

Vastaukset

1.

- a) noin 9 tuntia
- b) noin 7,7 tuntia
- c) noin 5,8 tuntia
- d) 45-vuotiaasta eteenpäin

2.

- a) $y = 3$
- b) $x = 3$
- c) $y = -1$

3.

- a) vuonna 1996
- b) hieman yli 2200
- c) noin 850

4.

- a) 32 °F
- b) 210 °F
- c) 98 °F

5.

- a) tytöillä 12-vuotiaana, pojilla 14-vuotiaana
- b) noin neljä vuotta
- c) tytöt 16-vuotiaana, pojat 18-vuotiaana
- d) Pojat ovat pidempiä. Kasvunopeus on sama, mutta pojat ovat aikaisemmin kasvaneet enemmän.

6.

- a) 7, 8 ja 9+
- b) 23, 33 ja 35
- c) 11

7.

- a) A
- b) C
- c) B

8.

C

9.

- a) Turussa kesä on melkein kaksi kuukautta pidempi kuin Sodankylässä. Sodankylässä talvi on vastaavasti kaksi kuukautta pidempi kuin Turussa.
- b) Sodankylässä, 30 °C

10.

- a) D

b) A

11.

- a) 14-vuotiaiksi asti
- b) naisia noin 30, miehiä noin 145
- c) naisia noin 85, miehiä noin 345

12.

-

13.

- a) Kreikassa ja Luxemburgissa
- b) naisilla 32 %:lla, miehillä 27,5 %:lla
- c) naiset terveimpiä Kreikassa, miehet Italiassa
- d) Suomalaisilla on EU:ssa eniten haittaavia pitkäaikaissairauksia.

14.

- a) 12 km/h
- b) 84 km
- c) 120 km
- d) Tasaisella nopeudella, koska kuvaajana suora, joka "nousee" tasaisesti.

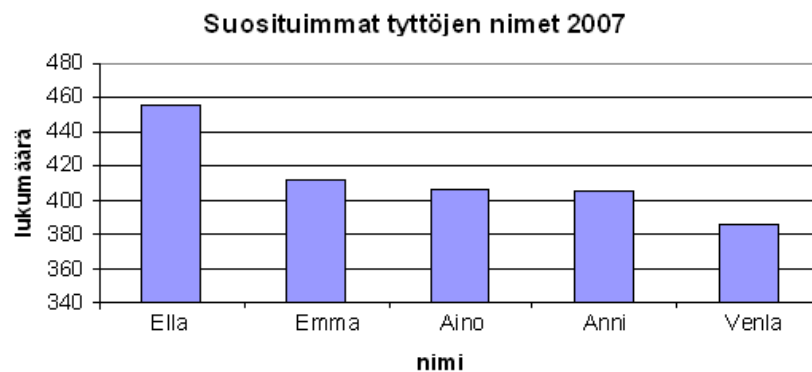
15.

- a) noin 1,5 km
- b) noin 1,3 km kohdalla
- c) Auton nopeus kasvaa.
- d) B

16.

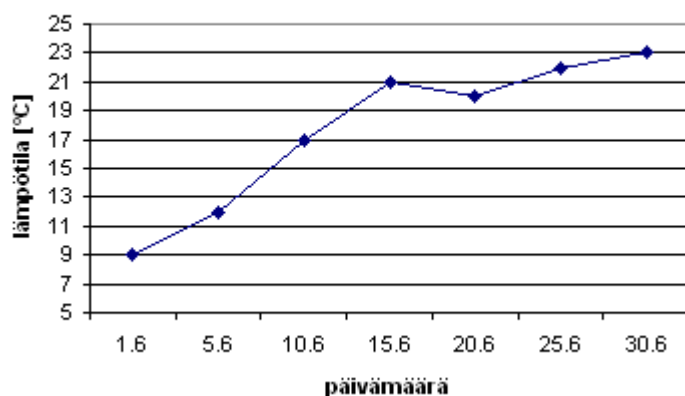
- a) reaktioaikana 18,7 m, kokonaismatka 70,7 m, aika 4,92 s, jarrutusmatka 52 m
- b) reaktioaikana 25 m, kokonaismatka 118 m, aika 6,30 s, jarrutusmatka 93 m
- c) reaktioaikana 37,5 m, kokonaismatka 245,5 m, aika 9,08 s, jarrutusmatka 208 m
- d) jarrutusmatka nelinkertaistuu

17.



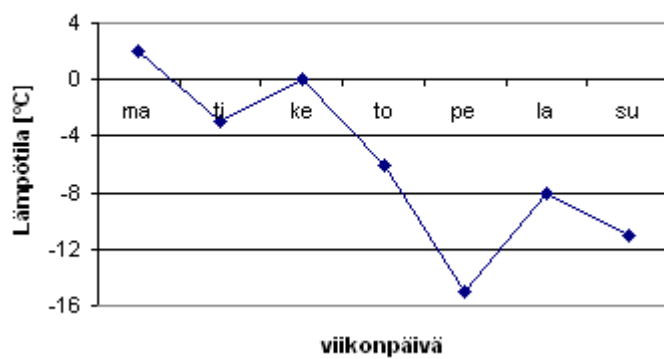
18.

Veden lämpötila eri päivinä

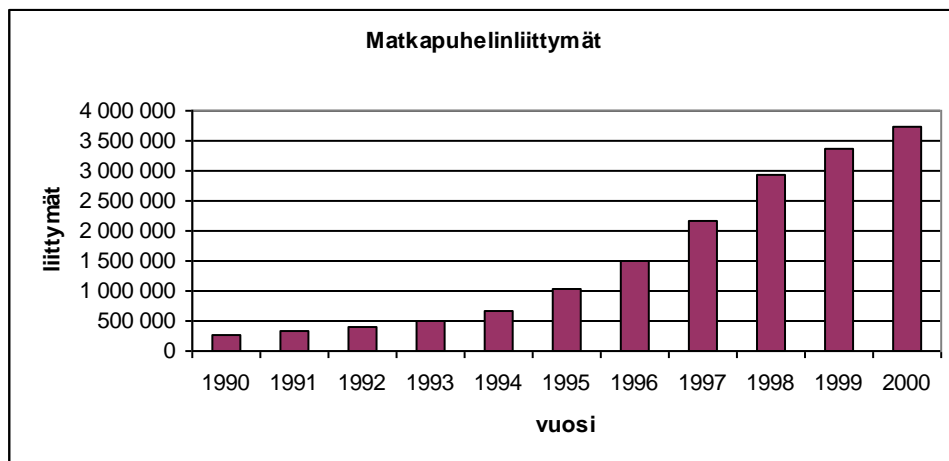


19.

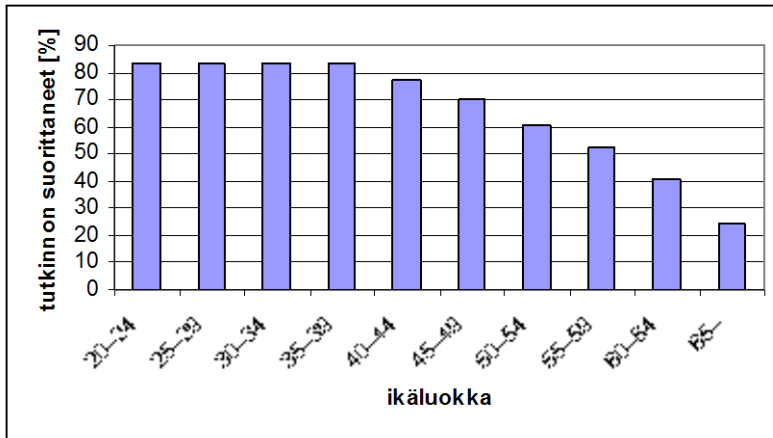
Ulkolämpötilat aamulla



20.



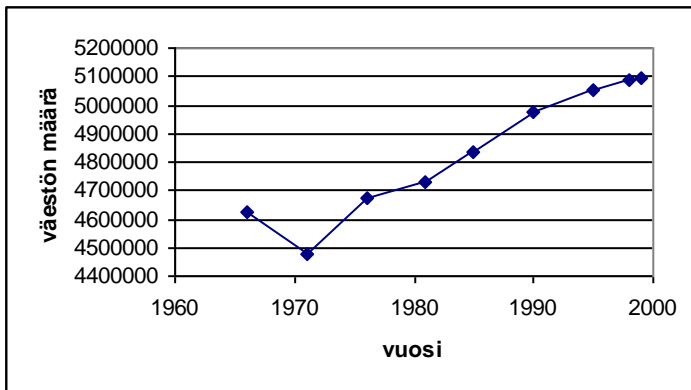
21.



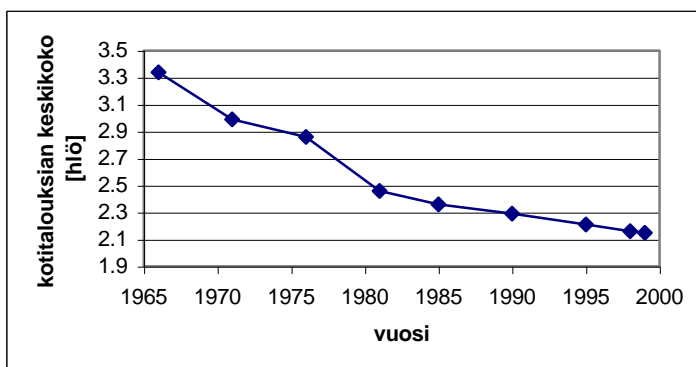
Tutkinnon suorittamisen tarve on reilusti kasvanut nykyisellä sukupolvella edelliseen sukupolveen verrattuna.

22.

a)

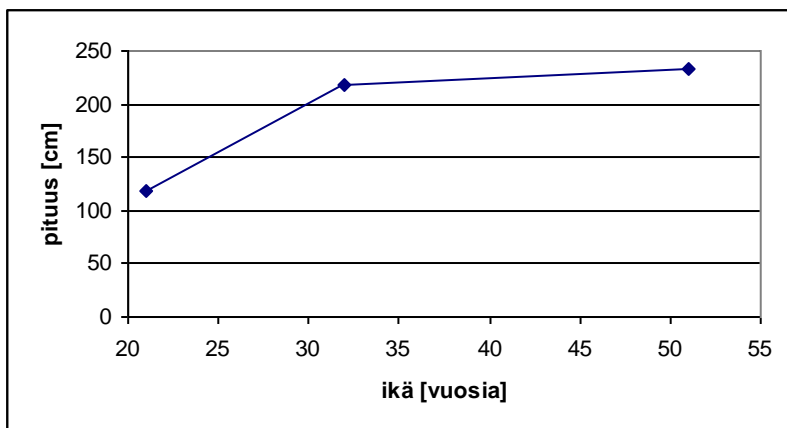


b)

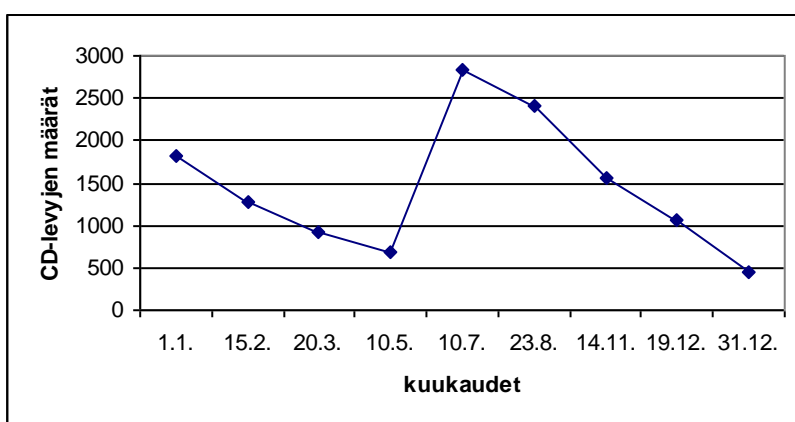


c) Asuntoja on tullut lisää.

23.



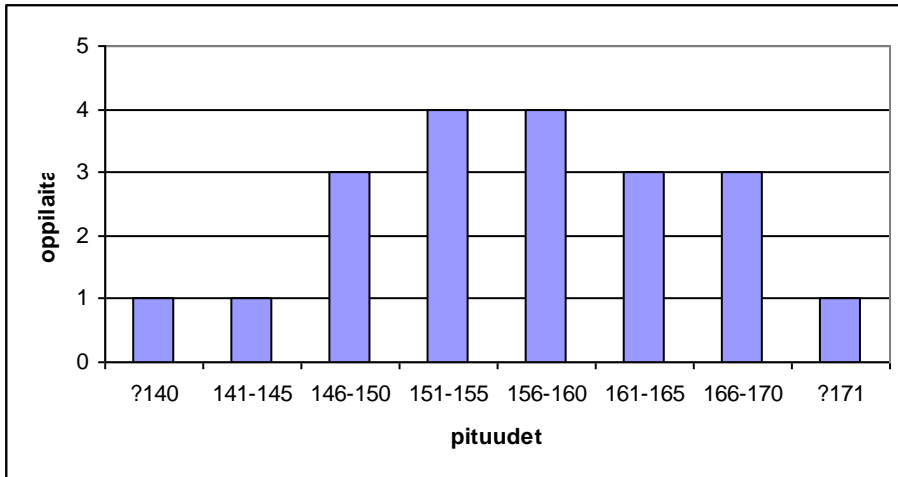
24.



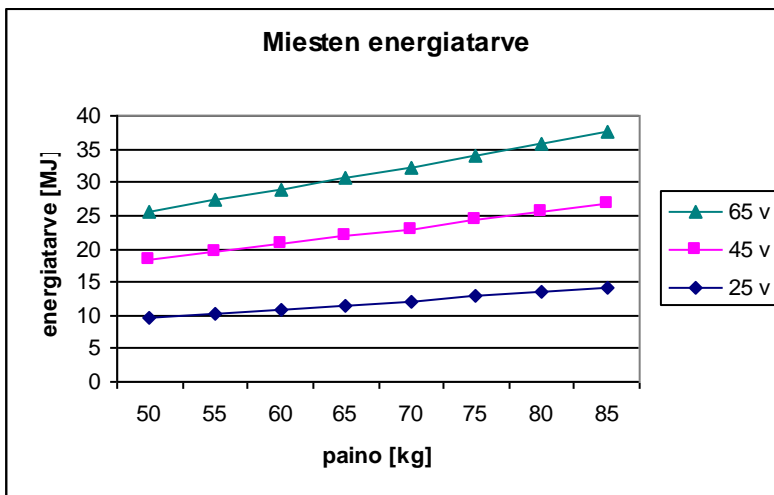
Levyjä oli vuoden alussa 1 830 ja lopussa 449 kappaletta. Koska levyjä tuli kesken vuotta lisää 2 400 kappaletta, levyjä myytiin vuoden aikana $1\ 830 - 449 + 2\ 400 = 3\ 781$ eli $\frac{3781}{12} \approx 315$ levyä kuukaudessa.

25.

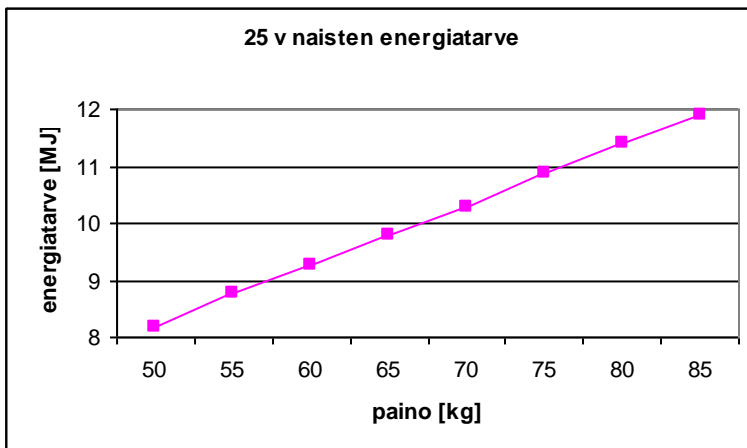
pituus [cm]	oppilaiden lukumäärä
≤140	1
141-145	1
146-150	3
151-155	4
156-160	4
161-165	3
166-170	3
≥171	1



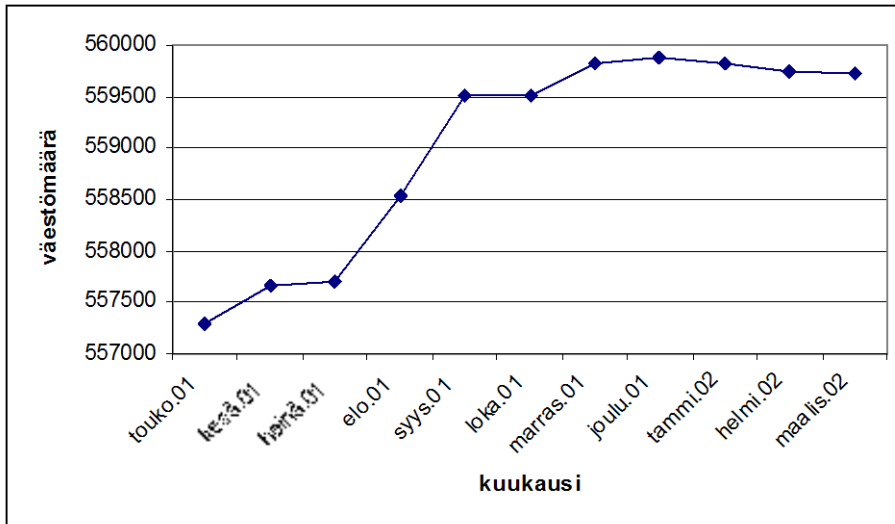
26.



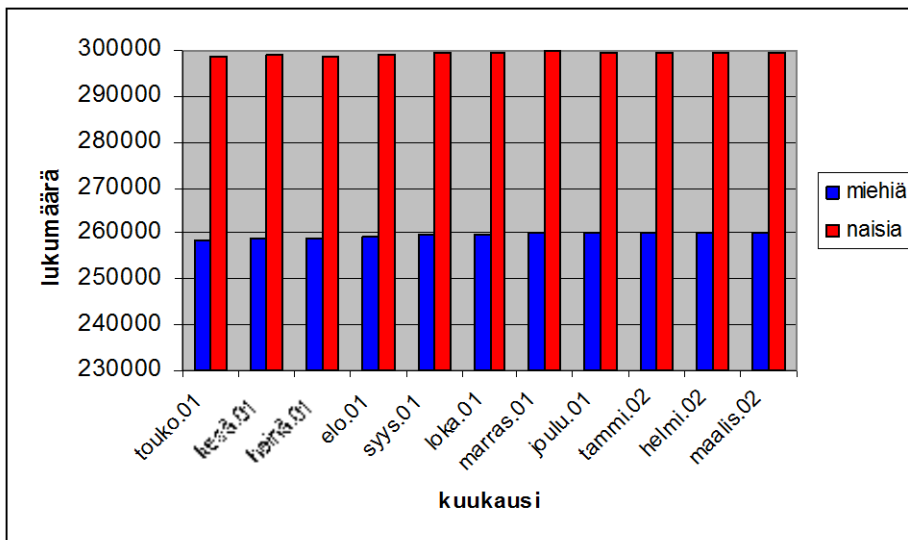
27.



28.

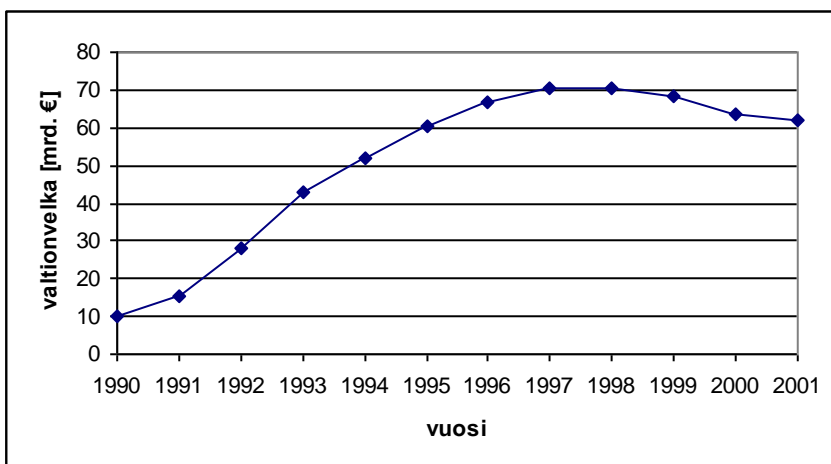


29.



Viivadiagrammissa olisi muutokset saatu paremmin näkyviin. Koska miesten ja naisten määrillä on selvä ero ja molemmissa arvoissa ei ole suuria muutoksia, pitäisi skaalan olla paljon tarkempi. Arvot kannattaisi sijoittaa eri kuvaajiin.

30.

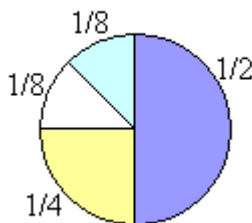


Tiedoista kannattaa tehdä taulukko, josta näkyy sekä kasvu markkoina että prosentuaalinen kasvu. Taulukon saat kätevimmin tehdyksi taulukkolaskentaohjelmalla.

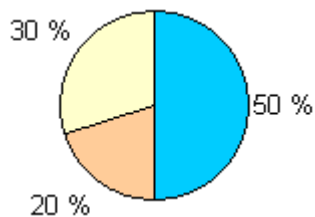
vuosi	velka [mrd.€]	velan kasvu [mrd.€]	suhteellinen kasvu [mrd.€]
1990	9,9		
1991	15,1	15,1 - 9,9 = 5,2	$\frac{15,1 - 9,9}{9,9} \approx 0,5253$
1992	27,9	12,8	0,8477
1993	43	15,1	0,5412
1994	51,7	8,7	0,2023
1995	60,4	8,7	0,1683
1996	66,5	6,1	0,1010
1997	70,3	3,8	0,0571
1998	70,7	0,4	0,0057
1999	68,1	-2,6	-0,0368
2000	63,4	-4,7	-0,0690
2001	61,8	-1,6	-0,0252

- a) vuonna 1993
- b) vuonna 2000, jolloin se väheni.
- c) 1992
- d) 2000

31.



32.



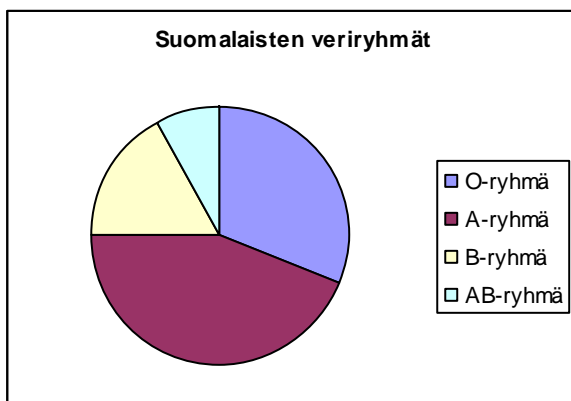
33.

Matkakohde	Matkat [kpl]
Matkat sukulaisten ja tuttavien luo	12144000
Risteilyt	2484000
Työ- ja kokousmatkat kotimaassa	2760000
Matkat omalle mökille	3036000
Yöpymisen ulkomailla sisältäneet matkat	3312000
Vapaa-ajanmatkat kotimaassa maksullisessa majoituksessa	3864000

34.



35.



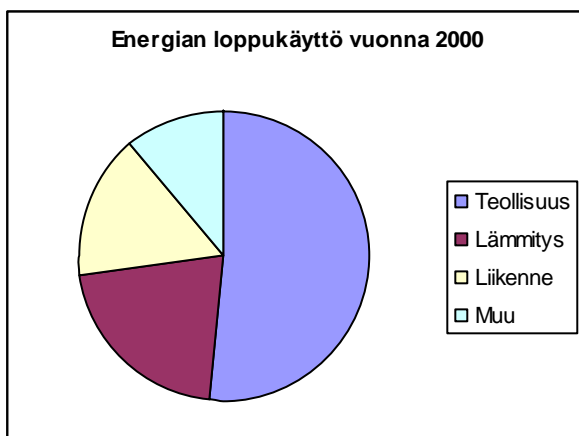
36.

- a) 100 %
- b) 50 %
- c) 25 %
- d) 12,5 %
- e) 2,8 %

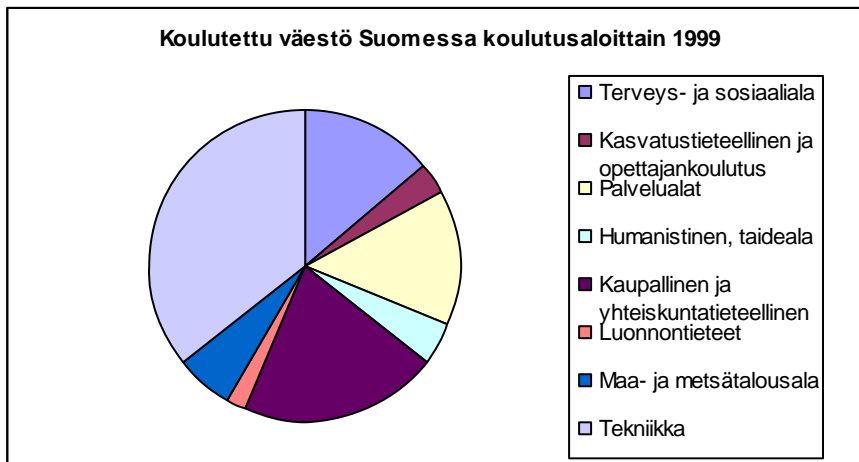
37.

- a) Sektoridiagrammi
- b) Viivadiagrammi
- c) Pylväsdiagrammi

38.



39.



40.

- a) Merkitään kokonaispäästöä a :lla. Kotitalous ym. –sektorin päästöt ovat $0,15a$ ja tästä 20 % on $0,20 \cdot 0,15a = 0,03a$. Jos muut sektorit eivät vähennä päästöjään, kokonaisvähennys on $0,03a$ eli 3 %.
- b) Teollisuuden ja liikenteen päästöt ovat $0,38a$ ja $0,20a$, yhteensä $0,58a$. Jos nämä vähenevät 20 %, vähennys on $0,20 \cdot 0,58a = 0,116a$. Kokonaisvähennys $0,116a$ on noin 12 % kokonaispäästöstä.

41.

- a) jatkuva
b) diskreetti
c) diskreetti
d) jatkuva

42.

-

43.

-

44.

-

45.

Histogrammissa pylväät ovat kiinni toisissaan.

46.

- a) Ei huomattavaa vaikutusta.
b) Lannoite teki herneistä isompia.

47.

arvosana	frekvenssi
10	5
9	9

8	12
7	12
6	6
5	4
4	2

48.

a)

	banaani	omena	päärynä	appelsiini
luokka 8A	0,28	0,36	0,20	0,16
luokka 8B	0,286	0,429	0,143	0,143
luokka 8C	0,423	0,269	0,231	0,077

b)

	banaani	omena	päärynä	appelsiini
suhteellinen frekvenssi	0,329	0,354	0,190	0,127

c) 13

49.

-

50.

- a) ei
- b) kyllä
- c) ei
- d) ehkä

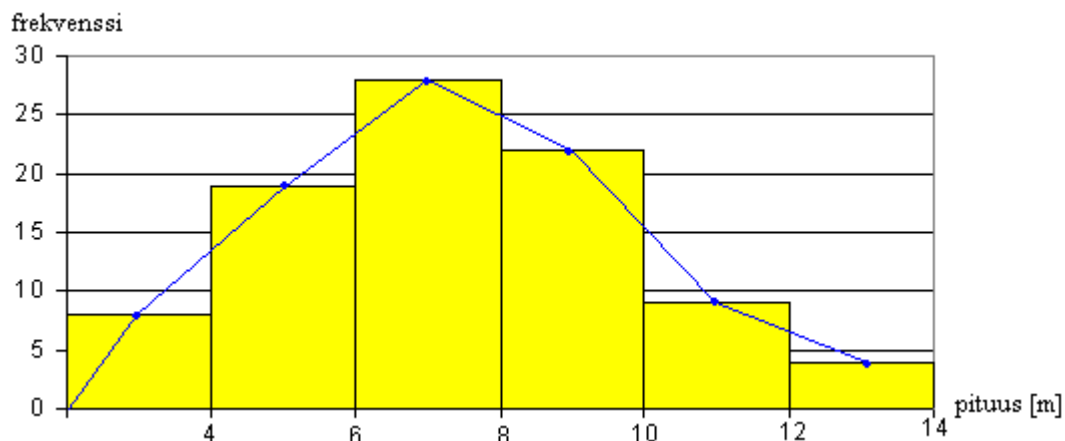
51.

2, 7, 12, 17, 22, 27

52.

50 urheilijaa, luokitellun

53.



Jakauma on symmetrinen.

54.

aika [s]	frekvenssi, f
14,20-14,95	4

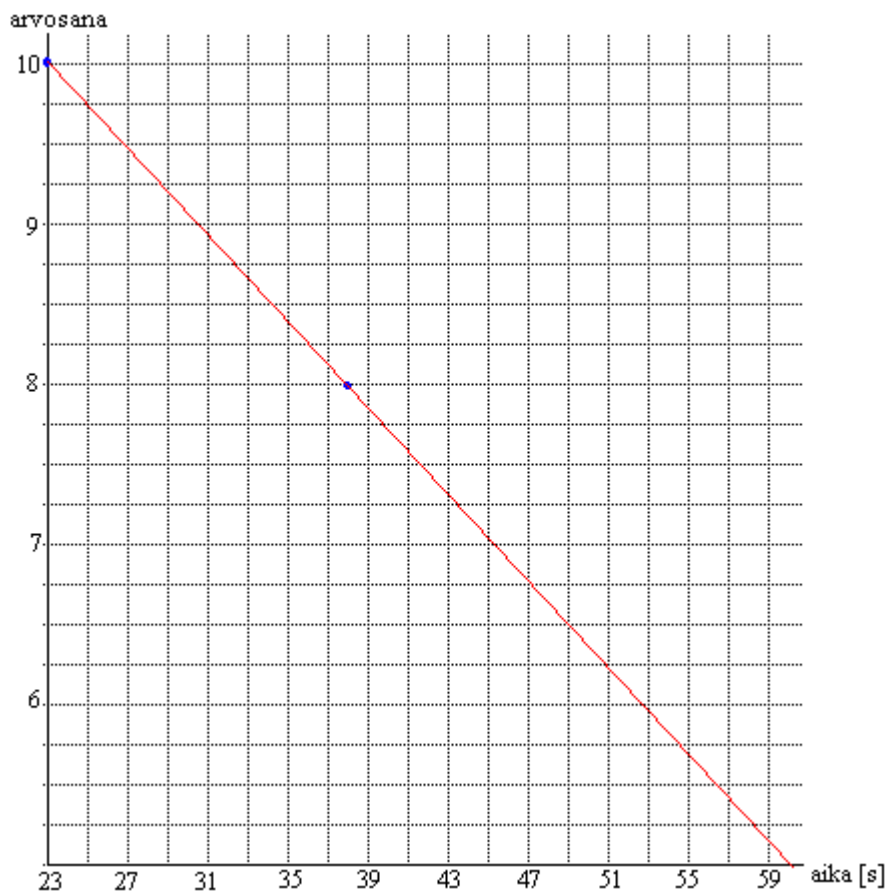
14,96-15,71	6
15,72-16,47	5
16,48-17,23	2
17,24-17,99	3

Koska kyseessä on jatkuva muuttuja, sen kuvaamiseen sopii histogrammi tai viivadiagrammi.

55.

aika [s]	frekvenssi
≤ 23	1
24-27	2
28-31	6
32-35	8
36-39	10
40-43	6
44-47	4
50-53	2
54-57	0
≥ 58	1

Aikojen mediaani osuu aikavälille 36-39, jolla saa arvosanan 8. Piirretään koordinaatisto ajoille ja arvosanoille ja piirretään siihen suora siten, että ajalla 23 saa arvosanan 10 ja ajalla 38 arvosanan 8. Arvosanat voidaan lukea kuvaajasta.



56.

- a) 3
- b) 0,2
- c) 94,75

57.

-

58.

-2 °C

59.

Muutetaan kestoajat sekunneiksi ja lasketaan keskiarvo.

$$\frac{(140 + 186 + 163 + 92 + 250)s}{5} = 166,2s \approx 2 \text{ min } 46s$$

60.

5 senttiä

61.

Jokainen lasku sisältää kolmen kuukauden kulutuksen.

$$\frac{(51,30 + 54,60 + 53,20 + 48,10)\text{€}}{12kk} = 17,2666\dots \text{€}/kk \approx 17,27 \text{€}/kk$$

62.

- a) 10
- b) 7
- c) 4 eli koe saa olla hylätty

63.

1,77 s

64.

- a) 17,2 °C
- b) 1874 – 1883 (0 kpl yli 18°C)
- c) 1932 – 1941 (8 kpl yli 18°C)

65.

Koska kuukauden aikana saattoi tapahtua huomattavia lämpötilan vaihteluita. Lisäksi sateen määrä, ajoittuminen sekä aurinkoisten tuntien määrä pitäisi selvittää, jos halutaan tutkia oliko sää ihanteellinen.

66.

24 luvun

67.

9

68.

27

69.

25

70.

-

71.

Balettitanssijat painavat yhteensä $10 \cdot 52 \text{ kg} = 520 \text{ kg}$.

Kaikkien yhteispaino on $425 \text{ kg} + 520 \text{ kg} = 945 \text{ kg}$, jolloin keskimääräinen paino on

$$\frac{945 \text{ kg}}{15} = 63 \text{ kg}.$$

Vastaus: 63 kg

72.

Toshiba 9,2, Acer 8,0, Fujitsu-Siemens 7,6, Viewsonic 7,0

73.

7,5

74.

Continental 6,9, Goodyear 6,6, Nokian 6,2, Pirelli 6,7

75.

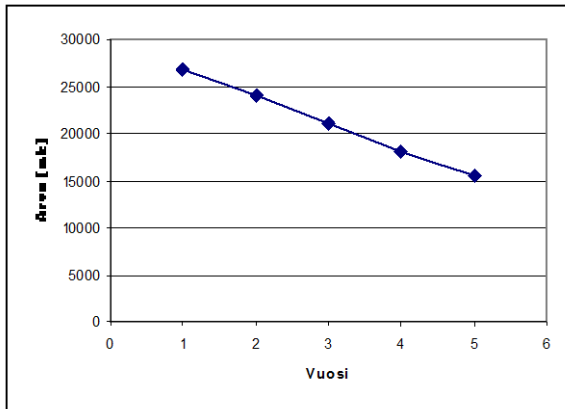
Käyttötuntien summa on 11 140 ja keskiarvo $\frac{11140}{5} \approx 2230 \text{ tuntia/vuosi}$. Oletetaan, että koneen arvo riippuu lineaarisesti käyttötunneista. Koneen arvo laskee koko käyttöikänsä aikana

$29000 \text{ mk} - 6000 \text{ mk} = 23000 \text{ mk}$. Arvo laskee $\frac{23000 \text{ mk}}{19000 \text{ h}} \approx 1,2105 \text{ mk/h}$.

Arvo x tunnin käytön jälkeen on $y = 29000 \text{ mk} - 1,2105 \frac{\text{mk}}{\text{h}} \cdot x$.

Taulukoidaan koneen arvo kunkin vuoden lopussa.

Vuosi	Käyttöaika [h]	Käyttötunnit vuoden lopussa	Arvo vuoden lopussa [mk]
1	1860	1860	26748
2	2200	4060	24085
3	2510	6570	21047
4	2400	8970	18142
5	2170	11140	15515



Taulukon mukaan koneen arvo viiden vuoden lopussa on 15 500 mk.

Vastaus: Käyttötuntien keskiarvo on 2230 tuntia, arvo viiden vuoden kuluttua on 15 500 mk.

76.

Lasketaan pituuksien ja leveyksien keskiarvot:

$$x_0 = \frac{83,4 + 83,6 + 82,8 + 82,6 + 83,1 + 83,7 + 83,2 + 83,3}{8} = \frac{665,7}{8} = 83,2125 \approx 83,2 \text{ (cm)}$$

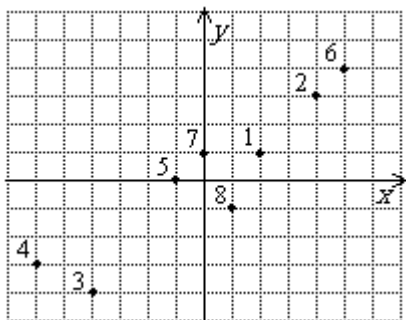
$$y_0 = \frac{54,1 + 54,3 + 53,6 + 53,7 + 54,0 + 54,4 + 54,1 + 53,9}{8} = \frac{432,1}{8} = 54,0125 \approx 54,0 \text{ (cm)}$$

Keskiarvoala on $x_0 \cdot y_0 = 4494,515\dots \approx 4490 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Taulukoidaan mittaustulosten poikkeamat keskiarvosta:

mittauskerta	$x - x_0$	$y - y_0$
1.	0,2	0,1
2.	0,4	0,3
3.	-0,4	-0,4
4.	-0,6	-0,3
5.	-0,1	0,0
6.	0,5	0,4
7.	0,0	0,1
8.	0,1	-0,1

Kuvassa yksi ruutuväli vastaa 0,1 cm ja origoa vastaa piste (83,2; 54,0).



Vastaus: $x_0 \approx 83,2 \text{ cm}$, $y_0 \approx 54,0 \text{ cm}$ ja keskiarvoala $\approx 4490 \text{ cm}^2$

77.

- a) 4
- b) 3

78.

Toyota-merkkisiä autoja myydään eniten.

79.

- a) 7
- b) 7
- c) 7,4

80.

-

81.

kyllä

82.

Kun lukuja on parillinen määrä.

83.

-

84.

- a) 25,2
- b) 21
- c) 23

85.

Moodi on 2, 3 ja 4. Mediaani on 3. Keskiarvo on 3,3.

Keskiluvut havaintoarvon lisäyksen jälkeen: moodi 2, 3, 4 ja 5, mediaani 3,5 ja keskiarvo 3,5.

86.

asiakkaiden lukumäärän keskiarvo = 169

moodi = torstai

mediaania ei voida määrittää

87.

Moodi on 45,5 vuotta ja mediaani noin 43 vuotta

88.

veriryhmä A

89.

Moodi on B ja mediaani on C.

90.

-

91.

Keskiarvo on 1,7, moodi on 1 ja mediaani on 1.

92.

Keskiarvo on 2,8. Moodi on 3. Mediaani on 3.

93.

Moodi on Virtanen.



94.

Keskiarvoksi saadaan $\bar{x} = \frac{9+8+6+4+5+9}{6} = \frac{41}{6} \approx 6,8$.

Luvut ovat suuruusjärjestyksessä 4, 5, 6, 8, 9, 9. Koska lukuja on parillinen määrä, mediaani on keskimmäisten lukujen 6 ja 8 keskiarvo eli 7. Keskiarvo ja mediaani paranevat eniten, kun viimeinen arvosana on 10. Tällöin keskiarvo on $\frac{51}{7} \approx 7,3$ ja mediaani jonon 4, 5, 6, 8, 9, 9, 10 keskimäinen luku 8.

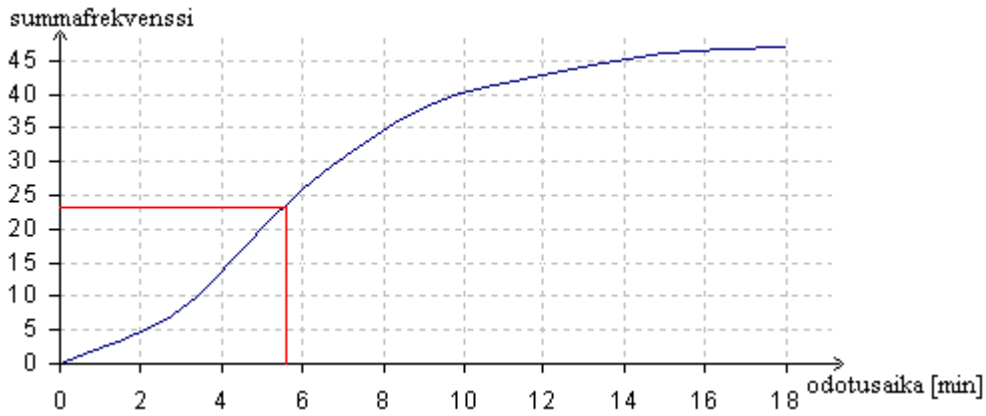
Vastaus: Keskiarvo on 6,8 ja mediaani 7. Paras keskiarvo on 7,3 ja mediaani 8.

95.

- a) 100
- b) 35
- c) 30
- d) 2640 €/kk

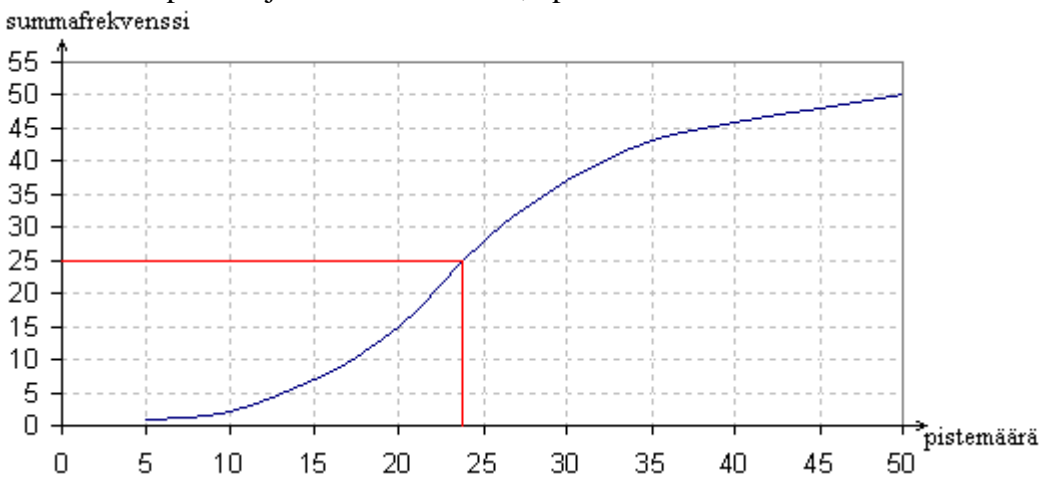
96.

Moodi on 5 min ja mediaani noin 5,5 min.



97.

Moodi on 23 pistettä ja mediaani noin 23,5 pistettä.



98.

- a) kyllä
- b) ei
- c) ei

99.

pieni

100.

Vaihteluväli on (4,13) ja vaihteluvälin pituus 9.

101.

- a) 1,7
- b) 1,2
- c) 12,1

102.

- a) 10 vuotta
- b) 6 vuotta

103.

- a) (158, 172)

b) 14

104.

a) 3,4

b) 1,6

105.

a) (2100 m, 3000 m)

b) 900 m

c) 2550 m

d) 290 m

106.

a) keskiarvo 0, keskihajonta 1,4

b) keskiarvo 2, keskihajonta 0

c) keskiarvo 2, keskihajonta 0,8

d) keskiarvo 2, keskihajonta 0,8

107.

B:ltä

108.

4 tai 44

109.

-

110.

tapauksessa b

111.

a) ei

b) kyllä

c) ei

d) kyllä

112.

Susannen

113.

keskiarvo 92 g ja keskihajonta 11 g

114.

a) keskiarvo 2, keskihajonta 4

b) keskiarvo -2, keskihajonta 4

c) keskiarvo 9, keskihajonta 12

d) keskiarvo -3, keskihajonta 4

115.

kyllä

116.

testissä A

117.

$$148\frac{1}{3}$$

118.

Keskiarvo on 8,15 ja keskihajonta 1,39.

119.

-

120.

- a) 38
- b) 39
- c) 39,5
- d) 2,4

121.

Moodi on Johansson

122.

keskiarvo 171,5
mediaani 171
keskihajonta 11,0

123.

-

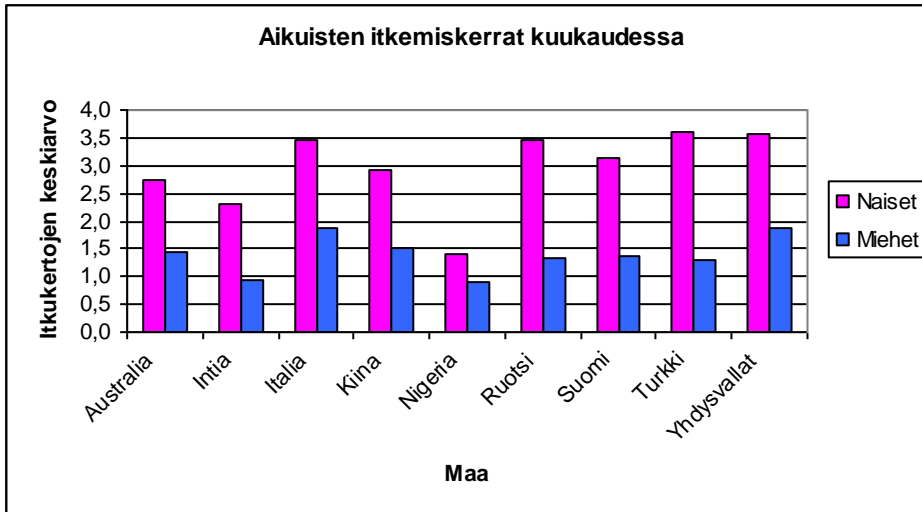
124.

Moodi on Rikospoliisi Maria Kallio.

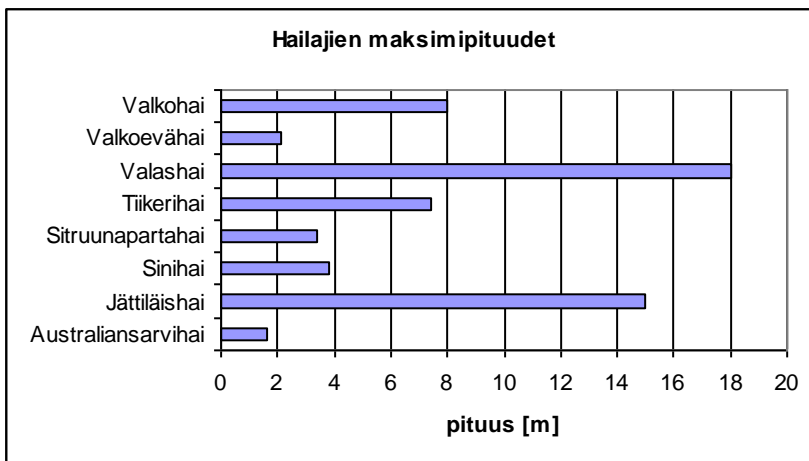
125.

-

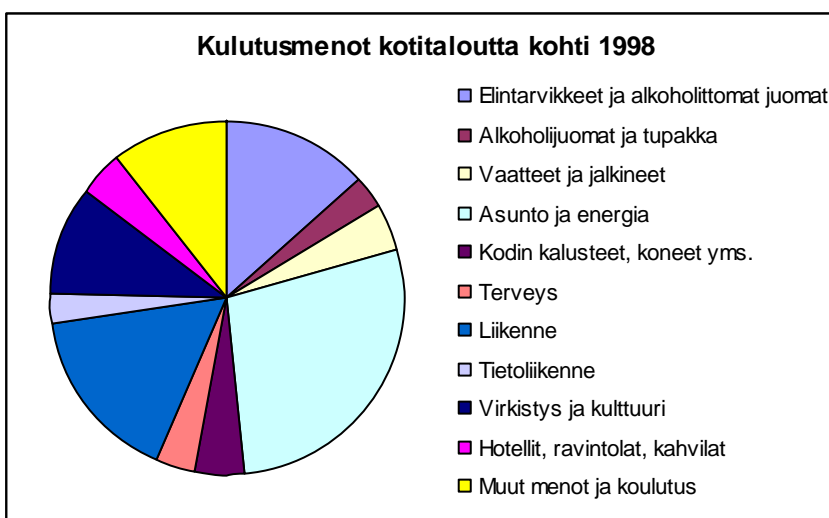
126.

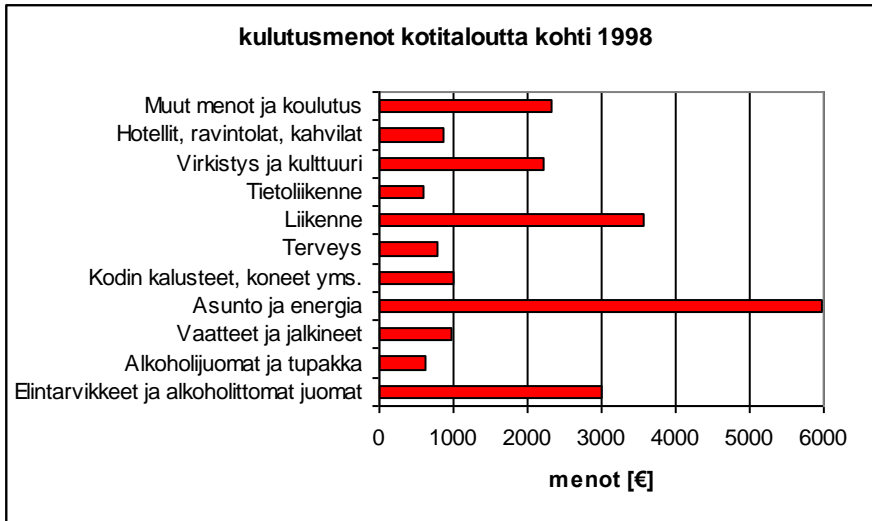


127.

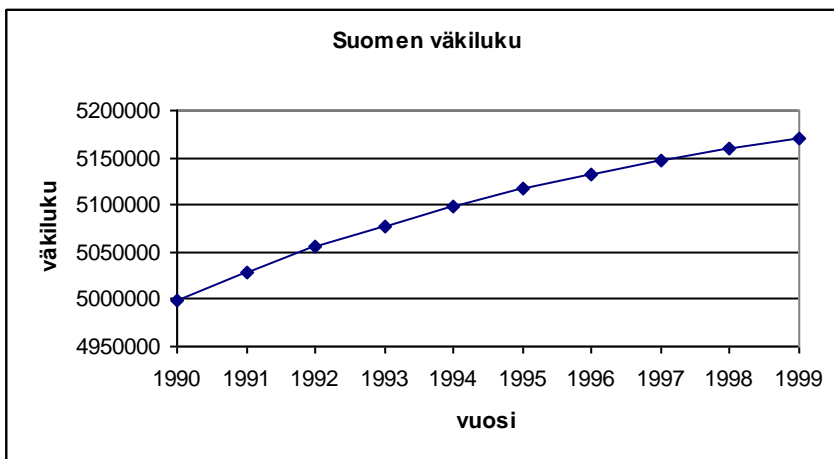


128.

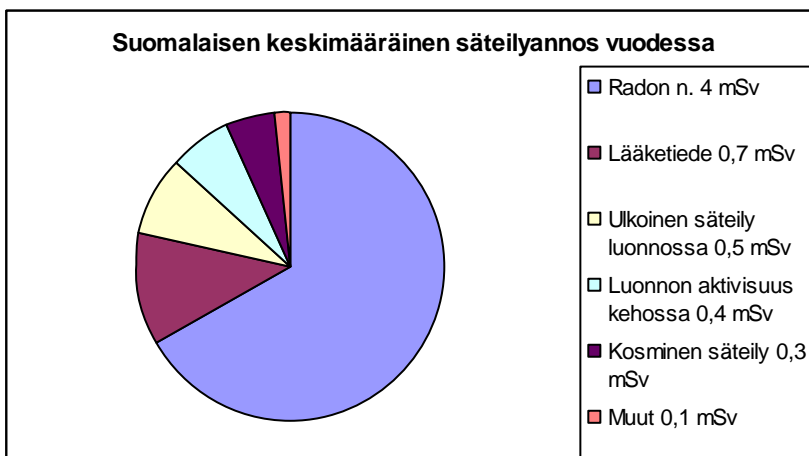




129.



130.



131.

-

132.

-

133.

-

134.

- a) leikkaus
- b) erotus
- c) yhdiste

135.

- a) {c}
- b) {a, b, c, d, e}
- c) {a, b}

136.

- a) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
- b) {3, 4}

137.

13

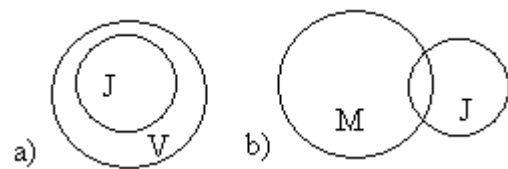
138.

15

139.

- a) joukoilla ei ole yhteisiä alkioita, joten niiden leikkaus on tyhjä joukko
- b) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

140.



141.

27

142.

- a) {1, 2, 3, 4, 6, 8}
- b) {C, D}

143.

- a) {2, 4}
- d) {-2, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 8, ...}

144.

5:ssä

145.

11:llä

146.

7

147.

57

148.

39

149.

4 poikaa ja 3 tyttöä

150.

kaikki

151.

a) 1

b) 2

c) 2

d) 3

e) 2 tai 3

152.

a) 1

b) 3 tai 4

c) 3

d) 2 tai 3

153.

-

154.

Tea

155.

-

156.

-

157.

-

158.

-

159.

-P tulee englanninkielisestä sanasta probability tai ranskan sanasta probabilité, jotka tarkoittavat todennäköisyyttä.

160.

- a) on
- b) ei
- c) ei
- d) on

161.

Sellaisia, jotka kaikki ovat yhtä mahdollisia.

162.

- a) {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- b) {kr kr}, {kl kl}, {kr kl}, {kl kr}

163.

- a) {2, 3, 4, 5, 6}
- b) {1, 2, 3}
- c) {1, 2, 3}
- d) {2, 3, 4, 5}

164.

0,5

165.

2/9

166.

$\frac{1}{8}$

167.

$\frac{2}{13}$

168.

-

169.

50

170.

Molemmilla sama todennäköisyys.

171.

$\frac{1}{30}$

172.

- a) $\frac{1}{6}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{5}{6}$

173.

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{1}{13}$
- c) $\frac{4}{13}$

174.

- a) $\frac{1}{6}$
- b) $\frac{5}{6}$

175.

- a) $\frac{7}{15}$
- b) $\frac{1}{5}$
- c) $\frac{1}{3}$

176.

a)

Herneiden lukumäärä	4	5	6	7	8
Thomas	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{5}$
Matias	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{6}$
Joona	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

b)

Herneiden lukumäärä	4	5	6	7	8
todennäköisyys	0,056	0,233	0,267	0,311	0,133

c) 7

177.

- a) $\frac{4}{15}$
- b) $\frac{8}{15}$
- c) $\frac{1}{5}$

178.

- a) 12
- b) 72

179.

$$\frac{1}{3}$$

180.

0,43

181.

$$\frac{1}{6}$$

182.

0,62

183.

- a) 0,114
- b) 0,036
- c) 0,85

184.

0,077

185.

- a) 0,087
- b) 0,435
- c) 0,304

186.

- a) 833
- b) 2500

187.

0,18

188.

- a) 0,175 0,154 0,151 0,176 0,166 0,178
- b) 0,167

189.

0,125

190.

Virtanen, koska se on yleisin sukunimi Suomessa.

191.

- a) 0,14

- b) 0,52
- c) 0,95

192.

0,29

193.

1/2

194.

vaniljaa 4, suklaata 6, mansikkaa 5, lakritsia 3, kinuskipähkinää 1 ja mangomelonia 1 paketti.

195.

1/6

196.

- a) $\frac{1}{6}$
- b) $\frac{1}{4}$
- c) $\frac{1}{2}$

197.

Merkitään ympyrän sädettä r :llä. Kivi osuu lähemmäksi keskipistettä, jos se osuu samankeskisen $\frac{r}{2}$ -säteisen ympyrän sisään.

Todennäköisyys on pinta-alojen suhde

$$\frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{r^2}{4r^2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

198.

3 628 800 eri tavalla

199.

6

200.

27

201.

- a) 0,31
- b) 0,17

202.

- a) 0,17
- b) 0,92

c) 0,03

203.

a) 5040 eri järjestyksessä

b) 0,0002

204.

$\frac{1}{6}$

205.

256

206.

4 294 967 294

207.

a) 165

b) 0,006

208.

a) 6

b) 3

209.

a) 2

b) 6

c) 24

d) 362880

210.

15

211.

0,45

212.

16 (8 miestä ja 8 naista)

213.

Piirretään taulukko noppien antamien pistelukujen summista.

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Pistelukujen summa 7 esiintyy useimmin, joten se on todennäköisin.

214.

a) $\frac{5}{18} \approx 0,28$

b) $\frac{25}{324} \approx 0,077$

215.

Paikalla on 20 henkilöä, joista jokainen kättelee jokaista muuta paitsi itseään ja aviopuolisoaan, eli 18 henkilöä. Lisäksi kuhunkin kättelyyn tarvitaan 2 henkilöä.

Kättelyitä suoritetaan $\frac{20 \cdot 18}{2} = 180$.

216.

Jos oppilaita on x kpl, niin jokainen antaa kuvansa $x-1$:lle luokkatoverilleen. Joten

$$x(x-1) = 1122$$

$$x^2 - x - 1122 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat $x = 34$ ja $x = -33$ (ei kelpaa ratkaisuksi). Luokalla oli siis 34 oppilasta.

217.

0,00013

218.

0,00098

219.

0,019

220.

a) 0,33

b) 0,18

221.

0,0039

222.

0,364

223.

1/12

224.

a) 416 000

b) 38 %

225.

$$\frac{1}{36}$$

226.

0,00077

227.

12,5 %

228.

0,5

229.

1/6

230.

Kannattaa. Jos pidät alkuperäisen valintasi, voitat 1/5 todennäköisyydellä. Jos vaihdat valintaa, voitat 4/15 todennäköisyydellä.

231.

0,00935

232.

Olkoon silmäluvun 1 todennäköisyys a ja silmäluvun 2 todennäköisyys b , jolloin

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{1} \Rightarrow b = 2a.$$

Vastaavasti silmäluvun 3 todennäköisyys on $3a$ jne.

Silmälukujen todennäköisyyksien summa on oltava 1, jolloin pätee

$$a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a = 1$$

$$a = \frac{1}{21}$$

Jolloin silmälukujen todennäköisyyksiksi saadaan:

silmäluku	1	2	3	4	5	6
todennäköisyys	1/21	2/21	1/7	4/21	5/21	2/7

Todennäköisyys saada kaksi kuutosta on $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49} \approx 8,2\%$

233.

riippumattomia

234.

0,0045

235.

a) 0,347

b) 0,147

236.

- a) riippumattomia
- b) riippuvia

237.

0,0026

238.

- a) 0,107
- b) 0,357

239.

- a) $\frac{2}{7}$
- b) $\frac{1}{7}$

240.

0,0143

241.

0,30

242.

0

243.

0,0079

244.

0,000000065

245.

- a) 0,0667
- b) 0,467

246.

- a) 0,0152
- b) 0,682

247.

0,56

248.

- a) $6,3 \cdot 10^{-7}$
- b) 0,0051

249.

Riippuvuutta ei voi kuvata Venn-diagrammeilla.

250.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{10}$$

251.

$$\frac{49}{78} \cdot \frac{48}{77} \cdot \frac{47}{76} \cdot \frac{46}{75} \cdot \frac{45}{74} \cdot \frac{44}{73} \approx 0,054$$

252.

Oletetaan, että parhaita pelaajia ovat ne, jotka voittavat aina kaikki muut pelaajat. Tällöin parhaat pelaajat ovat loppuottelussa, jollei he pelaa toisiaan vastaan alkukierroksilla.

1. kierroksella on 32 ottelijaa. Paras pelaajavoittoa saadaan pariksi 31 pelaajaa, joista yksi on toiseksi paras.

$$P(\text{Parhaat eivät kohtaa 1. kierroksella}) = \frac{30}{31}$$

2. kierroksella on 16 ottelijaa.

$$P(\text{Parhaat eivät kohtaa 2. kierroksella}) = \frac{14}{15}$$

3. kierroksella on 8 ottelijaa.

$$P(\text{Parhaat eivät kohtaa 3. kierroksella}) = \frac{6}{7}$$

4. kierroksella on 4 ottelijaa.

$$P(\text{Parhaat eivät kohtaa 4. kierroksella}) = \frac{2}{3}$$

Todennäköisyys sille, että parhaat ovat loppuottelussa on:

$$P(\text{Parhaat loppuottelussa}) = \frac{30}{31} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{31} \approx 0,52$$

Vastaus: 0,52

253.

1

254.

-

255.

1

256.

0,429

257.

22 %

258.

$\frac{1}{2}$

259.
70 %

260.
 $\frac{1}{3}$

261.
 $\frac{1}{2}$

262.
80 %

263.
a) $\frac{3}{13}$
b) $\frac{1}{13}$

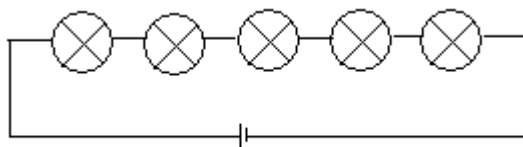
264.
a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{3}{5}$

265.
0,556

266.
0,39

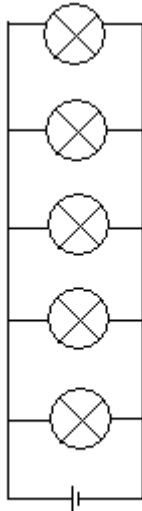
267.
0,81

268.



a) 0,70

sarjaankytkentä



b) 1,00 rinnankytkentä

269.

- a) 0,76
- b) 0,24

270.

Todennäköisyysjakaumassa mediaanilla tarkoitetaan sitä arvoa, jota pienempien ja suurempien arvojen todennäköisyys on yhtä suuri eli 0,5.

271.

Todennäköisyys kummankin astian valitsemiselle on $\frac{1}{2}$. Pienin todennäköisyys aidoille helmille saadaan, kun sijoitetaan toiseen astiaan ainoastaan yksi muovihelmi ja toiseen kaikki muut helmet.

$$P(\text{aidot}) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (0) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{50}{99}\right) = 0,252525... \approx 25\%$$

272.

$$0,44^2 + 0,17^2 + 0,08^2 + 0,31^2 \approx 0,325$$

273.

- a) 50 %
- b) 42 %
- c) 3,3 %

274.

Koska oppilas on myöhästynyt maanantaina, niin tiistaina hän myöhästyy 30 % todennäköisyydellä ja tulee ajoissa kouluun 70 % todennäköisyydellä. Jos oppilas on myöhästynyt tiistaina, hän tulee keskiviikkona ajoissa todennäköisyydellä 70 % ja jos hän on tullut ajoissa tiistaina, hän tulee keskiviikkona ajoissa 90 % todennäköisyydellä.

Todennäköisyys, että oppilas tulee keskiviikkona ajoissa kouluun on $0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,9 = 0,84$

275.

0,4

276.

96 %

277.

0,92

278.

0,66

279.

a) 0,7

b) 0,2

280.

0,65

281.

47

282.

0,03

283.

95 %

284.

a) 0,21

b) 0,89

c) kolmessa

285.

a) 0,2

b) 0,3

286.

$1,1 \cdot 10^{-28}$

287.

a) 56 %

b) 6 %

288.

a) 51 %

b) 38 %

c) 90 %

289.

0,97

290.

- a) 0,072
- b) 0,97

291.

- a) 0,06
- b) 0,94

292.

0,42. Vihje: Hyödynnä vastatapahtumaa.

293.

- a) $P(\text{neljä ässää}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \approx 3,7 \cdot 10^{-6}$
- b) $P(\text{ei yhtään ässää}) = \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \cdot \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49} \approx 0,72$

294.

Diskreetti muuttuja voi saada vain erillisiä arvoja ja jatkuva muuttuja voi saada kaikkia arvoja joltakin väliltä.

295.

- a) jatkuva
- b) diskreetti
- c) diskreetti
- d) jatkuva

296.

Luokittelulla aineisto jaetaan suurempiin ryhmiin. Luokittelemalla menetetään osa aineiston informaatiosta, mutta useissa tapauksissa sillä lisätään tulosten havainnollisuutta.

297.

- a) kyllä
- b) ei
- c) ehkä

298.

5,6

299.

Keskiarvo on 3,1

300.

HP 8,5, Canon 8,2, Epson 7,8, Lexmark 7,7

301.

Moodi on muuttujan arvo, joita on eniten. Mediaani tarkoittaa keskimmäistä muuttujan arvoa, kun aineisto on suuruusjärjestyksessä.

302.

moodilla

303.

Ainoastaan, jos tilastomuuttujan arvot voidaan järjestää suuruusjärjestykseen.

304.

Moodi on 8 ja mediaani on 8.

305.

- a) kyllä
- b) kyllä
- c) ei
- d) ei

306.

3,1

307.

- a) ...vaihteluväli, vaihteluvälin pituus ja keskihajonta.
- b) ...keskiarvo, moodi ja mediaani.

308.

Vaihteluväli on suurin ja pienin arvo. Vaihteluvälin pituus on näiden arvojen erotus.

309.

24 tai 5

310.

Viivin

311.

- a) {e}
- b) {c, d, e, f, g}

312.

symmetriaa

313.

- a) 17
- b) 19

314.

- a) $\frac{5}{6}$
- b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

315.

Kannattaa. Jos pidät alkuperäisen valintasi, voitat $\frac{1}{3}$ todennäköisyydellä. Jos vaihdat valintaa, voitat $\frac{2}{3}$ todennäköisyydellä.

316.

a) $\frac{8}{27}$

b) $\frac{19}{27}$

317.

väkiluku oli 5 194 901

a) 0,126

b) 0,117

c) 0,108

318.

0,143

319.

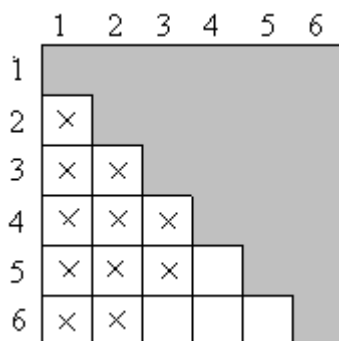
a) $\frac{1}{18} \approx 0,06$

b) $\frac{13}{18} \approx 0,72$

c) $\frac{1}{18} \approx 0,06$

320.

Alkeistapauksia on yhteensä 15, näistä 11 tapausta on sellaista, joissa näkyviin jäävien sivujen yhteenlaskettu pisteluku on yli 12. Joten kysytty todennäköisyys on $\frac{11}{15} \approx 0,73$.



321.

0,0059

322.

0,33

323.

10 000 000

324.

$3^{13} = 1594323$

325.

0,44

326.

$\frac{1}{60}$

327.

0,61

328.

0,51

329.

88,3 %

330.

0,74

331.

a) 0,4

b) Vaadittavia tietoja ei ole annettu.

Taulukko-osio

Reaalilukujen laskulait

$$a + b = b + a, ab = ba$$

vaihdantalaki

$$a + (b + c) = (a + b) + c, a(bc) = (ab)c$$

liitântälaki

$$a(b + c) = ab + ac$$

osittelulaki

$$a + (-a) = 0$$

luvun a vastaluku $-a$

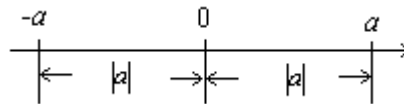
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

luvun a käänteisluku $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$)

$$|a|$$

itseisarvo

Graafinen tulkinta: $|a|$ = luvun a vastinpisteiden etäisyys nollasta



Murtolukujen laskutoimitukset

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}, \text{ missä } k \neq 0$$

laventaminen (\rightarrow) ja supistaminen (\leftarrow)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

yhteenlasku (lavennus samannimisiksi)

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

vähennyslasku (lavennus samannimisiksi)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

kertolasku

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

jakolasku

Potenssi

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

n tekijää, a = kantaluku, n = eksponentti

$$a^0 = 1$$

$a \neq 0$, 0^0 ei ole määritelty

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$a \neq 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$$

$a \neq 0$

Laskusääntöjä

$a^m a^n = a^{m+n}$	samankantaisten potenssien tulo
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	samankantaisten potenssien osamäärä
$(ab)^n = a^n b^n$	tulon potenssi
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	osamäärän potenssi
$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$	potenssin potenssi

Polynomin jakaminen tekijöihin

$ab + ac = a(b + c)$	yhteinen tekijä
$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$	ryhmittely
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	muistikaavat
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	

Neliöjuuri

Jos $\sqrt{a} = b$, niin $b^2 = a$ ja $b \geq 0$ (pätee myös toisinpäin).

Laskusääntöjä

$$\begin{aligned}(\sqrt{a})^2 &= a \\ \sqrt{a^2} &= |a| \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ \sqrt{ab} &= \sqrt{a}\sqrt{b}\end{aligned}$$

Lukujonot

Aritmeettinen lukujono

$$\begin{aligned}d &= a_2 - a_1 && \text{erotusluku} \\ a_n &= a_1 + (n - 1)d && \text{yleinen termi}\end{aligned}$$

Geometrinen lukujono

$$q = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{suhdeluku}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{yleinen termi}$$

Toisen asteen yhtälö

Normaalimuoto $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 1$

Ratkaisukaava: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Paraabelin aukamissuunta ja muoto:

- Jos $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin.
- Jos $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin.
- Jos $|a|$ on pieni, paraabeli on leveä.
- Jos $|a|$ on suuri, paraabeli on kapea.

Vaillinaiset toisen asteen yhtälöt

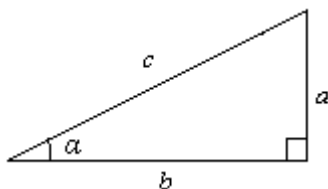
Yhtälön $ax^2 + c = 0$ ratkaisujen määrä riippuu vakiosta c :

- $c < 0$: kaksi ratkaisua, ratkaisut toistensa vastalukuja
- $c = 0$: ainoa ratkaisu $x = 0$
- $c > 0$: ei ratkaisua

Yhtälön $ax^2 + bx = 0$ ratkaisut:

- aina kaksi ratkaisua, toinen on aina $x = 0$

Suorakulmaisen kolmion trigonometria



$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{Pythagoraan lause})$$

$$A = \frac{1}{2} ab$$

Trigonometriset funktiot

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

Suora

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin:

$$k = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Suora on

- nouseva, jos $k > 0$
- laskeva, jos $k < 0$
- x -akselin suuntainen, jos $k = 0$
- y -akselin suuntainen, jos k :ta ei voida määrittää.

Tarkastellaan suoria s_1 ja s_2 , joiden kulmakertoimet ovat k_1 ja k_2 .

- Suorat ovat yhdensuuntaiset eli $s_1 \parallel s_2$, jos $k_1 = k_2$ tai suorat ovat y -akselin suuntaiset.
- Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli $s_1 \perp s_2$, jos $k_1 \cdot k_2 = -1$ tai toinen suora on x -akselin ja toinen y -akselin suuntainen.

Suoran yhtälön yleinen muoto:

$$ax + by + c = 0$$

Suoran yhtälön ratkaistu muoto:

$y = kx + b$, missä k on kulmakerroin ja b vakiotermin (suoran ja y -akselin leikkauspisteen y -koordinaatti).

x - akselin suuntaisen suoran yhtälö:

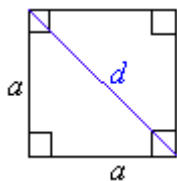
$y = t$, missä t on suoran ja y -akselin leikkauspisteen y -koordinaatti

y -akselin suuntaisen suoran yhtälö:

$x = u$, missä u on suoran ja x -akselin leikkauspisteen x -koordinaatti

Tasokuvioita

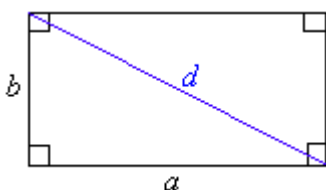
Neliö



$$A = a^2$$

$$d = \sqrt{2}a$$

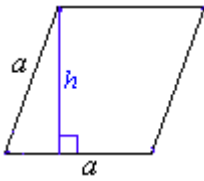
Suorakulmio



$$A = ab$$

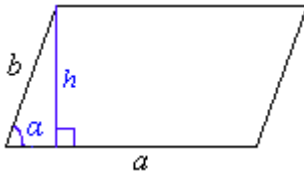
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Neljäkäs



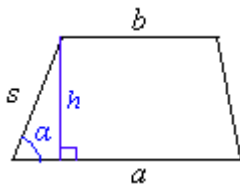
$$A = ah$$

Suunnikas



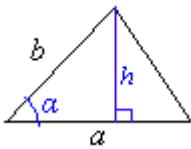
$$A = ah = absin\alpha$$

Puolisuunnikas



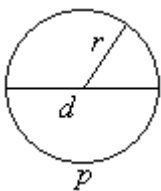
$$A = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}(a+b)s \sin\alpha$$

Kolmio



$$A = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin\alpha$$

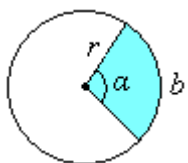
Ympyrä



$$A = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$$

$$p = 2\pi r = \pi d$$

Sektor

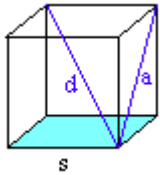


$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r \text{ (kaaren pituus)}$$

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2 = \frac{br}{2}$$

Avaruuskappaleita

Kuutio

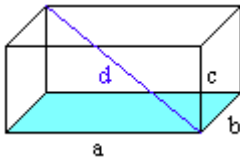


$$a = s\sqrt{2}, d = s\sqrt{3}$$

$$A = 6s^2$$

$$V = s^3$$

Suorakulmainen särmiö

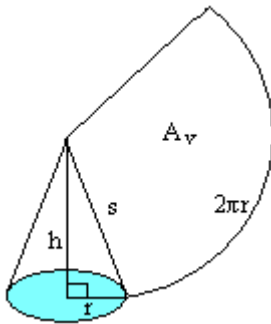


$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

$$V = abc$$

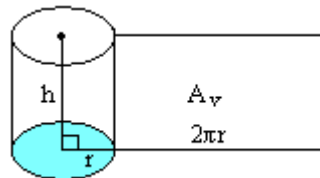
Suora ympyräkartiio



$$A_v = \pi r s$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Suora ympyrälieriö

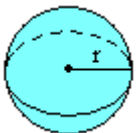


$$A_v = 2\pi r h$$

$$A_{kok} = A_v + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

Pallo



$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

π :n likiarvo 500 ensimmäisen desimaalin tarkkuudella

3,	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971	69399	37510
	58209	74944	59230	78164	06286	20899	86280	34825	34211	70679
	82148	08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172	53594	08128
	48111	74502	84102	70193	85211	05559	64462	29489	54930	38196
	44288	10975	66593	34461	28475	64823	37867	83165	27120	19091
	45648	56692	34603	48610	45432	66482	13393	60726	02491	41273

72456	70066	06315	58817	48815	20920	96282	92540	91715	36436
78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841	46951	94151	16094
33057	27036	57595	91953	09218	61173	81932	61179	31051	18548
07446	23799	62749	56735	188857	52724	89122	79381	83011	94912

Tilastomatematiikka

Keskilukuja

keskiarvo
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

painotettu keskiarvo
$$\bar{x} = \frac{q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n}{q_1 + q_2 + \dots + q_n}$$
, missä q_1, q_2, \dots, q_n ovat painokertoimia

Moodi eli tyyppiarvo tarkoittaa yleisintä, useimmin esiintyvää muuttujan arvoa.

Mediaani tarkoittaa keskimmäistä arvoa (tai kahden keskimmäisen arvon keskiarvoa), kun aineisto on järjestetty suuruusjärjestykseen.

Hajontalukuja

Keskihajonta ilmoittaa, kuinka kaukana muuttujan arvot ovat keskimäärin keskiarvosta.

Vaihteluväli kertoo millä välillä havainnot vaihtelevat.

Vaihteluvälin pituus on muuttujan suurimman ja pienimmän arvon erotus.

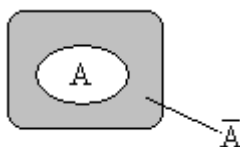
Todennäköisyyslaskenta

Klassinen todennäköisyys

$$P(A) = \frac{\text{suotuisten tapausten lukumäärä}}{\text{kaikkien t tapausten lukumäärä}}$$

Vastatapahtuman todennäköisyys

$$P(\bar{A}) = P(A \text{ ei tapahdu}) = 1 - P(A)$$



Yhteenlaskusääntö

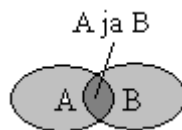
Kun A ja B erillisiä tapauksia

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$$



Kun A ja B eivät ole erillisiä

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$



Kertolaskusääntö

Kun A ja B ovat riippumattomia

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Kun A ja B ovat riippuvia (yleinen kertosääntö)
 $P(\text{ensin } A \text{ ja sitten } B) = P(A) \cdot P(B, \text{ kun } A \text{ on tapahtunut})$

SI-järjestelmä

Kerrannaisyksiköiden etuliitteet					
Nimi	Tunnus	Kerroin	Nimi	Tunnus	Kerroin
eksa	E	10^{18}	desi	d	10^{-1}
peta	P	10^{15}	sentti	c	10^{-2}
tera	T	10^{12}	milli	m	10^{-3}
giga	G	10^9	mikro	μ	10^{-6}
mega	M	10^6	nano	n	10^{-9}
kilo	k	10^3	piko	p	10^{-12}
hecto	h	10^2	femto	f	10^{-15}
deka	da	10^1	atto	a	10^{-18}

Lisäyksiköitä			
Suure	Yksikkö	Tunnus	Vastaavuus
aika	minuutti	min	1 min = 60 s
	tunti	h	1 h = 60 min
	vuorokausi	d	1 d = 24 h
	vuosi	a	1 a ≈ 365 d
tasokulma	aste	°	1° = 60'
	minuutti	'	1' = 60"
	sekunti	"	
tilavuus	litra	l	1 l = 1 dm ³
massa	tonni	t	1 t = 1000 kg
	atomimassayksikkö	u	1 u = 1,6605402 · 10 ⁻²⁷ kg
pituus	tähtitieteellinen yksikkö	AU	1 AU = 0,1495979 · 10 ¹² m
	parsek	pc	1 pc = 30,85678 · 10 ¹⁵ m

Muuntokertoimia	
Pituus	1" = 1 in = 1 tuuma = 25,40 mm
	1' = 1 ft = 1 jalka = 0,3048 m
	1 yd = 1 jaardi = 0,9144 m
	1 mi = 1 maili = 1,609344 km
	1 mpk = 1 M = 1 meripeninkulma = 1852 m
	1 vv = 1 valovuosi = 9,46055 · 10 ¹⁵ m
	1 AU = tähtitieteellinen yksikkö = 149,5979 · 10 ⁹ m
Massa	1 ka = 1 karaatti = 0,2 g
	1 u = 1,6605402 · 10 ⁻²⁷ kg
	1 lb = 1 naula = 0,4536 kg
	1 oz = 1 unssi = 28,35 g
Tasokulma	1° = 2π/360 rad
Pinta-ala	1 b = 1 barn = 10 ⁻²⁸ m ²
	1 acre = 1 eekkeri = 4,0469 · 10 ³ m ²
Tilavuus	1 l = 1 dm ³ = 0,001 m ³
	1 bbl = 1 barreli = 0,1589873 m ³
	1 gal = 1 gallona (UK) = 4,546092 l
	1 gal = 1 gallona (US) = 3,785412 l
Nopeus	1 solmu = 1 mpk/h = 1,852 km/h = 0,5144 m/s

Luonnonvakioita		
Nimi	Tunnus	Lukuarvo ja yksikkö
putoamiskiihtyvyys	<i>g</i>	9,80665 m/s ²
valon nopeus	<i>c</i>	2,99792458 · 10 ⁸ m/s
elektronin massa	<i>m_e</i>	9,1093897 · 10 ⁻³¹ kg
protonin massa	<i>m_p</i>	1,6726231 · 10 ⁻²⁷ kg
neutronin massa	<i>m_n</i>	1,6749286 · 10 ⁻²⁷ kg