathrm{g}.$$

Tehtävä 13.19.

a)



b) Seinän tukivoiman vaunuun aiheuttama impulssi saadaan (*t*, *F*)-koordinaatiston ja kuvaajan rajoittaman alueen fysikaalisena pinta-alana. Määritetään fysikaalinen pinta-ala.



Seinän tukivoiman vaunuun aiheuttama impulssi on I = 0,8522 Ns ≈ 0,85 Ns.

c) Vaunun massa m = 0,790 kg

Vaunun nopeus ennen törmäystä v_1 = 0,56 m/s

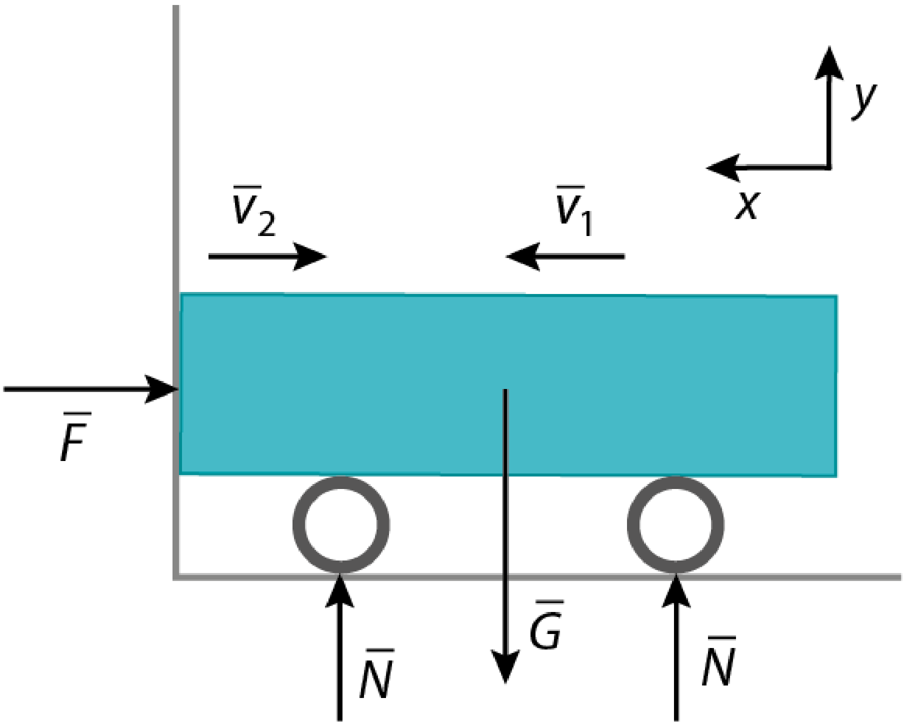
Kun vaunu törmää seinään, seinän vaunuun kohdistama tukivoima aiheuttaa vaunuun impulssin, joka muuttaa vaunun liikemäärää. Impulssiperiaatteen mukaan

$$\overline{I} = \Delta\overline{p}$$

$$\overline{F}\Delta t = \Delta m\overline{v}$$

$$\overline{F}\Delta t = m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1.$$

Valitaan vaunun alkuperäinen suunta positiiviseksi suunnaksi, jolloin



$\bar{F} =$ seinän vaunuun kohdistama voima

$\bar{G} =$ vaunun paino

$\bar{N} =$ lattian vaunuun kohdistama tukivoima

$$-F\Delta t = -mv_2 - mv_1$$
$$F\Delta t = mv_2 + mv_1.$$

Vaunun nopeus törmäyksen jälkeen

$$v_2 = \frac{F\Delta t - mv_1}{m} = \frac{0{,}8522\,\text{Ns} - 0{,}790\,\text{kg} \cdot 0{,}56\,\text{m/s}}{0{,}790\,\text{kg}} = 0{,}51873\,\text{m/s} \approx 0{,}52\,\text{m/s}.$$

Syvennä

Tehtävä 13.21.

a) Rakettimoottorissa hapetinaine kulkee raketin mukana. Suihkumoottori käyttää hapettimena ilmassa olevaa happea.

b) Kun rakettipolttoaine palaa, muodostuu uusia molekyylejä. Uusien molekyylien muodostumisessa sisäenergia pienenee. Sisäenergian muutoksessa vapautunut energia lämmittää ympäröivää polttoainetta ja kaasua.

c) Kaasusuihkun nopeus v_k = 2 400 m/s

Raketin massa alussa M

Massan muutos aikayksikössä $\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dfrac{\frac{M}{100}}{\text{s}}$

Impulssiperiaatteen mukaan $\overline{I} = \overline{F}\Delta t = \Delta\overline{p}$.

Rakettia työntävän voiman impulssi muuttaa raketin liikemäärää.

Aikavälillä Δt raketin liikemäärän muutos Δp_r on yhtä suuri kuin kaasun liikemäärän muutos, $\Delta p_k = m\Delta v_k$, joten

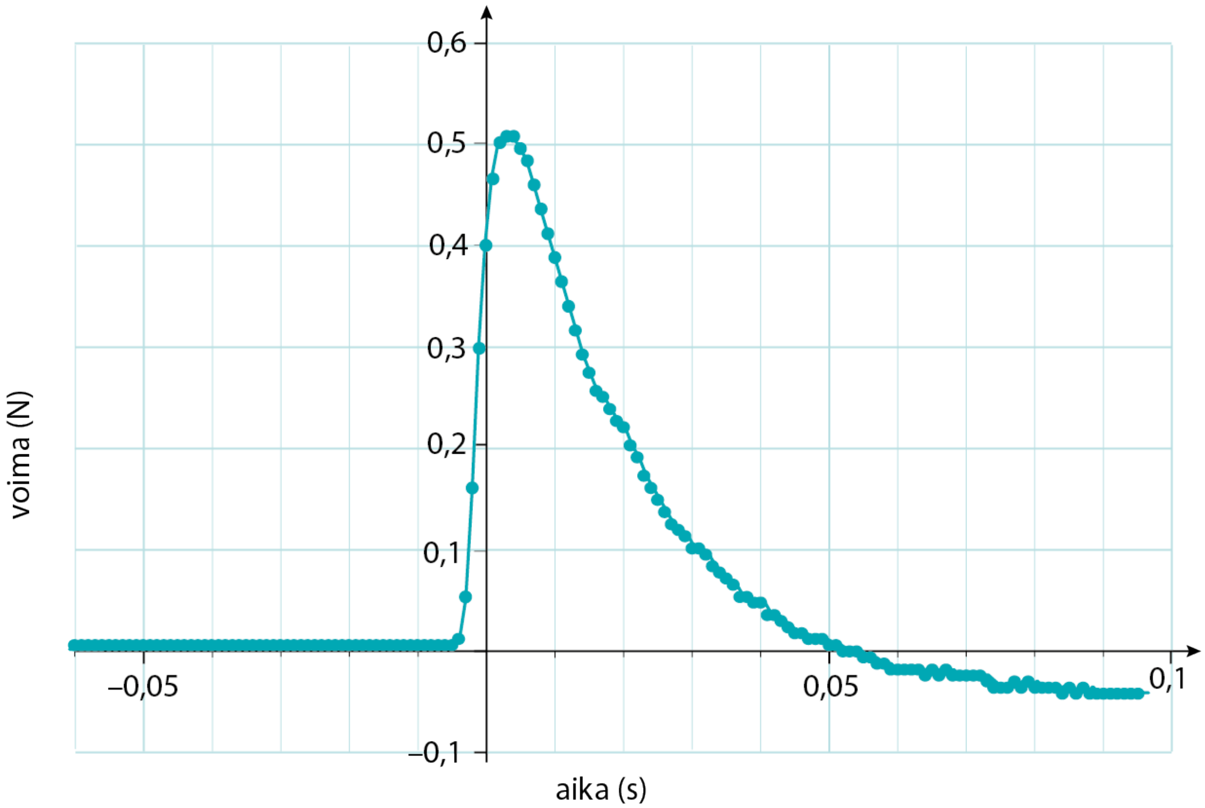
$$F = \frac{\Delta p_r}{\Delta t} = \frac{\Delta m v_k}{\Delta t}.$$

Newtonin II lain mukaan $\sum\overline{F} = m\overline{a}$, joten raketin kiihtyvyys on työntävän voiman ja raketin massan M suhde

$$a = \frac{F}{M} = \frac{\Delta m v_k}{M\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\frac{v_k}{M} = \frac{\frac{\cancel{M}}{100}}{\text{s}} \cdot \frac{2400\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\cancel{M}} = 24\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehtävä 13.22.

a)

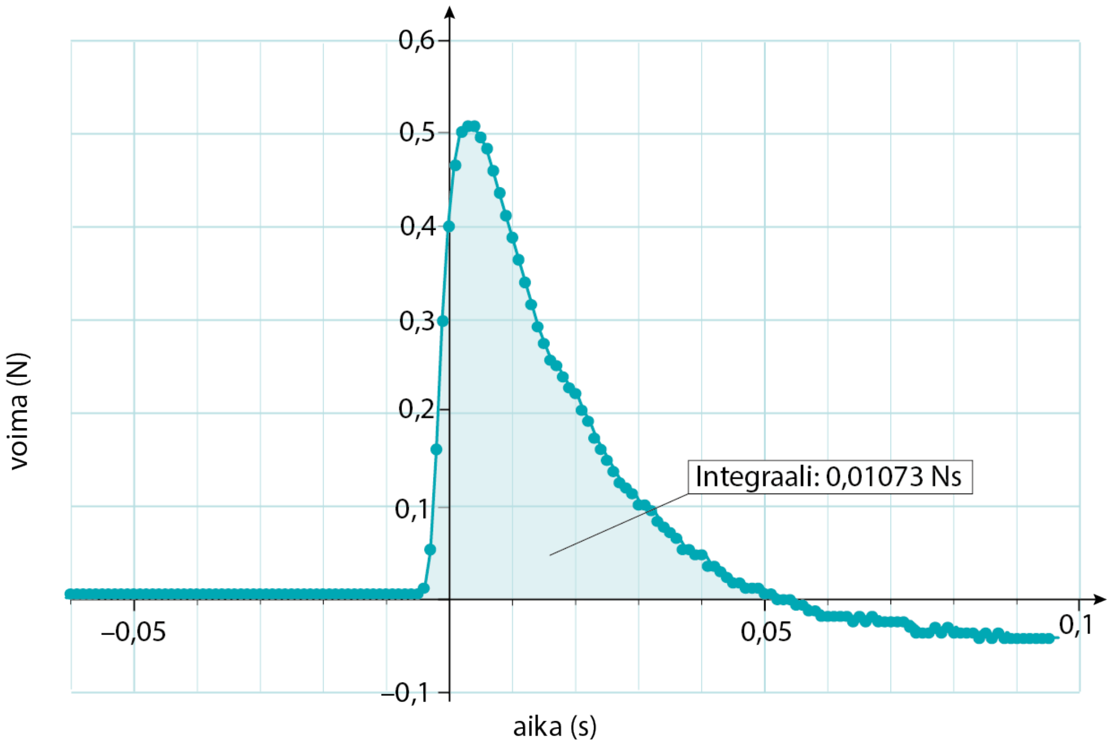


(akselit oikein päin 2 p, mittauspisteet kuvaajassa 1 p, kuvaaja riittävän iso 1 p)

b) Lelun hyppykorkeus videolta määritettynä oli

h = 43,5 cm – 9,5 cm = 34 cm. (1 p)

c) Leluun kohdistuva impulssi saadaan
(t, F)-koordinaatiston kuvaajan ja akselien rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta. (1 p) Määritetään pinta-ala.



(pinta-alan määritys 1 p)

Leluun kohdistuva impulssi on
I = 0,01073 Ns ≈ 0,0107 Ns. (1 p)

d) Tarkastellaan lelun hyppyä impulssiperiaatteella. Leluun kiinnitetyn jousen leluun kohdistama impulssi on yhtä suuri kuin lelun liikemäärän muutos.

$$\bar{I} = \Delta\bar{p}$$

$$\bar{F}\Delta t = \Delta m\bar{v}$$

$$\bar{F}\Delta t = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1.$$

TAI

$$I = \Delta p$$

$$F\Delta t = \Delta mv$$

$$F\Delta t = mv_2 - mv_1.$$

(2 p., myös v_1 voidaan merkitä nollaksi, jos se on sanallisesti perusteltu, jolloin $F\Delta t = mv.$)

Lelun nopeus alussa on nolla, joten lelun lähtönopeudeksi saadaan

$$F\Delta t = mv_2$$

$$v_2 = \frac{F\Delta t}{m} = \frac{0{,}01073\,\text{Ns}}{0{,}0042\,\text{kg}} = 2{,}55476\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(kaava oikein 1 p, tulos oikein kahden tai kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella 1 p)

e) Nalle lähtee d-kohdan nopeudella ja liikkeen ylimmässä kohdassa nallen nopeus on nolla. Tarkastellaan nallen nousukorkeutta mekaniikan energiaperiaatteella. Sovitaan nallen potentiaalienergian nollatasoksi paikka, jossa nalle irtoaa jousesta.

$$\cancel{E}_{\mathrm{pa}} + E_{\mathrm{ka}} = E_{\mathrm{pl}} + \cancel{E}_{\mathrm{kl}}$$
$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gh$$
$$\frac{1}{2}v^2 = gh.$$

(1 p)

Nallen korkeuden muutos

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(2{,}55476\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}33266\,\mathrm{m} \approx 33\,\mathrm{cm}.$$ (1 p)

Videon perusteella nallen korkeuden muutos on 34 cm.

Erot mittaustuloksissa johtuvat siitä, että videolta lelun nousukorkeuden määrittäminen on epätarkkaa. Myös voima-anturin nollaus ei ole ihan onnistunut. Mittauksessa olisi voinut olla hieman enemmän mittauspisteitä, jolloin kuvaajan pinta-ala olisi ollut tarkempi. (1 p)

14. Törmäykset

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 14.1.

Väittämät a), b), d) ja e) ovat oikein.

Korjaukset väittämiin:

c) Heittotilannetta voidaan mallintaa liikemäärän säilymisen avulla. Koska liikemäärä on ennen pallon heittoa nolla, pitää pallon ja heittäjän liikemäärävektorien olla vastakkaissuuntaiset, jotta kokonaisliikemäärä pysyy nollana heiton jälkeenkin.

f) Jos kappaleen lämpötila nousee törmäyksen takia, osa kappaleen alkuperäisestä liike-energiasta on muuntunut lämmöksi, joka ei palaudu kappaleen liike-energiaksi törmäyksen jälkeen. Kappaleen liike-energia siis pienenee törmäyksessä, ja siksi törmäys ei ole täysin kimmoisa.

Tehtävä 14.2.

Kuntopallon massa m_1 = 3,0 kg
Kuntopallon nopeus v_1 = 6,1 m/s
Opiskelijan massa m_2 = 71 kg

Newtonin III lain eli voiman ja vastavoiman lain mukaan kahden kappaleen vuorovaikutustilanteessa kappaleet vaikuttavat toisiinsa yhtä suurilla, mutta vastakkaissuuntaisilla voimilla. Vuorovaikutustilanteessa voiman ja vastavoiman kappaleisiin aiheuttamat impulssit ovat yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset. Opiskelija lähtee liikkeelle vastakkaiseen suuntaan kuin kuntopallo.

Impulssiperiaatteen mukaan impulssi yhtä suuri kuin kappaleen liikemäärän muutos.

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= 0 \\ I_1 &= I_2 \\ \Delta p_1 &= \Delta p_2 \\ m_1 v_1 &= m_2 v_2 . \end{aligned}$$

Opiskelijan nopeus on

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{3{,}0\,\text{kg} \cdot 6{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{71\,\text{kg}} = 0{,}2577\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}26\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Opiskelija liikkuu vastakkaiseen suuntaan kuin kuntopallo nopeudella 0,26 m/s.

Tehtävä 14.3.

Soutajan massa m_1 = 85 kg
Soutajan nopeus v_1 = 4,0 m/s
Veneen massa m_2 = 115 kg
Soutajan ja veneen nopeus lopuksi u

Mallinnetaan tilannetta kimmottomana törmäyksenä. Oletetaan, että ulkoisten voimien vaikutus on mitätön. Liikemäärän säilymislain mukaan $\overline{p}_{\text{alussa}} = \overline{p}_{\text{lopussa}}$.

Valitaan soutajan ja veneen etenemissuunta positiiviseksi suunnaksi.

Alkutilanteessa veneen liikemäärä on nolla, ja ainoastaan soutajalla on liikemäärä, $p_{\text{alussa}} = m_1v_1$.

Törmäyksen jälkeen vene ja soutaja liikkuvat yhdessä, ja niillä on yhteinen liikemäärä, $p_{\text{lopussa}} = (m_1 + m_2)u$.

Liikemäärä säilyy ja sen perusteella saadaan veneen nopeus

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)u$$

$$u = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} = \frac{85\,\text{kg} \cdot 4{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{85\,\text{kg} + 115\,\text{kg}} = 1{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Soutaja ja vene etenevät lopuksi nopeudella 1,7 m/s.

Tehtävä 14.4.

Kanahaukan nopeus alussa v = 14 m/s
Kanahaukan ja peltopyyn nopeus törmäyksen jälkeen
u = 9,3 m/s
Peltopyyn massa m_2 = 490 g
Kanahaukan massa m_1

Tarkastellaan tilannetta kimmottomana törmäyksenä. Oletetaan, että ulkoisten voimien vaikutus on mitätön. Törmäyksessä liikemäärä säilyy, $\overline{p}_{\text{alussa}} = \overline{p}_{\text{lopussa}}$. Alussa liikemäärää on vain haukalla, iskun jälkeen linnut jatkavat liikettä yhdessä. Valitaan liikkeen suunta positiiviseksi suunnaksi.

$$\begin{aligned} m_1 v &= \left(m_1 + m_2\right) u \\ m_1 v &= m_1 u + m_2 u \\ m_1 v - m_1 u &= m_2 u \\ m_1 (v - u) &= m_2 u \end{aligned}$$

Kanahaukan massa on

$$m_1 = \frac{m_2 u}{v - u} = \frac{0{,}49\,\text{kg} \cdot 9{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{14\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 9{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}96957\,\text{kg} \approx 970\,\text{g}.$$

Tehtävä 14.5.

Maalivahdin massa m_1 = 77 kg
Jalkapallon massa m_2 = 430 g = 0,43 kg
Jalkapallon nopeus v_2 = 19 m/s
Maalivahdin nopeus v_1

Maalivahti ja jalkapallo pysähtyvät, kun maalivahdin ja pallon nopeus lopuksi on $u = 0$.

Oletetaan, että jalkapallon ja maalivahdin muodostavaan systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia. Mallinnetaan tilannetta kimmottomana törmäyksenä, jossa liikemäärä säilyy.

Alkutilanteessa jalkapallo ja maalivahti liikkuvat vastakkaisiin suuntiin liikemäärällä

$$\overline{p}_{\text{alussa}} = m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2.$$

Rajatapauksessa törmäyksessä jalkapallo ja maalivahti pysähtyvät, $\overline{p}_{lopussa} = \overline{0}$.

Liikemäärän säilymislain mukaan $\overline{p}_{\text{alussa}} = \overline{p}_{\text{lopussa}}$.

Kun maalivahdin etenemissuunta valitaan positiiviseksi suunnaksi, saadaan maalivahdin nopeudeksi liikemäärän säilymislain mukaan

$$m_1v_1 - m_2v_2 = 0$$

$$m_1v_1 = m_2v_2$$

$$v_1 = \frac{m_2v_2}{m_1} = \frac{0{,}43\,kg \cdot 19\frac{\text{m}}{\text{s}}}{77\,\text{kg}} = 0{,}106104\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}11\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Maalivahti ei liiku pallon osumasta taaksepäin, kun maalivahti hyppää vähintään nopeudella 0,11 m/s eteenpäin.

Tehtävä 14.6.

Ulkoiluttajan massa m_1 = 75 kg
Ulkoiluttajan nopeus v_1 = 1,4 m/s
Koiran massa m_2 = 25 kg
Koiran nopeus v_2 = 5,7 m/s
Koiran ulkoiluttajan ja koiran nopeus lopuksi u

Oletetaan, että ulkoiluttajan ja koiran muodostamaan systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia, jolloin tilannetta voidaan mallintaa kimmottomana törmäyksenä, jossa liikemäärä säilyy.

Liikemäärän säilymislain mukaan $\overline{p}_{\text{alussa}} = \overline{p}_{\text{lopussa}}$.

Valitaan koiran ja ulkoiluttajan etenemissuunta positiiviseksi suunnaksi.

Aluksi liikemäärä on $p_{\text{alussa}} = m_1v_1 + m_2v_2$.

Lopuksi ulkoiluttajalla ja koiralla on yhteinen liikemäärä $p_{\text{lopussa}} = (m_1 + m_2)u$.

Liikemäärän säilymislaista saadaan

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u.$$

Koira ja ulkoiluttaja liikkuvat nopeudella

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{75\,\text{kg} \cdot 1{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 25\,\text{kg} \cdot 5{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{75\,\text{kg} + 25\,\text{kg}} = 2{,}475\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Koira ja ulkoiluttaja liikkuvat talutushihnan kiristymisen jälkeen eteenpäin nopeudella 2,5 m/s.

Tehtävä 14.7.

a) Kun kaksi saman massaista kuulaa törmää toisiinsa kimmoisasti, kuulien nopeudet muuttuvat. Kuulien liikesuunnat ja niiden nopeuksien suuruudet vaihtuvat.

b) Kun kevyempi kuula törmää kimmoisasti paikallaan olevaan painavampaan kuulaan, painavampi kuula lähtee liikkeelle kevyemmän kuulan alkunopeutta pienemmällä nopeudella. Kevyempi kuula kimpoaa takaisin päin alkuperäiseen nopeuteen verrattuna pienemmällä nopeudella.

c) Kuulat pysähtyvät törmäyksessä, jos niillä on yhtä suuri mutta vastakkaissuuntainen nopeus ja törmäyksessä säilyy 0 % liike-energiasta.

d) Jos törmäys on kimmoisa, eli liike-energia säilyy törmäyksessä, alkutilanteessa liikkunut ensimmäinen kuula pysähtyy ja toinen kuula alkaa liikkua ensimmäisen kuulan alkunopeudella. Jos liike-energia ei säily törmäyksessä, paikallaan ollut kuula lähtee ensimmäisen kuulan nopeutta pienemmällä nopeudella liikkeelle. Ensimmäisen kuulan nopeus pienenee, mutta kuula ei pysähdy.

Tehtävä 14.8.

Kalastajan massa $m_1 = 67$ kg
Veneen massa $m_2 = 820$ kg
Kalastajan nopeus hypyn jälkeen $u_1 = 1{,}8$ m/s
Veneen ja kalastajan nopeus alussa $v = 0{,}36$ m/s
Veneen nopeus lopussa u_2

Oletetaan, että veneen ja kalastajan liiketilaa ei tilanteessa muuta mikään muu voima kuin kalastajan hyppyyn liittyvät voimat. Silloin liikemäärä säilyy, kun kalastaja hyppää veneestä pois, $\overline{p}_{\text{alussa}} = \overline{p}_{\text{lopussa}}$.

Valitaan veneen ja kalastajan etenemissuunta positiiviseksi suunnaksi.

Alkutilanteessa veneellä ja kalastajalla on yhteinen liikemäärä $p_{\text{alussa}} = (m_1 + m_2)v$.

Hypyn jälkeen kalastajan ja veneen liikemäärä on $p_{\text{lopussa}} = m_1u_1 + m_2u_2$.

Kirjoitetaan liikemäärän säilymislain mukainen yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä veneen nopeus hypyn jälkeen.

$$(m_1+m_2)v = m_1u_1 + m_2u_2$$

$$u_2 = \frac{(m_1+m_2)v - m_1u_1}{m_2}$$

$$= \frac{(67\,\text{kg}+820\,\text{kg})\cdot 0{,}36\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 67\text{kg}\cdot 1{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{820\,\text{kg}} = 0{,}2423\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}24\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vene liikkuu hypyn jälkeen nopeudella u_2 = 0,24 m/s alkuperäiseen suuntaan.

Sovella

Tehtävä 14.9.

Törmäys 1

Vaunujen massat ovat yhtä suuret. Kun liikkuva vaunu törmää saman massaiseen paikalla olevaan vaunuun ja ne jatkavat yhdessä törmäyksen jälkeen, vaunujen nopeus törmäyksen jälkeen on pienempi kuin ennen törmäystä.

Törmäys 2

Tilanne on sama kuin törmäyksessä 1, mutta vaunun 2 massa on suurempi. Tällöin vaunut liikkuvat törmäyksen jälkeen vielä pienemmällä nopeudella kuin törmäyksen 1 jälkeen.

Törmäys 3

Tilanteessa vaunut jatkavat erillään törmäyksen jälkeen. Jos saman massainen vaunu törmää paikalla olevaan saman massaiseen vaunuun, aluksi liikkuva vaunu jää paikoilleen ja aluksi paikallaan oleva vaunu lähtee samalla nopeudella kuin siihen törmännyt vaunu.

Törmäys 4

Kun saman massaiset vaunut törmäävät toisiinsa eri nopeuksilla, törmäyksen jälkeen vaunujen nopeudet ovat toistensa nopeuden suuruiset. Vaunut lähtevät törmäyksen jälkeen vastakkaiseen suuntaan, mistä ne tulivat ennen törmäystä.

Törmäys 5

Kun pienempi massainen vaunu törmää paikallaan olevaan suurempi massaiseen vaunuun, suurempi massainen vaunu lähtee alkuperäisen vaunun suuntaan pienemmällä nopeudella kuin siihen törmännyt vaunu. Alun perin liikkeessä olevan vaunun nopeuden suunta muuttuu päinvastaiseksi ja nopeus pienenee.

Törmäys 6

Kun suurempi massainen vaunu törmää paikallaan olevaan pienempi massaiseen vaunuun, molemmat vaunut liikkuvat samaan suuntaan kuin aluksi liikkuva suurempi massainen vaunu. Pienempi massaisen vaunun nopeus törmäyksen jälkeen on suurempi ja suurempi massaisen vaunun pienempi, kuin ennen törmäystä liikkuvan suurempi massaisen vaunun nopeus.

Tehtävä 14.10.

Mustekalan massa m_1 = 7,2 kg
Veden massa m_2 = 1,45 kg

a) Mustekalan nopeus v_1 = 2,5 m/s

Tarkastellaan mustekalaa ja sen suihkuttamaa vettä, ja oletetaan, että ulkoiset voimat eivät vaikuta tilanteeseen. Kun mustekala suihkuttaa vettä, on liikemäärän säilymislain mukaan, $\overline{p}_{\text{alussa}} = \overline{p}_{\text{lopussa}}$.

Alussa liikemäärä on nolla, ja lopussa liikemäärä on summa mustekalan ja suihkutetun veden liikemääristä, jotka ovat vastakkaisiin suuntiin.

Suunnat huomioituna

$$0 = p_1 - p_2$$
$$0 = (m_1 - m_2)v_1 - m_2 v_2$$
$$(m_1 - m_2)v_1 = m_2 v_2.$$

Veden nopeus suihkutuksessa

$$v_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_2} = \frac{(7{,}2\,\text{kg} - 1{,}45\,\text{kg}) \cdot 2{,}5\,\text{m/s}}{1{,}45\,\text{kg}} = 9{,}9138\,\text{m/s} \approx 9{,}9\,\text{m/s}.$$

b) Mustekalan liike-energia suihkutuksen jälkeen a-kohdan tuloksen mukaan

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)v_1^{\,2}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (7{,}2\,\text{kg} - 1{,}45\,\text{kg}) \cdot (2{,}5\,\text{m/s})^2 = 17{,}9688\,\text{J} \approx 18\,\text{J}.$$

c) Veden suihkutusaika Δt = 130 ms = 0,130 s

Impulssiperiaatteen mukaan voiman aiheuttama impulssi on yhtä suuri kuin mustekalan liikemäärän muutos. Koska mustekala on aluksi paikoillaan, on

$$I = \Delta p$$
$$F\Delta t = \Delta mv$$
$$F\Delta t = mv.$$

Keskimääräinen voima suihkutuksen aikana on

$$F = \frac{mv}{\Delta t} = \frac{(7{,}2\,\text{kg} - 1{,}45\,\text{kg}) \cdot 2{,}5\,\text{m/s}}{0{,}130\,\text{s}} = 110{,}5769\,\text{N} \approx 110\,\text{N}.$$

Tehtävä 14.11.

Punaisen auton nopeus alussa $v_1 = 2{,}1$ m/s
Sinisen auton nopeus alussa $v_2 = 1{,}1$ m/s
Punaisen auton nopeus lopussa $u_1 = 0{,}21$ m/s
Punaisen auton massa $m_1 = 1640$ kg
Sinisen auton massa $m_2 = 1320$ kg

a) Joustopuskurit lisäävät törmäysaikaa. Törmäyksessä voiman impulssi $I = F\Delta t$. Kun törmäysaika pitenee Δt, joustopuskurit pienentävät törmäyksessä vaikuttavaa voimaa F.

b) Oletetaan, että ulkoisten voimien vaikutus on törmäyksessä olematon, jolloin törmäyksessä liikemäärä säilyy, $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$. Valitaan punaisen auton alkunopeus positiiviseksi suunnaksi

$$m_1v_1 - m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2.$$

Sinisen auton nopeus törmäyksen jälkeen

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{m_1v_1 - m_2v_2 - m_1u_1}{m_2} \\ &= \frac{1640\,\text{kg} \cdot 2{,}1\,\text{m/s} - 1320\,\text{kg} \cdot 1{,}1\,\text{m/s} - 1640\,\text{kg} \cdot 0{,}21\,\text{m/s}}{1320\,\text{kg}} \\ &= 1{,}2481\,\text{m/s} \approx 1{,}2\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

Koska nopeus on positiivinen, sininen auto liikkuu törmäyksen jälkeen punaisen auton suuntaan.

c) Liike-energian muutos

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= \Sigma E_{k,\mathrm{l}} - \Sigma E_{k,\mathrm{a}} \\ &= \frac{1}{2}m_2u_2^2 + \frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_2u_2^2 + m_1u_1^2 - m_2v_2^2 - m_1v_1^2) \\ &= \frac{1}{2}(1320\,\mathrm{kg}\cdot\left(1{,}2481\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 1640\,\mathrm{kg}\cdot\left(0{,}21\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \\ &\quad -1320\,\mathrm{kg}\cdot\left(1{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 1640\,\mathrm{kg}\cdot\left(2{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2) \\ &= -3350{,}5\,\mathrm{J} \approx -3{,}4\,\mathrm{kJ}.\end{aligned}$$

Liike-energia pieneni 3,4 kJ.

Tehtävä 14.12.

a) Luodin nopeus määritetään ballistisella heilurilla ampumalla luoti paljon luotia painavampaan kappaleeseen, esimerkiksi puupalikkaan. Painava kappale roikkuu paikallaan. Törmäyksessä luoti tarttuu kappaleeseen ja liikemäärä säilyy. Kappaleen ja luodin heilahduskorkeus kertoo systeemin mekaanisen energian suuruuden. Mekaanisen energian suuruudesta voidaan laskea kappaleen nopeus törmäyksen jälkeen. Törmäyksen jälkeisestä nopeudesta voidaan edelleen laskea liikemäärän säilymislain avulla luodin alkunopeus.

b) Luodin massa m = 2,65 g = 0,00265 kg
Esimerkiksi palikan massalla M = 0,50 kg
heilahduskorkeus on h = 0,15 m.

Palikan ja luodin yhteinen potentiaalienergia on heilahduksen ääriasennossa yhtä suuri kuin systeemin liike-energia heti törmäyksen jälkeen.

$$(M+m)gh=\frac{1}{2}(M+m)u^2$$

Yhtälöstä voidaan ratkaista törmäyksen jälkeinen nopeus

$$u=\sqrt{\frac{2(M+m)gh}{M+m}}=\sqrt{2gh}.$$

Palikka on aluksi paikallaan, joten liikemäärän säilyminen voidaan esittää yhtälöllä

$mv = (M + m)u$,

joten luodin nopeus ennen törmäystä oli

$$v=\frac{(M+m)u}{m}=\frac{(M+m)\sqrt{2gh}}{m}$$

$$=\frac{(0{,}50\,\text{kg}+0{,}00265\text{kg})\sqrt{2\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}15\,\text{m}}}{0{,}00265\text{kg}}$$

$$=325{,}39805\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 330\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehtävä 14.13.

Opiskelijan nopeus v_1 = 6,3 m/s
Opiskelijan massa m_1 = 58 kg
Pikkusisaren ja kelkan yhteismassa
m_2 = 32 kg + 8,5 kg = 40,5 kg
Kelkan ja tien välinen liukukitkakerroin μ = 0,14

a) Opiskelijan hyppyä kelkan kyytiin voidaan tarkastella kimmottomana törmäyksenä, jossa ulkoisten voimien vaikutus on hyvin vähäinen.

Törmäyksessä liikemäärä säilyy, $\overline{p}_{\text{alussa}} = \overline{p}_{\text{lopussa}}$. Kelkan nopeus aluksi on nolla, jolloin myös liikemäärä on nolla. Valitaan opiskelijan alkunopeuden suunta positiiviseksi

$$p_1 + p_2 = p_3$$
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v.$$

Kelkan ja henkilöiden nopeus hypyn jälkeen on

$$v = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{58\,\text{kg} \cdot 6{,}3\,\text{m/s}}{58\,\text{kg} + 40{,}5\,\text{kg}} = 3{,}7096\,\text{m/s} \approx 3{,}7\,\text{m/s}.$$

b) Kelkan liike-energia liikkeelle lähdön jälkeen ja a)-kohdan mukaan

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)})^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1{}^2 v_1{}^2}{(m_1 + m_2)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(58\,\mathrm{kg})^2(6{,}3\,\mathrm{m/s})^2}{(58\,\mathrm{kg} + 40{,}5\,\mathrm{kg})} = 677{,}75\,\mathrm{J} \approx 680\,\mathrm{J}.$$

c) Kun kelkkailija liukuu vaakasuoralla tiellä ja pysähtyy loppunopeuden ollessa nolla, on työperiaatteen mukaan liike-energian muutos yhtä suuri kuin kitkan tekemä työ

$$W = \Delta E_k = E_{k,\mathrm{a}}$$

$$F_\mu s = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kun kelkka liukuu vaakasuoralla alustalla, on *N* = *G* = *mg* ja kitkalle on voimassa $F_\mu = \mu N$. Liukumismatka on

$$s = \frac{mv^2}{2F_\mu} = \frac{mv^2}{2\mu mg} = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{(3{,}7096\,\mathrm{m/s})^2}{2\cdot 0{,}14\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 5{,}00998\,\mathrm{m} \approx 5{,}0\,\mathrm{m}.$$

TAI

$$W = \Delta E_\mathrm{k} = E_\mathrm{ka}$$

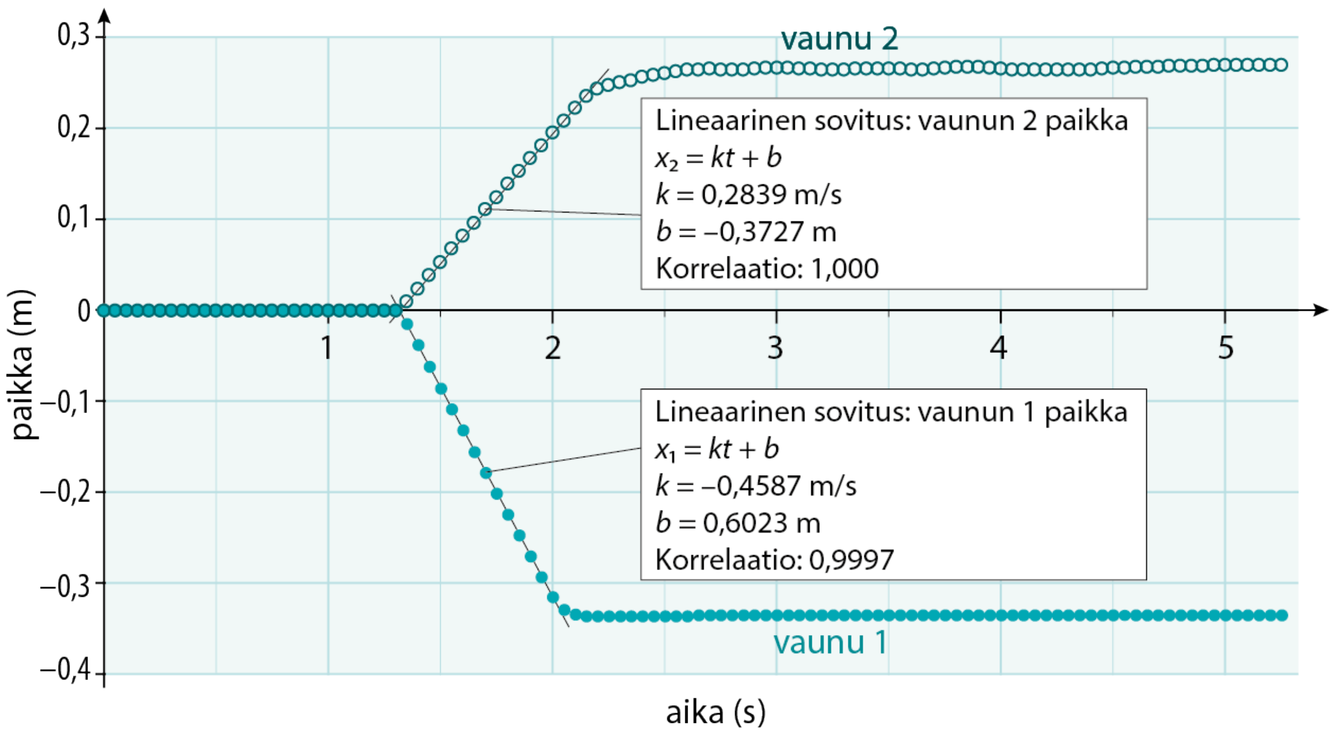
$$F_\mu s = E_\mathrm{ka}$$

a- ja b-kohdan mukaan ja kun kelkka liukuu vaakasuoralla alustalla, on *N* = *G* = *mg* ja kitkalle on voimassa $F_\mu = \mu N$. Liukumismatka on

$$s = \frac{E_k}{\mu mg}$$

Tehtävä 14.15.

a)



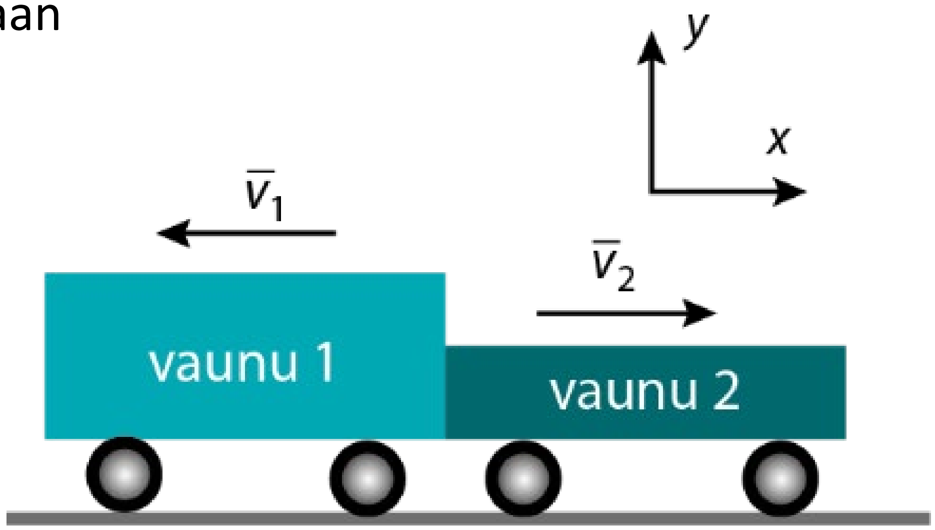
Vaunun 1 nopeus on $v_1 = -0{,}4587$ m/s $\approx -0{,}46$ m/s.

Vaunun 2 nopeus on $v_2 = 0{,}2839$ m/s $\approx 0{,}28$ m/s.

Vaunut liikkuvat vastakkaisiin suuntiin, mikä näkyy nopeuden etumerkeissä.

b) Vaunun 1 massa m_1 = 567 g

Vaunuradalla ulkoiset voimat ovat häviävän pienet. Tilanteessa liikemäärä säilyy, $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$. Alussa vaunut olivat paikoillaan, jolloin vaunujen liikemäärien summa on nolla. Lopussa vaunut kulkevat eri suuntiin. Liikemäärien summa on edelleen nolla. Sovitaan vaunun 2 nopeus positiiviseksi. Liikemäärän säilymislain mukaan



$$0 = -p_1 + p_2$$
$$0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Vaunujen nopeudet saadaan a)-kohdan mukaan. Käytetään arvoja ilman suuntia ilmaisevia etumerkkejä, sillä suunnat on huomioitu jo liikemäärissä. Vaunun 2 massa on

$$m_2 = \frac{m_1 v_1}{v_2} = \frac{567\,\text{g} \cdot 0{,}4587\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}2839\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 916{,}107\,\text{g} \approx 916\,\text{g}.$$

c) Tarkastellaan tilannetta mekaniikan energiaperiaatteella. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi vaunun taso. Näin ollen potentiaalienergia ei tilanteessa muutu lainkaan.

$$E_{\text{ka1}} + E_{\text{ka2}} + W = E_{\text{kl1}} + E_{\text{kl2}}.$$

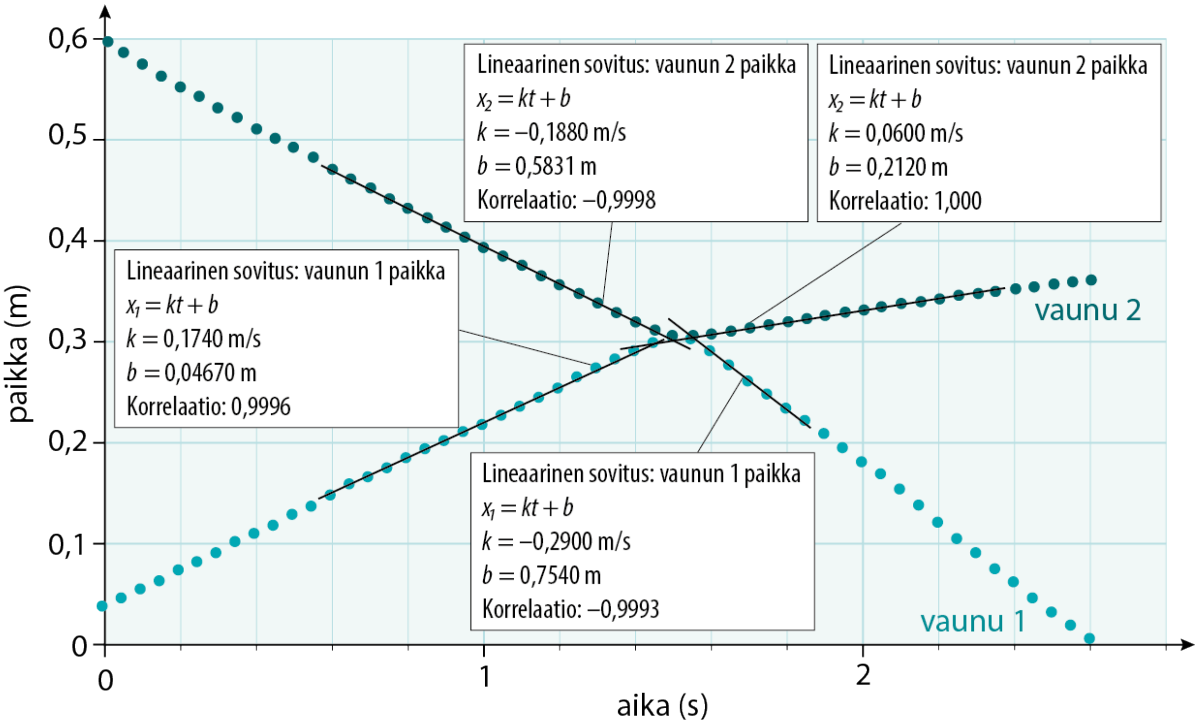
Koska vaunut ovat alussa paikoillaan, $E_{\text{ka 1}} = 0$ ja $E_{\text{ka 2}} = 0$.

Jousen aiheuttaman voiman tekemäksi työksi saadaan

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) \\
&= \frac{1}{2}\cdot(0{,}567\,\text{kg}\cdot\left(0{,}4587\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 0{,}916107\,\text{kg}\cdot\left(0{,}2839\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2) \\
&= 0{,}09656876\,\text{J} \approx 96{,}6\,\text{mJ}.
\end{aligned}$$

Tehtävä 14.16.

a) Nopeus saadaan (t, x)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Määritetään vaunujen nopeudet ennen ja jälkeen törmäyksen.



Vaunun 1 nopeus ennen törmäystä $v_1 = 0,174$ m/s

Vaunun 2 nopeus ennen törmäystä $v_2 = -0,188$ m/s

Vaunun 1 nopeus törmäyksen jälkeen $u_1 = -0,290$ m/s

Vaunun 2 nopeus törmäyksen jälkeen $u_2 = 0,060$ m/s

b) Vaunun 1 massa m_1 = 0,606 kg

Vaunun 2 massa m_2 = 1,126 kg

Kimmoisassa törmäyksessä liikemäärä ja liike-energia säilyvät. Siten ennusteen mukaan vaunujen kokonaisliikemäärä ja kokonaisliike-energia ovat samat ennen ja jälkeen törmäyksen.

Määritetään liikemäärien ja liike-energioiden summat ennen ja jälkeen törmäyksen. Liikemäärien summa ennen törmäystä, kun vaunun 1 suunta on positiivinen

$$\begin{aligned}\Sigma p_{\mathrm{a}} &= m_1 v_1 - m_2 v_2 \\ &= 0{,}606\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}174\,\mathrm{m/s} - 1{,}126\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}188\,\mathrm{m/s} \\ &= -0{,}106244\,\mathrm{kgm/s} \approx -0{,}11\,\mathrm{kgm/s}.\end{aligned}$$

Liikemäärä törmäyksen jälkeen edellinen suunta huomioiden

$$\begin{aligned}\Sigma p_{\mathrm{l}} &= -m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ &= -0{,}606\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}290\,\mathrm{m/s} - 1{,}126\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}060\,\mathrm{m/s} \\ &= -0{,}10818\,\mathrm{kgm/s} \approx -0{,}11\,\mathrm{kgm/s}.\end{aligned}$$

Liike-energia ennen törmäystä

$$\Delta E_{k,\mathrm{a}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{\ 2}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 0{,}606\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}174\,\mathrm{m/s})^2 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}126\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}180\,\mathrm{m/s})^2$$
$$= 0{,}0274148\,\mathrm{J} \approx 27{,}4\,\mathrm{mJ}.$$

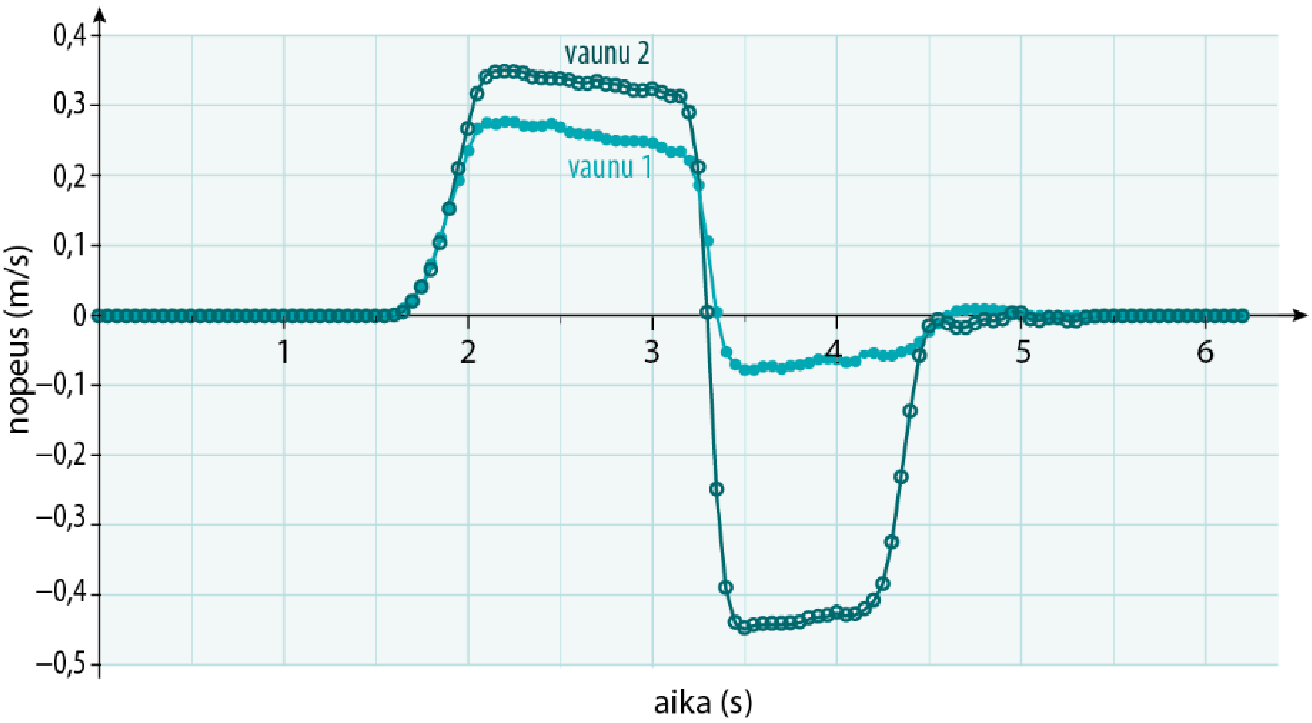
Liike-energia törmäyksen jälkeen

$$\Delta E_{k,\mathrm{l}} = \frac{1}{2}m_1 u_1^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2 u_2^{\ 2}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 0{,}606\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}290\,\mathrm{m/s})^2 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}126\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}060\,\mathrm{m/s})^2$$
$$= 0{,}0275091\,\mathrm{J} \approx 27{,}5\,\mathrm{mJ}.$$

Mittaustarkkuuden rajoissa liikemäärät ja liike-energiat ovat ennusteen mukaiset eli vaunujen liikemäärät ja liike-energiat säilyvät törmäyksessä.

Tehtävä 14.17.

a)



b) Törmäys alkoi ajanhetkellä 3,16 s, koska silloin molempien vaunujen nopeudet alkoivat selvästi muuttua. Törmäys päättyi ajanhetkellä 3,5 s, sillä sen jälkeen nopeus ei juurikaan muuttunut tai muutos oli hyvin pientä. Määritetään vaunujen nopeudet ennen törmäystä kuvaajasta.

$v_1 = 0{,}234 \text{ m/s} \approx 0{,}23 \text{ m/s}$

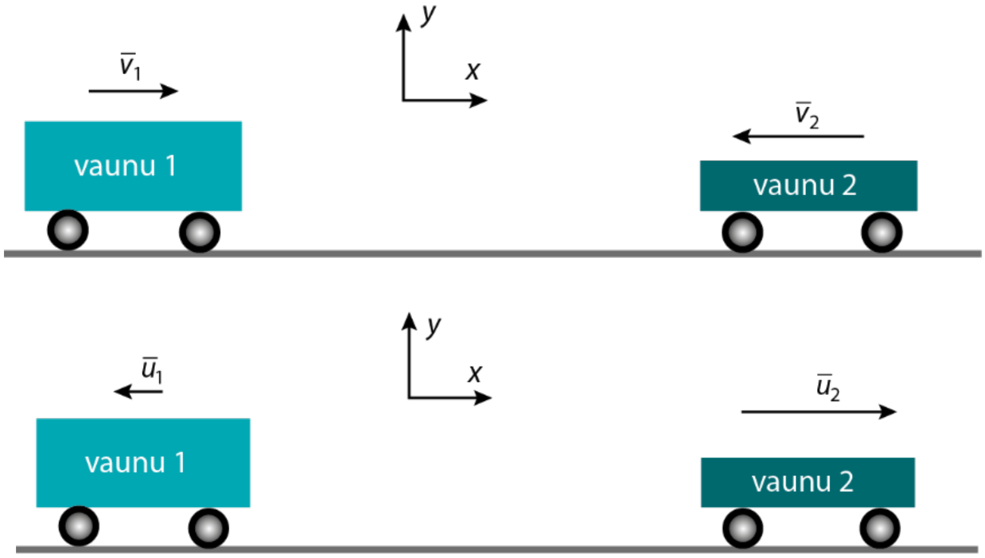
$v_2 = 0{,}314 \text{ m/s} \approx 0{,}31 \text{ m/s}$

Vaunujen nopeudet törmäyksen jälkeen

$u_1 = -0{,}075 \text{ m/s} \approx -0{,}075 \text{ m/s}$

$u_2 = -0{,}442 \text{ m/s} \approx -0{,}44 \text{ m/s}$

c) Sovitaan vaunun 1 alkuperäinen liikesuunta positiiviseksi. Muut nopeudet on esitetty kuvassa.



Kun nopeuksien suunnat huomioidaan, vaunujen liikemäärien summiksi alussa ja lopussa saadaan

$$\begin{aligned}\Sigma p_{\text{alussa}} &= m_1 v_1 - m_2 v_2 \\ &= 0{,}827\,\text{kg} \cdot 0{,}234\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}330\,\text{kg} \cdot 0{,}314\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 0{,}089898\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}} = 0{,}090\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma p_{\text{lopussa}} &= -m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ &= -0{,}827\,\text{kg} \cdot 0{,}075\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 0{,}330\,\text{kg} \cdot 0{,}442\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 0{,}083835\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}} = 0{,}084\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}}.\end{aligned}$$

Koska liikemäärien summa alussa on erisuuri kuin lopussa, liikemäärä ei täysin säily.

Tehtävä 14.18.

Korkeuden muutos h = 0,136 m

Luodin massa m_1 = 0,91 g

Luodin massa m_2 = 105,2 g

a) Luodin ja puupalikan potentiaalienergian muutos

$$\begin{aligned}E_p &= (m_1 + m_2)gh \\ &= (0{,}91 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} + 105{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}136\,\text{m} \\ &= 0{,}1415677\,\text{J} \approx 140\,\text{mJ}.\end{aligned}$$

b) Mekaanisen energian säilymislain mukaan, kun lähtökorkeus asetetaan potentiaalienergian nollatasoksi ja korkeimmassa kohdassa liike-energia on nolla

$$\begin{aligned}E_k &= E_p \\ \frac{1}{2}mv^2 &= mgh \\ \frac{1}{2}v^2 &= gh.\end{aligned}$$

Palikan nopeus heti osuman jälkeen

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}136\,\text{m}} = 1{,}6334\,\text{m/s} \approx 1{,}6\,\text{m/s}.$$

c) Tarkastellaan luodin törmäystä palikkaan liikemäärän säilymislailla. Aluksi palikka on paikoillaan. Luodin sekä palikan ja luodin nopeudet ennen ja jälkeen törmäyksen ovat samat. Liikemäärä säilyy

$$p_{\text{luoti}} = p_{\text{luoti ja palikka}}$$
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2.$$

Luodin nopeus ennen törmäystä b-kohdan tuloksen mukaan

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) v_2}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2)\sqrt{2gh}}{m_1}$$
$$= \frac{(0{,}91\,\text{g} + 105{,}2\,\text{g})}{0{,}91\,\text{g}} \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}136\,\text{m}} = 190{,}47\,\text{m/s} \approx 190\,\text{m/s}.$$

Tehtävä 14.19.

a) Pallot putoavat päällekkäin koko ajan samalla nopeudella. Pallojen nopeus kasvaa koko putoamisen ajan. Koripallo törmää pöydälle. Törmäyksen jälkeen koripallo lähtee ylöspäin pienemmällä nopeudella kuin sen nopeus oli ennen kuin se osui pöytään. Tennispallon nopeus oli huomattavasti suurempi kuin koripallon nopeus, kun tennispallon oli törmännyt koripalloon. Koripallon nopeus selvästi pienenee, kun se nousee kohti lakikorkeutta. Lakikorkeuden jälkeen koripallon lähtee uudelleen alaspäin ja pallon nopeus kasvaa. Tennispallon nopeuden pienenemistä ei havaita.

b) Tarkastellaan pallojen nopeuksien kasvua mekaanisen energian säilymisen avulla. Aluksi palloilla on potentiaalienergiaa. Kun pallon liikkuvat kohti pöytää, muuntuu pallojen potentiaalienergia pallojen liike-energiaksi

$$E_p = E_{\mathrm{k}}$$

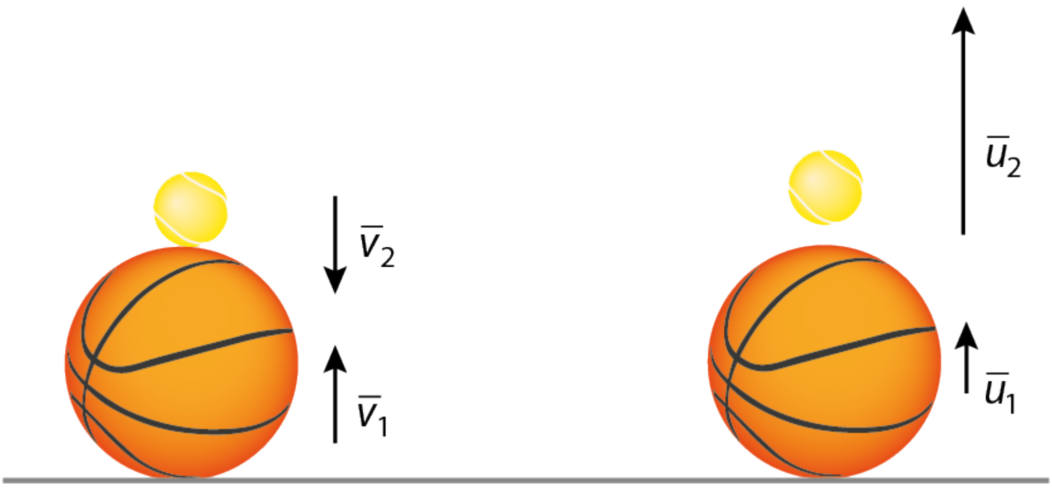
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Sievennetystä yhtälöstä havaitaan, että pallojen nopeuteen pienillä pudotuskorkeuksilla, kun ilmanvastusta ei huomioida vaikuttaa vain pudotuskorkeus.

Kun pallot liikkuvat pöydän pinnasta ylöspäin, muuntuvat pallojen liike-energiat potentiaalienergiaksi ja pallon nopeus pienenee.

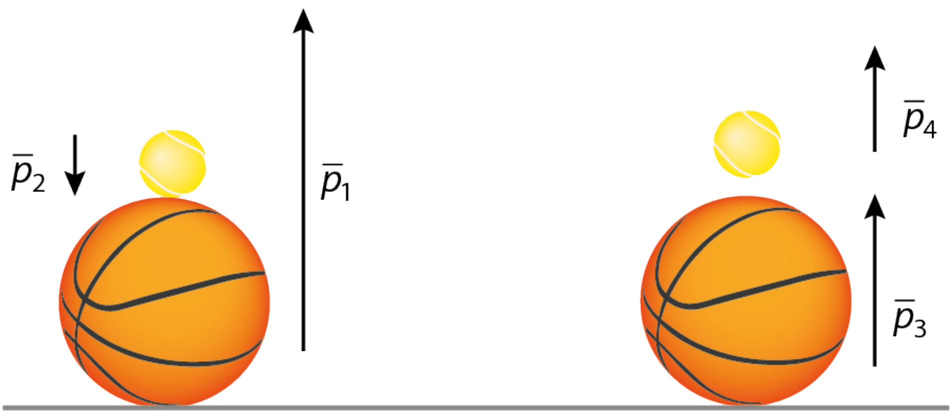
Tarkastellaan tilannetta heti, kun pöydän pinnan tukivoiman aiheuttama impulssi on muuttanut koripallon liikemäärää ja koripallo etenee ylöspäin. Tällöin tennispallo etenee vielä alaspäin.



Liikemäärän säilymislain mukaan, kun koripallon liikkeen suunta sovitaan positiiviseksi

$$p_{a1} - p_{a2} = p_{l1} + p_{l2}$$
$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Koripallon massiivisempana törmää kevyeen tennispalloon ja antaa osan liikemäärästään tennispallolle. Koska tennispallon massa on huomattavasti koripallon massaa pienempi, tennispallon nopeuden muutos on huomattavasti suurempi kuin koripallon nopeuden muutos. Pallot jatkavat koripallon liikkeen suuntaan törmäyksen jälkeen, sillä koripallon liikemäärä on huomattavasti tennispallon liikemäärää suurempi.



Tehtävä 14.20.

Valkoisen pallon alkunopeus $\overline{v}_1 = \overline{v}$

Punaisen pallon alkunopeus $\overline{v}_2 = \overline{0}$

Valkoisen pallon massa $m_1 = m$

Punaisen pallon massa $m_2 = m$

Pallojen yhteinen liikemäärä alkutilanteessa on
$\overline{p}_{\text{alussa}} = m_1\overline{v}_1 = m\overline{v}$.

Pallojen liike-energia alkutilanteessa on
$E_{\text{k,alussa}} = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \frac{1}{2}mv^2$.

Kimmoisassa törmäyksessä liikemäärä ja liike-energia säilyvät. Tarkastellaan pallojen liikemäärän ja liike-energian säilymistä vaihtoehtojen A − C tilanteissa

Vaihtoehto A

Tehtävänannon mukaan

Valkoisen pallon loppunopeus $\overline{u}_1 = -\frac{1}{2}\overline{v}$

Punaisen pallon loppunopeus $\overline{u}_2 = \frac{1}{2}\overline{v}$

Pallojen yhteinen liikemäärä lopputilanteessa on

$$\overline{p}_{\text{lopussa}} = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2 = -\frac{1}{2}m\overline{v} + \frac{1}{2}m\overline{v} = \overline{0}.$$

Pallojen yhteinen liike-energia lopputilanteessa on

$$\begin{aligned} E_{\text{k,lopussa}} &= \frac{1}{2}m_1u_1^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2u_2^{\ 2} = \frac{1}{2}m\left(-\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}mv^2 + \frac{1}{8}mv^2 = \frac{1}{4}mv^2. \end{aligned}$$

Liikemäärä ja liike-energia eivät säily vaihtoehdossa A, joten skenaario on väärä.

Vaihtoehto B

Tehtävänannon mukaan

Valkoisen pallon loppunopeus $\overline{u}_1 = \frac{1}{2}\overline{v}$

Punaisen pallon loppunopeus $\overline{u}_2 = \frac{1}{2}\overline{v}$

Pallojen yhteinen liikemäärä lopputilanteessa on

$$\overline{p}_{\text{lopussa}} = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2 = \frac{1}{2}m\overline{v} + \frac{1}{2}m\overline{v} = m\overline{v}.$$

Pallojen yhteinen liike-energia lopputilanteessa on

$$\begin{aligned} E_{\text{k,lopussa}} &= \frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{u_2}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}mv^2 + \frac{1}{8}mv^2 = \frac{1}{4}mv^2. \end{aligned}$$

Liikemäärä säilyy, mutta liike-energia ei säily vaihtoehdossa B, joten skenaario on väärä.

Vaihtoehto C

Tehtävänannon mukaan

Valkoisen pallon loppunopeus $\overline{u}_1 = 0$

Punaisen pallon loppunopeus $\overline{u}_2 = \overline{v}$

Pallojen yhteinen liikemäärä lopputilanteessa on
$\overline{p}_{\text{lopussa}} = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2 = m\overline{v}$.

Pallojen yhteinen liike-energia lopputilanteessa on

$$E_{\text{k,lopussa}} = \frac{1}{2}m_1u_1^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2u_2^{\ 2} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Liikemäärä ja liike-energia säilyvät vaihtoehdossa C, joten skenaario on oikein.

Tehtävä 14.21.

Rullalautailijan nopeus v_1 = 3,9 m/s

Rullalautailijan massa m_1 = 58,2 kg

Rullalaudan massa m_2 = 7,8 kg

Mäen jyrkkyys α = 2,8°

Matka törmäyksen jälkeen s = 8,7 m

a) Kun rullalautailija hyppää laudan päälle tapahtuu törmäys, jossa liikemäärä säilyy, $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$. Rullalaudan nopeus aluksi on nolla, jolloin myös sen liikemäärä on nolla. Lopussa rullalauta ja lautailija liikkuvat yhteisellä nopeudella u. Valitaan lautailijan alkunopeuden suunta positiiviseksi

$$p_1 + \cancel{p_2} = p_3$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u.$$

Lautailijan ja laudan nopeus hypyn jälkeen on

$$u = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{58{,}2\,\text{kg} \cdot 3{,}9\,\text{m/s}}{58{,}2\,\text{kg} + 7{,}8\,\text{kg}} = 3{,}439\,\text{m/s} \approx 3{,}4\,\text{m/s}.$$

b) Tarkastellaan tilannetta energioiden avulla.

Sovitaan potentiaalienergian nollataso mäen alaosaan. Alussa rullalautailijalla on vain liike-energiaa.

Kun rullalautailija alkaa liikkua ylöspäin kaltevaa tasoa, nousee lautailija alkutilanteeseen nähden korkeudelle $h = s \sin \alpha$. Silloin rullalautailijalla on potentiaalienergiaa. Lopuksi rullalautailija pysähtyy, joten liike-energia on nolla.

Kitka tekee työtä koko matkan *s* ajan.

Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$E_{\text{ka}} + \cancel{E_{\text{pa}}} - W = \cancel{E_{\text{kl}}} + E_{\text{pl}}$$

$$\frac{1}{2}mu^2 - Fs = mgh$$

$$\frac{1}{2}mu^2 - Fs = mgs\sin\alpha.$$

Liikettä keskimäärin vastustava voima on

$$Fs = \frac{1}{2}mu^2 - mgs\sin\alpha$$

$$F = \frac{\frac{1}{2}mu^2 - mgs\sin\alpha}{s}$$

$$F = \frac{\frac{1}{2}\cdot(58{,}2\,\text{kg} + 7{,}8\,\text{kg})\cdot\left(3{,}439\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - (58{,}2\,\text{kg} + 7{,}8\,\text{kg})\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 8{,}7\,\text{m}\cdot\sin 2{,}8^\circ}{8{,}7\,\text{m}}$$

$$= 13{,}23\,\text{N} \approx 13\,\text{N}.$$

Syvennä

Tehtävä 14.22.

a) Systeemin pyörimismäärä säilyy, kun systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia. Planeetat kiertävät Aurinkoa ja pyörivät samaan suuntaan kuin alkuperäinen hiukkaspilvi.

b) Kuutiometrissä olevien vetyatomien lukumäärä $n = 10^{11}$

Aurinkokunta syntyi kaasupilvestä, jonka massa oli kolminkertainen Auringon massaan verrattuna. Mitä kuumempaa kaasu on, sitä suurempi sen massan on oltava. Rajatilanteessa kaasupilven massa on niin kutsuttu Jeansin massa. Selvitetään kaasupilven lämpötila, jos $M_J = 3M_A$.

$$M_J = 3 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{T^3}{n}} M_A$$

$$\cancel{3}\, \cancel{M_A} = \cancel{3} \cdot 10^4 \sqrt{\frac{T^3}{n}} \cancel{M_A}$$

$$\frac{1}{10^4} = \sqrt{\frac{T^3}{n}}$$

$$\left(\frac{1}{10^4}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{T^3}{n}}\right)^2$$

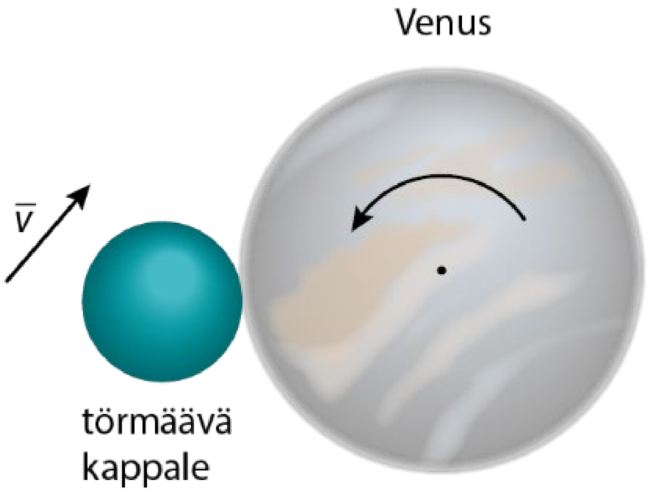
$$\frac{1}{10^8} = \frac{T^3}{n}$$

$$T^3 = \frac{n}{10^8}$$

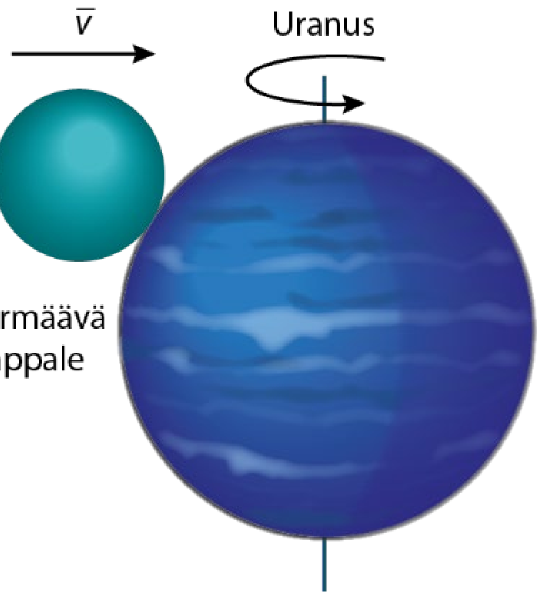
$$T = \sqrt[3]{\frac{n}{10^8}} = \sqrt[3]{\frac{10^{11}}{10^8}} = \sqrt[3]{10^3} = 10$$

Kaasupilven lämpötila olisi voinut olla enintään 10 K.

c) Venuksen pyörimisen olisi voinut pysäyttää toisen kappaleen osuminen Venukseen ulkokehälle pyörimisliikkeeseen verrattuna vastakkaisesta suunnasta.



Uranuksen akselin kallistuman on voinut aiheuttaa akselia vasten toiselle pallon puoliskolle törmäävä kappale.



d) Asteroidin massa m_{A} = 1,9 · 1012 kg

Asteroidin nopeus maapallon suhteen v_{A} = 35 km/s

Maan massa m_{M} = 5,974 · 1024 kg

Merkitään asteroidin ja maan yhteistä nopeutta törmäyksen jälkeen tunnuksella u.

Asteroidin törmäys Maahan on kimmoton, ja oletusten mukaan liikemäärä säilyy.

$$p_{\mathrm{a}} = p_{\mathrm{l}}$$

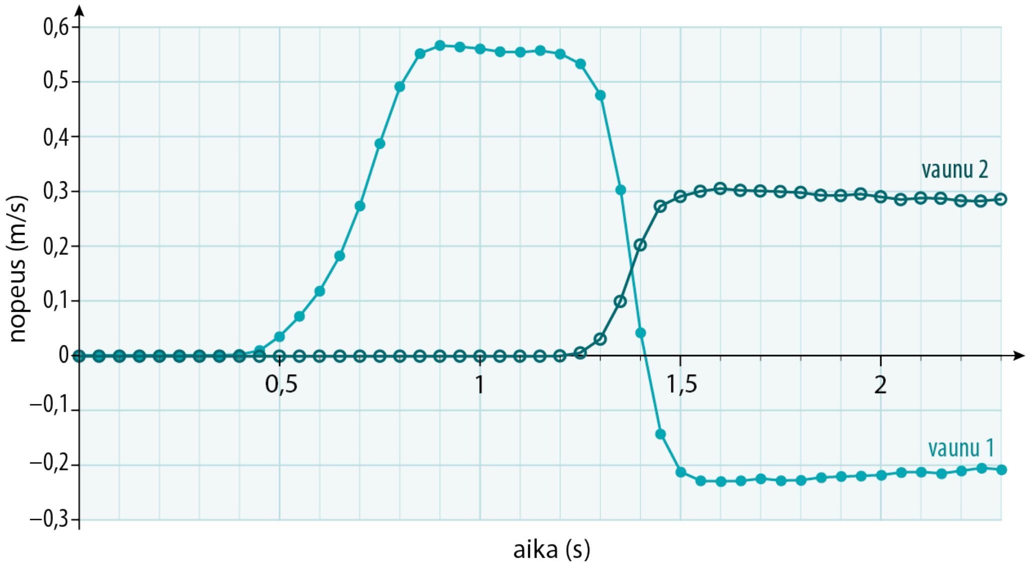
$$m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} = (m_{\mathrm{A}} + m_M)u$$

$$u = \frac{m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}} + m_M} = \frac{1{,}9 \cdot 10^{12}\ \mathrm{kg} \cdot 35000\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}9 \cdot 10^{12}\ \mathrm{kg} + 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}} = 1{,}11353 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Maan nopeuden muutos on mitättömän pieni.

Tehtävä 14.23.

a)



(Akselit oikein päin ja mittauspisteet näkyvät, 2 p)

Törmäys tapahtui aikavälillä 1,2 s – 1,55 s, koska tällä aikavälillä vaunujen nopeudet muuttuivat. (2 p)

b) Vaunun 1 massa m_1 = 0,330 g

Määritetään kuvaajan perusteella, mitkä vaunujen nopeuksien suuruudet olivat ennen törmäystä.

Vaunun 1 nopeus ennen törmäystä oli v_1 = 0,55 m/s ja vaunu 2 oli paikallaan eli v_2 = 0 m/s. Törmäyksen jälkeen vaunun 1 nopeuden suuruus oli u_1 = 0,23 m/s ja vaunun 2 nopeuden suuruus u_2 = 0,30 m/s. (2 p)

Tarkastellaan törmäystä liikemäärän säilymislain avulla. Sovitaan vaunun 1 alkuperäinen nopeuden suunta positiiviseksi suunnaksi.

$m_1v_1 + m_2v_2 = -m_1u_1 + m_2u_2$. (2 p)

Vaunun 2 nopeus oli alussa nolla. Vaunun 2 massaksi saadaan

$$m_2 = \frac{m_1v_1 + m_1u_1}{u_2} = \frac{m_1(v_1 + u_1)}{u_2} = \frac{0{,}330\,\text{kg} \cdot (0{,}55\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 0{,}23\,\frac{\text{m}}{\text{s}})}{0{,}30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}858\,\text{kg} = 858\,\text{g}.$$

(2 p)

c) Vaunun 2 massa oli suurempi kuin vaunun 1 massa. Jos raskaampi vaunu olisi törmännyt paikalla olevaan kevyempään vaunuun, olisivat molemmat vaunut liikkuneet törmäyksen jälkeen samaan suuntaan. (1 p)

Tutkitaan tilannetta liikemäärän säilymislain avulla. Merkitään edellisen kohdan mukaan kevyempään vaunuun 1 liittyviä suureita alaindeksillä 1 ja raskaampaan vaunun 2 liittyviä suureita alaindeksillä 2. Tilanteessa liikemäärä säilyy.

$m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 v_2$. (1 p)

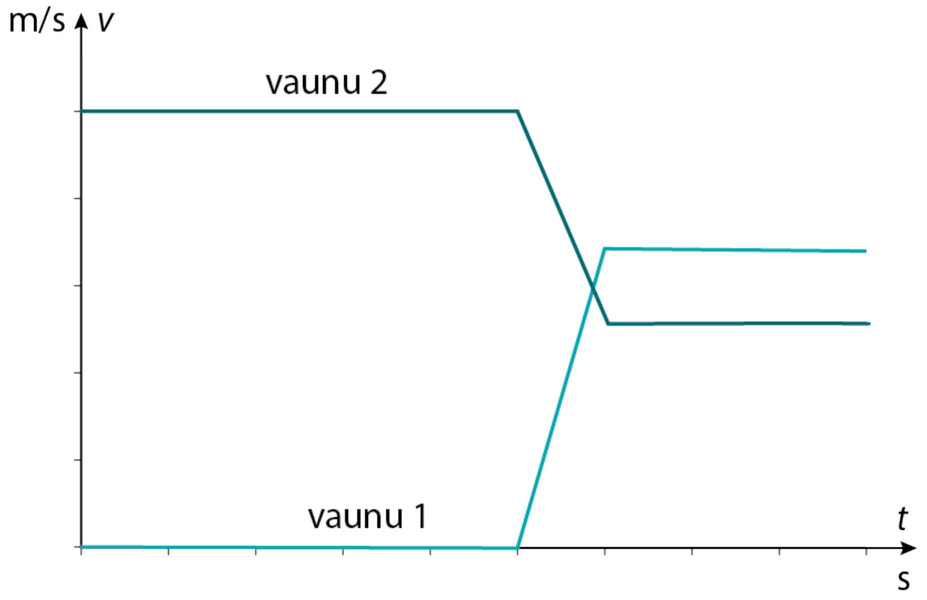
Törmäyksen jälkeen vaunujen liikemäärät ovat samaan suuntaan kuin vaunun 2 liikemäärä alussa. Tällöin vaunun 1 ja vaunun 2 liikemäärät ovat pienempiä kuin vaunun 2 liikemäärä alussa, sillä niiden summa on sama kuin vaunun 2 liikemäärä alussa. (1 p)

Koska vaunun 2 massa on suurempi kuin vaunun 1 massa, on vaunun 2 nopeus u_2 törmäyksen jälkeen pienempi kuin vaunun 1 nopeus u_1. (1 p)

Vaunu 1 liikkuu pienemmän massansa vuoksi törmäyksen jälkeen nopeammin kuin vaunu 2. (1 p)

Vaunu 2 ei voi liikkua vaunua 1 nopeammin, sillä vaunu 1 kulkee edellä.

Hahmotellaan kuvaaja (tätä ei vaadittu)



(Jos on hahmoteltu kuvaaja, niin esitys korvaa 2 p sanallisesta selityksestä. Esityksessä riittää, että aluksi vaunun 2 kuvaaja on vaunun 1 kuvaajaa ylempänä ja törmäyksen jälkeen vaunun 1 kuvaaja kulkee vaunun 2 kuvaajaa ylempänä. Pystysuuntaiset muutokset voidaan kuvata jyrkemmin.)

Kertauskoe

FY 4 Voima ja liike

Tehtävä 1.

Oikeat vastaukset:

a) B

b) C

c) A

d) A

e) B

f) B

g) C

h) A

Tehtävä 2.

a) Lentomatka Helsingistä New Yorkiin s = 6630 km

Keskimääräinen lentoaika
t = 8 h 19 min = (8 · 60 +19) · 60 s

Oletetaan lentokoneen liike tasaiseksi. Lasketaan lentokoneen keskimääräinen nopeus.

$$s = vt$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{6630\,\text{km}}{(8 \cdot 60 + 19) \cdot 60\,\text{s}} = 221{,}442\,\text{m/s} \approx 797\,\text{km/h}.$$

Vastaus: 797 km/h

b) Lentomatka suuremmalla nopeudella s_1 = 2 500 km

Lentokoneen nopeus alussa v_1 = 850 km/h.

Lentomatka vastatuuleen
s_2 = 6 630 km – 2 500 km = 4 130 km

Lentokoneen nopeus vastatuulessa v_2 = 800 km/h

Matka koostuu kahdesta etapista, jotka lennettiin eri nopeuksilla. Lasketaan etappeihin kuluneet ajat.

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{2500\,\text{km}}{850\,\text{km/h}} = 2{,}94118\,\text{h} \approx 2\,\text{h}\,56\,\text{min}$$

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{4130\,\text{km}}{800\,\text{km/h}} = 5{,}1625\,\text{h} \approx 5\,\text{h}\,10\ \text{min}$$

Lentokoneen keskinopeus koko matkalla

$$s = v_k t_k$$

$$v_k = \frac{s}{t_k} = \frac{s}{(t_1 + t_2)} = \frac{s}{\left(\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}\right)}$$

$$= \frac{6630\,\text{km}}{\frac{2500\,\text{km}}{850\,\text{km/h}} + \frac{4130\,\text{km}}{800\,\text{km/h}}} = 818{,}15\,\text{km/h} \approx 820\,\text{km/h}.$$

Vastaus: 820 km/h

Tehtävä 3.

a) Kiihdytykseen käytetty aika t = 17 s

Kajakin kulkema matka s = 21,4 m

Kajakki on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Kajakin kiihtyvyys saadaan matkan yhtälöstä

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 21{,}4\,\text{m}}{(17\,\text{s})^2} = 0{,}148\,\text{m/s}^2 \approx 0{,}15\,\text{m/s}^2.$$

Vastaus: 0,15 m/s^2

b) Kajakki lähtee liikkeelle levosta, joten kajakin nopeus tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä on $v = at$.

Sijoitetaan a-kohdan kiihtyvyys tähän. Nopeus on

$$v = \frac{2s}{t^{\cancel{2}}}\cancel{t} = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 21{,}4\,\text{m}}{17\,\text{s}} = 2{,}5176\,\text{m/s} \approx 2{,}5\ \text{m/s}.$$

Vastaus: b) 2,5 m/s

c)

$\overline{F}_1 =$ kajakkiin vaikuttava noste

$\overline{F}_2 =$ kajakin ja melojan paino

$\overline{F}_3 =$ voima, jolla vesi työntää melaa

$\overline{F}_4 =$ veden aiheuttama väliaineen vastus.

Tehtävä 4.

a) Pallon liike on kädestä irtoamisen jälkeen tasaisesti hidastuvaa. Liike jatkuu ylöspäin ja pallon nopeus pienenee, kunnes pallo saavuttaa lakipisteen eli lentoradan korkeimman kohdan. Lakipisteessä liikkeen suunta vaihtuu ja pallo alkaa pudota. Paino aiheuttaa pallon kiihtyvyyden. Siksi kiihtyvyys on koko lennon ajan sama.

b) Nousukorkeus h = 1,0 m

Tarkastellaan pallon mekaanista energiaa. Kun pallo lähtee ylöspäin, pallolla on alkunopeus. Lakikorkeudella pallon nopeus on nolla ja pallon liike-energia on nolla. Asetetaan pallon potentiaalienergian nollataso syötön lähtökorkeudelle. Alkutilanteen liike-energia muuntuu kokonaisuudessaan potentiaalienergiaksi.

Mekaanisen energian säilymislain mukaan

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{p}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gh.$$

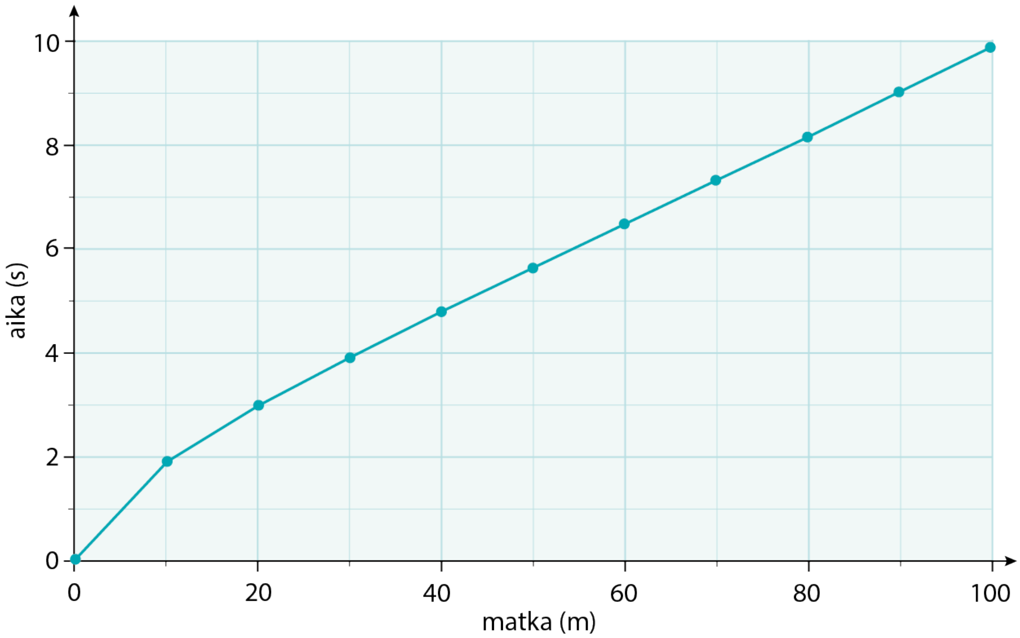
Pallo täytyy heittää nopeudella

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}0\,\mathrm{m}} = 4{,}429\,\mathrm{m/s} \approx 4{,}4\,\mathrm{m/s}.$$

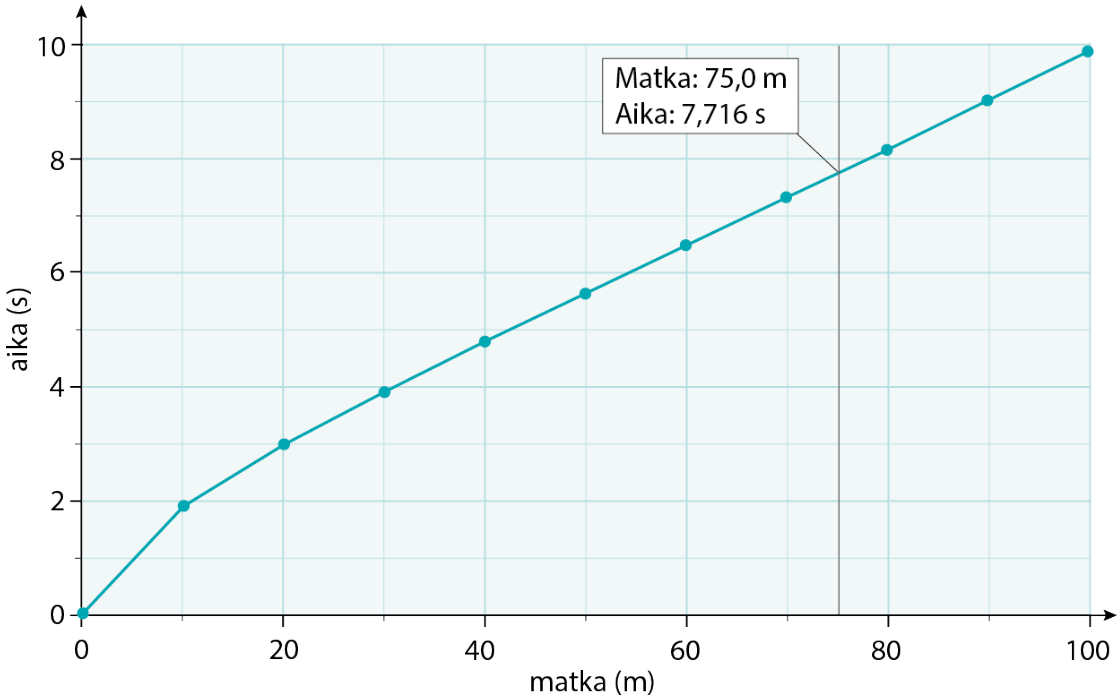
Vastaus: 4,4 m/s

Tehtävä 5.

a)

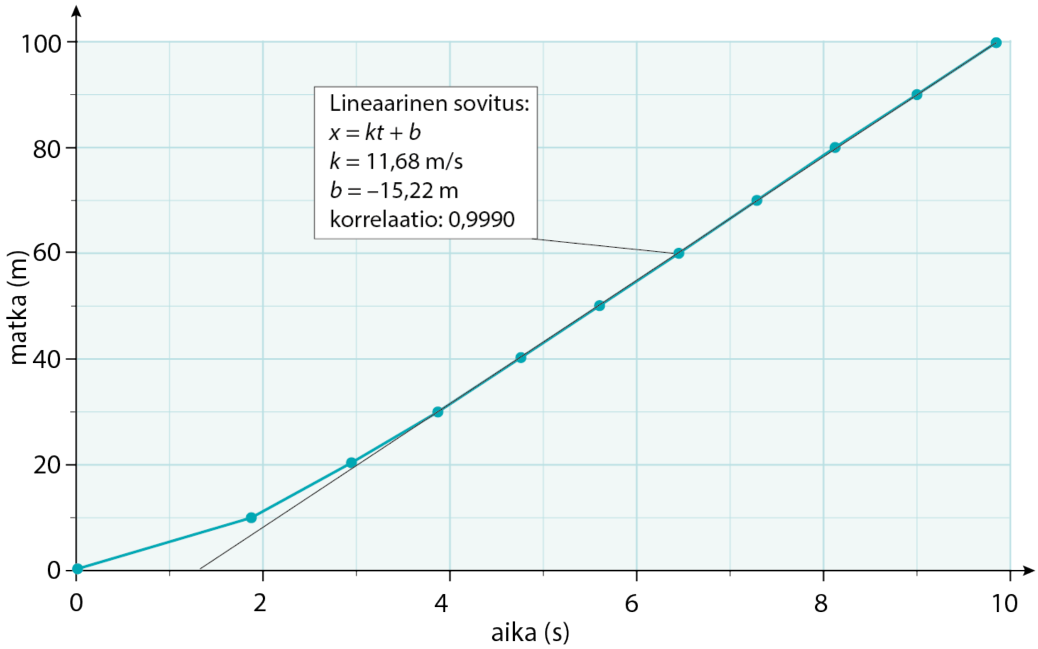


b) Kuvaajasta voidaan lukea, että 75 metrin kohdalla Lewisin aika oli 7,7 sekuntia.



Vastaus: 7,7 s

c) Välillä 20 m – 100 m väliajat asettuvat suoralle, joten Lewisin juoksu oli tällä välillä tasaista etenemisliikettä. Määritetään Lewisin nopeus (t, x)-koordinaatiston mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta.



Lewisin nopeus oli juoksun lopussa v = 11,68 m/s.

Lewisin 100 m – 200 m välille kulunut aika saadaan tasaisen liikkeen mukaan

$$t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{200\,\text{m} - 100\,\text{m}}{11{,}68\,\text{m/s}} = 8{,}5616\,\text{s} \approx 8{,}56\,\text{s}.$$

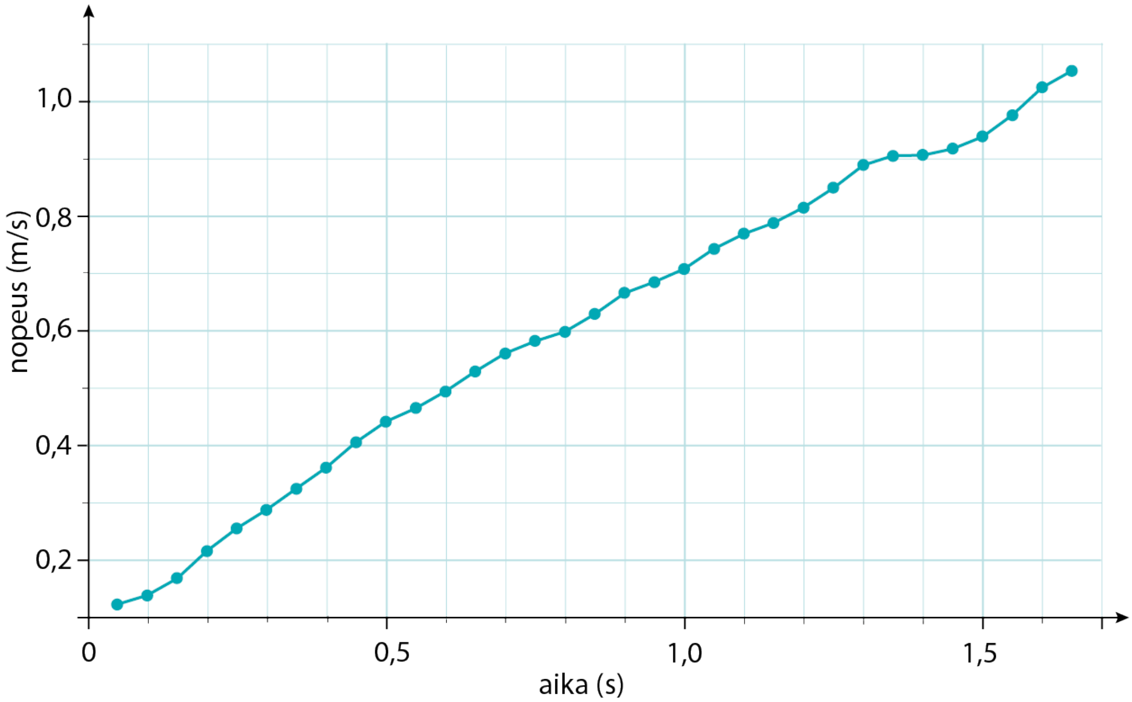
Lewisin 200 m juoksuun kulunut aika

$t = t_1 + t_2$ = 9,86 s + 8,56 s ≈ 18,42 s.

Vastaus: 18,42 s

Tehtävä 6.

a)



b) Auton keskimääräinen kiihtyvyys mittauksen aikana on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

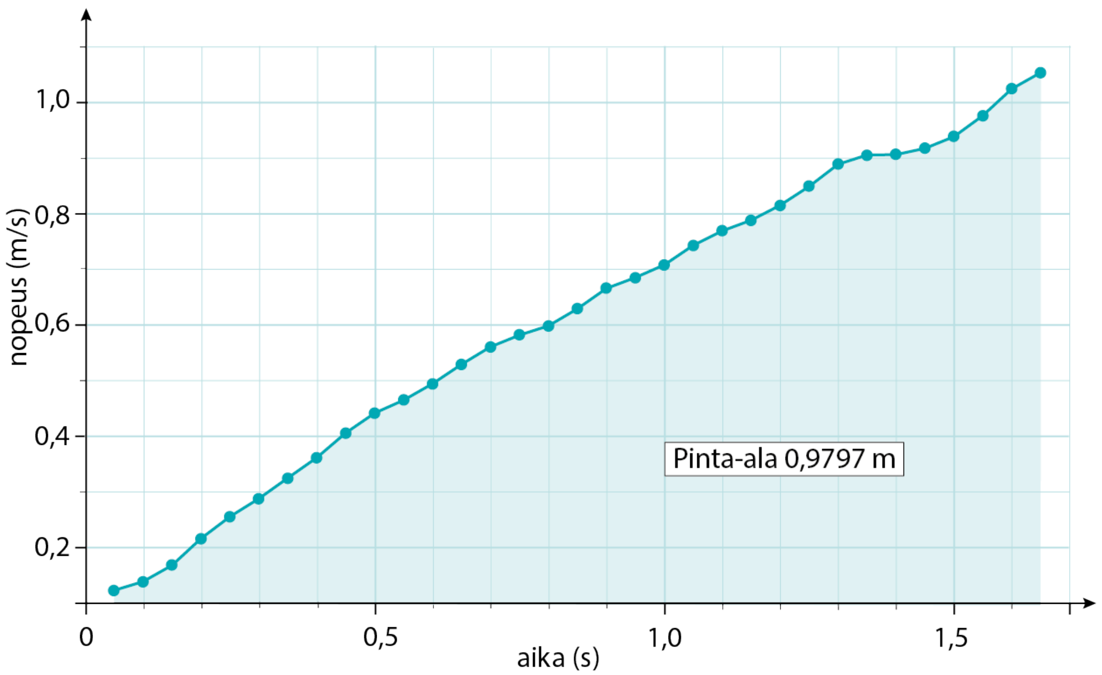
Interpoloidaan kuvaajasta nopeuden ja ajan muutokset ja lasketaan keksimääräinen kiihtyvyys

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1{,}05\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}65\,\text{s} - 0{,}05\,\text{s}} = 0{,}58125\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0{,}58\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vastaus: $0{,}58\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

c) Jos auton kiihdytys olisi tasainen eli nopeus kasvaisi joka aikavälillä yhtä paljon, kuvaajan jyrkkyys olisi mittauksen ajan likimain vakio. Nyt jyrkkyys selvästi muuttuu, joten kiihdytys ei ole ollut tasaista.

d) Auton kulkema matka on (t, v)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan ja aika-akselin rajoittaman alueen fysikaalinen pinta-ala.



Kauko-ohjattavan auton kulkema matka mittauksen aikana

s = 0,9797 m ≈ 98 cm.

Vastaus: 98 cm

Tehtävä 7.

a) Molempien pallojen kiihtyvyys on putoamiskiihtyvyys, sillä palloihin vaikuttaa vain pallon paino. Kiihtyvyydet ovat yhtä suuret.

b) Ylöspäin heitetty pallo on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä ja alaspäin heitetty pallo on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä.

c) Koska ylöspäin heitetty pallo on tasaisesti hidastuvassa liikkeessä lakikorkeudelle asti ja alaspäin heitetty pallo tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, ei ylöspäin heitetty pallo saavuta koskaan alaspäin heitettyä palloa.

Tehtävä 8.

Talon ja hissin välinen etäisyys s_x = 50 m

Kerrostalon korkeus h = 45 m

Pallon vaakasuuntainen nopeus v = 18 m/s

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Vaakasuuntainen nopeus ei muutu heiton aikana, joten aika voidaan laskea tasaisen liikkeen yhtälöllä.

$$s_x = vt$$

$$t = \frac{s_x}{v} = \frac{50\,\text{m}}{18\,\text{m/s}} = 2{,}7778\ \text{s} \approx 2{,}8\ \text{s}$$

Vastaus: 2,8 s

b) Pystysuuntainen liike on tasaisesti kiihtyvää. Ratkaistaan pallon putoamismatka tasaisesti kiihtyvän liikkeen yhtälöllä.

$$s_y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{s_x}{v_x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\text{m/s}^2 \cdot \left(\frac{50\text{m}}{18\text{m/s}}\right)^2 = 37{,}847\ \text{m} \approx 38\text{m}$$

Vastaus: 38 m

c) Hissi liikkuu tasaisesti ylöspäin. Jotta pallo osuu koriin, hissin on oltava samalla korkeudella, jolle pallo on ehtinyt pudota. Merkitään tätä korkeutta tunnuksella *s* ja ratkaistaan hissin nopeus tasaisen liikkeen yhtälöstä.

$$s = vt$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{h - s_y}{t} = \frac{h - \frac{1}{2}gt^2}{t}$$

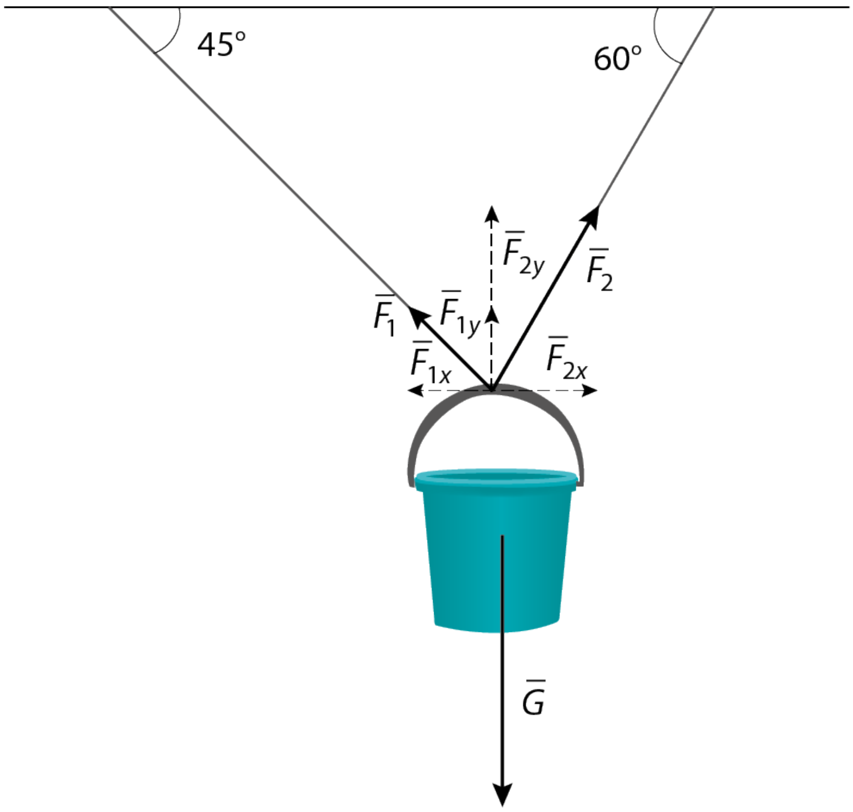
$$= \frac{45\,\text{m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \left(\frac{50\,\text{m}}{18\,\text{m/s}}\right)^2}{\frac{50\,\text{m}}{18\,\text{m/s}}}$$

$$= 2{,}575\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vastaus: 2,6 m/s

Tehtävä 9.

a)



$\overline{G} =$ ämpärin paino

$\overline{F}_1 =$ vasemmanpuoleisen narun jännitysvoima

$\overline{F}_2 =$ oikeanpuoleisen narun jännitysvoima

b) Kun ämpäri on paikoillaan, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Silloin vaakasuuntaisten voimien komponenttien summa nolla, ja vaakasuunnassa voimien komponentit ovat yhtä suuret, $F_{1x} = F_{2x}$.

Kuvasta voidaan päätellä, että $\frac{F_{1x}}{F_1} = \cos 45°$ eli

$F_{1x} = F_1 \cos 45°$ ja

$\frac{F_{2x}}{F_2} = \cos 60°$ eli $F_{2x} = F_2 \cos 60°$.

Yhdistämällä nämä tulokset saadaan

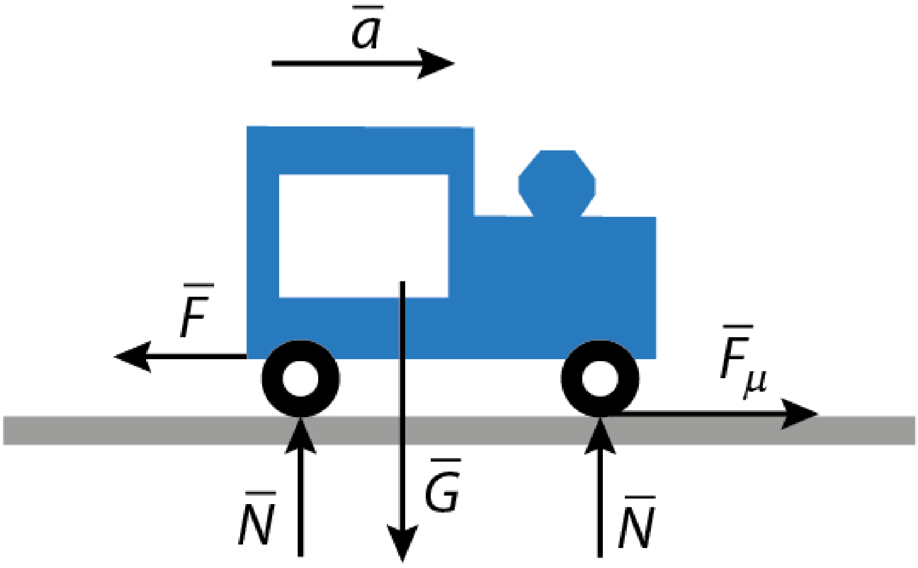
$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_{2x} \\ F_1 \cos 45° &= F_2 \cos 60° \\ \frac{F_1}{F_2} &= \frac{\cos 60°}{\cos 45°} \\ \frac{F_1}{F_2} &\approx 0{,}707 \end{aligned}$$

joten $F_2 > F_1$.

Tehtävä 10.

a)

veturi:

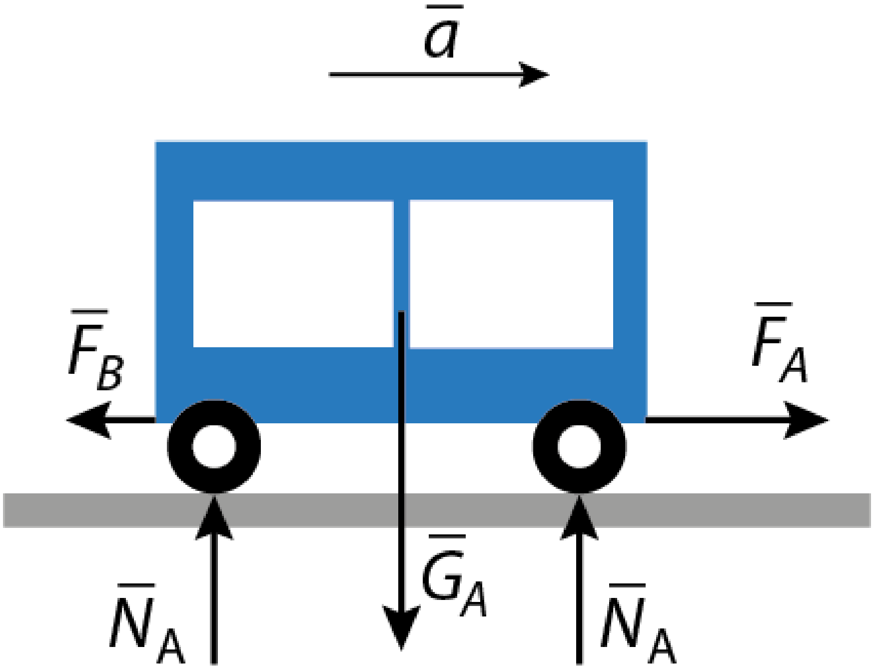


$\bar{F}_\mu =$ veturiauton ja alustan välinen kitka

$\bar{G} =$ veturin paino

$\bar{N} =$ pinnan veturiin kohdistama tukivoima

$\bar{F} =$ vaunun A liitetyn aisan kohdistama jännitysvoima keskimmäinen vaunu A:

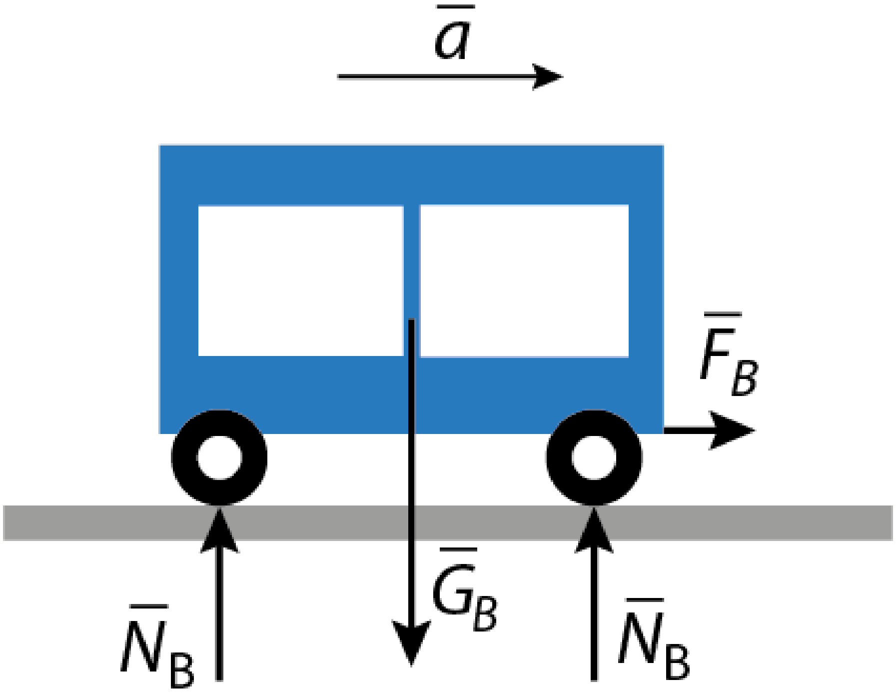


$\overline{G}_A$ = vaunun A paino

$\overline{N}_A$ = pinnan vaunuun kohdistama tukivoima

$\overline{F}_A$ = veturin ja vaunun A liitetyn aisan kohdistama jännitysvoima

$\overline{F}_B$ = vaunun B ja vaunun A liitetyn aisan kohdistama jännitysvoima viimeinen vaunu B:



$\overline{G}_B =$ vaunun B paino

$\overline{N}_B =$ pinnan vaunuun kohdistama tukivoima

$\overline{F}_B =$ vaunun B ja vaunun A liitetyn aisan kohdistama jännitysvoima

b) Veturin massa m = 650 kg

Vaunun A massa m_A = 750 kg

Vaunun B massa m_B = 750 kg

Systeemin kiihtyvyys a = 0,32 m/s^2

Tarkastellaan tilannetta Newtonin II lain mukaan erikseen vaunuille A ja B. Sovitaan kiihtyvyyden suunta positiiviseksi. Vaunuilla on sama kiihtyvyys.

Vaunulle A: $F_A - F_B = m_A a.$

Vaunulle B: $F_B = m_B a.$

Sijoitetaan vaunuun B vaikuttava yhtälö vaunun A yhtälöön ja saadaan

$$F_A - m_B a = m_A a.$$

Saadaan voima

$$F_A = m_A a + m_B a = (m_A + m_B)a$$

$$F_A = (750\,\text{kg} + 750\,\text{kg}) \cdot 0{,}32\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 480\,\text{N}.$$

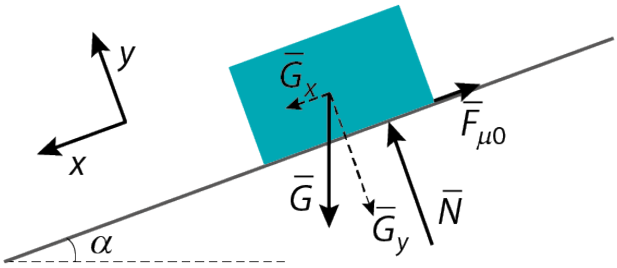
Vaunun B suuntaan oleva vaakasuuntainen voima on

$$F_B = m_B a = 750\,\text{kg} \cdot 0{,}32\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 240\,\text{N}.$$

Vastaus: 480 N ja 240 N

Tehtävä 11.

a)



$\overline{G} =$ laatikon paino

$\overline{N} =$ tason laatikkoon kohdistama tukivoima

$\overline{F}_{\mu 0} =$ tason ja laatikon välinen lepokitka

b) Tarkastellaan tilannetta, jossa lepokitka on suurin mahdollinen. Kun laatikko on paikallaan, laatikon kiihtyvyys on Newtonin II lain mukaan nolla, $\sum \overline{F} = \overline{0}$.
Sovitaan voimien suunnat a-kohdan voimakuvion mukaisesti ja kirjoitetaan liikeyhtälöt

x-suunnassa: $G_x - F_{\mu 0} = 0$

y-suunnassa: $G_y - N = 0$

Esitetään painon komponentit kulman avulla. Kitka $F_{\mu 0} = \mu N$.

Saadaan

x-suunnassa: $G \sin\alpha = \mu N$

y-suunnassa: $G \cos\alpha = N$.

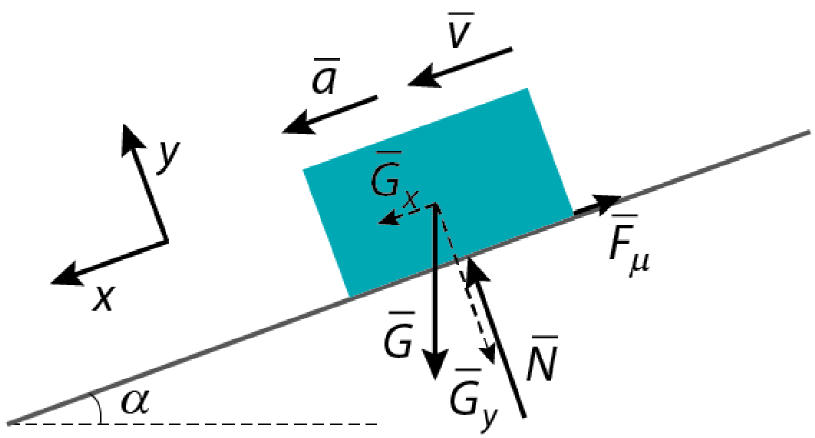
Lepokitkakertoimen suurimman arvon tulee olla

$G \sin\alpha = \mu_0 G \cos\alpha$

$$\mu_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan 35^\circ = 0{,}700208 \approx 0{,}70.$$

Vastaus: 0,70

c) Kun laatikko liukuu, kitka on liukukitkaa. Liukukitkakerroin on pienempi kuin lepokitkakerroin, joten laatikko on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä.



Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = m\bar{a}$,

x-suunnassa: $G_x - F_\mu = ma$

y-suunnassa: $G_y - N = 0$.

Esitetään painon komponentit kulman avulla. Kitka $F_\mu = \mu N$ ja paino $G = mg$. Saadaan

x-suunnassa: $mg\sin\alpha - \mu N = ma$

y-suunnassa: $mg\cos\alpha = N$.

Kiihtyvyydeksi saadaan

$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$

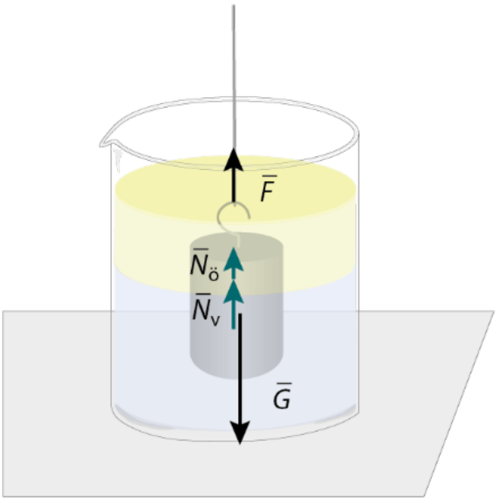
$$a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$a = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot (\sin 35° - 0{,}21\cos 35°) = 3{,}939\,\mathrm{m/s^2} \approx 4{,}0\,\mathrm{m/s^2}.$$

Vastaus: 4,0 m/s^2

Tehtävä 12.

Punnuksen voimakuvio:



$\overline{G} =$ punnuksen paino

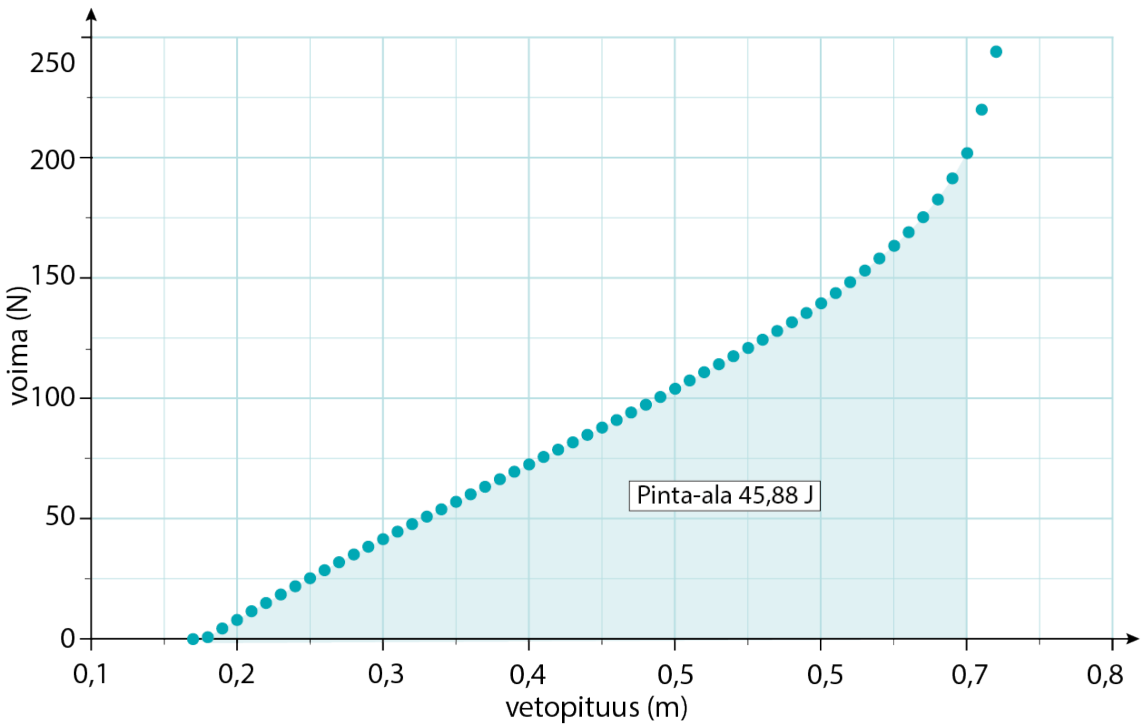
$\overline{F} =$ narun jännitysvoima

$\overline{N}_v =$ veden punnukseen aiheuttama noste

$\overline{N}_ö =$ öljyn punnukseen aiheuttama noste

Tehtävä 13.

a) Voiman tekemä työ saadaan (L, F)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan ja L-akselin rajaamana fysikaalisena pinta-alana. Tehdään kuvaaja ja määritetään fysikaalinen pinta-ala väliltä 0 m – 0,70 m.



Voiman tekemä työ on W = 45,88 J ≈ 46 J.

Vastaus: 46 J

b) Nuolen massa m = 490 · 64,79891 mg

Työperiaatteen mukaan voiman tekemä työ muuttaa nuolen liike-energiaa, $W = \Delta E_\mathrm{k} = E_\mathrm{kl} - E_\mathrm{ka} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2 - \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2.$

Nuoli oli aluksi paikallaan, jolloin sen nopeus oli nolla eikä nuolella ollut liike-energiaa.

Saadaan

$$W = \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2.$$

Voiman tekemä työ on a-kohdan mukaan W = 45,88 J. Nuolen lähtönopeus on

$$v_\mathrm{l}^2 = \frac{2W}{m}$$

$$v_\mathrm{l} = \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 45{,}88\ \mathrm{J}}{490 \cdot 64{,}79891 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg}}} = 53{,}7582\ \mathrm{m/s} \approx 54\ \mathrm{m/s}.$$

Vastaus: 54 m/s

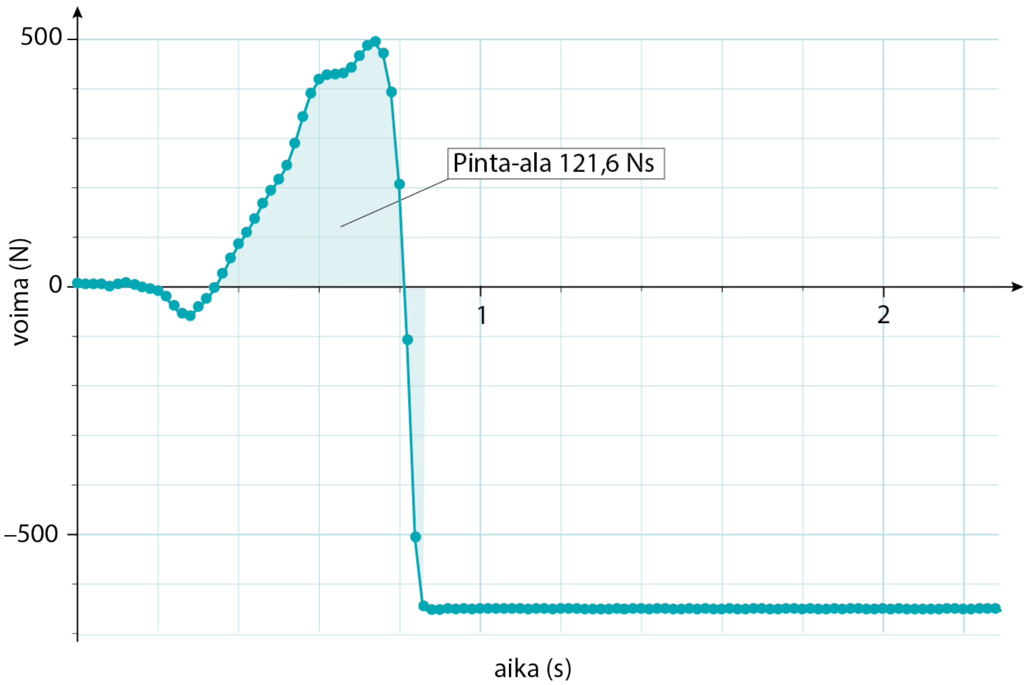
Tehtävä 14.

a) Opiskelijan paino nähdään kuvaajan kohdasta, jossa ponnistus on päättynyt ja opiskelija on irronnut voimalevyltä. Tällöin voima-anturi näyttää negatiivista lukemaa. $G = mg = 649{,}3$ N, joten opiskelijan massa on

$$m = \frac{G}{g} = \frac{649{,}3\,\text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2} = 66{,}18756\,\text{kg} \approx 66\,\text{kg}.$$

Vastaus: 66 kg

b) Määritetään kokonaisvoiman opiskelijaan aiheuttama impulssi. Impulssi saadaan (t, F)-koordinaatiston ja t-akselin rajoittaman alueen fysikaalisena pinta-alana. Määritetään pinta-ala siihen asti, kunnes jalka irtoaa kokonaan voimalevystä eli kun voimalevy näyttää vain opiskelijan painoa.



Kokonaisvoiman aiheuttama impulssi I = 121,6 Ns.

Impulssiperiaatteen mukaan impulssi aiheuttaa liikemäärän muutoksen. Huomioidaan suunnat, jolloin

$I = \Delta p = \Delta mv = mv_2 - mv_1$.

Koska ponnistuksen alussa nopeus oli nolla, niin $I = mv_2$.

Opiskelija irtosi voimalevystä nopeudella

$$I = mv_2$$

$$v_2 = \frac{I}{m} = \frac{121{,}6\,\text{Ns}}{66{,}19\,\text{kg}} = 1{,}837\,\text{m/s} \approx 1{,}8\ \text{m/s}.$$

Vastaus: 1,8 m/s

c) Mekaanisen energian säilymislain mukaan opiskelijan liike-energia muuntuu opiskelijan potentiaalienergiaksi. Valitaan voimalevyn taso potentiaalienergian nollatasoksi. Hypyn korkeimmassa kohdassa opiskelijan nopeus on nolla, joten myös hänen liike-energiansa on nolla. Hypyn korkeus saadaan a- ja b-kohdan tulosten avulla.

$$E_{\text{ka}} = E_{\text{pl}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(1{,}837\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2} = 0{,}171996\,\text{m} \approx 17\,\text{cm}.$$

Vastaus: 17 cm

Tehtävä 15.

Pulkkailijan alkunopeus v_a = 1,4 m/s

Pulkkailijan massa m = 48 kg

Mäen korkeus h = 8,1 m

Pulkkailijan loppunopeus v_l = 7,6 m/s

Tarkastellaan mäenlaskua mekaniikan energiaperiaatteella. Sovitaan mäen alaosa potentiaalienergian nollatasoksi, jolloin

$$E_{ka} + E_{pa} - W = E_{kl}$$

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + mgh - W = \frac{1}{2}mv_l^2.$$

Vastusvoimien tekemä työ on

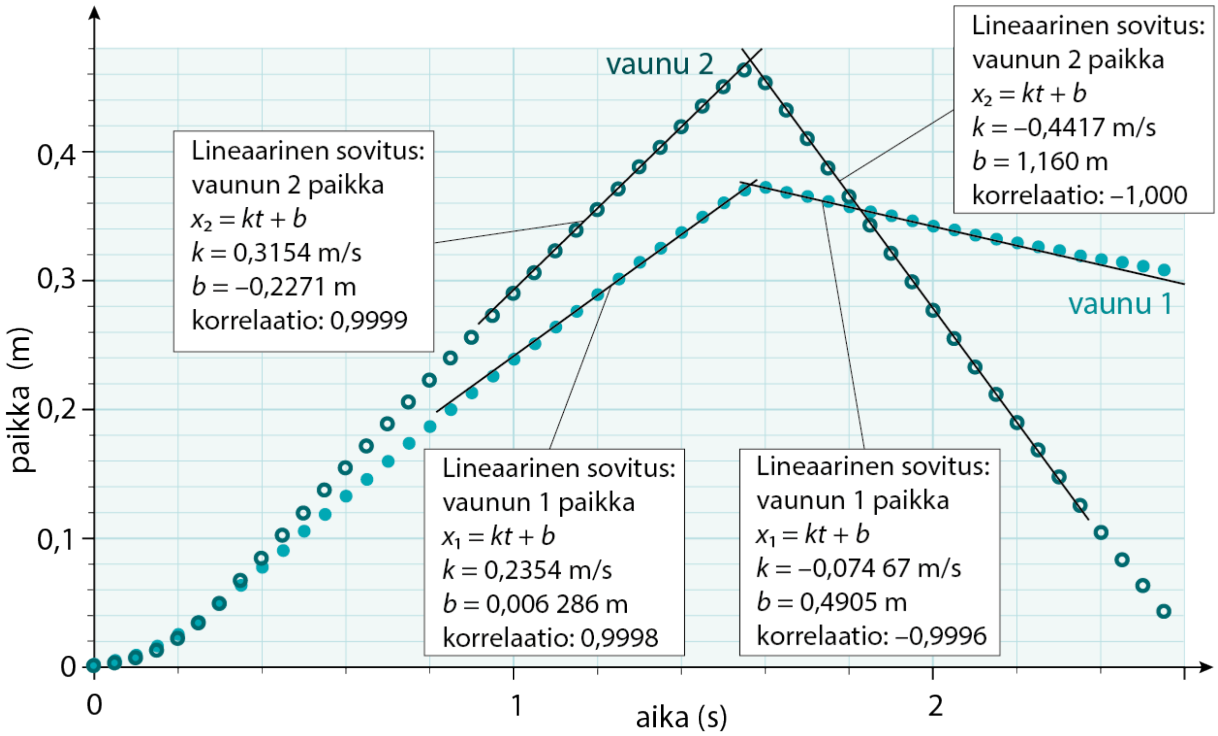
$$W = \frac{1}{2}mv_a^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_l^2$$

$$W = \frac{1}{2}\cdot 48\,\text{kg}\cdot(1{,}4\,\text{m/s})^2 + 48\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 8{,}1\,\text{m} - \frac{1}{2}\cdot 48\,\text{kg}\cdot(7{,}6\,\text{m/s})^2$$
$$= 2474{,}928\,\text{J} \approx 2{,}5\,\text{kJ}.$$

Vastaus: 2,5 kJ

Tehtävä 16.

a) Vaunujen törmäys tapahtui ajanhetkellä 1,55 s, koska sillä hetkellä vaunujen nopeuksien suunnat muuttuivat. Vaunujen nopeudet saadaan sovittamalla mittauspisteisiin suorat molemmille vaunuille.



Nopeuksien suuruudet (törmäyksen jälkeen molemmat vaunut liikkuivat kohti niiden paikkaa mittaavia ultraääniantureita):

Vaunun 1 nopeus ennen törmäystä
v_1 = 0,2354 m/s = 0,24 m/s

Vaunun 1 nopeus törmäyksen jälkeen
u_1 = 0,07467 m/s = 0,075 m/s

Vaunun 2 nopeus ennen törmäystä
v_2 = 0,3154 m/s = 0,32 m/s

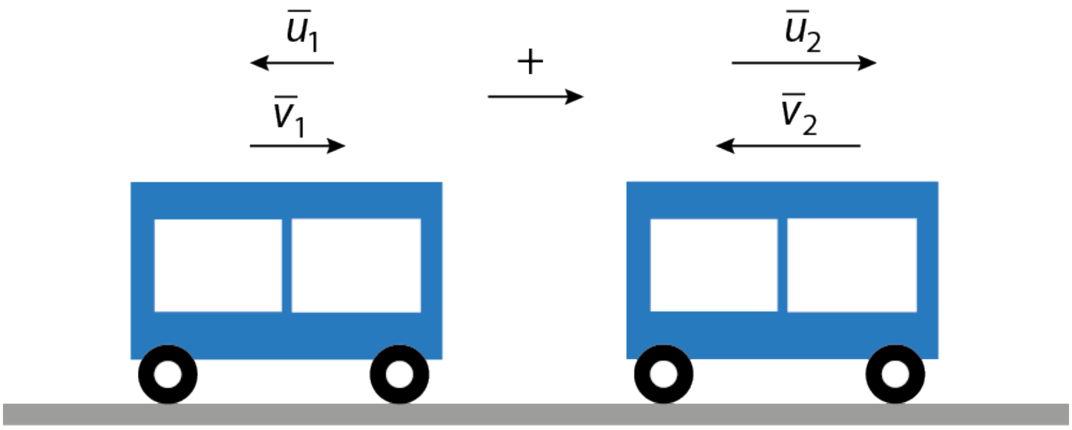
Vaunun 2 nopeus törmäyksen jälkeen
u_2 = 0,4417 m/s = 0,44 m/s

Vastaus: Vaunu 1: 0,24 m/s, 0,075 m/s, Vaunu 2: 0,32 m/s, 0,44 m/s

b) Vaunun 1 massa m = 827 g

Vaunuradalla ulkoiset voimat ovat häviävän pienet. Törmäyksessä liikemäärä säilyy, $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$.

Sovitaan, että vaunun 1 suunta on positiivinen ja piirretään kuva.



Saadaan $m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1u_1 + m_2u_2$.

Ratkaistaan vaunun 2 massa

$$\begin{aligned}
m_2u_2 + m_2v_2 &= m_1v_1 + m_1u_1 \\
m_2(u_2 + v_2) &= m_1(v_1 + u_1) \\
m_2 &= \frac{m_1(v_1 + u_1)}{u_2 + v_2} \\
&= \frac{0{,}827\,\text{kg} \cdot (0{,}2354\,\text{m/s} + 0{,}07467\text{m/s})}{0{,}4417\,\text{m/s} + 0{,}3154\,\text{m/s}} \\
&= 0{,}33869\,\text{kg} \approx 339\,\text{g}.
\end{aligned}$$

Vastaus: 339 g

Tehtävä 17.

a) Syväys kertoo, kuinka syvällä vene on vedessä. Kun punnus nostetaan veneeseen, veneen syväys suurenee. Kun punnus nostetaan veneestä altaaseen, veneen syväys pienenee.

b) Veneeseen vaikuttaa veneen ja punnuksen paino sekä veneeseen kohdistuva noste. Kun vene kelluu, veneeseen kohdistuva noste on yhtä suuri, kun painot yhteensä.

c) Kun punnus nostetaan veneeseen, astian vedenpinta nousee. Kun punnus nostetaan veneestä veteen, astian vedenkorkeus laskee. Vedenkorkeus astiassa on kuitenkin hieman korkeampi kuin alkutilanteessa, jolloin punnus oli vielä pöydällä.

d) Arkhimedeen lain mukaan nesteessä tai kaasussa olevaan kappaleeseen vaikuttaa ylöspäin noste *N*, joka on kappaleen syrjäyttämän neste- tai kaasumäärän painon *G* suuruinen. Kelluvassa veneessä oleva punnus syrjäyttää altaasta painonsa verran vettä. Tasapainotilanteessa $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Valitaan suunta ylös positiiviseksi, jolloin $N - G = 0$.

Tutkitaan, kuinka paljon syrjäytetty vesimäärä muuttuu, kun punnus nostetaan veneeseen.

$$\begin{aligned} N &= G \\ \rho_{\mathrm{v}} \cancel{g} V_{\mathrm{v}} &= m_{\mathrm{p}} \cancel{g} \\ \rho_{\mathrm{v}} V_{\mathrm{v}} &= \rho_{\mathrm{p}} V_{\mathrm{p}} \\ V_{\mathrm{v}} &= \frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{v}}} V_{\mathrm{p}} \end{aligned}$$

Koska punnuksen tiheys on paljon suurempi kuin veden tiheys, punnus syrjäyttää veneessä ollessaan vettä tilavuuden, jonka massa on sama kuin punnuksen massa. Syrjäytetyn veden tilavuus on näin ollen on paljon suurempi kuin punnuksen tilavuus.

Kun punnus siirretään veneestä altaaseen, altaan vedenpinta laskee. Altaassa punnus syrjäyttää tilavuutensa verran vettä. Punnus siis syrjäyttää altaan vettä enemmän ollessaan veneessä.

Tehtävä 18.

a) Turvavyöt pitävät autossa matkustavan ihmisen törmäystilanteessa istuimellaan. Turvavyön avulla törmäyksessä ihmiseen kohdistuvat voimat jakautuvat tasaisesti niille kehon osille, jotka kestävät suuria voimia parhaiten.

b) Turvatyynylaite sisältää kiihtyvyysanturin, sytytyspanoksen ja kaasuntäyttölaitteen. Kiihtyvyysanturi lähettää sähköisen signaalin sytytyspanokseen, joka aiheuttaa nopean kemiallisen reaktion tai rikkoo pienen kaasupullon. Tuloksena vapautuu kaasua (typpeä, argonia tai heliumia), joka täyttää tyynyn. Tyyny täyttyy nopeasti ja on jo tyhjentymässä, kun ihminen törmää siihen.

c) Turvatyyny pidentää törmäyksen kestoa, jolloin voiman suuruus pienenee impulssiperiaatteen $\overline{F}\Delta t = \Delta\overline{p}$ mukaan. Kun törmäyksen kesto Δt pitenee, pienenee voima $\overline{F}$.

d) Normaalijännitys on $\sigma = \frac{F}{A}$. Turvatyyny pienentää ihmiseen kohdistuvaa normaalijännitystä, koska vaikuttava voima on pienempi impulssiperiaatteen mukaisesti ja koska tyynyn pinta-ala on suurempi kuin esimerkiksi auton ratin pinta-ala.