

# AVOIN MATEMATIIKKA 7 lk.

## Osio 2: Kuvioiden luokittelua ja pinta-aloja

Marika Toivola      Tiina Härkönen

(Omaan käyttöön muuntanut ja muokannut\*Jan-Erik Sandelin)

Alkuperäinen sisältö on lisensoitu avoimella CC BY 3.0<sup>†</sup>-lisenssillä.

Muunnettu versio on lisensoitu CC-BY-SA 4.0 lisenssillä.<sup>‡</sup>

---

\* Muunnos L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-kielille, jolla taitettu A5-sivukokoon. Pieniä lisäyksiä tekstiin (merkitty lähdekoodissa), helpot ja ”mekaaniset” tehtävät.

<sup>†</sup> <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.fi>

<sup>‡</sup> SA-lisäys: ”Jos muutat, jaa tekemäsi muutokset lähdekoodeineen avoimesti.”  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.fi>

## Miten geometria kehittyi?

Geometria on matematiikan osa-alue, joka tutkii kuvioita, niiden muotoja ja ominaisuuksia. Geometria tarkoitti alkujaan maanmittausta (kreikkaksi geo = maa, metre'in = mitata). Babyloniassa ja Egyptissä geometrian tietoja sovellettiin jo varhain käytännön toimiin. Egyptiläiset hyödynsivät geometriaa mm. pyramidien rakentamisessa. Varsinaiseksi tieteeksi geometria kehittyi Kreikassa. Kreikkalaiset havaitsivat, että geometriaa voi hyödyntää rakentamisessa, kaupunkien kaavoittamisessa, purjehduksessa sekä tähtitieteessä. He totesivat, että kolmion sivujen ja kulmien välillä esiintyi lainalaisuuksia.

Yksi vanhimmista tunnetuista geometriaan liittyvistä tuloksista on Pythagoraan lause. Se on saanut nimensä kreikkalaisen matemaatikon Pythagoraan (500 eKr.) mukaan. Pythagoras oli kuitenkin enemmän mystikko kuin matemaatikko, jolla väitetään olleen maagisia kykyjä. Hän oli ensimmäinen, joka nimitti itseään filosofiksi, tiedon rakastajaksi. Pythagoras perusti uskonnollisen salaseuran, Pythagoraan liiton, jonka jäseniä nimitettiin pythagoralaisiksi. He tutkivat tasapainossa olevien vastakohtien, kuten parittomien ja parillisten, miespuolisten ja naispuolisten sekä hyvän ja pahan sopusointua. Perustavat vastakohtat olivat rajallinen, jolla oli muoto, ja rajaton, joka oli yhtä kaaosta. Pythagoralaiset uskoivat rajallisen vaikuttavan rajattomaan ja tuottavan mystisen Yhden, jota kunnioitettiin kaikkien lukujen lähteenä. Luvut olivat asioiden ja olemassaolon todellinen olemus. Salaseuran symboli oli viisikulmainen tähti eli pentagrammi. Perimätiedon mukaan Pythagoras riemastui keksimästään lauseesta niin paljon, että uhrasi jumalille sata härkää kiitollisuuden osoituksena.

Kreikan tieteen merkittävimpiä saavutuksia oli Eukleideen (300 eKr.) kokoama esitys geometrian perusteista. Kuuluisaan teokseensa, *Elementa* (Alkeet), hän kokosi senaikaisen matematiikan tietämyksen. Johdonmukaisuutensa ja selkeytensä vuoksi *Elementa* on vaikuttanut matematiikan kehitykseen enemmän kuin mikään muu teos. *Elementa* toimi geometrian opetuksen lähtökohtana Suomessakin 1960-luvulle asti.

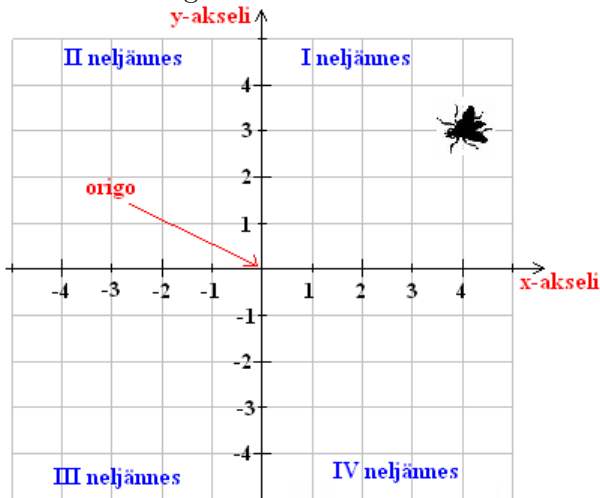
# Sisällysluettelo

<b>1</b>	<b>Koordinaatisto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Geometrian peruskäsitteitä</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Kulmia</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>Vieruskulmat ja ristikulmat</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>Samankohtaiset kulmat</b>	<b>36</b>
<b>6</b>	<b>Ympyrä</b>	<b>43</b>
<b>7</b>	<b>Piirretään harpin avulla</b>	<b>50</b>
<b>8</b>	<b>Monikulmioita</b>	<b>58</b>
<b>9</b>	<b>Kolmioita</b>	<b>67</b>
<b>10</b>	<b>Säännöllisiä monikulmioita</b>	<b>77</b>
<b>11</b>	<b>Pituuksia ja piirejä</b>	<b>84</b>
<b>12</b>	<b>Pinta-alan yksiköt</b>	<b>94</b>
<b>13</b>	<b>Kolmion, suunnikkaan ja puolisuunnikkaan pinta-ala</b>	<b>102</b>
<b>14</b>	<b>Taulukkolaskentaa</b>	<b>111</b>
<b>15</b>	<b>Kertaustehtäviä</b>	<b>116</b>

Kirjan tehtävien vastaukset löytyvät netistä. Kun lasket laskuja kotona, on tärkeää, että varmistat laskeneesi oikein. Muista, että tehtävien suoritus-ta arvioitaessa pelkkä vastaus ei riitä suorituksessa.

# 1 Koordinaatisto

1600-luvulla elänyttä matemaatikkoa René Descartesia pidetään koordinaatiston keksijänä. Eräänä yönä hän valvoi sängyssään ja katseli katossa olevaa kärpästä. Descartes alkoi miettiä, kuinka hän voisi ilmoittaa kärpäsen sijainnin. Ratkaisuksi ongelmaan Descartes keksi koordinaatiston.

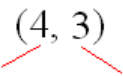


Tasokoordinaatisto muodostuu kahdesta toisiaan vastaan kohtisuorasta lukusuorasta, joita sanotaan koordinaattiakseleiksi. Vaaka-akselia sanotaan  $x$ -akseliksi ja pystyakselia  $y$ -akseliksi, akseleiden leikkauspistettä nimitetään origoksi. Muista, että molemmilla lukusuorilla tulee olla pienet nuolet lukusuoran kasvavien lukujen suuntaan ja mittakaavan ilmi tuovat merkinnät lukujen sijainnista lukusuoralla. Koordinaatistossa on useampia lukusuoria, joten ne tulee myös nimetä lukusuoran nuolen vieressä (yleensä  $x$  ja  $y$ ).

Jokaisella koordinaatiston pisteellä on omat koordinaattinsa, jotka ilmoittavat pisteen paikan koordinaatistossa. Koordinaatit merkitään lukupareina  $(x, y)$ . Koordinaattien järjestys on tärkeä, joten niitä kutsutaankin järjestetyiksi pareiksi.

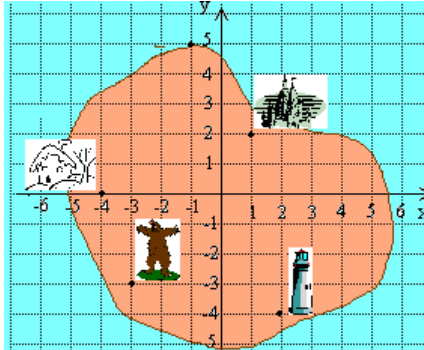
Esimerkiksi kärpäsen sijainti ylläolevassa koordinaatistossa ilmoitetaan muodossa

$(4, 3)$



ensimmäinen luku      jälkimmäinen luku  
on  $x$ -koordinaatti      on  $y$ -koordinaatti

Koordinaattiakselit jakavat koordinaatiston neljään neljännekseen. Ensimmäisessä neljänneksessä sijaitsevilla pisteillä molemmat koordinaatit ovat positiivisia. Mitkä ovat koordinaattien etumerkit muissa neljänneksissä?

**Esimerkki 1**

Ilmoita kohteiden sijainti koordinaattien avulla.

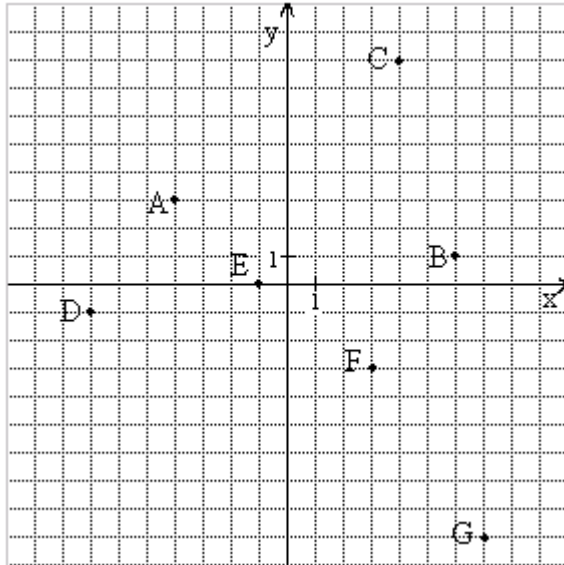
- a) majakka                      b) linna  
c) saaren pohjoiskärki      d) talo  
e) karhu

**Ratkaisu**

- a) (2, -4)                      b) (1, 2)  
c) (-1, 5)                      d) (-4, 0)  
e) (-3, -3)
-

**Tehtäviä**

1. Määritä koordinaatistoon merkittyjen pisteiden koordinaatit.



2. Piirrä koordinaatisto ja sijoita siihen annetut pisteet.

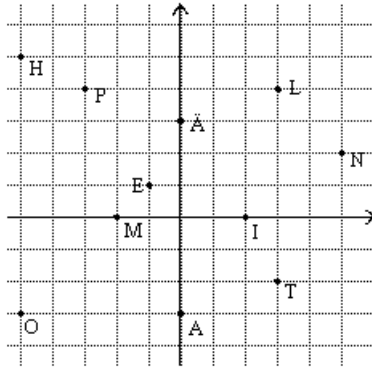
- a)  $A = (1, 3)$    b)  $B = (2, -4)$    c)  $C = (0, 0)$   
d)  $D = (-2, -6)$    e)  $E = (-5, 8)$    f)  $F = (6, -6)$   
g)  $G = (1, -1)$

3. Ratkaise salakirjoitus etsimällä koordinaattia vastaava kirjain.

$(3, -2)(0, 3)(-2, 0)(0, 3)$

$(-5, -3)(5, 2) (2, 0)(-5, 5)(0, -3)(5, 2)$

$(-5, 5)(-1,1)(3,4)(-3,4)(-3,4)(-5,-3)(0,-3)$



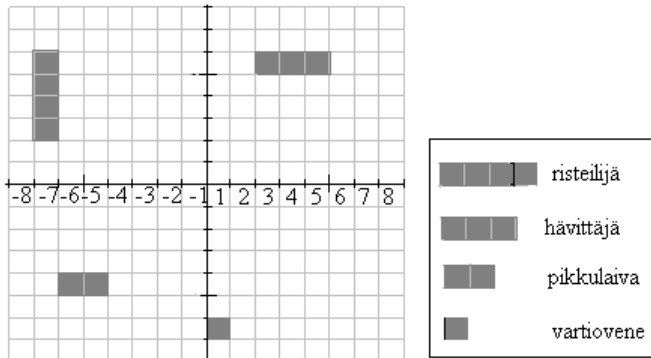
4. Sijoita pisteet  $(1, 3)$ ,  $(2, 5)$  ja  $(3, 7)$  koordinaatistoon. Piirrä niiden kautta suora.
5. (a) Mitkä ovat origon koordinaatit?  
 (b) Missä neljänneksessä sekä x- että y-koordinaatti on negatiivinen?  
 (c) Missä neljänneksessä sekä x- että y-koordinaatti on positiivinen?  
 (d) Missä neljänneksessä vain toinen x- ja y-koordinaateista on positiivinen?

### Soveltavat tehtävät

6. Yhdistä pisteet  $(0, 3)$ ,  $(-2, -2)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(-3, 1)$ ,  $(2, -2)$ ,  $(0, 3)$  toisiinsa tässä järjestyksessä. Väritä muodostunut kuvio.
7. Suunnittele kuvio, joka muodostuu koordinaatiston pisteitä yhdistelemällä, kuten edellisessä tehtävässä. Laadi piirustusohjeet ja anna tehtävä parillesi.



8. Piirrä koordinaatistoon suora, joka kulkee pisteiden  $(-2, -3)$  ja  $(0, 3)$  kautta. Määritä suoralta viiden muun pisteen koordinaatit.
9. Kuinka pitkä on pisteiden
- a)  $(3, 6)$  ja  $(9, 6)$       b)  $(-3, 2)$  ja  $(2, 2)$   
 c)  $(1, 4)$  ja  $(1, 8)$       d)  $(-2, -3)$  ja  $(-2, 5)$   
 välinen jana?
10. Piirrä koordinaatistoon suora, joka kulkee pisteiden  $(3, 5)$  ja  $(-3, -1)$  kautta. Ilmoita sen pisteen koordinaatit, jossa suora leikkaa
- a) x-akselin      b) y-akselin?
11. Päättele pisteen koordinaattien perusteella, missä neljänneksessä piste sijaitsee.
- a)  $(4, -1)$     b)  $(2, 4)$     c)  $(-3, -6)$     d)  $(-5, 8)$
12. Ohessa on laivojen upotuspelin peliruudukko. Ilmoita alusten sijainnit koordinaattien avulla.
- a) risteilijä      b) hävittäjä  
 c) pikkulaiva    d) vartiovene



13. Pelaa parin kanssa laivanupotuspeliä. Piirrä koordinaatisto kuten edellisessä tehtävässä, jossa sekä  $x$  että  $y$  saavat arvoja luvusta  $-8$  lukuun  $8$ . Sijoittakaa molemmat omiin koordinaatistoihinne laivoja taulukon mukaisesti.

laiva	pituus [ruutua]	määrä [kpl]
risteilijä	4	1
hävittäjä	3	2
pikkulaiva	2	3
vartiovene	1	4

Muista, ettei mutkalaivoja ole olemassa. Sitten vaan pommittamaan kaverin laivoja arvaamalla koordinaatteja. Menikö huti, osuiko vai peräti osuiko ja upposi?

### Vaativat tehtävät

14. Päätele pisteiden koordinaattien perusteella, mitkä pisteistä  $(-5, 0)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(-2, 10)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(6, 6)$ ,  $(0, -4)$ ,  $(100, 0)$  sijaitsevat
- a)  $x$ -akselilla                      b)  $y$ -akselilla?
15. Piirrä samaan koordinaatistoon kaksi suoraa. Ensimmäinen kulkee pisteiden  $(-4, 0)$  ja  $(0, 4)$  kautta, toinen pisteiden  $(-2, 5)$  ja  $(2, -3)$  kautta. Ilmoita suorien suorien leikkauspisteen koordinaatit.

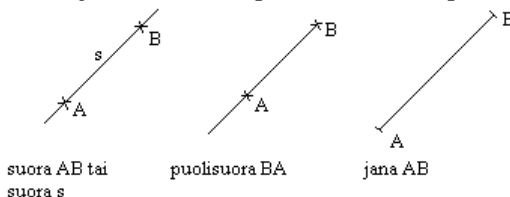
## 2 Geometrian peruskäsitteitä

Tasogeometriassa tutkitaan tasokuvioita ja niiden ominaisuuksia. Peruskäsitteitä ovat piste ja viiva.

Pisteellä on paikka, mutta ei ulottuvuutta. Pisteellä ei siis ole pituutta, leveyttä eikä korkeutta. Sitä kuvataan pienellä ympyrällä tai rastilla. Piste sijaitsee tällöin ympyrän keskipisteessä tai rastin osien leikkauskohdassa. Pisteiden niminä käytetään yleensä isoja kirjaimia. Koska jokaisella pisteellä on oma paikkansa, ei samassa kuvassa voi olla kahta samannimistä pistettä.

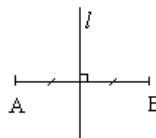
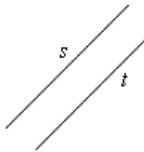
Kuvittele, että pistettä liikutetaan koordinaatistossa ja se jättää jälkeensä ”reitin”. Reitin pituus on nyt mitattavissa, vaikka sillä ei edelleenkään ole korkeutta tai leveyttä, eli se on niin ”ohut”, että se on näkymätön. Reittiä kutsutaan viivaksi. Viiva voi olla luonteeltaan käyrä tai suora. Joka suuntaan loputtomata suoraa viivaa kutsutaan lyhyesti vain suoraksi. Huomaa, että matematiikassa ei sanota ”ääretön suora”, vaan jokainen suora on suoruuksensa lisäksi myös äärettömän pitkä molempiin suuntiin. Suorilla viivoilla, joiden alku- tai loppupiste (tai molemmat) ovat tiedossamme on nimittäin toiset nimet!

Kahden pisteen kautta voidaan piirtää vain yksi suora, joka nimetään joko pisteiden mukaan tai pienellä kirjaimella. Vaikka suoralla on pituus, ei sitä voida mitata, koska suora jatkuu molempiin suuntiin loputtomasti.



## Geometrian peruskäsitteiden määritelmiä

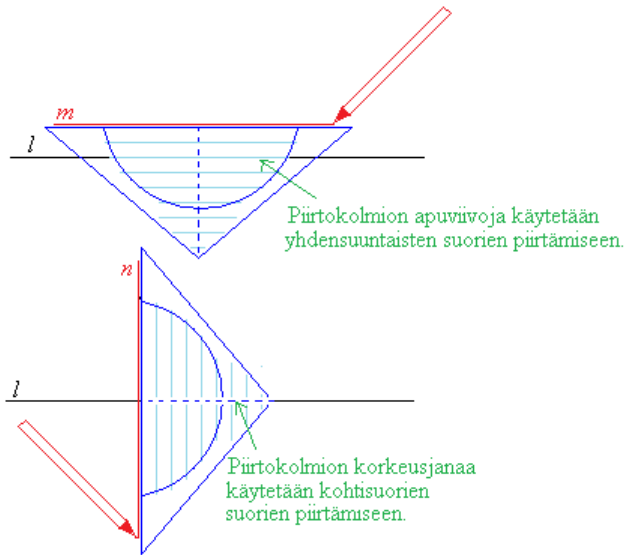
- Piste, viiva ja suora ovat peruskäsitteitä, jotka on selitetty yllä.
- Pisteestä alkavaa, toiseen suuntaan rajattomasti jatketuksi ajateltua suoraa sanotaan puolisuoraksi.
- Jana on kahden pisteen välinen suoran osa.
- Jos kaksi suoraa on kohtisuorassa toisiaan vastaan, niitä sanotaan toistensa normaaleiksi. Kohtisuoruutta merkitään symbolilla  $\perp$ .
- Yhdensuuntaiset suorat eivät leikkaa toisiaan. Yhdensuuntaisuutta merkitään symbolilla  $\parallel$ .
- Janan keskinormaali on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.



kohtisuorat suorat:  $m \perp n$  yhdensuuntaiset suorat:  $s \parallel t$  janan AB keskinormaali  $l$

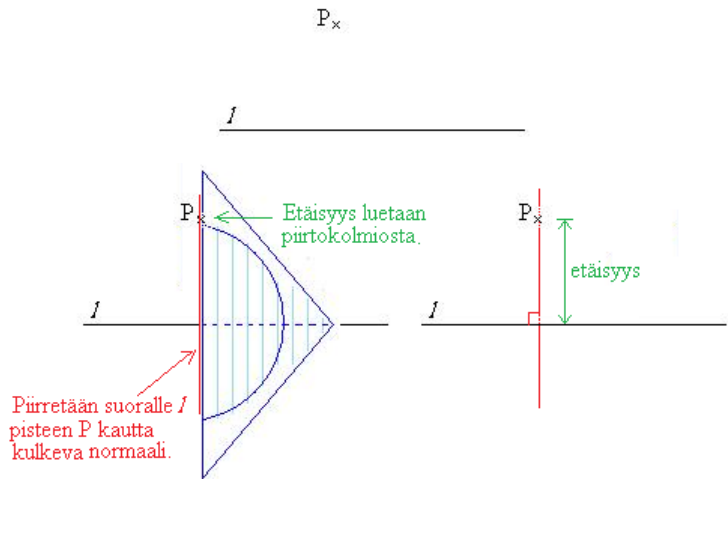
## Piirtokolmion käyttö

Piirtokolmion yhdensuuntaisten apuviivojen sekä piirtokolmion kantaa vastaan kohtisuorassa olevan korkeusjanan avulla on helppo piirtää sekä yhdensuuntaisia suoria että toisiaan vastaan kohtisuorasti sijaitsevia suoria.



### Esimerkki 1

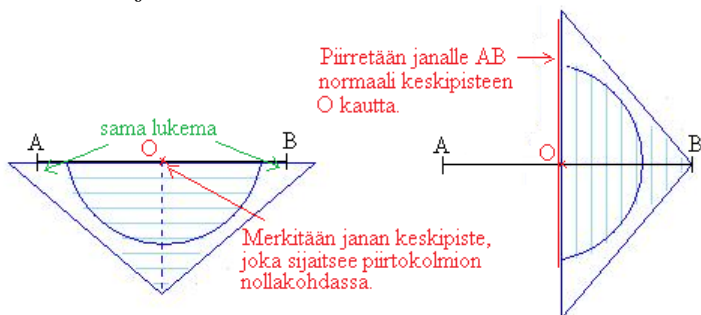
Määritetään pisteen  $P$  kohtisuora etäisyys suorasta  $l$ .



## Esimerkki 2



Piirretään janalle AB keskinormaali.



Jos jana on piirretty koordinaatistoon, saadaan janan keskipisteen koordinaatit selville myös laskemalla janan päätepisteiden  $x$ - ja  $y$ -koordinaattien keskiarvo.

## Esimerkki 3

Lasketaan janan AB keskipisteen koordinaatit, kun  $A = (-3, 2)$  ja  $B = (5, -6)$ .

$x$ -koordinaatti

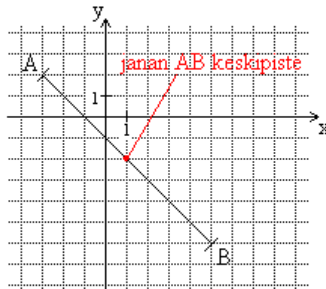
$$\frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

— yhteenslaskettavien lukumäärä

$y$ -koordinaatti

$$\frac{2 + (-6)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

— yhteenslaskettavien lukumäärä

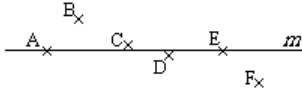


Vastauksen voi tarkistaa piirtämällä. Vastaus: Janan AB keskipiste on  $(1, -2)$ .

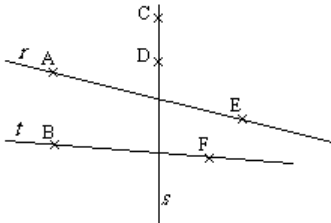
---

## Tehtäviä

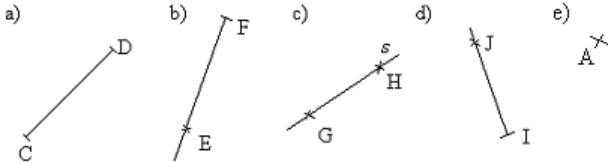
16. Mitkä kuvan pisteistä sijaitsevat suoralla  $m$ ?



17. Nimeä suorat kahdella eri tavalla.

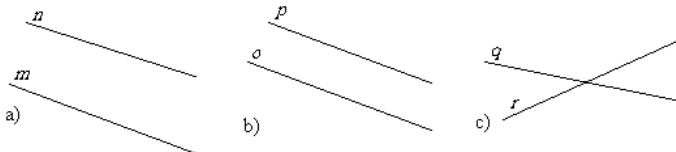


18. Nimeä kuviot.



19. Mitä eroa on suoralla ja puolisuoralla?

20. Ovatko suorat yhdensuuntaiset? Käytä apuna piirto-kolmiota.



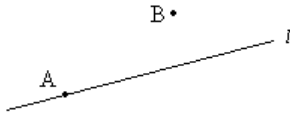




26. Jäljennä kuva vihkoosi ja piirrä suoralle  $l$  normaali, joka kulkee pisteen

a) A kautta

b) B kautta.



27. Piirrä 52 mm pituinen jana AB ja siihen piirtokolmion avulla sen keskinormaali  $l$ .

28. Piirrä jokin suora  $l$  ja kaksi sen kanssa kaksi yhdensuuntaista suoraa  $s$  ja  $t$ , jotka ovat 2 cm etäisyydellä suorasta  $l$ .

29. Onko väittämä tosi vai epätosi?

a) Jos kaksi suoraa ovat keskenään yhdensuuntaisia, niitä sanotaan toistensa normaaleiksi.

b) Janalla voi olla vain yksi keskinormaali.

c) Pisteellä ei ole pinta-alaa.

d) Puolisuora ja jana tarkoittavat samaa asiaa.

e) Janan keskinormaali on yhtä kaukana janan päätepisteistä.

30. Piirrä suorat  $m$  ja  $n$ , joille on voimassa

a)  $m \parallel n$

b)  $m \perp n$

31. Tutki piirtämällä onko piste  $(2, 1)$  janan AB keskipiste, kun  $A = (-3, -3)$  ja  $B = (6, 2)$ .

32. Piirrä jana CD, kun  $C = (4, 3)$  ja  $D = (-3, -2)$ . Piirrä janalle sen keskinormaali  $n$ .

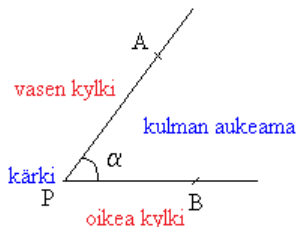
**Vaativat tehtävät**

33. Laske janan AB keskipisteen koordinaatit, kun  $A = (2, -2)$  ja  $B = (5, 3)$
34. Laske janan EF keskipisteen koordinaatit, kun  $E = (0, 9)$  ja  $F = (1, 0)$ . Piirrä jana EF ja sen keskinormaali  $n$ .
35. Tutki laskemalla onko piste  $(-4, 2)$  janan AB keskipiste, kun
- a)  $A = (-8, -1)$  ja  $B = (0, 5)$
  - b)  $A = (-10, -2)$  ja  $B = (7, -5)$
  - c)  $A = (-2, 1)$  ja  $B = (-6, 3)$
36. Jos  $a \parallel b$  ja  $c \parallel d$ , onko
- a)  $d \parallel c$
  - b)  $a \perp d$
  - c)  $a \parallel d$ ?
37. Janan AB alkupiste on  $(-1, -2)$  ja keskipiste  $(3, 2)$ . Päättele pisteen B koordinaatit.
38. Janan CD keskipiste on  $(7, 2)$  ja päätepiste  $(13, 6)$ . Päättele pisteen C koordinaatit.
39. Tutki laskemalla ja piirtämällä sijaitseeko piste  $(1, 1)$  janan AB keskinormaalilla, kun  $A = (-2, -3)$  ja  $B = (6, 1)$ .
40. Onko piste  $(3, 5)$  janan EF keskinormaalilla, kun  $E = (-2, 5)$  ja  $F = (5, 2)$ ?

### 3 Kulmia

Kulma on kahden samasta pisteestä alkavan puoli-suoran rajoittama tason osa. Se on alue, joka on äärettömän suuri, eikä sen pinta-ala siksi ole laskettavissa.





Huomaa erityisesti, että kulma **ei** ole pelkkä ”kärki” tai ”kaksi törmäävää puolisuoraa”, vaan kulma on nimenomaan alue ”kärjen sisällä”.



Kun piirretään kulma, jakautuu taso kahteen kulmaan. Jos erikseen ei toisin mainita, tarkoitetaan pienempää syntyvistä kulmista. Kulman osat ovat kärki ja kyljet. Kun katsotaan kulman kärjestä sen aukeamaan, on oikealle jäävä kylki kulman oikea kylki ja vastaavasti vasemmalle jäävä kylki on kulman vasen kylki. Välillä aukeamaa kutsutaankin ”kentäksi” (kuvittele seisovasi pesäpallokentällä lyöjän paikalla: kun kulma aukeaa edessäsi on vasemman ja oikean kyljen nimeämiskäytäntö erittäin selvä).


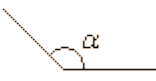

Kulma nimetään usein kreikkalaisella kirjaimella  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , ... (luetaan: alfa, beeta, gamma, delta). Kulma voidaan nimetä myös sen kärjen ja sen molemmilta kyljiltä valittujen pisteiden mukaan (kulma APB tai  $\angle APB$ ) tai pelkästään kärkipisteen avulla (kulma P tai  $\angle P$ ). Kulman suuruus mitataan asteina (tai myöhemmin esimerkiksi lukiossa usein radiaaneina).

## Kulmien nimityksiä

- Nollakulma  $0^\circ$  
- Suorakulma  $90^\circ$  
- Oikokulma  $180^\circ$  
- Täysikulma  $360^\circ$  

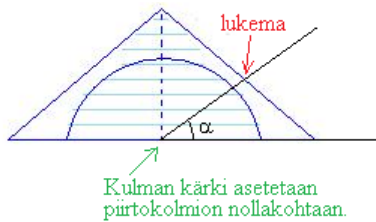
Edellä olevat kulmat esiintyvät rajakulmina, kun kulmia luokitellaan niiden suuruuden perusteella koveriin ja kuperiin kulmiin. Koverat kulmat jaetaan edelleen kahteen luokkaan, joiden rajana on suorakulma.

## Kulmien luokittelu

- Koverat kulmat  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ 
  - Terävät kulmat  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  
  - Tylpät kulmat  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  
- Kuperat kulmat  $180^\circ < \alpha < 360^\circ$  

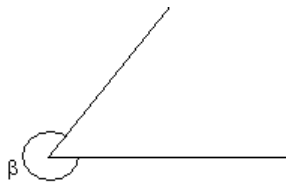
## Kulman suuruuden mittaaminen piirtokolmiolla

Koverat kulmat saadaan mitatuksi piirtokolmiolla suoraan. Piirtokolmio asetetaan tarkasti kulman päälle ja asteluku luetaan toisen kyljen kohdalta. Piirtokolmiossa on kaksi asteikkoa, joista valitaan se, joka alkaa kulman ensimmäisen kyljen kohdalta. Virheellisen asteikon valinnalta välttyy, kun pitää mielessä miltä terävät ja tylpät kulmat näyttävät ja millä välillä niiden astelukujen on oltava.

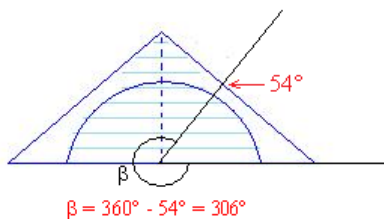


### Esimerkki 1

Mitataan kulman  $\beta$  astelukua.



Kyseessä on kupera kulma, jonka astelukua ei voida mitata suoraan piirtokolmiolla. Mitataan ensiksi täydestä kulmasta puuttuva terävän kulman osuus. Kun tämä vähennetään  $360^\circ$ :sta, saadaan kysytty kulma.



Kulman puolittaja on puolisuora, joka jakaa kulman kahteen yhtä suureen osaan.

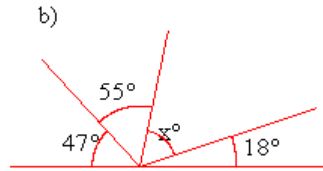
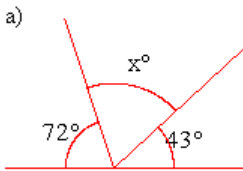


## Tehtäviä

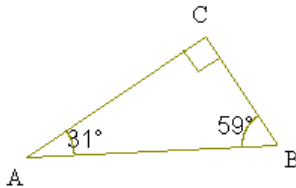
41. Yhdistä kulmien nimitykset ja suuruudet sekä piirrä kulmat.

	täysi kulma	0°	90°	180°	360°
suora kulma	oikokulma				
nollakulma					

42. Päättele kulmien  $x$  suuruudet.

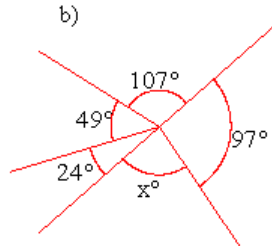
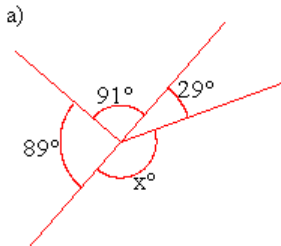


43. Tarkastellaan viereistä kolmiota. Ilmoita kulmien suuruudet.



- a)  $\angle ABC$       b)  $\angle ACB$       c)  $\angle BAC$

44. Päättele kulmien  $x$  suuruudet.





45. Kuinka suuri kulma muodostuu, jos täysikulmasta otetaan

- a)  $\frac{1}{2}$       b)  $\frac{1}{4}$       c)  $\frac{3}{4}$       d)  $\frac{1}{3}$  ?

46. Mitkä merkinnöistä  $\angle BAC$ ,  $\angle ABC$ ,  $\angle CAB$ ,  $\angle A$ ,  $\angle CBA$  tarkoittavat kulmaa A?

47. Mitä nimitystä käytetään kulmista, jotka ovat

- a) suurempia kuin  $0^\circ$  mutta pienempiä kuin  $180^\circ$   
 b) suurempia kuin  $180^\circ$  mutta pienempiä kuin  $360^\circ$ ?

48. Mihin kahteen luokkaan koverat kulmat jaetaan ja millä välillä kulmat silloin vaihtelevat?

49. Piirrä jokin

- a) tylppä kulma      b) terävä kulma

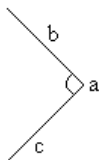
ja mittaa kulmien suuruudet kulmaviivaimella.

50. Mitkä kulmista ovat

- a) koveria kulmia?      b) kuperia kulmia?



51. Nimeä kulman osat.

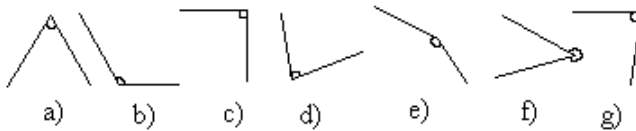


52. Nimeä kulma sen suuruuden perusteella, kun sen asteluku on

- a)  $34^\circ$       b)  $276^\circ$       c)  $360^\circ$       d)  $170^\circ$

53. Mitkä kulmista ovat

- a) teräviä kulmia      b) tylppiä kulmia?



54. Piirrä kulmaviivaimella kulma, jonka suuruus on

- a)  $45^\circ$       b)  $60^\circ$       c)  $120^\circ$       d)  $200^\circ$ .

55. Puolita edellisen tehtävän kulmat piirtokolmion avulla.

56. Piirrä kolmio, jonka vierekkäisten sivujen pituudet ovat

- a) 7 cm ja 9 cm ja sivujen välinen kulma  $130^\circ$   
 b) 6 cm ja 4 cm ja sivujen välinen kulma  $120^\circ$

57. Arvioi kulman  $\alpha$  suuruus ja tarkista se mittaamalla.

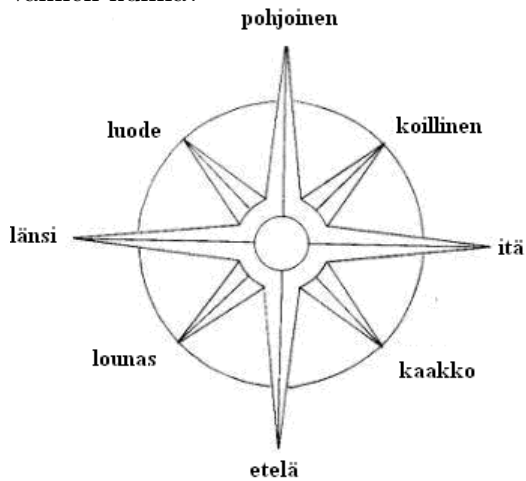


**Soveltavat tehtävät**

58. Kuinka suuri on kompassisuuntien

- a) koillinen ja kaakko      b) koillinen ja etelä  
c) luode pohjoinen      d) kaakko lounas

välinen kulma?



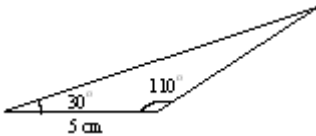
59. Keksi kompassisuuntiin liittyvä tehtävä ja anna se parillesi ratkaistavaksi.
60. Piirrä kaksi koveraa kulmaa ja puolita ne piirtokolmion avulla.
61. Piirrä kolmio ja puolita sen kulmat.

62. Piirrä koordinaatistoon kolmio, jonka kärkipisteiden koordinaatit ovat

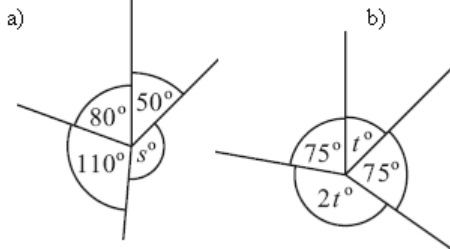
$$A = (-4, 3), B = (-1, 3) \text{ ja } C = (5, 1).$$

- Mittaa kulmien suuruudet piirtokolmiolla.
- Puolita suurin kulma.

63. Piirrä piirtokolmion avulla mallikuvion mukainen kolmio.



64. Päättelä tuntemattomien kulmien suuruudet.



### Vaativat tehtävät

65. Kuinka suuren kulman kellon minuuttiviisari kääntyy

- minuutissa
- 15 minuutissa
- 20 minuutissa
- 35 minuutissa?

66. Kuinka suuri kulma (pienin kulma) on kellon osoittimien välissä, kun kello on

- 13.00
- 17.00
- 14.30
- 22.30

- 
67. Maapallo jaetaan 24 aikavyöhykkeeseen. Montako astetta on yhden aikavyöhykkeen suuruus?
68. Kun päiväntasaajan kohdalta kierretään täysi ympyrä eli  $360^\circ$ , saadaan päiväntasaajan pituudeksi noin 40 000 km. Asteet jaetaan samaan tapaan kuin tunnit minuutteihin ja sekunteihin seuraavasti:  $1^\circ = 60'$  ja  $1' = 60''$ .
- a) Kuinka pitkä on yksi meripeninkulma eli  $1'$  suuruinen osa päiväntasaajasta?
- b) Laivojen nopeudet ilmoitetaan yleensä solmuina, yksi solmu tarkoittaa yhtä meripeninkulmaa tunnissa. Kuinka suuri on satama-alueilla oleva nopeusrajoitus 6 solmua kilometreinä tunnissa?

## Heijastuminen

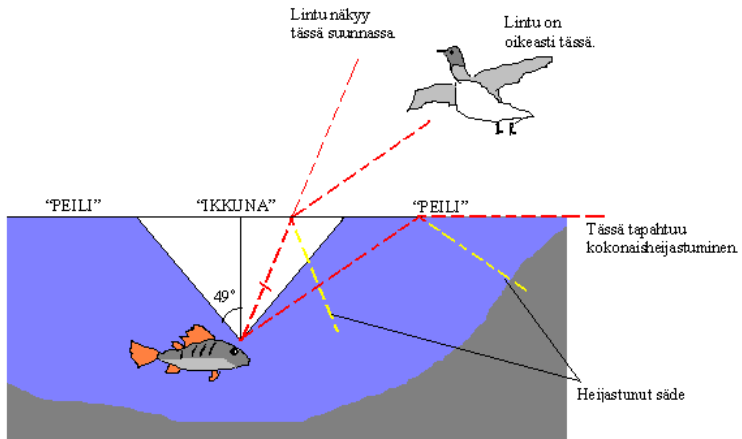
Päivällä junan ikkunasta näkyy ulkopuolella oleva maisema, jota lasissa olevat heijastukset eivät sotke juuri lainkaan. Hämärän tultua ikkunassa alkaa näkyä vaunun sisäpuoli ja lopulta maisema katoaa näkyvistä kokonaan. Kun ulkona on pimeää, heijastaa lasin pinta peilikuvan vaunun sisäosista. Ikkunan lasi toimii kuitenkin yöllä aivan samoin kuin päivälläkin. Päivällä ulkoa tuleva valo on vain niin kirkas, että se peittää lasin heijastukset. Ikkunan heijastuskyky on sitä suurempi, mitä viistommin sen pintaa katsotaan. Junassa pystyt tarkkailemaan selvemmin kauempana olevasta ikkunasta kanssamatkustajia kuin aivan vieressäsi olevasta ikkunasta.

Kun valo osuu ikkunaan, osa valosta menee ikkunasta läpi (taittuu) ja osa valosta heijastuu. Jos lasi on tasainen, pätevät seuraavat lait heijastuneelle säteelle:

- Heijastunut säde on samassa tasossa kuin tuleva säde ja pinnan normaali.
- Tulokulma on yhtä suuri kuin heijastuskulma.

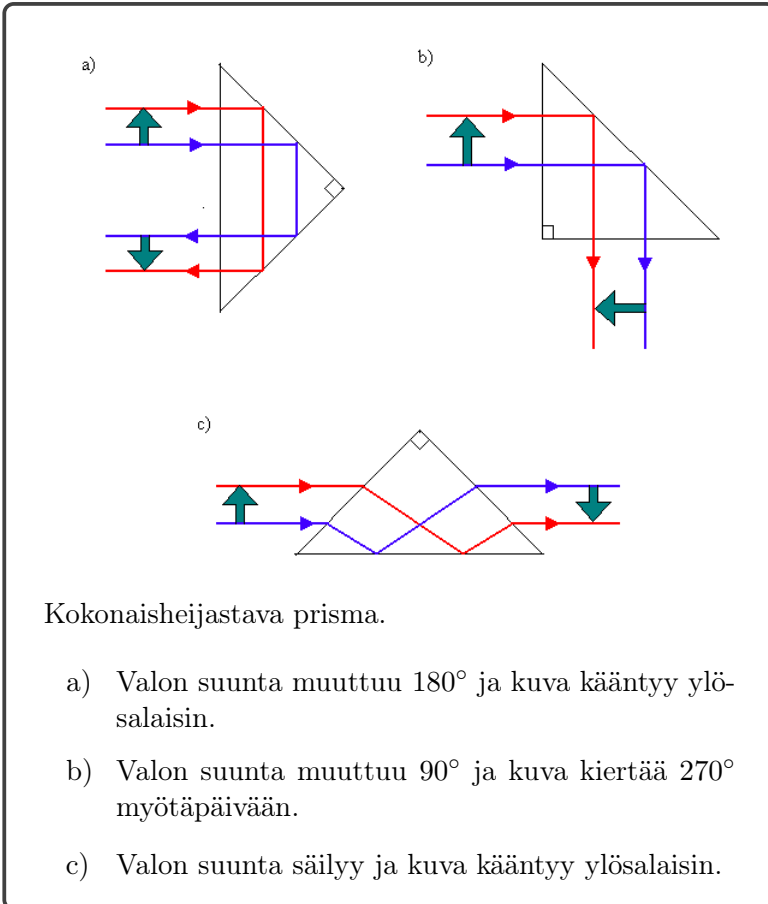
Jos lasin pinta on epätasainen, tapahtuu heijastumista kaikkiin suuntiin, jolloin emme näe selvästi lasin toiselle puolelle. Näkyvää valoa heijastavat parhaiten alumiini ja hopea, joihin osuvasta valosta yli 90 % heijastuu. Siksi niitä käytetäänkin peileihin.

Kun valo saapuu vedestä ilmaan, tahtuu valo pinnan normaalista poispäin. Tulokulman kasvaessa riittävän suureksi säde tahtuu pitkin rajapintaa, jolloin kala ei näe veden läpi ollenkaan. Tapahtuu kokonaisheijastus.



Koska valonsäde taittuu veden pinnassa, näkee kala linnun ”väärässä” paikassa. ”IKKUNA” on se alue, josta näkyy koko maisema. Alueella ”PEILI” tapahtuu kokonaisheijastuminen, ja kala näkee tuolla alueella veden pinnasta heijastunutta pohjaa.

Kokonaisheijastuksen käytöllä on tärkeä merkitys optisissa laitteissa, koska sen avulla saadaan kaikki valo kulkemaan haluttuun suuntaan. Lasin ja ilman välinen kokonaisheijastuksen rajakulma on pienempi kuin  $45^\circ$ , joten suorakulmisen tasakylkisen prisman avulla saadaan valo kulkemaan haluttuun suuntaan.





## 4 Vieruskulmat ja ristikulmat

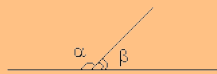
Kulmiin liittyviä määritelmiä

- Kun kaksi kulmaa on vierekkäin siten, että niiden kärjet ja erinimiset kyljet yhtyvät ja toiset erinimiset kyljet muodostavat suoran, ovat kulmat toistensa vieruskulmia.
- Kun kaksi suoraa leikkaavat toisensa, syntyy leikkauskohtaan neljä kulmaa. Näistä ristikkäiset ovat ristikulmia ja vierekkäiset vieruskulmia.

Vieruskulmien summa

Vieruskulmien summa on aina  $180^\circ$  eli

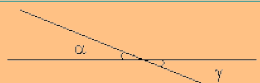
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



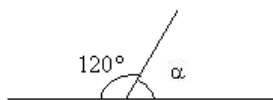
Ristikulmien yhtäsuuruus

Ristikulmat ovat aina keskenään yhtäsuuret eli

$$\alpha = \gamma$$



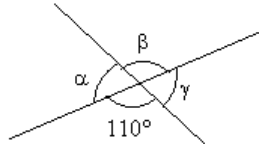
### Esimerkki 1



Lasketaan kulman  $\alpha$  suuruus.

Kulmat  $120^\circ$  ja  $\alpha$  ovat toistensa vieruskulmia, joten  $\alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

---

**Esimerkki 2**

Päätellään tuntemattomien kulmien suuruudet.

$\beta = 110^\circ$  Kulmat  $\beta$  ja  $110^\circ$  ovat ristikulmia.

$\alpha = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$  Vieruskulmien summa on  $180^\circ$ .

$\gamma = \alpha = 70^\circ$  Kulmat  $\gamma$  ja  $\alpha$  ovat ristikulmia.

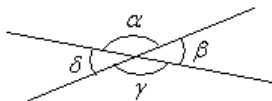
---

## Tehtäviä

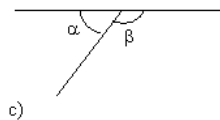
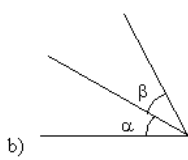
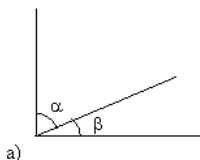
69. Mikä on kulman  $\alpha$

a) vieruskulma

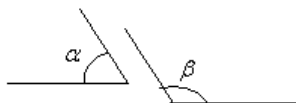
b) ristikulma?



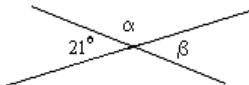
70. Ovatko kulmat  $\alpha$  ja  $\beta$  toistensa vieruskulmia?



71. Voivatko kulmat  $\alpha$ ,  $\beta$  olla toistensa vieruskulmia? Perustele vastauksesi.



72. Laske kulmien  $\alpha$  ja  $\beta$  suuruudet.



73. Kun kaksi suoraa leikkaavat toisensa, on yksi muodostuvista kulmista suuruudeltaan  $27^\circ$ . Laske kolmen muun syntyvän kulman suuruudet.

74. Kuinka suuri on  $31^\circ$  kulman

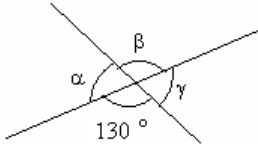
a) ristikulma,

b) vieruskulma?

75. Kuinka suuri on suoran kulman

- a) ristikulma,                      b) vieruskulma?

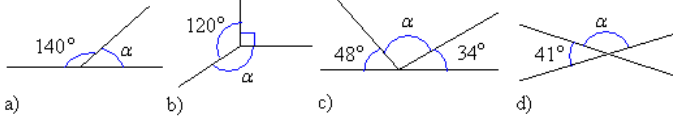
76. Päätele kulmien suuruudet.



### Soveltavat tehtävät

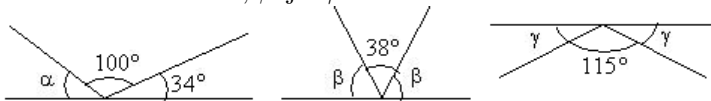
77. Piirrä 35 asteen kulma ja sen vieruskulma. Puolita molemmat kulmat. Kuinka suuri on vieruskulmien puolittajien välinen kulma?

78. Päätele kulman  $\alpha$  suuruus.

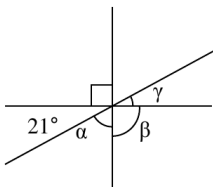


79. Kaksi ristikulmaa ovat yhteensä  $112^\circ$ . Kuinka suurina ovat molemmat vieruskulmat erikseen?

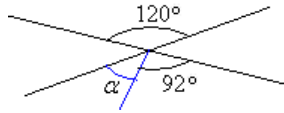
80. Päätele kulmien  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  suuruudet.



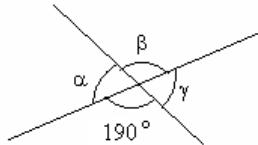
81. Laske kulmat  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ .



82. Päättele kulman  $\alpha$  suuruus.

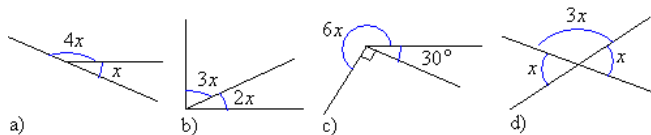


83. Päättele kulmien suuruudet.



**Vaativat tehtävät**

84. Määritä  $x$  päättelämällä.

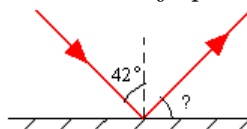


85. Vieruskulmista toinen on kolme kertaa niin suuri kuin toinen. Kuinka suurina kulmat ovat?

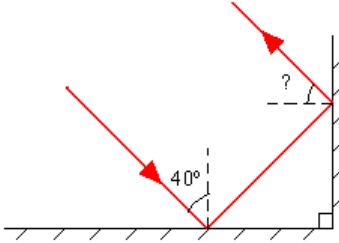
86. Kuinka suuri on kulman vieruskulma?

- a)  $46^{\circ}15'$
- b)  $38^{\circ}10'50''$

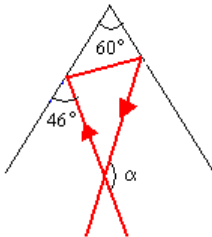
87. Valo osuu peiliin  $42^{\circ}$  tulokulmassa. Mikä on heijastuneen säteen ja peilin välinen kulma?



88. Kaksi peiliä on kohtisuorassa toisiaan vastaan oikein kuvan mukaisesti. Valon tulokulma ensimmäiseen peiliin on  $40^\circ$ . Mikä on valon heijastuskulma jälkimmäisestä peilistä?



89. Kaksi peiliä muodostavat keskenään  $60^\circ$  kulman. Valonsäde muodostaa ensimmäisen peilin kanssa  $46^\circ$  kulman. Laske tulevan ja heijastuneen valonsäteiden välinen kulma  $\alpha$ .

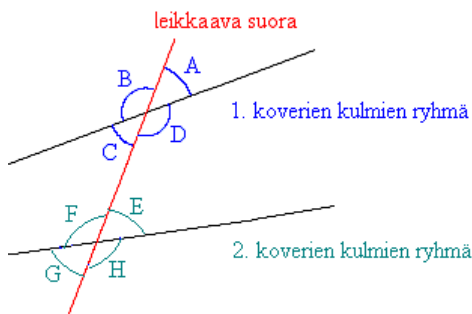


## 5 Samankohtaiset kulmat

Kun suora leikkaa kahta muuta suoraa, muodostuu kaksi ryhmää koveria kulmia. Kahta eri ryhmään kuuluvaa kulmaa sanotaan samankohtaisiksi kulmiksi, jos leikkaava suora on niiden molempien oikeana kylkenä tai vasempana kylkenä.

### Esimerkki 1

Mitkä kuvan kulmista ovat keskenään samankohtaisia kulmia?

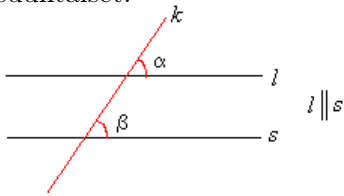


- Kulman A kanssa samankohtaisia ovat  $\angle E$  ja  $\angle G$ . Leikkaava suora on kulmien vasempana kylkenä. Miksi kulma C ei käy, vaikka silläkin leikkaava suora on vasempana kylkenä?
- Kulman B kanssa samankohtaisia ovat  $\angle F$  ja  $\angle H$ . Leikkaava suora on kulmien oikeana kylkenä.
- Kulman C kanssa samankohtaisia ovat  $\angle E$  ja  $\angle G$ . Kulman D kanssa samankohtaisia ovat  $\angle F$  ja  $\angle H$ .

Samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria täsmälleen silloin, kun leikatut suorat ovat yhdensuuntaisia.

### Esimerkki 2

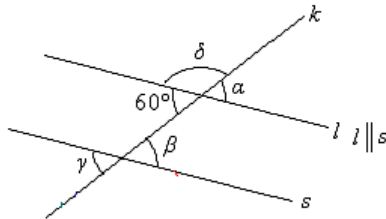
Tarkastellaan tapausta, jossa leikatut suorat ovat yhdensuuntaiset.



Kulmat  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat samankohtaiset kulmat, sillä leikkaava suora  $k$  on niillä vasempana kylkenä. Samankohtaiset kulmat ovat tässä tapauksessa keskenään yhtä suuria, koska leikatut suorat  $l$  ja  $s$  ovat yhdensuuntaisia.

### Esimerkki 3

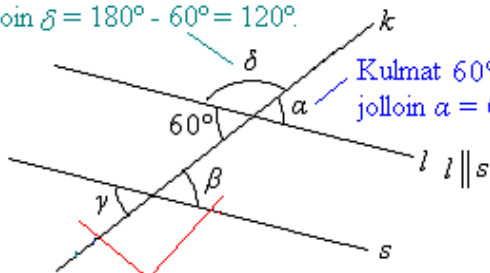
Määritetään kulmien  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ja  $\delta$  suuruudet, kun suorat  $l$  ja  $s$  ovat yhdensuuntaiset.



Koska suorat  $l$  ja  $s$  ovat yhdensuuntaiset, ovat samankohtaiset kulmat yhtä suuret.



Kulmat  $\delta$  ja  $60^\circ$  ovat vieruskulmia,  
jolloin  $\delta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .



Kulmat  $60^\circ$  ja  $\alpha$  ovat ristikulmia,  
jolloin  $\alpha = 60^\circ$ .

Kulmat  $\beta$  ja  $\gamma$  ovat kulman  $60^\circ$  kanssa samankohtaisia,  
jolloin  $\beta = 60^\circ$  ja  $\gamma = 60^\circ$ .

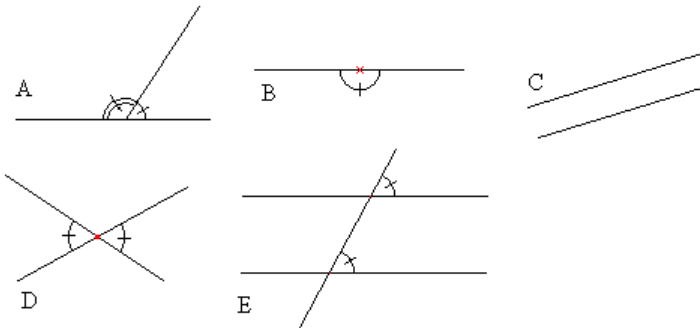
Vastaus:  $\alpha = 60^\circ$  ,  $\beta = 60^\circ$  ,  $\gamma = 60^\circ$  ja  $\delta = 120^\circ$  .

---

## Tehtäviä

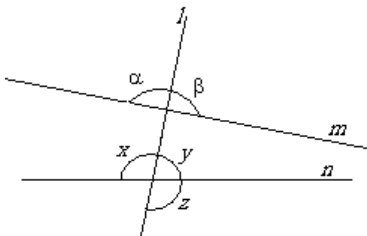
90. Mistä kuvioista löydät

- a) yhdensuuntaiset suorat  
 b) oikokulman  
 c) vieruskulmat  
 d) samankohtaiset kulmat  
 e) ristikulmat?

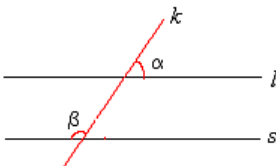


91. Mitkä kulmista ovat samankohtaisia kulman

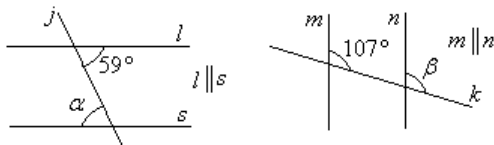
- a)  $\alpha$  kanssa  
 b)  $\beta$  kanssa?



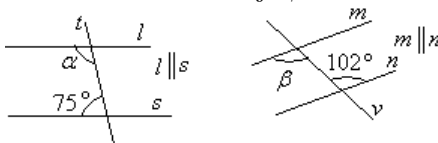
92. Ovatko  $\alpha$  ja  $\beta$  samankohtaiset kulmat? Perustele vastauksesi.



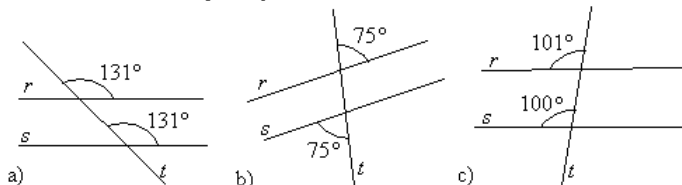
93. Päättele kulmien  $\alpha$  ja  $\beta$  suuruudet.



94. Päättele kulmien  $\alpha$  ja  $\beta$  suuruudet.



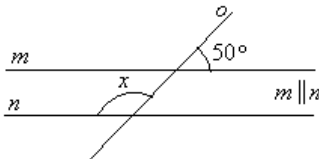
95. Ovatko suorat r ja s yhdensuuntaiset? Perustelee.



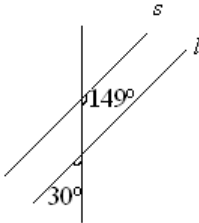
96. Ovatko samankohtaiset kulmat aina keskenään yhtäsuuret?

**Soveltavat tehtävät**

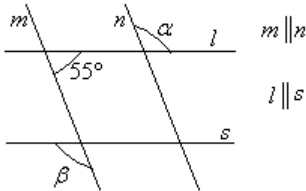
97. Kuinka suuri on kulma x? Perustelee.



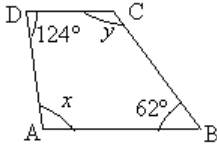
98. Ovatko kuvan suorat  $s$  ja  $l$  yhdensuuntaiset? Perustele.



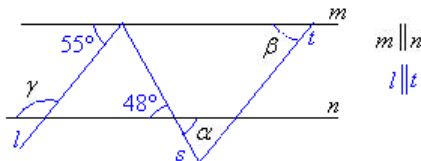
99. Päättele kulmien  $\alpha$  ja  $\beta$  suuruudet.



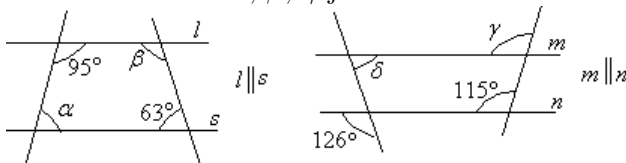
100. Kuinka suurina ovat kulmat  $x$  ja  $y$ , kun nelikulmion sivut  $AB$  ja  $DC$  ovat yhdensuuntaiset?



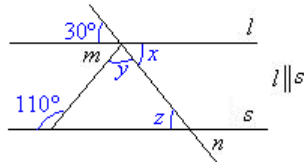
101. Päättele kulmien  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  suuruudet.



102. Päättele kulmien  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ja  $\delta$  suuruudet.

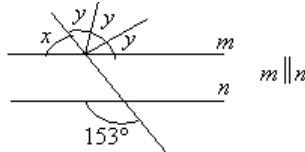


103. Kuinka suuria ovat kulmat  $x$ ,  $y$  ja  $z$ ?

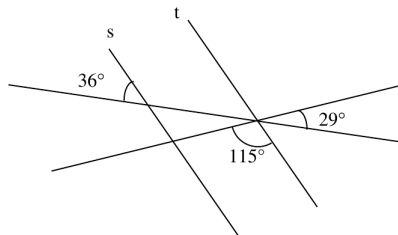


**Vaativat tehtävät**

104. Kuinka suuria ovat kulmat  $x$  ja  $y$ ?



105. Ovatko suorat  $s$  ja  $t$  yhdensuuntaisia? Perustele vastauksesi.

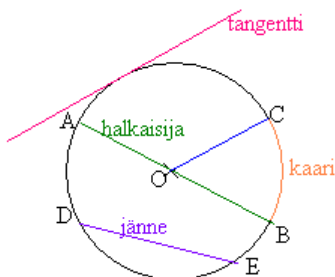


## 6 Ympyrä

Ympyrä on tasokuvio, joka muodostuu kaikista niistä pisteistä, jotka ovat tietyn etäisyyden sisällä annetusta kiintopisteestä. Ympyrä nimetään keskipisteen mukaan.

### Ympyrään liittyviä määritelmiä

- Ympyrän kehä on tason käyrä, joka muodostuu kaikista niistä pisteistä, joilla on sama etäisyys ympyrän keskipisteeseen.
- Ympyrän säde on jana, joka yhdistää ympyrän keskipisteen ja kehän pisteen.
- Jänne on jana, joka yhdistää kaksi ympyrän kehän pistettä.
- Halkaisija on jänne, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta.
- Tangentti on suora, joka sivuaa ympyrää yhdessä pisteessä.
- Kaksi ympyrän kehän pistettä jakaa kehän kahteen kaareen.

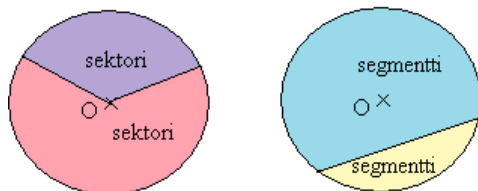


### ympyrän O osia:

- säde OC
- halkaisija AB tai jänne AB
- jänne DE
- kaari CB

## Ympyrän alueet

- Sektori on kahden säteen rajaama alue ympyrästä.
- Sektorin keskuskulman  $\alpha$  kärki on ympyrän keskipisteessä.
- Jänne jakaa ympyrän kahteen segmenttiin.

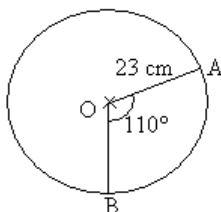


Koska jokainen jänne jakaa ympyrän kahteen segmenttiin, on tärkeää merkitä selvästi kumpaa segmenttiä tarkoitetaan. Sama pätee sektorien kanssa.

Ympyrän halkaisija  $d$  on kaksi kertaa säteen  $r$  pituinen:  $d = 2r$ .

**Esimerkki 1**

Lasketaan ympyrän  $O$  halkaisijan pituus sekä kuperan kulman  $AOB$  suuruus.

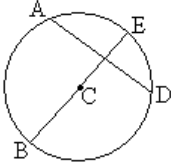


Ympyrän halkaisija  $d = 2r = 2 \cdot 23 \text{ cm} = 46 \text{ cm}$ . Täysikulma on  $360^\circ$ , joten  $\angle AOB = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$ .

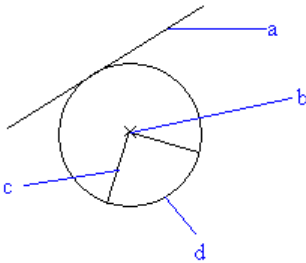
**Tehtäviä**

106. Nimeä ympyrästä kaikki

- a) jänteet      b) säteet      c) halkaisijat



107. Nimeä osat.



108. Piirrä ympyrä, jonka säde on

- a) 2 cm      b) 4 cm      c) 6 cm.

109. Piirrä ympyrä, jonka halkaisija on

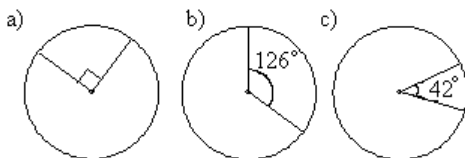
- a) 5 cm      b) 9 cm      c) 10 cm.



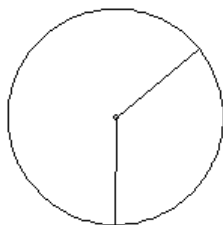
110. Jäljennä taulukko vihkoosi ja täydennä.

säde [m]	halkaisija [m]
3,0	
	8,2
	4,9
20,4	
	133,9

111. Päättele sektorin kuperan keskuskulman suuruus.



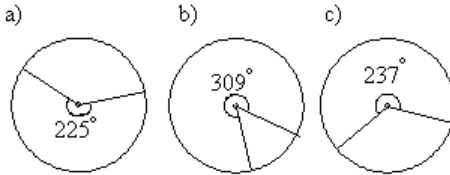
112. Mittaa kulmaviivaimella sektorin keskuskulmien suuruudet.



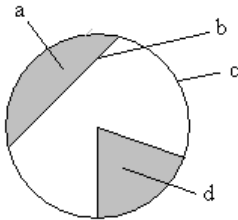
113. Ympyrä on jaettu kahdella säteellä kahteen sektoriin. Mikä on kuperan kulman suuruus, jos pienempi keskuskulma on

- a)  $74^\circ$                       b)  $105^\circ$                       c)  $32^\circ$ ?

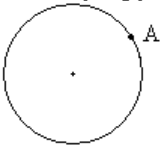
114. Päättele sektorin koveran keskuskulman suuruus.



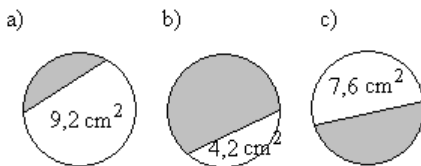
115. Nimeä ympyrän osa.



116. Piirrä ympyrälle tangenti pisteeseen A.



117. Kunkin oheisen ympyrän kokonaispinta-ala on  $12,6 \text{ cm}^2$ . Laske varjostetun segmentin ala.



118. Piirrä ympyrä, jonka halkaisija on  $9,0 \text{ cm}$  ja jaa se kahteen sektoriin siten, että toinen sektorin keskuskulmista on  $100^\circ$ .

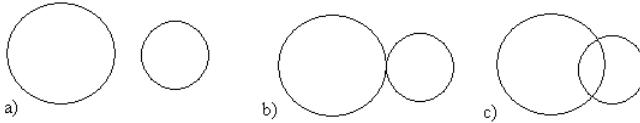
**Soveltavat tehtävät**

119. Kuinka suuri on ympyrän säde, jos sen halkaisija on (ilmoita vastaus murtolukuna)
- a)  $2\frac{1}{2}$  cm      b)  $\frac{5}{6}$  cm      c)  $5\frac{3}{4}$  cm?
120. Ympyrän säde on 3,2 cm. Miten sijaitsee ympyrään nähden piste, jonka etäisyys ympyrän keskipisteestä on
- a) 2,5 cm      b) 3,5 cm      c) 3,2 cm?
121. Piirrä vihkoosi ympyrä, jonka halkaisija on 9 cm. Piirrä ympyrään kolme jännettä, jotka eivät leikkaa toisiaan.
122. Piirrä ympyrä ja merkitse siihen keskipiste O, säde OA, halkaisija BC, kaari AD ja jänne CD.
123. Piirrä suora ja ympyrä siten, että niillä on
- a) kaksi yhteistä pistettä      b) yksi yhteinen piste
- c) ei yhtään yhteistä pistettä.
124. Piirrä ympyrä, jonka säde on 2 cm ja merkitse ympyrän ulkopuolelle piste P. Piirrä pisteen P kautta ympyrälle kaksi tangenttia.

125. Onko väittämä tosi vai epätosi? Jos väittämä on epätosi, korjaa se niin, että siitä tulee tosi väittämä.
- Jänne, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta, on ympyrän halkaisija.
  - Ympyrän halkaisija on puolet säteen pituudesta.
  - Ympyrän jänne voi olla pidempi kuin ympyrän halkaisija.
  - Halkaisija on samalla myös yksi ympyrän jänneistä.

### Vaativat tehtävät

126. Piirrä ympyröiden yhteiset tangentit.



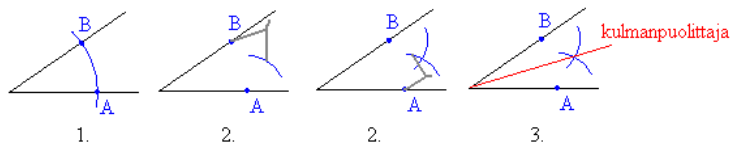
127. Ympyrän halkaisijan pituus on 56 cm. Mitkä seuraavista voivat olla kyseisen ympyrän jänneiden pituuksia?
- 12 cm
  - 47 cm
  - 69 cm
  - 72 cm
  - 5 cm
  - 28 cm

## 7 Piirretään harpin avulla

Geometrisessa piirtämisessä työvälineinä ovat ennen tietokoneita olleet harppi ja viivain. Viivainta käytetään ainoastaan suorien viivojen piirtämiseen. Mittaamiset suoritetaan harpilla, jolla voidaan erottaa yhtä pitkiä janoja. Vaikka tietokoneohjelmat ovat sittemmin syrjäyttäneet nämä työkalut ”tosielämässä”, on niiden hallinta yhä sikälikin tärkeää, että tietokoneohjelma usein mallintaa näiden kahden työkalun käyttöä. Silloin ruudulla näkyvät työkalujen kuvakkeetkin näyttävät yleensä harpilta ja viivaimelta - kokeile niiden käyttöä kun ohjelmisto niitä tarjoaa! Tietokoneellakin näillä ”virtuaalityökaluilla” saa nimittäin usein tehtyä nopeasti asioita, joiden etsiminen valikoista tai klikuttelu pikselin tarkkuudella olisi paljon hitaampaa.

### Kulman puolittaminen

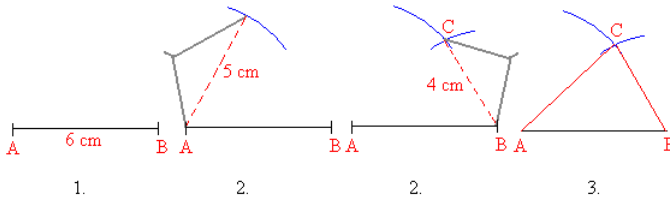
Puolitetaan annettu kulma.



1. Kulman kärki keskipisteenä piirretään ympyränkaari, joka leikkaa kulman molempia kylkiä.
2. Leikkauspisteet A ja B keskipisteenä piirretään samansäteiset ympyränkaaret siten, että ne leikkaavat toisensa kulman aukeamassa.
3. Ympyränkaarien leikkauspiste yhdistetään kulman kärkipisteeseen. Tämä puolisuora on kulmanpuolittaja.

### Kolmion piirtäminen

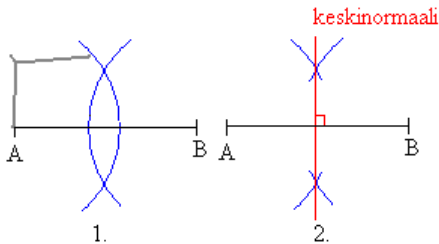
Piirretään kolmio ABC, jonka sivujen pituudet ovat 6 cm, 5 cm ja 4 cm.



1. Piirretään kolmion yksi sivu eli jana AB.
2. Käytetään kolmion sivuksi valitun janan päätepisteitä A ja B ympyränkaarien keskipisteinä ja piirretään kaksi ympyränkaarta niillä säteillä, jotka ovat kolmion sivujen pituudet.
3. Yhdistetään ympyränkaarien leikkauspiste C janan AB päätepisteisiin.

## Janan keskinormaalien piirtäminen

Useissa geometrisissa piirtämistehtävissä käytetään janan keskinormaaliamittaamiseen, sillä jokainen keskinormaalipiste on yhtä kaukana janan päätepisteistä.

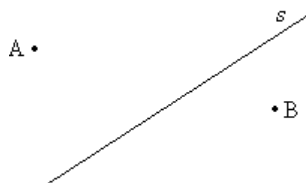


Piirretään annetulle janelle AB keskinormaali.

1. Piirretään janan päätepisteet A ja B keskipisteinä samansäteiset ympyränkaaret, jotka leikkaavat toisensa.
2. Piirretään suora, joka kulkee ympyränkaarien leikkauspisteiden kautta. Tämä suora on janan AB keskinormaali.

Huomaa, että suoralle piirretään geometrisesti normaali siten, että ensiksi piirretään jokin suoran piste keskipisteenä ympyrä. Syntyviä suoran ja ympyräkaaren leikkauspisteitä käsitellään samoin kuin edellä pisteitä A ja B.

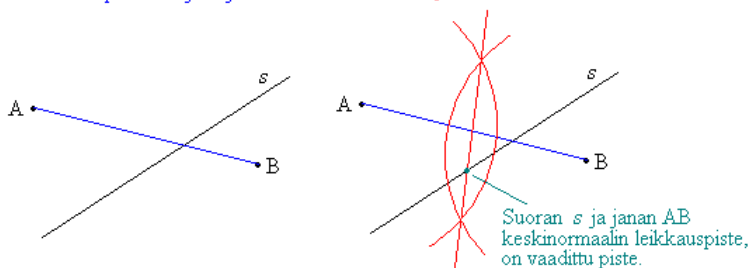
### Esimerkki 1



Etsitään suoralta  $s$  sellainen piste, joka on yhtä kaukana pisteistä A ja B.

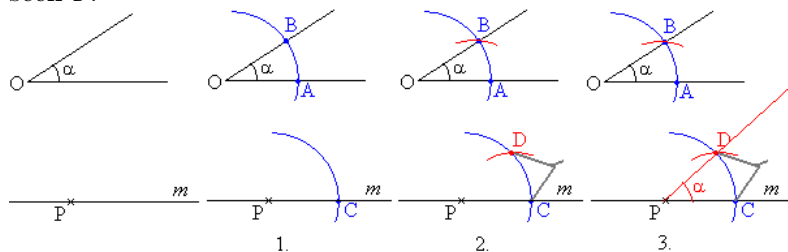
Yhdistetään pisteet A ja B janaksi.

Piirretään janalle AB keskinormaali.



### Kulman siirtäminen

Siirretään kulma  $\alpha$  geometrisesti suoralla  $m$  olevaan pisteeseen P.

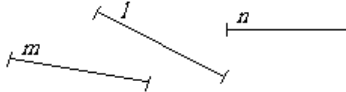


1. Piirretään kaksi samansäteistä ympyräkaarta, joiden keskipisteinä ovat pisteet O ja P.
2. Mitataan kaarta AB vastaava jänne harpilla ja erotetaan vastaavan mittainen jänne CD.
3. Piirretään pisteestä P alkava puolisuora PD, jolloin muodostuu  $\alpha$ :n suuruinen kulma CPD.



**Tehtäviä**

128. Laita janat  $l$ ,  $m$  ja  $n$  pituusjärjestykseen pienimmästä alkaen. Saat käyttää ainoastaan harppia mittaamiseen.

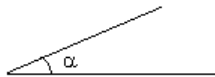


129. Piirrä kulmat käyttäen piirtokolmiota ja puolita ne harpin avulla.

- a)  $90^\circ$                       b)  $50^\circ$                       c)  $30^\circ$ .

130. Piirrä 65 mm pituinen jana AB ja siihen harpin avulla sen keskinormaali  $s$ .

131. Siirrä kulma  $\alpha$  geometrisesti vihkoosi.

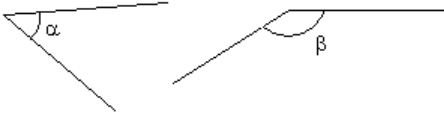


132. Pyydä luokkatoveriasi piirtämään vihkoosi jokin kulma sekä suora ja valitsemaan suoralta piste, johon sinun tulee siirtää piirretty kulma.

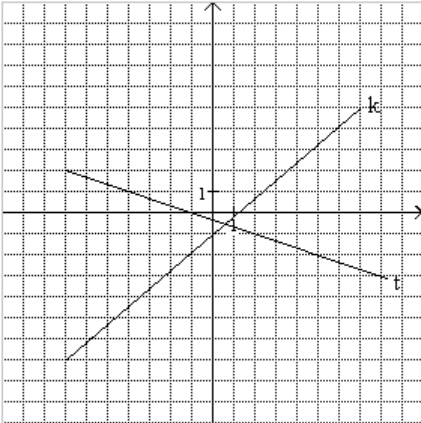
**Soveltavat tehtävät**

133. Piirrä jana AB, kun  $A = (3, 5)$  ja  $B = (-4, -2)$ . Piirrä harpin avulla janalle AB sen keskinormaali  $n$ .
134. Piirrä kolmio ABC, jonka sivujen pituudet ovat 3 cm, 4 cm ja 5 cm.
135. Piirrä kolmio ABC, jonka kaikki sivut ovat 5 cm pituisia.
136. Piirrä kolmio ABC, jonka sivujen pituudet ovat 6 cm, 7 cm ja 8 cm. Piirrä kolmion jokaiselle sivulle keskinormaali. Mitä havaitset keskinormaaleista?

137. (a) Siirrä kulmat  $\alpha$  ja  $\beta$  geometrisesti vihkoon.  
 (b) Piirrä geometrisesti kulma  $\alpha + \beta$ .  
 (c) Piirrä geometrisesti kulma  $\beta - \alpha$ .

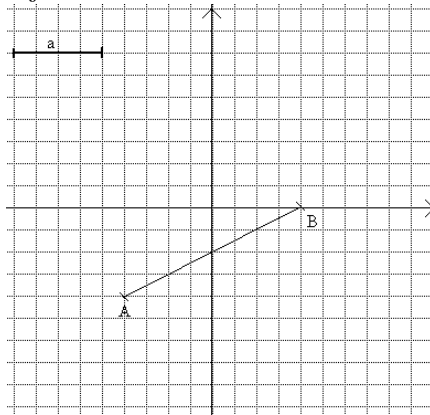


138. Etsi ne pisteet, jotka ovat yhtä kaukana suorista  $k$  ja  $t$ .



139. Etsi harpin avulla kaikki ne koordinaatiston pisteet, jotka ovat kuuden yksikön etäisyydellä pisteestä  $P = (2, 3)$ .

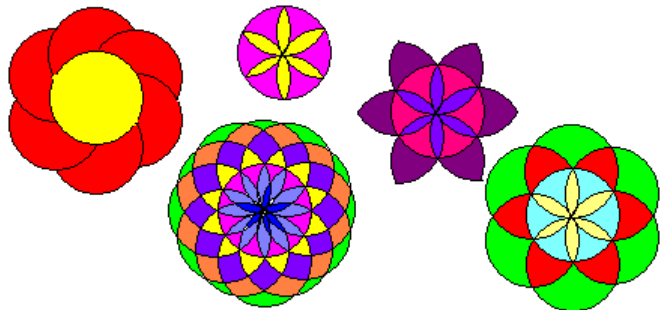
140. Etsi harpin avulla ne pisteet, jotka ovat etäisyydellä  $a$  janasta AB.



141. Piirrä kuviot vihkoosi harpin avulla.



142. Piirrä jokin kukkakuvioista vihkoosi.

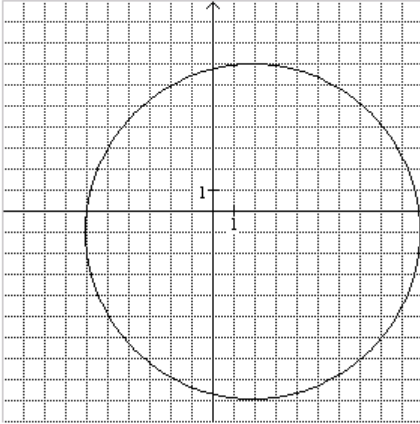


143. Suunnittele oma kuvio, jonka piirtämisessä tarvitset harppia.

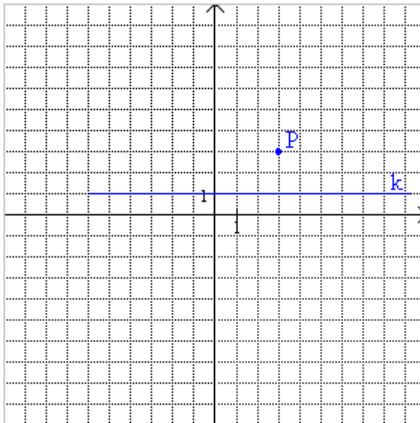
### Vaativat tehtävät

144. Piirrä geometrisesti  $45^\circ$  kulma.

145. Piirrä  $160^\circ$  kulma ja puolita se geometrisesti neljään yhtäsuureen osaan.
146. Piirrä geometrisesti  $135^\circ$  kulma.
147. Etsi ympyrän keskipiste. Mitkä ovat keskipisteen koordinaatit?



148. Etsi sellaiset pisteet harppia ja viivoitinta käyttäen, jotka ovat yhtä kaukana pisteestä  $P = (3, 3)$  ja suorasta  $k$ .

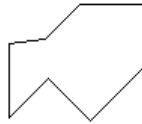


## 8 Monikulmioita

Kun janoja liitetään peräkkäin siten, että ensimmäisen janan loppupisteeseen tulee seuraavan alkupiste, muodostuu murtoviiva. Jos murtoviivan alkupiste ja loppupiste yhtyvät, muodostuu suljettu murtoviiva.



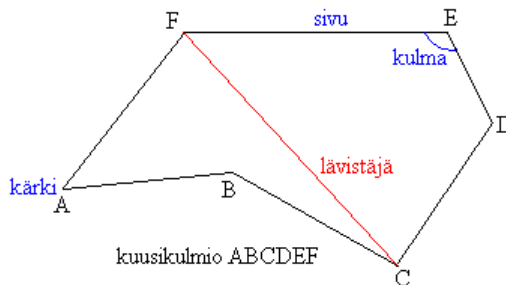
avoin murtoviiva



suljettu murtoviiva

### Monikulmioon liittyviä määritelmiä

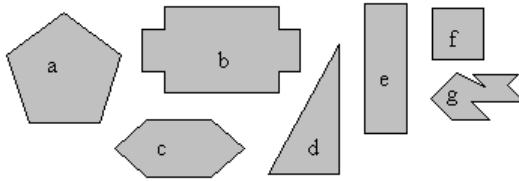
- Monikulmio on suljetun, itseään leikkaamattoman murtoviivan rajoittama tason osa.
- Monikulmion lävistäjä yhdistää toisiinsa kaksi ei-vierekkäistä kärkeä.
- Monikulmion kulma on kahden sivun välinen kulma, jonka aukeama jää monikulmion sisään.



Monikulmiot nimetään luettelemalla monikulmion kärkipisteet järjestyksessä. Monikulmio voidaan nimetä myös siinä olevien kärkien, kulmien tai sivujen lukumäärän mukaan. Esimerkiksi 6-kulmiossa on 6 kärkeä, 6 kulmaa ja 6 sivua.

## Esimerkki 1

1. 5-kulmio



2. 12-kulmio

3. 6-kulmio

4. kolmikulmio eli kolmio

5. nelikulmio

6. säännöllinen nelikulmio eli neliö

7. 10-kulmio

---

Tarkastellaan seuraavaksi lähemmin nelikulmioita. Joilakin nelikulmioilla on omat nimityksensä.



puolisuunnikas



suunnikas



suorakulmio



neljäkäs



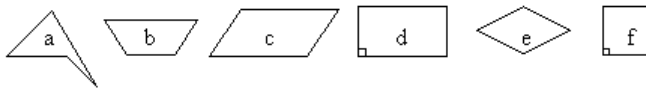
neliö

## Nelikulmioihin liittyviä määritelmiä

- Nelikulmio on neljästä janasta muodostuva itseään leikkaamaton, suljettu murtoviiva.
- Puolisuunnikas on nelikulmio, jonka kaksi sivua ovat yhdensuuntaiset.
- Suunnikas on nelikulmio, jossa on kaksi paria yhdensuuntaisia sivuja.
- Suorakulmio on suunnikas, jonka yksi kulma on suora.
- Neljäkäs eli vinoneliö on suunnikas, jonka kaksi vierekkäistä sivua ovat yhtä pitkät.
- Neliö voidaan määritellä kahdella tavalla:
  - Suorakulmio, jonka kaksi vierekkäistä sivua ovat yhtä pitkät.
  - Neljäkäs, jonka yksi kulma on suora.

**Esimerkki 2**

Tarkastellaan seuraavia kuvioita ja edellä olevia määritelmiä.



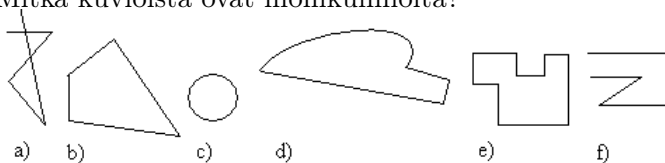
- Kuvioista kaikki ovat nelikulmioita.
- Vaikka pelkästään b näyttää puolisuunnikkaalta, toteuttavat myös c, d, e ja f puolisuunnikkaan määritelmän.
- Suunnikkaita ovat c, d, e ja f.

- Suorakulmioita ovat d ja f.
  - Neljäkkäitä ovat e ja f.
  - Neliön määritelmän toteuttaa vain kuvio f.
-

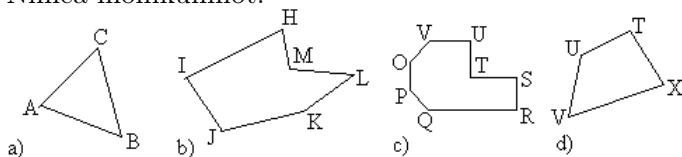


**Tehtäviä**

149. Mitkä kuvioista ovat monikulmioita?

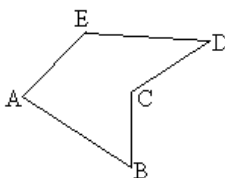


150. Nimeä monikulmiot.

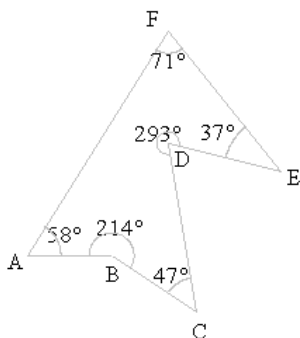


151. Nimeä viisikulmiosta ABCDE jokin

- a) kärki    b) sivu    c) kulma    d) lävistäjä.



152. (a) Nimeä kuvion monikulmio.  
 (b) Laske monikulmion kulmien summa.

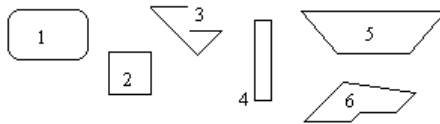


153. Tarkastellaan edellisen tehtävän monikulmiota. Ilmoita seuraavien kulmien suuruudet.

- a)  $\angle ABC$       b)  $\angle DEF$       c)  $\angle FAB$   
 d)  $\angle C$       e)  $\angle D$

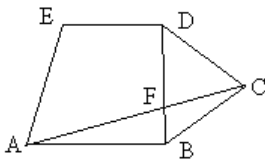
154. Poimi kuvioista kaikki

- a) monikulmiot      b) suunnikkaat  
 c) suorakulmiot      d) puolisuunnikkaat.

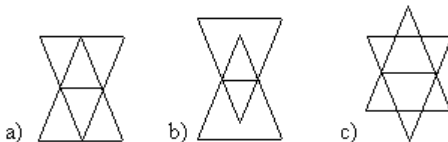


155. Nimeä kuviosta kaikki

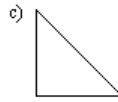
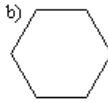
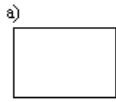
- a) kolmiot      b) nelikulmiot  
 c) viisikulmiot      d) kuusikulmiot.



156. Montako kolmiota ja suunnikasta löydät kuvioista?



157. Jäljennä kuvat vihkoosi ja piirrä niihin kaikki lävistäjät.



### Soveltavat tehtävät

158. Piirrä nelikulmio, jossa yksi kulma on

- a) suora      b) tylppä      c) kupera.

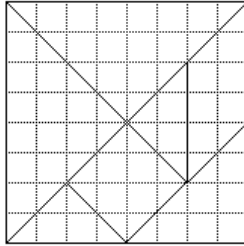
159. Suunnittele sommitelma, jossa esiintyy neliö, suunnikas, suorakulmio, vinoneliö, puolisuunnikas, jana ja piste.

160. Onko väittämä tosi vai epätosi?

- a) Suorakulmiot ovat aina myös suunnikkaita.  
b) Neljäkkäät ovat aina myös neliöitä.  
c) Suunnikas on myös puolisuunnikas.  
d) Monikulmiossa voi olla eri määrä sivuja kuin kulmia.  
e) Neljäkäs on myös puolisuunnikas.

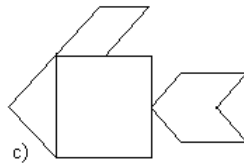
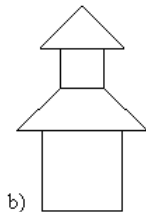
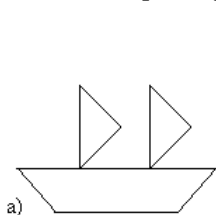
161. Piirrä nelikulmio, jonka lävistäjä on nelikulmion ulkopuolella.

162. Tangram on kiinalainen palapeliä muistuttava ongelmakimppu. Se koostuu seitsemästä osasta kuvion mukaisesti. Kolmioita, neliötä ja suunnikasta kääntelemällä ja siirtelemällä voi muodostaa erilaisia kuvioita. Tee itsellesi Tangrammin palat.



163. Ota kaksi pienintä Tangrammin kolmiota. Muodosta niistä
- a) kolmio      b) neliö      c) suunnikas.
164. Ota kaksi pienintä Tangrammin kolmiota ja neliö. Muodosta niistä
- a) kolmio      b) suunnikas      c) suorakulmio.
165. Ota kaikki Tangrammin palaset ja muodosta niistä
- a) kolmio      b) suunnikas      c) suorakulmio
- d) neliö.
166. Muodosta kahdesta isoimmasta Tangrammin kolmiosta neliö ja muodosta lopuista paloista täsmälleen samanlainen neliö.

167. Ota kaikki palat ja muodosta mallin mukainen kuvio.



168. Suunnittele oma kuvio Tangrammin paloista.

## 9 Kolmioita

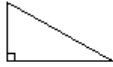
Kolmio on monikulmio jossa on kolme kulmaa. Kolmiot voidaan nimetä joko kulmien tai sivujen perusteella.

Kolmion nimeäminen kulmien mukaan

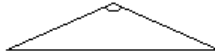
- Teräväkulmaisessa kolmiossa kaikki kulmat ovat teräviä eli pienempiä kuin  $90^\circ$ .
- Suorakulmaisessa kolmiossa on yksi suora kulma eli yksi kulumista on  $90^\circ$ .
- Tylppäkulmaisessa kolmiossa on yksi tylppä kulma eli yksi kulumista on suurempi kuin  $90^\circ$ .



teräväkulmainen kolmio



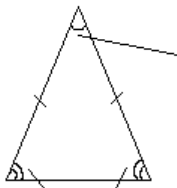
suorakulmainen kolmio



tylppäkulmainen kolmio

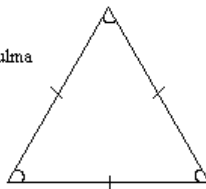
Kolmion nimeäminen sivujen mukaan

- Tasasivuisessa kolmiossa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.
- Tasakylkisessä kolmiossa on ainakin kaksi yhtä pitkää sivua.



tasakylkinen kolmio

huippukulma



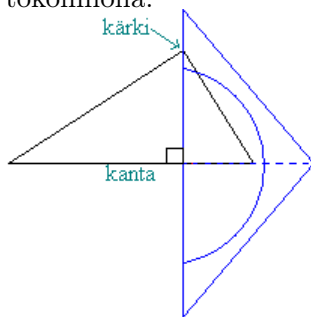
tasavisuinen kolmio

Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat keskenään yhtä suu-

ret. Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat keskenään yhtä suuria.

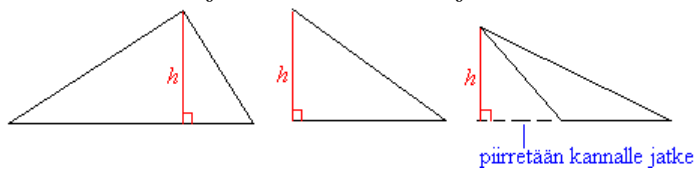
Kolmion korkeusjana on kolmion kärjestä vastakkaiselle sivulle kohtisuorasti piirretty jana. Sivua, jolle korkeusjana on piirretty, kutsutaan kolmion kannaksi.

Korkeusjanojen piirtäminen onnistuu helpoimmin piirtokolmiolla.

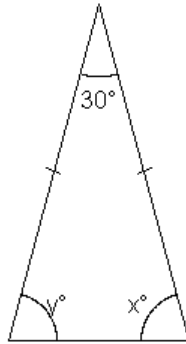


Piirretään kolmion kannalle normaali, joka kulkee kolmion kärjen kautta. Jana, joka jää kannan ja kärjen väliin, on korkeusjana.

Jokaiselle kolmiolle voidaan piirtää kolme korkeusjanaa. Korkeusjana voi olla yksi kolmion sivuista, sijaita kolmion sisällä tai ulkopuolella. Jos valitulle kannalle ei voi piirtää kärjen kautta normaalia, on kannalle piirrettävä jatke. Yleensä korkeusjanaa merkitään kirjaimella  $h$ .



Kolmion kulmien summa on aina  $180^\circ$ .

**Esimerkki 1**

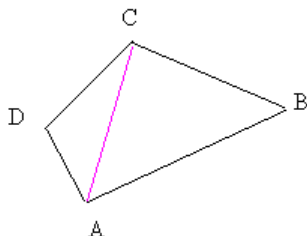
Päätellään kulmien  $x$  ja  $y$  suuruudet.

Kolmion kulmien summa on aina  $180^\circ$ , joten kulmien  $x$  ja  $y$  summa on  $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ .

Koska kolmio on tasakylkinen, kolmion kantakulmat  $x$  ja  $y$  ovat yhtäsuuret. Kulmien  $x$  ja  $y$  suuruudeksi saadaan  $\frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$ .

---



**Esimerkki 2**

Lasketaan nelikulmion ABCD kulmien summa.

Nelikulmio ABCD voidaan jakaa kahdeksi kolmioksi ABC ja ACD.

Koska kolmion kulmien summa on  $180^\circ$ , on nelikulmion kulmien summa  $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ . Tämä pätee kaikille nelikulmioille.

---

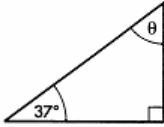
Nelikulmion kulmien summa on aina  $360^\circ$ .

Muiden monikulmioiden kulmien summa saadaan jakamalla monikulmio kolmioiksi ja käyttämällä hyväksi tietoa, että kolmiossa kulmien summa on  $180^\circ$ .

## Tehtäviä

169. Laske kulman  $\theta$  suuruus.

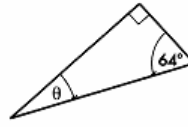
a)



b)

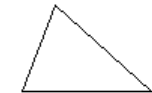


c)

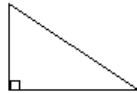


170. Jäljennä kolmiot vihkoosi ja piirrä niihin korkeusjana.

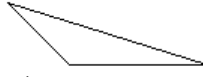
a)



b)



c)



171. Laske kolmion kolmannen kulman suuruus, kun kaksi muuta kulmaa ovat

- a)  $45^\circ$  ja  $60^\circ$     b)  $50^\circ$  ja  $70^\circ$     c)  $110^\circ$  ja  $20^\circ$   
 d)  $80^\circ$  ja  $40^\circ$     e)  $45^\circ$  ja  $90^\circ$     f)  $20^\circ$  ja  $70^\circ$   
 g)  $36^\circ$  ja  $86^\circ$

172. Piirrä harpin avulla kolmio ABC, jonka sivujen pituudet ovat 3 cm, 4 cm ja 5 cm. Mitä nimeä kolmiosta käytetään?

173. Piirrä kolmio ABC, jonka kulmien suuruudet ovat  $120^\circ$ ,  $40^\circ$  ja  $20^\circ$ . Mitä nimeä kolmiosta käytetään?

174. Kuinka suuret ovat tasasivuisen kolmion kulmat?

175. Laske kulman  $x$  suuruus.

a)



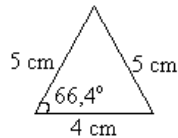
b)



c)



176. Kuinka suuri on tasakylkisen kolmion huippukulma, jos sen kantakulmat ovat
- a)  $20^\circ$                       b)  $78^\circ$                       c)  $50^\circ$
177. Kuinka suuri on nelikulmion neljäs kulma, jos kolme muuta kulmaa ovat
- a)  $125^\circ$ ,  $57^\circ$  ja  $114^\circ$                       b)  $85^\circ$ ,  $116^\circ$  ja  $44^\circ$   
c)  $75^\circ$ ,  $79^\circ$  ja  $84^\circ$                       d)  $100^\circ$ ,  $89^\circ$  ja  $69^\circ$
178. Kolmion yksi kulma on  $40^\circ$ . Toinen kulma vaihtelee välillä  $30^\circ$ -  $60^\circ$ . Millä välillä vaihtelee kolmas kulma?
179. Piirrä suorakulmainen tasakylkinen kolmio ABC. Kuinka suuret ovat sen kantakulmat?
180. Kuinka suuri on oheisen tasakylkisen kolmion
- a) toinen kantakulma                      b) huippukulma?

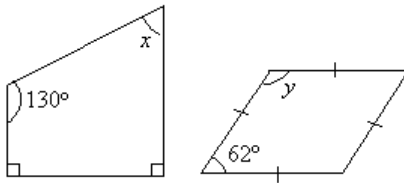


181. Tasakylkisen kolmion huippukulma on  $44^\circ$ . Laske kantakulman suuruus.

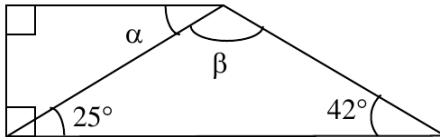
182. Kopioi taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat tiedot. Kulmat A, B ja C ovat kolmion kulmien suuruuksia.

$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	Kolmion tyyppi
$50^\circ$	$30^\circ$		tylppäkulmainen
	$40^\circ$	$90^\circ$	suorakulmainen
			tasasivuinen
	$40^\circ$	$40^\circ$	
$50^\circ$	$70^\circ$		
$20^\circ$		$110^\circ$	

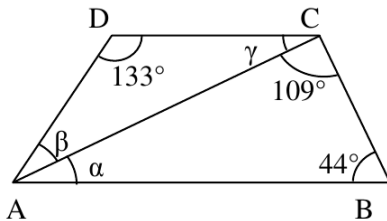
183. Kuinka suurina ovat kulmat  $x$  ja  $y$ ?



184. Laske kulmien  $\alpha$  ja  $\beta$  asteluvut.

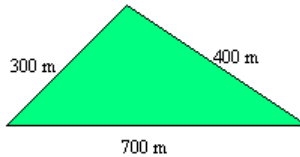


185. Laske kulmat  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ , kun  $AB \parallel CD$ .



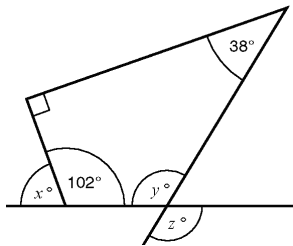
## Soveltavat tehtävät

186. Maanviljelijä näki mainoksen myytävästä tontista, jonka hinta oli vain 500 €. Tontti näytti mainoksen mukaan seuraavalta:

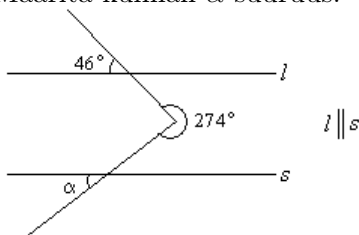


Miksi maanviljelijä ei ostanut tonttia?

187. Suunnikkaan yhden kulman suuruus on  $57^\circ$ . Laske muiden kulmien suuruudet.
188. Määritä tuntemattomien kulmien suuruudet.

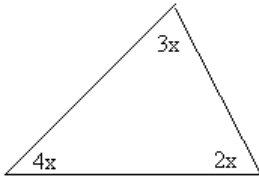


189. Määritä kulman  $\alpha$  suuruus.

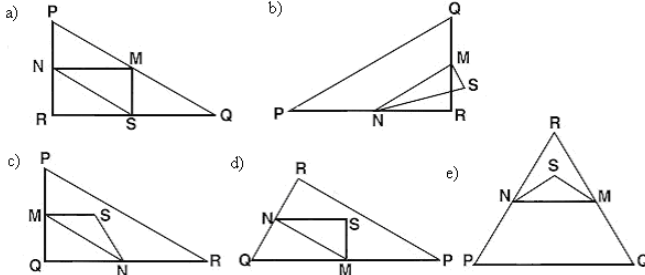


### Vaativat tehtävät

190. Päättelä mikä luku sopii  $x:n$  paikalle ja laske kolmion kulmien suuruudet.



191. Mihin kohtaan seuraava kuvaus sopii? Kolmio PQR on suorakulmainen kolmio, jossa kulma R on suora. Jana RQ on lyhyempi kuin jana PR. M on janan PQ keskipiste ja N on janan QR keskipiste. S on kolmion sisäpuolella oleva piste. Jana MN on pidempi kuin jana MS.

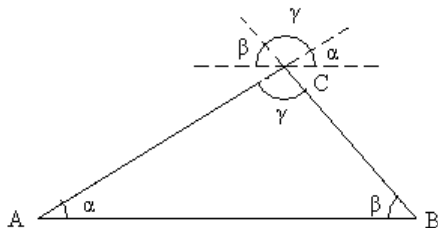


(Lähde: Kansainvälinen oppimistulosten arviointiohjelma, Pisa)

192. Monikulmion kulmien summa voidaan laskea kaavalla  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ , missä  $n$  on kulmien lukumäärä. Mikä on seuraavien monikulmioiden kulmien summa asteina?

- a) 7-kulmio      b) 8-kulmio      c) 10-kulmio  
 d) 11-kulmio    e) 12-kulmio

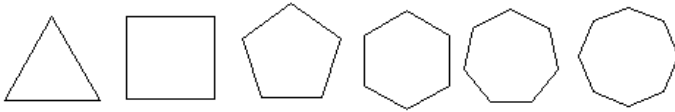
193. Perustele, miksi kolmion kulmien summa on  $180^\circ$  tarkastelemalla oheista kuvaa, jossa kärjen C kautta kulkeva suora on yhdensuuntainen sivun AB kanssa.



## 10 Säännöllisiä monikulmioita

Monikulmio on säännöllinen, jos sen kaikki sivut ovat keskenään yhtä pitkiä ja kaikki kulmat ovat keskenään yhtä suuria.

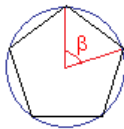
Tavallisimpia säännöllisiä monikulmioita ovat tasasivuisen kolmio ja neliö.



Säännölliset monikulmiot voidaan piirtää ympyrän sisälle siten, että jokainen monikulmion kärjistä sijaitsee ympyrän kehällä. Kun jaetaan täysikulma  $360^\circ$  monikulmiossa olevien sivujen lukumäärällä, saadaan sivua vastaavan keskuskulman suuruus.

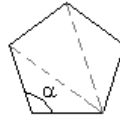
### Esimerkki 1

Lasketaan säännöllisen viisikulmion sivua vastaavan keskuskulman suuruus.



Kun säännöllinen viisikulmio piirretään ympyrän sisälle siten, että sen kärjet ovat ympyrän kehällä, muodostuu viisi viereisen kuvan mukaista sektoria, jotka ovat yhtä suuria. Tällöin jokaista sivua vastaavan keskuskulman suuruus on  $\beta = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ .



**Esimerkki 2**

Lasketaan säännöllisen viisikulmion kulman  $\alpha$  suuruus.

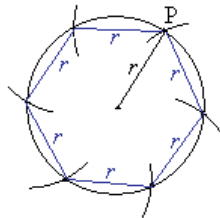
Säännöllinen viisikulmio voidaan jakaa lävistäjillä kolmeksi kolmioksi. Koska kolmion kulmien summa on aina  $180^\circ$ , saadaan säännöllisen viisikulmion kulmien summaksi  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ .

Säännöllisessä viisikulmiossa on viisi samankokoista kulmaa, jolloin yhden kulman suuruus on  $\alpha = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$ .

**Esimerkki 3**

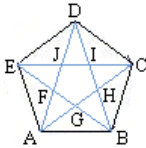
Piirretään säännöllinen kuusikulmio.

1. Piirretään ympyrä, jonka säde on yhtä suuri kuin kuusikulmion sivun pituus.
2. Merkitään kehälle piste P.
3. Erotetaan harpilla pisteestä P lähtien ympyrän kehältä kuusi peräkkäistä säteen mittaista jännettä.
4. Piirretään jänteet, jotka muodostavat kuusikulmion sivut.

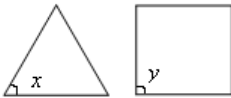


## Tehtäviä

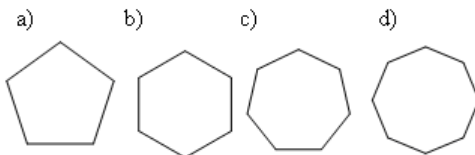
194. Säännölliseen viisikulmioon ABCDE on piirretty kaikki lävistäjät. Nimeä kuviosta kaikki
- tasakylkiset kolmiot
  - neljäkkäät
  - puolisuunnikkaat.



195. Mitä nimeä käytetään säännöllisestä
- kolmikulmiosta
  - nelikulmiosta?
196. Mitä eroa on säännöllisellä ja epäsäännöllisellä viisikulmiolla?
197. Kuvassa on tasasivuinen kolmio ja neliö. Kuinka suuria ovat kulmat  $x$  ja  $y$ ?

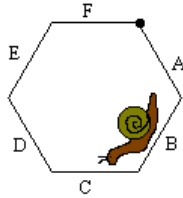


198. Ilmoita edellisen tehtävän kuvioiden kulmien summa.
199. Montako lävistäjää monikulmioihin voidaan piirtää?

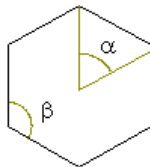


## Soveltavat tehtävät

200. Etanan lähtöpiste on merkitty pisteellä. Millä säännöllisen kuusikulmion sivulla etana on menossa, kun se on kulkenut  $20/36$  kuusikulmion ympärysmittasta.

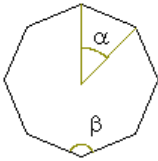


201. Piirrä vihkoosi harpin ja viivoittimen avulla säännöllinen kuusikulmio, jonka sivun pituus on 4 cm.
202. Piirrä ympyrä, jonka säde on 5 cm ja sen sisään tasasivuinen kolmio. Vinkki: Yhdistä joka toinen säännöllisen kuusikulmion kärjistä.
203. Laske säännöllisen kuusikulmion
- keskuskulman  $\alpha$  suuruus
  - kulmien summa
  - kulman  $\beta$  suuruus.



204. Laske säännöllisen kahdeksankulmion

- keskuskulman  $\alpha$  suuruus
- kulmien summa
- kulman  $\beta$  suuruus.



### Vaativat tehtävät

205. Kopioi **säännöllisten** monikulmioiden ominaisuuksista kertova taulukko vihkoosi ja täydennä se.

Kuvio	Yhden kulman suuruus	Kulmien summa
Kolmio		
Neliö		
5-kulmio		
6-kulmio		
7-kulmio		
8-kulmio		
9-kulmio		

206. Mistä johtuu, että säännöllisen kuusikulmion sivun pituus on yhtä suuri kuin sen ympäri piirretyn ympyrän säde?

## SI-järjestelmä ja ISO

Päivittäiseen elämäämme liittyy paljon mittaamista. Mittaamme pituutta, painoa, verenpainetta, aikaa, ilman lämpötilaa, autojen nopeuksia jne. Erityisen tärkeää mittaminen on tekniikassa. Siltaa rakennettaessa on lujuuslaskelmien oltava kohdallaan. Hyvän äänieristyksen aikaansaaminen vaatii akustisiin ominaisuuksiin perehtymistä.

Mittausongelma on ikivanha. Matkoilla ja metsästysretkillä tarvittiin etäisyyksien arvioimista. Kuinka monta "poronkusemaa" tai "kivenheittoa" matka oli. Muoin käytettiin pituuksien ja painojen mittaamiseen mitä erilaisempia yksiköitä. Yleensä otettiin lähtökohdaksi jokin arkielämästä tuttu asia, kuten kyynärä, jalka, hartianleveys, syli, kämmenenleveys, tuuma (peukalon kärjestä ensimmäiseen niveleen) tai vaaksa (etusormen ja peukalon kärjenväli). Tällaiset mittayksiköt eivät tietenkään olleet vakioituja ja täsmällisiä. Kun luonnontiede alkoi kehittyä ja kansainväliset yhteydet lisääntyivät, haluttiin että koneet pystyttäisiin kokoamaan eri puolella maailmaa valmistetuista osista. Osat eivät olisi käyneet mitenkään yhteen, jos jokainen olisi mittänyt niiden pituudet esimerkiksi omalla vaaksallaan. Oli otettava käyttöön tarkasti määritellyt perussuureet, joita kaikki käyttäisivät mittauksissaan. Lisäksi syntyi tarve esittää kätevästi myös hyvin suuria tai hyvin pieniä mittaustuloksia.

SI-mittajärjestelmän lähtökohtana on se, että kullakin suureella on yksi yksikkö, jota käytetään johdonmukaisesti. Osa suureista on perusyksiköitä, mutta suurin osa on niistä johdettuja.

Perussuureet ja -yksiköt		
suure	yksikkö	tunnus
pituus (l)	metri	m
massa (m)	kilogramma	kg
aika (t)	sekunti	s
sähkövirta (I)	ampeeri	A
lämpötila (T)	kelvin	K
valovoima (I)	kandela	cd
ainemäärä (n)	mooli	mol

Johdetut suureet on saatu perussuureista jako- ja kertolaskujen tuloksina. Joillakin johdetuilla yksiköillä on oma nimi ja tunnus.

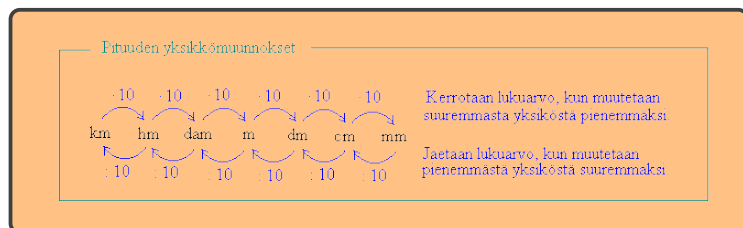
Kansainvälinen suureiden ja yksiköiden tarkistusjärjestelmä sai alkunsa vuonna 1875. Tällöin 17 valtiota allekirjoitti Pariisissa kansainvälisen metrisopimuksen. Kansainvälinen Standardisointijärjestö ISO (International Organization for Standardization) päättää SI-järjestelmän soveltamisesta eri aloilla. Standardisointi merkitsee yksikköjärjestelmän kehittämisen lisäksi yleisiä sopimuksia tuotteiden mitoituksesta ja laadusta. Esimerkiksi putkien ja liittimien, lamppujen ja lampun kantojen, pistotulppien ja pistorasioiden sekä paperiarkin koon ja kirjoituskoneen telan leveyden tulee olla yhteensopivia. Standardisointijärjestön ansiosta voidaan olla varmoja siitä, että maailman toisella puolella valmistettu laakeri sopii koneeseen, joka on tehty kymmenen vuotta aikaisemmin jossain aivan muualla.

## 11 Pituuksia ja piirejä

Pituuden SI-järjestelmän mukainen perusyksikkö on metri. Pituuden yksiköiden suhdeluku on 10. Taulukossa on yleisimmin käytetyt pituuden yksiköt.

tunnus	nimi	perusyksiköissä
km	kilometri	1000 m
hm	hehtometri	100 m
dam	dekametri	10 m
m	metri	1 m
dm	desimetri	0,1 m
cm	senttimetri	0,01 m
mm	millimetri	0,001 m

Pienempi yksikkö muutetaan suuremmaksi jakamalla lukuarvo suhdeluvulla. Suurempi yksikkö muutetaan pienemmäksi kertomalla lukuarvo suhdeluvulla.



### Esimerkki 1

Muunnetaan pituudet desimetreiksi.

- 40 senttimetriä

$40 \text{ cm} = \frac{40}{10} \text{ dm} = 4 \text{ dm}$  Muunnetaan yhtä yksikköä suuremmaksi.

- 6 dekametriä

$6 \text{ m} = 10 \cdot 10 \cdot 6 \text{ dm} = 600 \text{ dm}$  Muunnetaan kahta yksikköä pienemmäksi.

Yksikkömuunnoksissa voimme myös suoraan hyödyntää tietoa, että käyttämämme lukujen merkintäjärjestelmä on desimaalinen ja sen kantaluku on 10. Siten jokainen desimaalipilkun siirto oikealle vastaa lukuarvon kertomista kymmenellä ja siten yhtä yksikkömuunnosta pienempään. Vastaavasti jokainen desimaalipilkun siirto vasemmalle muuttaa lukuarvon yksikön yhtä yksikköä suuremmaksi.

### Esimerkki 2

Muutetaan pituudet a) 4,2 km ja b) 3 cm metreiksi.

*Kun muutetaan suuremmasta yksiköstä pienempään, siirretään desimaalipilkua yhtä monta askelta oikealle.*



*Kun muutetaan pienemmästä yksiköstä suurempaan, siirretään desimaalipilkua yhtä monta askelta vasemmalle.*

a)  $4,2 \text{ km} = 4200 \text{ m}$

*Siirretään desimaalipilkua 3 askelta oikealle.*

b)  $3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$

*Siirretään desimaalipilkua 2 askelta vasemmalle.*

Edellä mainittujen SI-yksiköiden lisäksi on käytössä muitakin pituusyksiköitä. Esimerkiksi televisioruudun ja tietokoneen näytön koko sekä polkupyörän rengaskoko ilmoitetaan tuumina. Muut yleisesti käytössä olevat yksiköt voidaan muuttaa SI-yksiköitä vastaaviksi taulukoista löytyvien tietojen perusteella.

Pituuden muunnokset
$1'' = 1 \text{ tuuma} = 25,4 \text{ mm} = 2,54 \text{ cm}$
$1 \text{ mi} = 1 \text{ maili} = 1609 \text{ m} = 1,609 \text{ km}$



**Esimerkki 3**

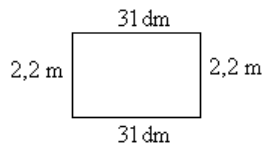
Matias on tilaamassa postimyynnistä farkkuja. Farkkujen koot on ilmoitettu muodossa 29 W / 30 L. Merkintä tarkoittaa, että farkkujen vyötärön ympäryys on 29 tuumaa ja lahkeen sisäpituus on 30 tuumaa. Matias ei tiedä, mikä olisi hänelle sopiva koko ja hänellä on käytössään vain tavallinen mittanauha. Kuinka hän ratkaisee ongelman?

Matias mittaa mittanauhalla vyötärön ympäryksensä ja saa tulokseksi 81 cm. Lahkeen sisäpituudeksi hän saa 86 cm. Sitten hän muuntaa mitat tuumiksi, käyttäen hyväksi tietoa, että 1 tuuma = 2,54 cm.

$$\frac{81 \text{ cm}}{2,54 \text{ cm}} \approx 32 \quad \text{ja} \quad \frac{86 \text{ cm}}{2,54 \text{ cm}} \approx 34$$

Vastaus: Matiakselle sopiva farkkujen koko on 32 W / 34 L.

Monikulmion *piiri* ( $p$ ) eli *ympärysmitta* saadaan laskemalla monikulmion sivujen pituudet yhteen.

**Esimerkki 4**

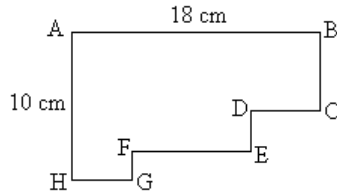
Lasketaan viereisen suorakulmion piiri.

Huom! Ennen kuin pituuksia voidaan yhdistää, on piituet ilmoitettava samoissa yksiköissä.  $31 \text{ dm} = 3,1 \text{ m}$

$$p = 2,2 \text{ m} + 3,1 \text{ m} + 2,2 \text{ m} + 3,1 \text{ m} = 10,6 \text{ m}$$

Vastaus: Suorakulmion piiri on 10,6 m.

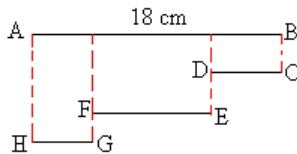
## Esimerkki 5



Lasketaan kahdeksankulmion ABCDEFGH piiri.

Piiri saadaan laskemalla sivujen pituudet yhteen. Tehtävänannossa ei ole annettu kaikkien sivujen pituuksia, mutta näiden sivujen yhteenlaskettu pituus on pääteltävissä.

Sivujen CD, EF ja GH yhteenlaskettu pituus on 18 cm. Vastaavasti sivujen BC, DE ja FG yhteenlaskettu pituus on 10 cm.



Piiriksi siten saadaan  $p = 18 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + 18 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 56 \text{ cm}$ .

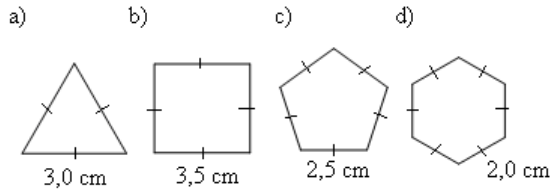
Vastaus: Kahdeksankulmion piiri on 56 cm.

**Tehtäviä**

207. Lue parillesi ääneen pituudet

- a) 3,2 mm   b) 7,18 dm   c) 15 hm   d) 4 dam

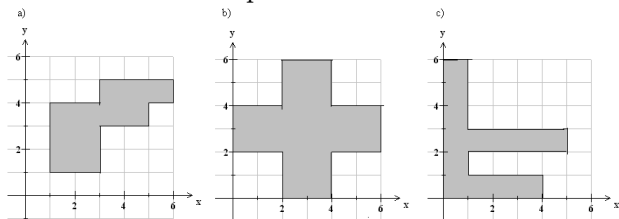
208. Laske säännöllisten monikulmioiden piirit.



209. Ilmoita oma pituutesi

- a) metreinä                      b) dekametreinä  
c) desimetreinä                      d) millimetreinä.

210. Määritä kuvioden piirit.



211. Muunna pituudet senttimetreiksi

- a) 570 m   b) 239 mm   c) 34 dm   d) 3,2 dm  
e) 4 km   f) 12,23 m   g) 2 m   h) 5 dm  
i) 7 cm   j) 8 mm   k) 0,3 mm

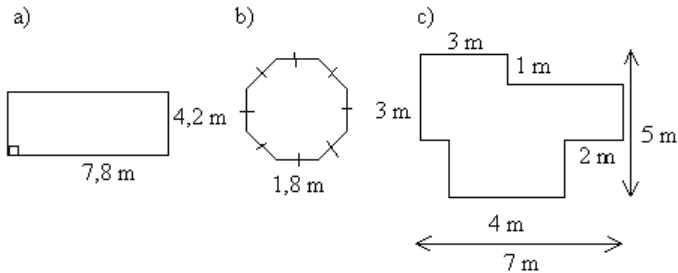
212. Jäljennä taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat tiedot.

m	dam	hm	km
185			
	470		
		2,3	
			17,6

213. Jäljennä taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat tiedot.

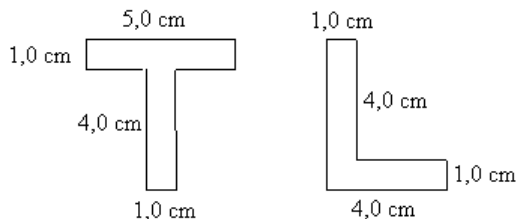
mm	cm	dm	m
			19
		321	
	14		
5640			

214. Laske kuvioiden piirit.



215. Tontti on neliönmuotoinen ja yhden sivun pituus on 35 m. Paljonko aitaa tarvitaan tontin aitaamiseen?

216. Arvioi kummalla kirjaimista on pidempi piiri ja laske sitten piirien pituudet.



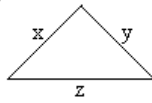
### Soveltavat tehtävät

217. Kalle Kanilla on kolme porkkanaa, joiden pituudet ovat 10 cm, 13 cm ja 15 cm. Kuinka hän voi porkkanoidensa avulla mitata 18 cm pituisen matkan?
218. Farkuissa on merkintä 29 W / 30 L. Muunna mitat senttimetreiksi.
219. Polkupyörän renkaan halkaisija on 26". Paljonko halkaisija on senttimetreinä?
220. Laske neljäkkään piiri, kun sen yksi sivu on 1,4 m. Ilmoita piiri metreinä ja desimetreinä.
221. Säännöllisen monikulmion sivun pituus on 3,2 m. Laske kuvion piiri, kun kyseessä on säännöllinen
- a) viisikulmio                      b) kahdeksankulmio.



227. Laske kuvioiden piirit.

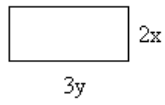
a)



b)



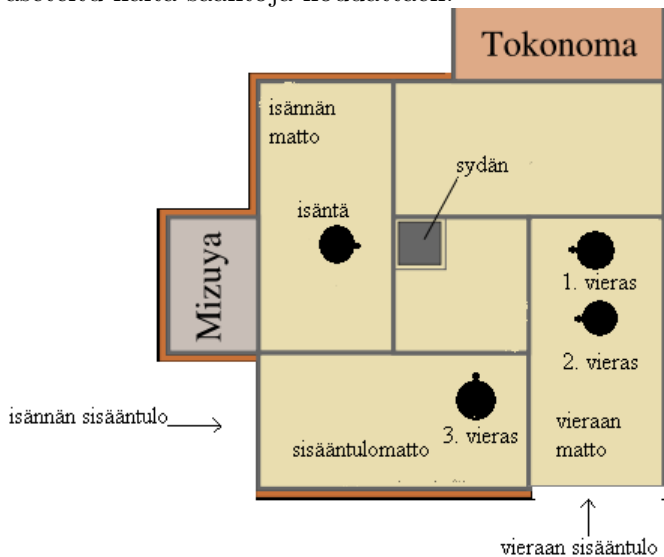
c)



## Tamimatot ja pinta-ala

Japanissa käytetään niin yleisesti tatamimattoja, että siellä huoneiden pinta-alat ilmoitetaan usein antamalla tatamien lukumäärä. Tatamimatto on kooltaan 180 cm · 90 cm, mutta myös puolikkaita tatamimattoja 90 cm · 90 cm valmistetaan. Perinteiset japanilaiset kaupat olivat pinta-alaltaan 5,5 tatamia ja teehuoneet 4,5 tatamia.

Tatamimattojen asetteluun liittyy useita sääntöjä: mattoja ei tule asetella ruudukoksi ja asetelmassa ei saa olla kohtaa, jossa kolmen tai neljän maton nurkat kohtaavat toisensa. Tyypilliseen japanilainen teehuoneeseen matot on aseteltu näitä sääntöjä noudattaen:



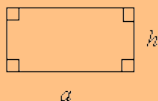
Mizuya on teehuoneessa oleva teen valmisuspaikka ja Tokoma pieni alkovi, jonne sijoitetaan koristeeksi ikebana (=kukka-asetelma) tai bonzai-puu. Tokoman sisälle astuminen on ehdottomasti kielletty.



## 12 Pinta-alan yksiköt

Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo:

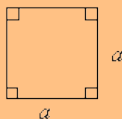
$$A = a \cdot h$$



Huomaa, että suorakulmiossa korkeusjana ja sivujana yhtyvät, näin ollen suorakulmion pinta-ala voidaan laskea myös vierekkäisten sivujen tulona.

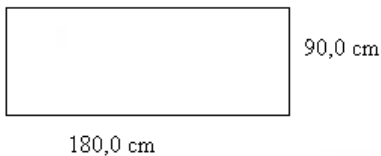
Neliön pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo eli kahden vierekkäisen sivun tulo:

$$A = a \cdot a = a^2$$



Huomaa, että neliön kanta ja korkeus ovat yhtä pitkät.

### Esimerkki 1



Lasketaan tatamimaton pinta-ala.

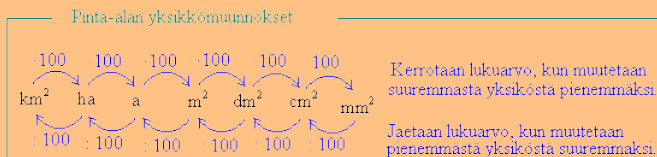
Matto on suorakulmio, joten  $A = a \cdot h = 180,0 \text{ cm} \cdot 90,0 \text{ cm} = 16200 \text{ cm}^2$ .

Lukuarvo 16200 on melko suuri, joten olisi havainnollisempaa antaa vastaus käyttämällä suurempaa pinta-alan yksikköä. Miten muunnat 16200 cm<sup>2</sup> neliömetreiksi?

Koska pituuden suhdeluku on kymmenen, on pinta-alan  $m^2 = m \cdot m$  suhdeluvun oltava  $10 \cdot 10 = 100$ . Taulukossa on yleisimmät pinta-alan yksiköt.

tunnus	nimi	perusyksiköissä
km <sup>2</sup>	neliökilometri	1000000 m <sup>2</sup>
ha	hehtaari	10000 m <sup>2</sup>
a	aari	100 m <sup>2</sup>
m <sup>2</sup>	neliömetri	1 m <sup>2</sup>
dm <sup>2</sup>	neliödesimetri	0,01 m <sup>2</sup>
cm <sup>2</sup>	neliösenttimetri	0,0001m <sup>2</sup>
mm <sup>2</sup>	neliömillimetri	0,000001 m <sup>2</sup>

Samoin kuin pituuksienkin yhteydessä, pienempi yksikkö muutetaan suuremmaksi jakamalla lukuarvo suhdeluvulla. Suurempi yksikkö muutetaan pienemmäksi kertomalla lukuarvo suhdeluvulla.



**Esimerkki 2**

Muunnetaan

- 3,2 neliökilometriä hehtaareiksi.

$3,2 \text{ km}^2 = 100 \cdot 3,2 \text{ ha} = 320 \text{ ha}$  Muunnetaan yhtä yksikköä pienemmäksi.

- 16200 neliösenttimetriä neliömetreiksi.

$16200 \text{ cm}^2 = \frac{16200}{100 \cdot 100} \text{ m}^2 = 1,62 \text{ m}^2$  Muunnetaan kahta yksikköä suuremmaksi.

Myös pinta-alan yksikkömuunnoksissa voimme hyödyntää tietoa, että käyttämämme lukujen merkintäjärjestelmä on desimaalinen ja sen kantaluku on 10. Koska pinta-alojen yksikkömuunnosten suhdeluku on 100, on jokaisessa yhden yksikön muunnoksessa desimaalipilkku aina siirrettävä kaksi askelta.

**Esimerkki 3**

Muutetaan pinta-alat a)  $240 \text{ mm}^2$  ja b)  $3,2 \text{ ha}$  neliömetreiksi.

*Kun muutetaan suuremmasta yksiköstä pienempään, vastaa yksi yksikkömuunnos kahta askelta oikealle.*

$\text{km}^2 \quad \text{ha} \quad \text{a} \quad \text{m}^2 \quad \text{dm}^2 \quad \text{cm}^2 \quad \text{mm}^2$

*Kun muutetaan pienemmästä yksiköstä suurempaan, vastaa yksi yksikkömuunnos kahta askelta vasemmalle.*

a)  $240 \text{ mm}^2 = 0,000240 \text{ m}^2$

*Siirretään desimaalipilkku  $3 \cdot 2 = 6$  askelta vasemmalle.*

b)  $3,2 \text{ ha} = 32000 \text{ m}^2$

*Siirretään desimaalipilkku  $2 \cdot 2 = 4$  askelta oikealle.*

**Tehtäviä**

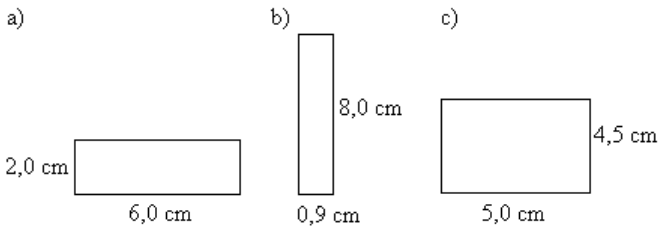
228. Lue parillisesi ääneen pinta-alat.

- a)  $3,2 \text{ m}^2$       b) 15 a      c)  $48 \text{ mm}^2$   
 d) 6 ha      e)  $123 \text{ dm}^2$

229. Laske neliön pinta-ala, kun sen sivun pituus on

- a) 2,0 m    b) 3,0 m    c) 5,0 m    d) 9,0 m

230. Laske suorakulmioiden pinta-alat.



231. Olohuoneen matto on suorakulmio, jonka leveys on 2,5 m ja pituus 4,0 m. Laske maton pinta-ala.

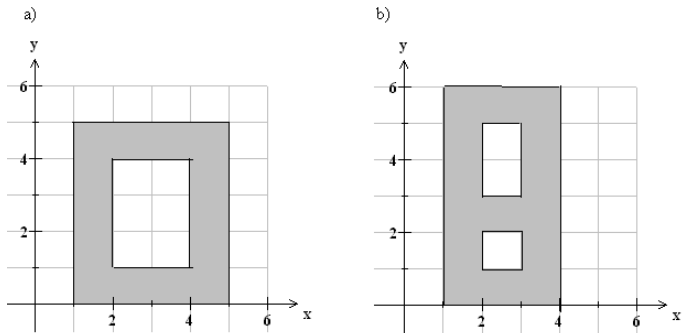
232. Jäljennä taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat luvut.

$\text{m}^2$	a	ha	$\text{km}^2$
2 500 000			
			0,13
	568		
		3562	

233. Jäljennä taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat luvut.

$\text{mm}^2$	$\text{cm}^2$	$\text{dm}^2$	$\text{m}^2$
650 700			
	452		
			0,25

234. Määritä varjostetun alueen pinta-ala.

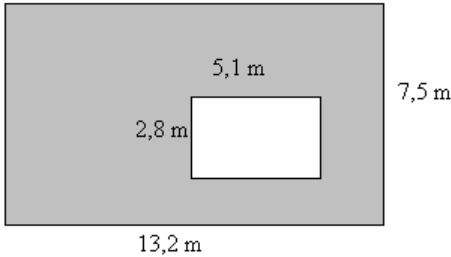


235. Suorakulmion sivujen pituudet ovat 12 cm ja 25 cm. Ilmoita suorakulmion pinta-ala sekä neliösenttimetreinä että neliödesimetreinä.
236. Keilaradan pituus on 18,29 m ja leveys 1,06 m. Laske keilaradan pinta-ala. Ilmoita vastaus sekä neliömetreinä että neliödesimetreinä.
237. Muunna pinta-alat neliömetreiksi

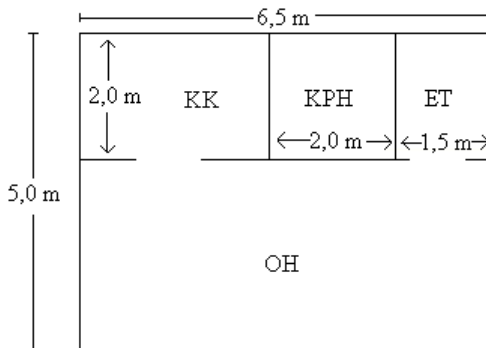
- a)  $300 \text{ cm}^2$       b)  $67 \text{ km}^2$       c)  $458 \text{ dm}^2$   
 d)  $0,7 \text{ km}^2$       e)  $40 \text{ dm}^2$       f)  $3 \text{ cm}^2$

## Soveltavat tehtävät

238. Laske varjostetun alueen pinta-ala.



239. Kuvassa on erään yksión pohjapiirustus.



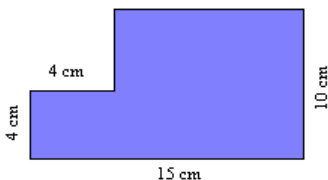
- Laske asunnon kokonaispinta-ala.
  - Laske kunkin huoneen pinta-ala.
  - Paljonko on asunnon kuukausivuokra, kun nelivuokra on  $12 \text{ €/m}^2$ ?
240. (a) Montako neliön muotoista laattaa, jonka sivun pituus on 15 cm, tarvitaan kylpyhuoneen seinän kaakeloimiseen, kun seinän pinta-ala on  $12,5 \text{ m}^2$ ?
- (b) Paljonko laatat tulevat maksamaan, kun yhden laatan hinta on 1,2 €?

241. Jussilla on aitaa 16 m. Kuinka suuren alueen Jussi pystyy aitaamaan, kun aidan molemmat päät kiinnitetään talon seinän ulkonurkkiin? Seinän pituus on 6 m.
242. Laske suorakulmion korkeus, jos sen kannan pituus on 4,0 cm ja pinta-ala
- a)  $20 \text{ cm}^2$    b)  $36 \text{ cm}^2$    c)  $44 \text{ cm}^2$    d)  $60 \text{ cm}^2$
243. Laske neliön pinta-ala, jos sen piiri on
- a) 16 cm   b) 20 cm   c) 40 cm   d) 100 cm
244. Suorakulmion muotoisen tontin pituus on 46,4 m ja leveys 38,2 m. Tonttimaa maksaa 6 €/m<sup>2</sup>. Laske kyseisen tontin hinta?
245. Kuinka suuri neliön muotoinen alue saadaan aidatuksi 6200 cm pitkällä köydellä?
246. Seuraavat ehdot määräävät koordinaatistosta alueen. Laske alueen pinta-ala.
- Ehto (1): x-koordinaatin on oltava vähintään 1 ja enintään 9
  - Ehto (2): y-koordinaatin on oltava vähintään 2 ja enintään 5

### Vaativat tehtävät

247. Suorakulmion muotoiselle tontille, jonka mitat ovat 90 m · 60 m, kylvetään ruuhonsiemeniä. Paljonko siemeniä pitää ostaa, kun aarin alueelle tarvitaan 1,7 kg?

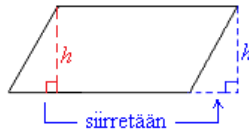
248. Laske kuvion pinta-ala.



249. Suorakulmion muotoisen pellon aitaamiseen menee 750 m piikkilankaa. Pellon pituus on 197 m. Kuinka leveä pelto on ja mikä on sen pinta-ala hehtaareina?
250. Seinän pinta-ala on  $30 \text{ m}^2$ . kuinka monta metriä lautta tarvitaan seinän paneloimiseen, jos laudan tehollinen leveys on 80 mm? Tehollisella leveydellä tarkoitetaan leveyttä, jossa on huomioitu tarvittava liittimien asettelu. (pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen, 1981)
251. Syksyllä 1996 avattiin liikenteelle 25,8 km:n pituinen osuus moottoritietä Hämeenlinnan pohjoispuolella välillä Ojoinen – Jutikkala. Tien alle jäi maata 253 hehtaaria. Kuinka monta metriä leveä on tämän perusteella moottoritiealue? (yo syksy 1999)
252. Kaksi yhtenevää (eli yhdenmuotoista ja samankokoista) neliötä sijaitsevat siten, että toisen kärki on toisen keskipisteessä. Kuinka suuren yhteisen pinta-alan ne rajoittavat?
253. Neliön muotoiselle tontille rakennetaan suorakaiteen muotoinen talo, jonka pitempi sivu on puolet tontin sivusta ja lyhempi kolmasosa tontin sivusta. Pihaaluetta jää tällöin  $400 \text{ m}^2$ . Laske tontin ala. (yo syksy 1995)



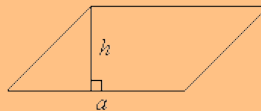
### 13 Kolmion, suunnikkaan ja puolisuunnikkaan pinta-ala



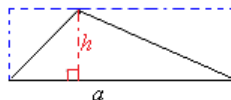
Suunnikas voidaan muodostaa suorakulmiosta leikkaamalla suorakulmion reunasta irti suorakulmainen kolmio ja siirtämällä irtileikattu kolmio suorakulmion vastakkaiseen reunaan. Suorakulmio ja suunnikas muodostuvat siis samoista osista, joten niillä on sama pinta-ala.

Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja vastaavan korkeuden tulo:

$$A = a \cdot h$$

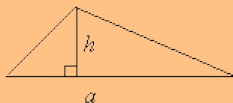


Kolmio voidaan täydentää suorakulmioksi kuvan katokoviiva-alueen mukaisesti. Lisätyt kolmiot muodostavat yhtä suuren alueen kuin alkuperäinen kolmio. Siksi kolmion pinta-ala saadaan laskemalla suorakulmion pinta-ala ja jakamalla se kahdella.

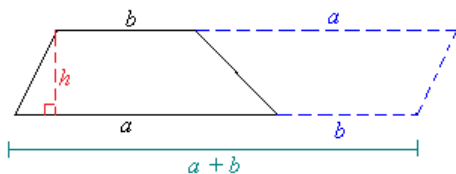


Kolmion pinta-ala on kannan ja vastaavan korkeuden tulo jaettuna kahdella:

$$A = \frac{a \cdot h}{2}$$

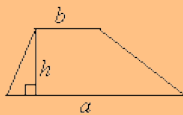


Kahdesta samankokoisesta puolisuunnikkaasta voidaan muodostaa kuvion mukainen suunnikas. Suunnikkaan korkeus on puolisuunnikkaan korkeus  $h$  ja kanta puolisuunnikkaan kantojen summa  $a + b$ . Puolisuunnikkaan pinta-ala saadaan jakamalla muodostuneen suunnikkaan pinta-ala kahdella.



Puolisuunnikkaan pinta-ala on kantojen keskiarvon ja korkeuden tulo:

$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

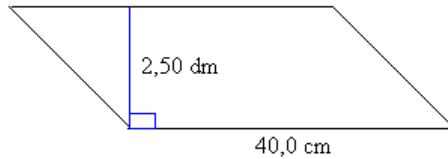


Muiden monikulmioiden pinta-alat lasketaan siten, että monikulmio jaetaan kolmioihin tai nelikulmioihin ja niiden

alat lasketaan yhteen. Kaikissa pinta-alalaskuissa on kiinnitettävä huomiota siihen, että jokainen mitta sijoitetaan laskukaavaan samoissa yksiköissä.

### Esimerkki 1

Lasketaan suunnikkaan pinta-ala.



Ennen mittojen kaavaan sijoittamista, ne on muutettava samaan yksikköön. Joten ilmoitetaan 2,50 desimetriä senttimetreinä:  $2,50 \text{ dm} = 25,0 \text{ cm}$ .

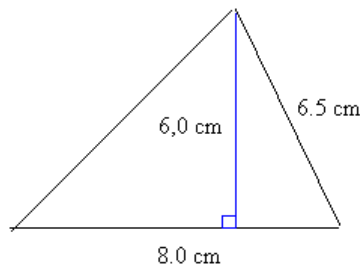
$$A = a \cdot h = 40,0 \text{ cm} \cdot 25,0 \text{ cm} = 1000 \text{ cm}^2$$

Vastaus: Suunnikkaan pinta-ala on  $1000 \text{ cm}^2$ .

---

### Esimerkki 2

Lasketaan kolmion pinta-ala.



Tehtävässä on annettu kolmion sivujan pituus, mutta sitä ei tarvita pinta-alan laskemisessa.

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{8,0 \text{ cm} \cdot 6,0 \text{ cm}}{2} = \frac{48 \text{ cm}^2}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

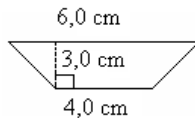
Vastaus: Kolmion pinta-ala on  $24 \text{ cm}^2$ .

Huom! Suunnikkaassa, kolmiossa ja puolisuunnikkaassa korkeusjanat ja sivujanat ovat erimittaisia, eikä niiden pinta-alojen laskemisessa voida käyttää sivujanojen pituuksia.

### **Esimerkki 3**

Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala, kun sen kannat ovat 4,0 cm ja 6,0 cm sekä näiden välinen etäisyys on 3,0 cm.

Geometrian sanallisten tehtävien ratkaiseminen kannattaa aloittaa piirtämällä tilanteesta kuva, johon merkitään kaikki annetut mitat:



Sijoitetaan arvot puolisuunnikkaan pinta-alakaavaan:  $A = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{4,0 \text{ cm} + 6,0 \text{ cm}}{2} \cdot 3,0 \text{ cm} = \frac{10,0 \text{ cm}}{2} \cdot 3,0 \text{ cm} = 5,0 \text{ cm} \cdot 3,0 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$  Vastaus: Puolisuunnikkaan pinta-ala on  $15 \text{ cm}^2$

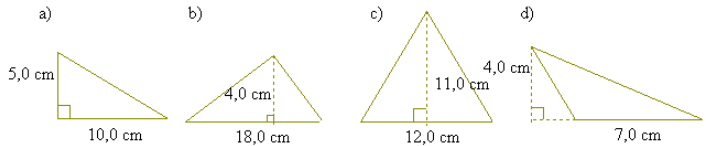
---

**Tehtäviä**

254. Laske suunnikkaan pinta-ala, kun sen kanta on 6,0 cm ja korkeus

- a) 3,0 cm   b) 6,0 cm   c) 11,0 cm   d) 15,0 cm

255. Laske kolmioiden pinta-alat.

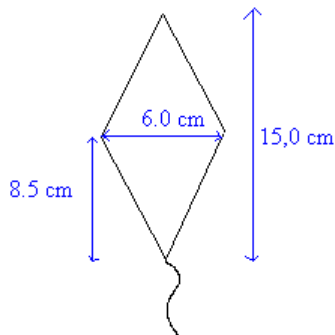


256. Laske kolmion pinta-ala, kun sen

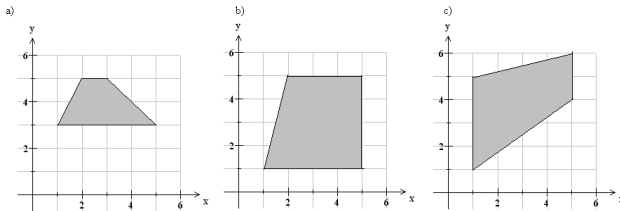
- a) kanta on 16 cm ja korkeus 20 cm.  
b) kanta on 12,0 cm ja korkeus 9,0 cm  
c) kanta on 5,0 m ja korkeus 8,0 m.

257. Puolisuunnikkaan kannat ovat 3 ja 7 sekä näiden välinen etäisyys 2. Piirrä kuva ja laske puolisuunnikkaan ala.

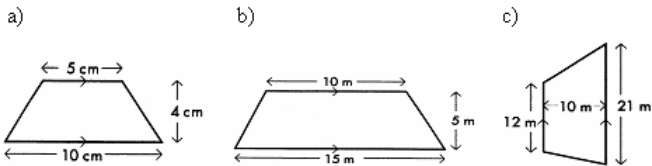
258. Laske leijan pinta-ala.



259. Laske puolisuunnikkaiden pinta-alat.



260. Laske puolisuunnikkaiden pinta-alat.



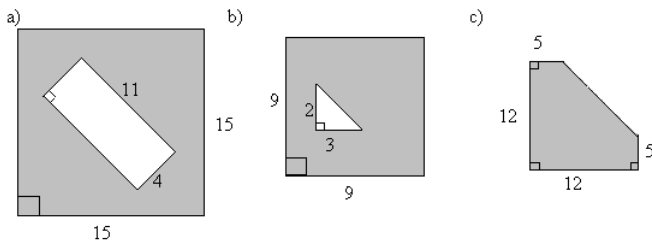
261. Suunnikkaan kannan pituus on 9 m 25 cm ja korkeus 3 m 90 cm. Montako neliometriä on suunnikkaan ala?

262. Laske puolisuunnikkaan pinta-ala, kun sen kannat ovat 5,0 cm ja 7,0 cm ja korkeus

- a) 2,0 cm   b) 5,0 cm   c) 4,0 cm   d) 12,0 cm

### Soveltavat tehtävät

263. Laske varjostettujen alueiden pinta-alat.

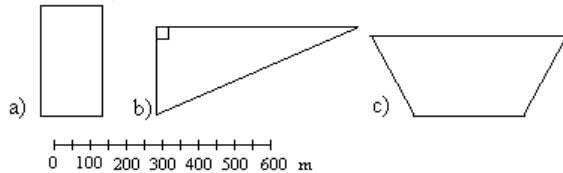


264. Laske suunnikkaan korkeus, jos sen kannan pituus on 5,0 cm ja pinta-ala

- a)  $20 \text{ cm}^2$    b)  $45 \text{ cm}^2$    c)  $55 \text{ cm}^2$    d)  $80 \text{ cm}^2$

265. Piirrä nelikulmio, joka ei ole suunnikas. Mittaa tarvittavat osat ja laske nelikulmion pinta-ala.

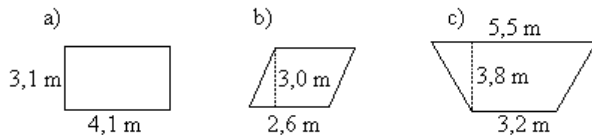
266. Mittaa kuvioista tarvittavat osat (mittakaava on alareunassa) ja laske pinta-alat.



267. Piirrä kaksi erilaista pinta-alaltaan  $8 \text{ cm}^2$  olevaa

- a) suorakulmiota                      b) kolmiota.

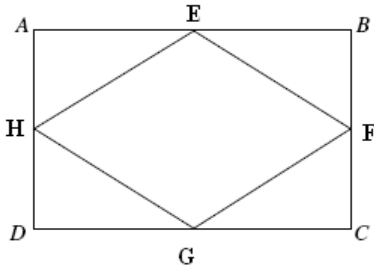
268. Ikkunalasi maksaa  $35 \text{ €/m}^2$ . Paljonko ikkunat maksavat?



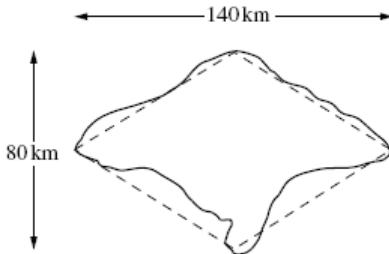
269. Mikä on kolmion korkeus, kun sen kanta on 10 cm ja pinta-ala on  $30 \text{ cm}^2$ ?

## Vaativat tehtävät

270. ABCD on suorakulmio,  $AB = 140,0$  cm ja  $BC = 80,0$  cm. E, F, G ja H ovat sivujen AB, BC, CD ja DA keskipisteitä.



- Laske kolmion FGH pinta-ala.
  - Laske neljääkkään EFGH pinta-ala.
271. Balin saari on muodoltaan likimain vinoneliö. Sen pituus on noin 140 km ja leveys 80 km. (Käytä apuna edellistä tehtävää.)



- Laske saaren pinta-alan likiarvo.
- Balin asukasluku on noin 3 miljoonaa ja jokaisella neliökilometrillä asuu 520 ihmistä. Laske näiden perusteella toinen likiarvo saaren pinta-alalle.

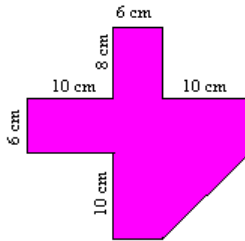


272. Laske kolmion korkeus, jos sen kannan pituus on 6,0 cm ja pinta-ala

- a)  $15 \text{ cm}^2$    b)  $21 \text{ cm}^2$    c)  $33 \text{ cm}^2$    d)  $45 \text{ cm}^2$

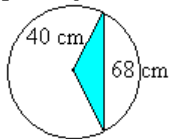
273. Puolisuunnikkaan pinta-ala on  $6,5 \text{ m}^2$ , korkeus 2,1 m ja toinen kanta 3,0 m. Laske toisen kannan pituus.

274. Laske kuvion pinta-ala.



275. Neliön pinta-ala on  $186 \text{ m}^2$ . Laske neliön sivun pituus ja piiri.

276. Ympyrään, jonka säde on 40 cm, piirretään 68 cm pitkä jänne. Laske muodostuneen kolmion pinta-ala.



277. Kolmion kärkipisteet ovat

$A = (1,-2)$ ,  $B = (4,3)$  ja  $C = (-1,4)$ . Laske kolmion ala. (yo syksy 1986)

## 14 Taulukkolaskentaa

Taulukkolaskentaohjelmassa tarkastellaan kaksiulotteista taulukkoa, joka muodostuu pystysuorista sarakkeista ja vaakasuorista riveistä. Taulukon yhtä ruutua sanotaan soluksi. Tunnetuimpia taulukkolaskentaohjelmia ovat MS Excel, Google Sheets ja Open/LibreOffice Calc.

Jokaisella solulla on sarakkeen ja rivin perusteella määrittyvä osoite. Esimerkiksi osoite C4 viittaa soluun, joka on kolmannen sarakkeen eli C-sarakkeen neljännellä rivillä.

sarakkeet

↓

	A	B	C	D	E
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					

rivit →

← solu, jonka osoite on C4

Taulukon soluihin voidaan kirjoittaa kolmenlaista tietoa:

- tekstiä
- lukuja
- laskukaavoja

Taulukkolaskennan ideana on muodostaa tulostiedot syötötiedoista. Jotta tulokset päivittyisivät automaattisesti syötötietojen muuttuessa, käytetään tulostietojen laskemiseen kaavoja. Kaavat aloitetaan aina yhtäsuuruus -merkillä (=). Kaavoissa viitataan taulukon soluihin. Taulukon valitun osan

voi tulostaa paperille tai taulukon tiedoista voidaan piirtää kaavioita.

### Esimerkki 1

	A	B	C	D
1	<b>Tuote</b>	<b>Yksikköhinta</b>	<b>Määrä</b>	<b>Yhteensä</b>
2	omenamehu	0,50 €	4	2,00 €
3	patonki	1,50 €	2	3,00 €
4	suklaavanukas	0,60 €	5	3,00 €
5	sarjakuvalehti	3,50 €	1	3,50 €
6				
7		Ostokset yhteensä:		11,50 €
8				

Oheiseen taulukkoon on syötetty tuotteiden hintoja sekä määriä, ja laskettu niiden perusteella kaavoja käyttäen rivi-kohtaiset hinnat soluihin D2, D3, D4 ja D5.

Esimerkiksi solun D2 tulos 2,00 € on saatu kaavalla  
 $=B2*C2$

Vastaavasti solun D3 tulos 3,00 € on saatu käyttämällä kaavaa

$$=B3*C3$$

Lopuksi taulukkoon on laskettu ostosten yhteishinta soluun D7

$$=D2+D3+D4+D5$$

Yleisimmin käytetyt laskutoimitukset on tehty valmiiksi laskukaavoiksi eli funktioiksi. Yhteishinta voidaan laskea käyttämällä valmista SUM-funktiota. Kun kaavan tyyppi on valittu, rajataan hiirellä taulukosta ne luvut, joiden summa halutaan laskea ja ohjelma hoitaa loput automaattisesti. Voit valita kaavan tyyppin valikosta tai kirjoittaa itse soluun D7

$$=SUM(D2:D5)$$

## Esimerkki 2

Taulukkoon on laskettu suorakulmion pinta-aloja käyttämällä eri mittoja kannalle ja korkeudelle.

	A	B	C	D
1	<b>kanta</b>	<b>korkeus</b>	<b>pinta-ala</b>	
2	2	5	10	
3	3	7	21	
4	5	12	60	
5	8	9	72	
6	10	17	170	
7				

Esimerkiksi solun C2 arvo 10 on saatu kaavalla

$$=A2*B2$$

ja solun C3 arvo 21 on saatu käyttämällä kaavaa

$$=A3*B3$$

Huomaa, että kaavaa ei välttämättä tarvitse kirjoittaa erikseen jokaiseen soluun, vaan se voidaan kopioida solusta C2 muihin soluihin seuraavasti:

	A	B	C	D
1	<b>kanta</b>	<b>korkeus</b>	<b>pinta-ala</b>	
2	2	5	10	
3	3	7		
4	5	12		
5	8	9		
6	10	17		
7				

Siirretään hiiren kursori solun oikeaan alakulmaan, jolloin kursori muuttuu plusmerkiksi. Plusmerkillä vedetään hiiren vasen painike pohjassa yli alueen, jonne solun sisältämä kaava halutaan kopioida.

Kaikki kappaleen tehtävät on tarkoitus tehdä käyttämällä taulukkolaskentaohjelmaa.

**Tehtäviä**

278. Tee oma lukujärjestyksesi ja opettele muokkaamaan taulukon ulkoasua. Voit käyttää erilaisia reunaviivoja ja värejä.
279. Tee esimerkki 2 taulukkolaskentaohjelmalla.
280. Tee oheinen taulukko ja laske puuttuvat pinta-alat.

kanta	korkeus	kolmion pinta-ala
4	13	
6	9	
7,5	15	
12	45	
18	9,5	

281. Tee oheinen taulukko ja laske puuttuvat **puolisuunnikkaiden** pinta-alat.

kanta a	kanta b	korkeus	pinta-ala
4	6	5	
10	8	7	
5,5	9	4,7	
11	18,5	13	
14	16,5	15,9	

282. Tee oheinen taulukko ja laske kolmioiden kolmannen kulman suuruudet.

kulma 1	kulma 2	kulma 3
56	10	
20	60	
11	18	
100	15	
13	110	

283. Tee oheinen taulukko ja laske nelikulmioiden neljännen kulman suuruudet.

kulma 1	kulma 2	kulma 3	kulma 4
100	60	20	
50	80	130	
10	90	112	
118	42	59	
12	205	62	

284. Tee vastaavanlainen taulukkopohja kuin esimerkissä 1. Suunnittele sitten juhlat ja mieti, mitä kaikkea niihin tarvitset (ruokaa, esiintyjä, koristeita jne.). Syötä tiedot taulukkopohjaan ja laske, paljonko juhlat tulisivat maksamaan.

285. Laadi taulukko, joka laskee automaattisesti tarvittavat ainemäärät 8 munan kakkuun ja 12 munan kakkuun. Muuta jotain alkuperäisen ohjeen arvoa. Muuttuvatko myös suurempien kakkupohjien vastaavat arvot?

Kakkupohjan raaka-aineet:

- 4 munaa
- 1,5 dl sokeria
- 1,5 dl vehnä jauhoja
- 0,5 dl perunajauhoja
- 1 tl leivinjauhetta

286. Suunnittele taulukkolaskentasovellus, jonka avulla voit seurata tulojasi ja menojaasi.

287. Tutki mitä muita valmiita laskukaavoja löydät SUM-funktion lisäksi ja suunnittele niitä käyttäen oma taulukkolaskentasovellus.

## 15 Kertaustehtäviä

### 15.1 Koordinaatisto

288. Piirrä koordinaatisto ja merkitse siihen pisteet

- a)  $A = (0,0)$     b)  $B = (2,3)$     c)  $C = (-3,1)$   
d)  $D = (0,-2)$     e)  $E = (-3,-3)$

289. Kuinka pitkä on pisteiden

- a)  $(5, 5)$  ja  $(4, 5)$                       b)  $(-4, 2)$  ja  $(-9, 2)$   
c)  $(1, -4)$  ja  $(1, 8)$                       d)  $(-3, -7)$  ja  $(-3, 0)$

välinen jana?

290. Päättele pisteiden koordinaattien perusteella, mitkä pisteistä  $(1, 2)$ ,  $(0, 6)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(0, 11)$ ,  $(0, 0)$  sijaitsevat

- a) x-akselilla                                  b) y-akselilla?

291. Päättele pisteen koordinaattien perusteella, missä neljänneksessä piste sijaitsee.

- a)  $(-4, 2)$     b)  $(2, -4)$     c)  $(3, 6)$     d)  $(-3, -6)$

292. Täydennä lauseet.

- a) Pistettä  $(0, 0)$  kutsutaan...  
b) Toisessa neljänneksessä x-koordinaatti on.... ja y-koordinaatti on....  
c) Neljännessä neljänneksessä x-koordinaatti on.... ja y-koordinaatti on....  
d) Kolmannessa neljänneksessä x-koordinaatti on.... ja y-koordinaatti on....

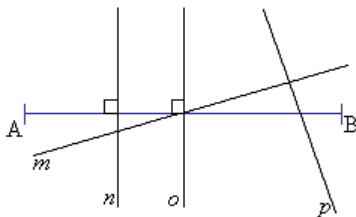
## 15.2 Geometrian peruskäsitteitä

293. Millä symbolilla kuvataan

- yhdensuuntaisia suoria
- kohtisuoria suoria?

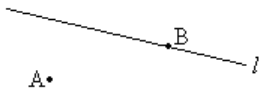
294. Mitkä suorista  $m$ ,  $n$ ,  $o$  ja  $p$  ovat

- yhdensuuntaisia keskenään
- yhdensuuntaisia janan  $AB$  kanssa
- janan  $AB$  normaaleja
- janan  $AB$  keskinormaaleja?



295. Jäljennä kuva vihkoosi ja piirrä suoralle  $l$  normaali, joka kulkee pisteen

- A kautta
- B kautta.



296. Piirrä piirtokolmiota käyttäen 8 cm pituinen jana  $AB$  ja sen keskinormaali  $l$ .

297. Piirrä koordinaatistoon suora  $l$ , joka kulkee pisteiden  $(1, 2)$  ja  $(3, 5)$  kautta ja kaksi sen kanssa yhdensuuntaista suoraa  $s$  ja  $t$ , jotka ovat 3 cm etäisyydellä suorasta  $l$ .



298. Jatka lauseita.

- a) Kahden pisteen välistä suoran osaa sanotaan...
- b) Suoraa, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan, sanotaan janan...
- c) Pisteestä alkavaa, toiseen suuntaan rajattomasti jatkettua suoraa, sanotaan...
- d) Suoria, jotka ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, sanotaan toistensa...

299. Laske janan AB keskipisteen koordinaatit, kun.

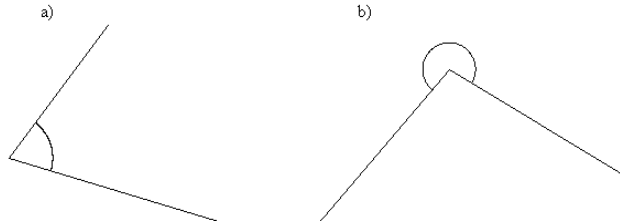
- a)  $A = (1, 3)$  ja  $B = (3, 1)$
- b)  $A = (4, 8)$  ja  $B = (2, 2)$
- c)  $A = (-4, 9)$  ja  $B = (-6, 1)$
- d)  $A = (-5, -4)$  ja  $B = (-1, -2)$

300. Jos  $s \parallel t$  ja  $m \parallel n$ , onko

- a)  $t \parallel m$
- b)  $t \perp m$
- c)  $n \parallel m$ ?

### 15.3 Kulmat

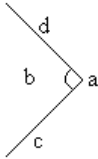
301. Mittaa kulman astelukku.



302. Piirrä

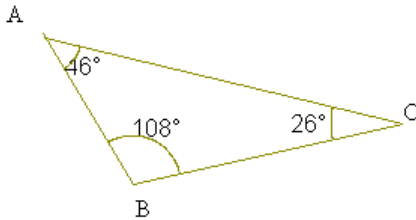
- a) nollakulma                      b) suora kulma  
 c) oikokulma                        d) täysi kulma.

303. Nimeä kulman osat.



304. Tarkastellaan viereistä kolmiota. Ilmoita kulmien suuruudet.

- a)  $\angle ABC$             b)  $\angle ACB$             c)  $\angle BAC$



305. Miten toisin voit merkitä edellisen tehtävän kulmia?

306. Nimeä kulma suuruuden perusteella, kun sen asteluku on

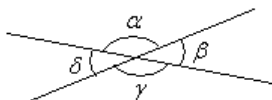
- a)  $47^\circ$     b)  $176^\circ$     c)  $201^\circ$     d)  $340^\circ$     e)  $180^\circ$ .

307. Piirrä piirtokolmiota käyttäen kulma, jonka suuruus on  $66^\circ$  ja puolita se.

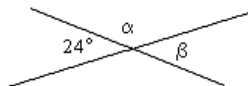
308. Koulu alkaa 9.00 ja päättyy 14.30. Kuinka monta astetta tuntiviisarin asento muuttuu koulupäivän aikana?
309. Kello on aluksi 13.30. Minuuttiosoitin kulkee kolme täyttä kierrosta ja sen lisäksi  $60^\circ$ . Kuinka paljon kello tällöin on?

#### 15.4 Vieruskulmat ja ristikulmat

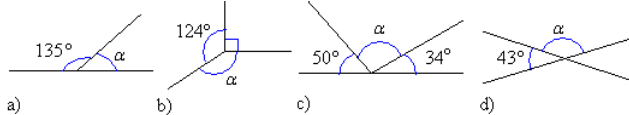
310. Kuinka suuri on kulman ristikulma, jos kulman suuruus on
- a)  $100^\circ$     b)  $78^\circ$     c)  $62,9^\circ$     d)  $360^\circ$ ?
311. Kuinka suuri on kulman vieruskulma, jos kulman suuruus on
- a)  $90^\circ$     b)  $66^\circ$     c)  $180^\circ$     d)  $250^\circ$ ?
312. Millaiset kulmat ovat keskenään
- a) vieruskulmia    b) ristikulmia?
313. Mikä on kulman  $\delta$
- a) vieruskulma    b) ristikulma?



314. Laske kulmien  $\alpha$  ja  $\beta$  suuruudet.



315. Päättele kulman  $\alpha$  suuruus.



316. Kaksi suoraa leikkaa toisensa. Muodostuneet ristikulmat ovat yhteensä  $124^\circ$ . Kuinka suurina ovat molemmat vieruskulmat erikseen?

317. Onko väittämä tosi vai epätosi?

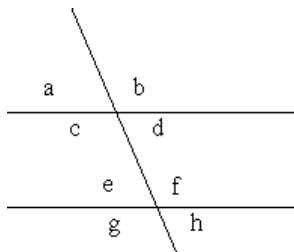
- Vieruskulmat ovat aina keskenään yhtä suuret.
- Ristikulmat ovat aina keskenään yhtä suuret.
- Vieruskulma on aina pienempi kuin ristikulma.
- Ristikulma voi olla suurempi kuin vieruskulma.

## 15.5 Samankohtaiset kulmat

318. Selitä mitä tarkoittaa käsite ”samankohtaiset kulmat”.

319. Mitkä kuvan kulmista ovat samankohtaisia kulman

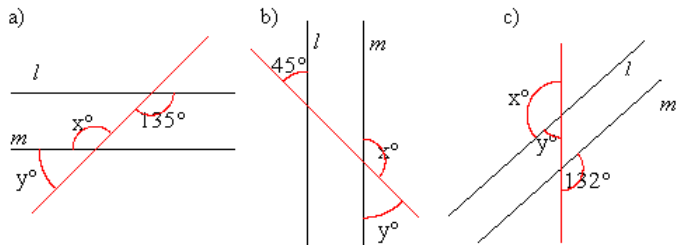
- a kanssa
- c kanssa?



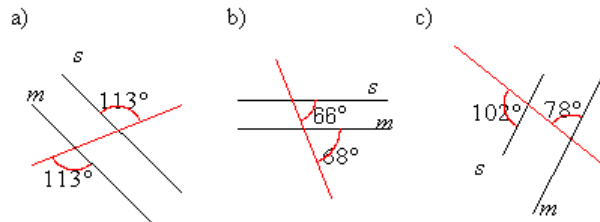
320. Täydennä lauseet.

- Jos leikatut suorat ovat yhdensuuntaiset, samankohtaiset kulmat ovat...
- Jos samankohtaiset kulmat ovat yhtäsuuret, leikatut suorat ovat...

321. Päättele tuntemattomien kulmien suuruudet, kun suorat  $l$  ja  $m$  ovat yhdensuuntaiset.



322. Ovato ko suoraa  $s$  ja  $m$  yhdensuuntaiset, perustele vastauksesi.



## 15.6 Ympyrä

323. Piirrä ympyrä, jonka

- säde on 4,5 cm
- halkaisija on 12,0 cm

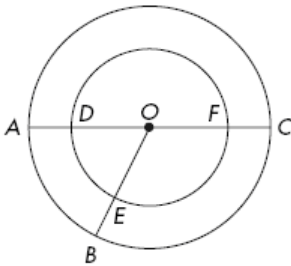
324. Piirrä ympyrä A ja merkitse siihen seuraavat osat: halkaisija PQ, säde TA ja jänne TP.

325. Piirrä puoliympyrä, jonka

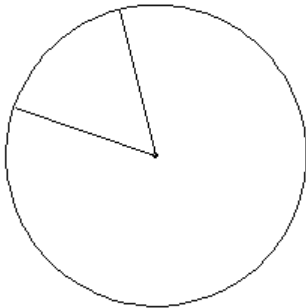
- a) säde on 6,0 cm      b) halkaisija on 14,0 cm

326. Kuvassa olevilla kahdella ympyrällä on sama keskipiste  $O$ . Täydennä lauseet.

- a)  $OC$  on suuremman ympyrän ...  
 b)  $DF$  on pienemmän ympyrän...  
 c)  $DE$  on pienemmän ympyrän...  
 d)  $AC$  on suuremman ympyrän...  
 e)  $\angle AOB$  on molempien ympyröiden...



327. Mittaa kulmaviivaimella sektorin keskuskulmien suuruudet.



328. Piirrä ympyrä, jonka säde on 3,5 cm ja jaa se kahteen sektoriin siten, että toisen sektorin keskuskulman suuruus on  $40^\circ$ . Kuinka suuri on toisen sektorin keskuskulma?
329. Ympyrä on jaettu kahteen sektoriin. Mikä on kuperan kulman suuruus, jos pienempi keskuskulma on
- a)  $67^\circ$                       b)  $110^\circ$                       c)  $23^\circ$ ?
330. Ympyrän halkaisija on 7,5 cm. Miten sijaitsee ympyrään nähden piste, jonka etäisyys ympyrän keskipisteestä on
- a) 2,2 cm                      b) 4,0 cm                      c) 3,75 cm?

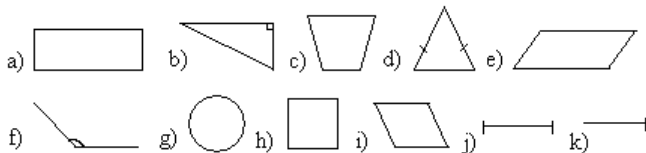
## 15.7 Piirretään harpin avulla

331. Mitä tarkoitetaan geometrisella piirtämisellä?
332. Piirrä harpin avulla kolmio ABC, jonka sivujen pituudet ovat  $BC = 5,0$  cm,  $AC = 6,0$  cm ja  $AB = 7,0$  cm.
333. Yritä piirtää harpin avulla kolmio ABC, jonka sivujen pituudet ovat  $AB = 8,0$  cm,  $BC = 10,0$  cm ja  $AC = 25,0$  cm.
- a) Selitä mitä tapahtuu.
- b) Miten pitkä sivun AC pitäisi olla, jotta kolmio voitaisiin piirtää?
334. Piirrä annetun suuruiset kulmat piirtokolmiota käyttäen ja puolita ne harpin avulla.
- a)  $70^\circ$                       b)  $65^\circ$                       c)  $40^\circ$

335. Piirrä harpin ja kulmaviivaimen avulla kolmio ABC siten, että  $AB = 5,0$  cm,  $AC = 6,0$  cm ja  $\angle BAC = 50^\circ$ .
336. Piirrä kulma, jonka suuruus on  $115^\circ$  ja puolita se
- a) piirtokolmion avulla    b) geometrisesti.
337. Piirrä harpin ja kulmaviivaimen avulla kolmio ABC siten, että  $BC = 6,0$  cm,  $\angle ABC = 60^\circ$  ja  $\angle ACB = 45^\circ$ .
338. Piirrä geometrisesti  $22,5^\circ$  kulma.

## 15.8 Monikulmioita

339. Etsi laatikosta jokaiselle kuvalle oikea nimi.

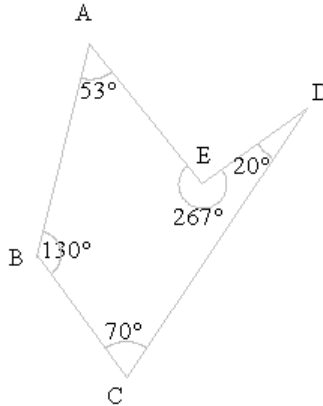


suorakulmio	jana	neliö	vinoneliö	suorakulmainen kolmio	tylppä kulma
ympyrä	tasakylkinen kolmio	puolisuora	puolisuunnikas	suunnikas	

340. Piirrä epäsäännöllinen nelikulmio. Mittaa kulmaviivaimella monikulmion kulmat ja laske niiden summa.



341. (a) Nimeä kuvan monikulmio.  
 (b) Laske monikulmion kulmien summa.



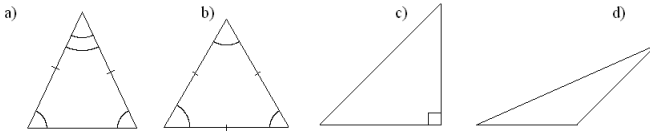
342. Tarkastellaan edellisen tehtävän monikulmiota. Ilmoi-  
 ta seuraavien kulmien suuruudet.
- a)  $\angle BCD$       b)  $\angle DEA$       c)  $\angle EAB$   
 d)  $\angle B$           e)  $\angle D$
343. Piirrä epäsäännöllinen kahdeksankulmio. Mittaa kul-  
 maviivaimella monikulmion kulmat ja laske niiden sum-  
 ma.
344. Piirrä neljäkäs, jonka yksi kulma on  $70^\circ$ . Mittaa kul-  
 maviivaimella muiden kulmien suuruudet.
345. Ovatko kaikki
- a) suorakulmiot neliöitä?  
 b) neliöt suorakulmioita?  
 c) suorakulmiot suunnikkaita?  
 d) neliöt vinoneliöitä?

346. Piirrä nelikulmio siten, että sen lävistäjät a ja b
- sijaitsevat nelikulmion sisäpuolella
  - ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

## 15.9 Kolmoita

347. Piirrä kolmio, jonka sivujen pituudet ovat 4,5 cm, 6 cm ja 8 cm. Piirrä lisäksi kolmioon kaikki korkeusjannot.

348. Nimeä kolmiot.



349. Laske kolmion kolmannen kulman suuruus, kun kaksi muuta kulmaa ovat
- $40^\circ$  ja  $60^\circ$
  - $55^\circ$  ja  $70^\circ$
  - $100^\circ$  ja  $20^\circ$
  - $85^\circ$  ja  $45^\circ$
350. Piirrä kolmio ABC, jonka kulmien suuruudet ovat  $100^\circ$ ,  $50^\circ$  ja  $30^\circ$ . Mitä nimeä kolmiosta käytetään?
351. Tasasivuisen kolmion yksi kulma on  $60^\circ$ , määritä muiden kulmien suuruudet.
352. Kuinka suuri on tasakylkisen kolmion huippukulma, jos sen kantakulmat ovat
- $30^\circ$
  - $70^\circ$
  - $40^\circ$ ?

353. Laske tasakylkisen kolmion kantakulman suuruus, kun huippukulma on

- a)  $50^\circ$       b)  $110^\circ$       c)  $95^\circ$       d)  $190^\circ$ .

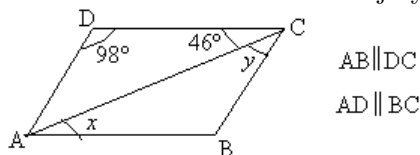
354. Kuinka suuri on nelikulmion neljäs kulma, jos kolme muuta kulmaa ovat

- a)  $125^\circ$ ,  $77^\circ$  ja  $94^\circ$       b)  $15^\circ$ ,  $117^\circ$  ja  $54^\circ$   
 c)  $25^\circ$ ,  $79^\circ$  ja  $104^\circ$       d)  $133^\circ$ ,  $89^\circ$  ja  $39^\circ$ ?

355. Ovatko kaikki

- a) tasasivuiset kolmiot tasakylkisiä kolmioita?  
 b) tasakylkiset kolmiot tasasivuisia kolmioita?

356. Kuinka suuria ovat kulmat  $x$  ja  $y$ ?



## 15.10 Säännöllisiä monikulmioita

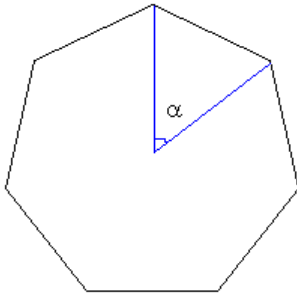
357. Piirrä harpin avulla tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 4,5 cm. Kuinka suuria ovat tasasivuisen kolmion kulmat?

358. Piirrä vihkoosi harpin ja viivoittimen avulla säännöllinen kuusikulmio, jonka sivun pituus on 5 cm.

359. Piirrä ympyrä, jonka säde on 6 cm ja sen sisälle tasasivuinen kolmio.

360. Laske säännöllisen seitsenkulmion

- sektorin keskuskulman  $\alpha$  suuruus
- kulmien summa
- yhden kulman suuruus.



361. Kuinka suuri on neliön

- lävistäjien välinen kulma
- lävistäjän ja sivun välinen kulma?

### 15.11 Pituuksia ja piirejä

362. Muunna senttimetreiksi.

- a) 1 m      b) 20 mm      c) 156 mm      d) 8 m

363. Muunna metreiksi.

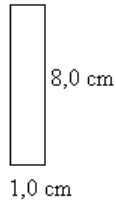
- a) 200 cm                      b) 1 km  
c) 5600 cm                      d) 25 000 mm

364. Laske suorakulmioiden piirit.

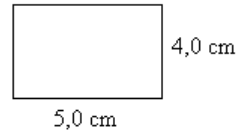
a)



b)



c)



365. Ilmoita edellisen tehtävän piirit desimetreinä.

366. Laske neliön sivun pituus, kun sen piiri on

- a) 30,0 m   b) 48,0 m   c) 9,2 dm   d) 22,4 dm.

367. Tontti on puolisuunnikkaan muotoinen. Sen keskennään yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 42 m ja 67 m. Vinot sivut ovat kumpikin 50 m pitkiä. Kuinka pitkä aita tontin ympärille tarvitaan?

368. Farkkujen koko tuumina on 26 W / 28 L. Muunna mitat senttimetreiksi.

369. Suorakulmion piiri on 30,0 m ja sen sivujen pituudet ovat  $x$  ja  $2x$ . Päättele mikä luku  $x$  on.

## 15.12 Pinta-alan yksiköt

370. Kopioi taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat tiedot.

tunnus	nimi
km <sup>2</sup>	
	hehtaari
a	
	neliometri
dm <sup>2</sup>	
	neliösenttimetri
mm <sup>2</sup>	

371. Muunna sulkeissa mainituksi yksiköksi.

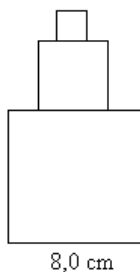
- a) 6,4 m<sup>2</sup> (dm<sup>2</sup>)      b) 0,23 a (dm<sup>2</sup>)  
 c) 0,0014 ha (m<sup>2</sup>)      d) 5600 mm<sup>2</sup> (dm<sup>2</sup>)  
 e) 890 000 000 000 cm<sup>2</sup>  
 (km<sup>2</sup>)

372. Laske neliön pinta-ala, kun sivun pituus on

- a) 3,0 m      b) 10,0 m  
 c) 11,0 cm      d) 1,50 cm

373. Pingispöydän pituus on 2,74 m ja leveys 1,53 m. Laske pöydän pinta-ala. Ilmoita vastaus sekä neliömetreinä että neliödesimetreinä.

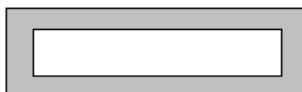
374. Laske kuvion pinta-ala, kun kunkin neliön sivun pituus on puolet sen alapuolella olevasta neliöstä.



375. Kopioi **suorakulmion** ominaisuuksista kertova taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat tiedot.

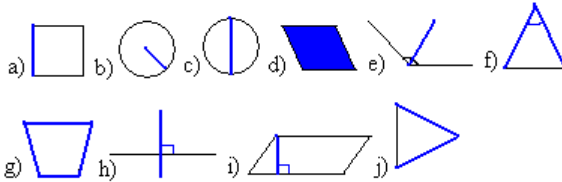
kanta	korkeus	pinta-ala
9,0 cm	8,0 cm	
	12,0 m	84 m <sup>2</sup>
20,0 cm		700 cm <sup>2</sup>
16,0 mm	10,0 mm	
	11,0 mm	88 mm <sup>2</sup>
5,0 m		65 m <sup>2</sup>

376. Leikkuupuimuri pystyy leikkaamaan kerralla viljaa 2,0 m levyiseltä alueelta. Kuinka suuren pinta-alan puimuri pystyy enintään leikkaamaan yhden 8 h työpäivän aikana, kun puimurin nopeus on 4,7 km/h?
377. Suorakulmion muotoisen uima-altaan leveys on 5,0 m ja pituus 14,0 m. Uima-altaan ympärillä on laatoitus, jonka leveys on 30 cm. Laske laatoituksen pinta-ala.

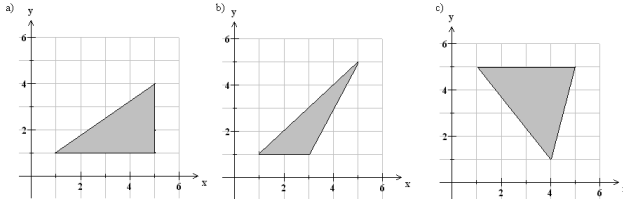


### 15.13 Kolmion, suunnikkaan ja puolisuunnikkaan pinta-ala

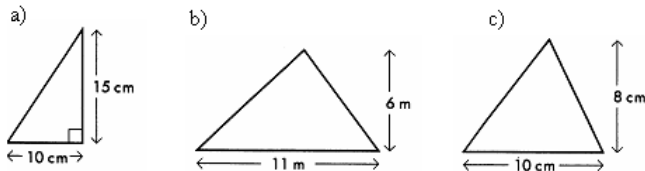
378. Nimeä kuvioista sinisellä merkityt osat.



379. Laske kolmioiden pinta-alat.



380. Laske kolmioiden pinta-alat.



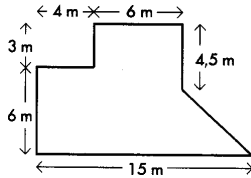
381. Kopioi taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat tiedot.

Kolmion kanta	Kolmion korkeus	Kolmion pinta-ala
6,0 cm	4,0 cm	
18,0 m	3,0 m	
11,0 m		55 m <sup>2</sup>
	9,0 cm	36 cm <sup>2</sup>
13,0 m		65 m <sup>2</sup>
	6,0 cm	24 cm <sup>2</sup>



382. Vinoneliön ala on  $25 \text{ m}^2$  ja korkeus  $3,2 \text{ m}$ . Kuinka pitkiä ovat vinoneliön sivut?

383. Laske kuvion pinta-ala.



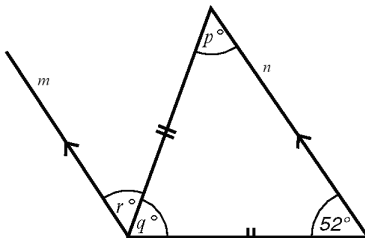
384. Neljä neliön muotoista laattaa, joiden sivun pituus on  $15,0 \text{ cm}$ , asetetaan neliönmuotoiseksi ruudukoksi niin, että laattojen väliin jää yhtä leveät raidat, jotka muodostavat ristin muotoisen kuvion. Mikä on raidan leveys silloin, kun ristin pinta-ala on sama kuin neljän laatan yhteen laskettu pinta-ala? (yo syksy 1999)

385. Nelikulmion kärjet ovat pisteissä

$A = (-2,-2)$ ,  $B = (6,-2)$ ,  $C = (4,4)$  ja  $D = (-4,6)$ . Laske nelikulmion ala. (yo syksy 1994)

### 15.14 Harjoituskoe I (kappaleet 1-9)

1. Merkitse koodinaatistoon pisteet  $A = (-3, 4)$ ,  $B = (-4, -2)$ ,  $C = (5, -2)$  ja  $D = (2, 4)$  ja yhdistä ne toisiinsa tässä järjestyksessä. Mitä nimitystä muodostuneesta kuviosta käytetään?
2. Piirrä jana AB, jonka pituus on 8,0 cm. Piirrä harppia käyttäen janan AB keskinormaali. Merkitse kaksi pistettä C ja D siten, että ne sijaitsevat keskinormaalilla ja ovat 3,0 cm etäisyydellä janasta AB. Yhdistä pisteet A ja D, D ja B, B ja C sekä C ja A. Mitä nimitystä nelikulmiosta ABCD käytetään?
3. Onko väite tosi vai epätosi? Jos väite on epätosi, korjaa se.
  - a) Piste  $(-3, -2)$  sijaitsee koordinaatiston neljännessä neljänneksessä.
  - b) Nelikulmion kulmien summa on aina  $360^\circ$ .
  - c) Ympyrän jänne on kaksi kertaa ympyrän säteen pituinen.
  - d) Teräväkulmaisessa kolmiossa kaikki kulmat ovat alle  $80^\circ$ .
  - e) Tasakylkisessä kolmiossa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.
  - f) Kaikki neliöt ovat myös suunnikkaita.
4. Suorat m ja n ovat yhdensuuntaisia. Päättele tuntemattomien kulmien suuruudet. Perustele vastauksesi.

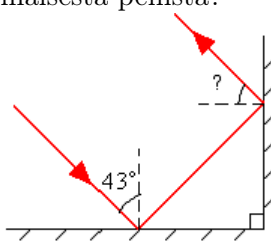


5. Janan AB päätepisteet ovat  $A = (-2, 4)$  ja  $B = (6, -8)$ . Määritä janan keskipisteen koordinaatit.

a) laskemalla

b) piirtämällä.

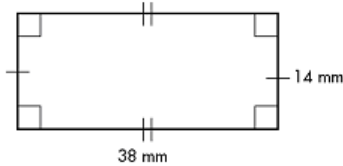
6. Kaksi peiliä on kohtisuorassa toisiaan vastaan oikein kuvan mukaisesti. Valon tulokulma ensimmäiseen peiliin on  $43^\circ$ . Mikä on valon heijastuskulma jälkimmäisestä peilistä?



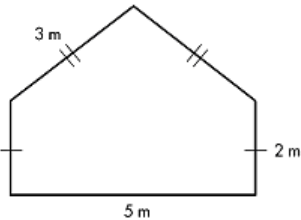
## 15.15 Harjoituskoe II (kappaleet 10-13)

1. Laske kuvioiden piirit.

a)



b)



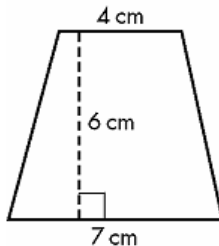
2. (a) Piirrä harppia käyttäen säännöllinen kuusikulmio.

(b) Laske kuusikulmion kulmien summa.

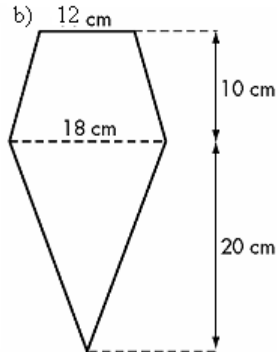
(c) Jaa kuusikulmio kuuteen yhtäsuureen sektoriin. Kuinka suuri on sektorin keskuskulma?

3. Laske kuvioiden pinta-alat.

a)



b)

4. (a) Montako neliön muotoista laattaa, jonka sivun pituus on 12 cm, tarvitaan lattian kaakeloimiseen, kun lattian pinta-ala on  $18 \text{ m}^2$ ?(b) Paljonko laatat tulevat maksamaan, kun yhden laatan hinta on  $0,7 \text{ €}$ ?

5. Muunna sulkeissa olevaksi yksiköksi.
- a) 6570 mm (dm)
  - b) 0,890 km (m)
  - c) 580 000 cm (hm)
  - d) 340 000 mm<sup>2</sup> (dm<sup>2</sup>)
  - e) 0,0265 km<sup>2</sup> (a)
  - f) 2500 a (ha)
6. (a) Kolmion pinta-ala on 20 cm<sup>2</sup> ja kannan pituus 8 cm. Mikä on kolmion korkeus?
- (b) Puolisuunnikkaan pinta-ala on 45 cm<sup>2</sup> ja kantojen pituudet 7 cm ja 3 cm. Mikä on puolisuunnikkaan korkeus?