

AVOIN MATEMATIIKKA 7 lk.

Osio 3: Potensseja ja polynomeja

Marika Toivola Tiina Härkönen

(Omaan käyttöön muuntanut ja muokannut*Jan-Erik Sandelin)

Alkuperäinen sisältö on lisensoitu avoimella CC BY 3.0[†]-lisenssillä.

Muunnettu versio on lisensoitu CC-BY-SA 4.0 lisenssillä.[‡]

* Muunnos L^AT_EX-kielille, jolla taitettu A5-sivukokoon. Pieniä lisäyksiä tekstiin (merkitty lähdekoodissa), helpot ja ”mekaaniset” tehtävät.

[†] <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.fi>

[‡] SA-lisäys: ”Jos muutat, jaa tekemäsi muutokset lähdekoodeineen avoimesti.”
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.fi>

Maapallon väestönkasvu

Maapallolla asuu tällä hetkellä (2008) arviolta 6,7 miljardia ihmistä. Väkilukuun vaikuttaa tarkasteltavalla aikavälillä se, paljonko lapsia syntyy ja vastaavasti se, paljonko ihmisiä kuolee. Näiden kahden lukumäärien erotusta sanotaan positiivisessa tapauksessa luonnolliseksi väestön lisäykseksi ja negatiivisessa tapauksessa luonnolliseksi väestön vähenemiseksi.

Väestöennusteiden laatimiseen käytetään matemaattisia malleja. Maapallon väkiluvun sanotaan kasvavan eksponentiaalisesti eli korkoa korolle –periaatteen mukaisesti. Pienikin jatkuva kasvuvauhti kaksinkertaistaa väkiluvun yllättävän nopeasti. Esimerkiksi jos vuotuinen kasvu olisi 4,0 %, niin maailman väkiluku kaksinkertaistuisi 18 vuodessa. Viime vuosikymmenellä kasvunopeus asettui nykyiseen 1,2 prosenttiin vuodessa.

Suomen väestömäärä on kasvanut vuosittain 1700-luvun puolesta välistä lähtien, lukuun ottamatta muutamia poikkeuksellisia vuosia. Suurimmat väestönmenetykset olivat nälkävuosina 1866 – 1868 ja viimeisimmät väestötappiot koettiin vuosina 1969 ja 1970, jolloin monet suomalaiset muuttivat Ruotsiin. Viime vuosina väestönkasvu on hidastunut ja se näyttää vähitellen pysähtyvän, minkä jälkeen väkilukumme alkaa vuosittain pienentyä. Tulevaisuudessa Suomen väestönkehitys riippuukin merkittävästi maahanmuuttajien määrästä.

Äärellisellä maapallolla voi elää vain äärellinen määrä ihmisiä. Jos maapallon väestönkasvua ei saada pysähtymään, lisääntyy puute ravinnosta, juomakelpoisesta vedestä ja muista luonnonvaroista. Vahvemmat väestöryhmät tulevat puolustamaan omia etujaan ja tarvitsemaansa elintilaa, mikä johtaa heikompien alistamiseen ja pahimmassa tapauksessa toistuviin sotiin.

Puolet maailman väestönkasvusta tapahtuu kuudessa maassa, jotka ovat Intia, Kiina, Pakistan, Nigeria, Bangladesh ja Indonesia. Indonesiassa ja Kiinassa väestö kasvaa kuitenkin hitaammin kuin kehitysmaissa keskimäärin. Lähes kaikissa kehitysmaissa on ryhdytty toimeen, jotta väestönkasvu saataisiin käännettyä laskuun. Suhtautuminen perhesuunnitteluun on kuitenkin kulttuurisidonnaista. Esimerkiksi Intiassa perheen koko on varallisuutta mittaava ja perheen sosiaaliturvaa takaava tekijä. Kiinassa väestönkasvun hidastumista on tavoiteltu antamalla yksilapsisten perheiden vanhemmille palkankorotuksia ja eläke-etuja. Myös ainoat lapset ovat saaneet etuja opiskelupaikkojen haussa. Jos perheeseen on syntynyt enemmän lapsia, on siitä annettu sakkoja. Maaseudulla yhden lapsen periaatteesta on joustettu siinä tapauksessa, jos ensimmäinen lapsi on ollut tyttö. Tiukasta väestöpolitiikasta johtuen poikalasten osuus on kasvanut.

Sisällysluettelo

1	Samankantaisten potenssien tulo	1
2	Samankantaisten potenssien osamäärä ja nolla eksponentti	9
3	Potenssin potenssi	14
4	Negatiivinen eksponentti	19
5	Tulon potenssi	24
6	Osamäärän potenssi	30
7	Kymmenpotenssimuoto	37
8	Potensseja laskimella	46
9	Lukujärjestelmät	54
10	Lausekkeita	61
11	Polynomi	69
12	Termien yhdistäminen ja järjestäminen	77
13	Polynomien yhteen- ja vähennyslasku	82
14	Monomin kertominen monomilla	87
15	Polynomien kertominen monomilla	92
16	Polynomien kertominen polynomilla	97
17	Kertaustehtäviä	103

Kirjan tehtävien vastaukset löytyvät netistä. Kun lasket laskuja kotona, on tärkeää, että varmistat laskeneesi oikein. Muista, että tehtävien suoritus-
ta arvioitaessa pelkkä vastaus ei riitä suorituksessa.

1 Samankantaisten potenssien tulo

Merkinnässä $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ lukua 2 sanotaan kantaluvuksi, lukua 4 eksponentiksi ja lukua 16 potenssin arvoksi. Potenssin kantaluvoon kanssa on oltava tarkkana. Jos sulkeita ei käytetä, eksponentti vaikuttaa vain siihen lukuun tai muuttujakirjaimeseen, jonka oikeaan yläkulmaan se on kirjoitettu.

Esimerkki 1

Sievennetään potenssit.

$$-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$$

Kantaluku on 2. Vastaus on negatiivinen, koska tulossa on pariton määrä (1) negatiivisia tekijöitä.

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

Kantaluku on -2. Vastaus on positiivinen, koska tulossa on parillinen määrä (4) negatiivisia tekijöitä.

Tulossa $4^2 \cdot 4^3$ on molempien potenssien kantaluku sama. Merkintää kutsutaankin samankantaisten potenssien tuloksi.

$$4^2 \cdot 4^3 = \underbrace{4 \cdot 4}_{2 \text{ kpl}} \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ kpl}} = 4^5 = 1024$$

Kuten huomaat, voi potenssit kirjoittaa tulomuotoon, jonka jälkeen ne voi koota takaisin nippuun yhdeksi potenssiksi.

Samankantaiset potenssit *kerrotaan* keskenään siten, että eksponentit lasketaan yhteen. Kantaluku pysyy samana.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Muuttujakirjainten käyttöä on opeteltu jo aiemmin luvuilla laskemisen ohessa. Palautetaan kuitenkin mieleen muuttujakirjaimen keskeiset asiat seuraavien kappaleiden asioita ajatellen:

Muuttujakirjain on tuntematon luku

Muuttujakirjaimilla laskettaessa voit seuraavassa välivaiheessa tehdä minkä hyvänsä *kaikille luvuille* sallitun toimenpiteen.

Esimerkiksi $x + x = 2 \cdot x$, oli luku x mikä hyvänsä.

Et saa valita muuttujakirjaimen sisältöä

Laskuissa, joita nyt alamme laskea, et missään tapauksessa saa ”vaikean tilanteen” ilmaantuessa itse päättää minkä luvun muuttujakirjaimen tilalle laitat.

Yhdellä kirjaimella yksi arvo

Jos muuttujakirjaimella on jossain laskun kohdassa tietty arvo, se ei muutu seuraavassa välivaiheessa. Eli jos muuttujakirjain $a = 1$, on automaattisesti $a + a = 1 + 1 = 2$.

Samoin, jos kysymys kuuluu, ”Paljonko a on, kun $a + a = 3$?”, et saa vastata ”Ensimmäinen a on 1 ja toinen 2.” ainoa oikea vastaus on ” a on 1,5”.

Edelleen jos kysytään ”Milloin $a + a = a$?” on ainoa oikea vastaus ”Silloin, kun $a = 0$.”

Kaiken kaikkiaan: yhdessä laskussa kirjaimen arvon on oltava aina sama ja jos sitä kysytään, sellainen, ettei laskussa ole virheitä.

Vastaus voi olla kirjain

Koska et voi itse päättää kirjaimen ”sisältöä” (eli lukuarvoa), eikä sitä ole yleensä mainittu tehtävässä, on hyvin yleistä, että vastaus sisältää kirjaimen. Siksi laskemista kutsutaankin usein sieventämiseksi: et voi laskea arvoa, mutta voit sieventää laskusta kaiken ”turhan” pois.

Sijoitettu luku on automaattisesti suluissa

Jos pyydetään laskemaan x^2 , kun $x = -2$, tulee lasku merkitä ja laskea $(-2)^2 = 4$.

Tässä kappaleessa harjoittelemme muuttujakirjaimen käyttöä potenssien kanssa.

Esimerkki 2

Sievennetään potenssit.

$$\text{a) } a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6 \qquad \text{b) } x \cdot x^2 \cdot x^3 = x^{1+2+3} = x^6$$

$$\text{c) } a^3 \cdot a^2 \cdot b \cdot b^6 = a^{3+2} \cdot b^{1+6} = a^5 b^7$$

Ainoastaan samankantaiset potenssit voidaan yhdistää.

Huomaa, että $x^1 = x$, eli kun eksponenttia ei kirjoiteta, on eksponentti 1!

Samankantaisten potenssien kertolaskuissa on usein mukana muitakin tekijöitä, joita voidaan yhdistellä erikseen keskenään. Jos tulossa on muuttujia eli kirjaimia, kertomerkit jätetään merkitsemättä lukuarvon ja muuttujan väliin tai useamman muuttujan väliin.

Esimerkki 3

Sievennetään potenssit.

$$\text{a) } (-2) \cdot (-2)^2 = (-2)^{1+2} = (-2)^3 = -8$$

$$\text{b) } -3 \cdot 3^3 = -3^{1+3} = -3^4 = -81$$

$$\text{c) } 2x^2 \cdot x^6 = 2x^{2+6} = 2x^8$$

$$\text{d) } 3a^4 \cdot (-2a^3) = 3 \cdot (-2) \cdot a^4 \cdot a^3 = -6a^{4+3} = -6a^7$$

Luvut kerrotaan keskenään ja eksponentit lasketaan yhteen.

Tehtäviä

1. Kirjoita potenssimuodossa.

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

b) $-9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$

c) $(-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$

d) $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$

2. Mikä on potenssin kantaluku?

a) 4^5

b) $(-2)^2$

c) -81^4

d) $13 + 5^6$

3. Onko potenssin arvo positiivinen vai negatiivinen?

a) 7^3

b) $(-6)^6$

c) $(5 - 6)^7$

d) $(-12)^{98}$

4. Laske luvun 5

a) neliö

b) kuutio.

5. Ilmaise yhden potenssimerkinnän avulla.

a) $2^6 \cdot 2^2$

b) $8^5 \cdot 8^3$

c) $4^3 \cdot 4^2$

d) $7^4 \cdot 7$

6. Sievennä ja ilmoita vastaus potenssimuodossa.

a) $7^2 \cdot 7^4$

b) $5^6 \cdot 5^4$

c) $4^5 \cdot 4$

d) $a^5 \cdot a^7$

7. Sievennä.

a) $a \cdot a^2 \cdot a^6$

b) $b^3 \cdot b^5 \cdot b^2$

c) $c^8 \cdot c^{10} \cdot c^9 \cdot c$

d) $d^3 \cdot d^3 \cdot d^3$

8. Merkitse yhteisen kantaluvun potenssina.

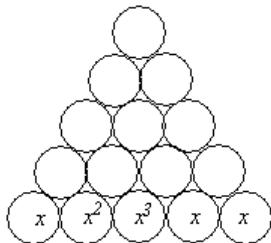
a) $1^4 \cdot 1^2 \cdot 1^5$

b) $2^2 \cdot 2^3$

c) $(\frac{1}{2})^6 \cdot \frac{1}{2}$

d) $10^5 \cdot 10^4$

9. Jäljennä kuvio vihkoosi ja merkitse vierekkäisten potenssien tulo niiden yllä olevaan ympyrään.



10. Merkitse ja sievennä potenssien tulo.

- a) $6x^3$ ja x^2 b) $3x^2$ ja $4x$
 c) x^4 ja $5x^4$

11. Sievennä

- a) $6 \cdot x \cdot 4 \cdot x$ b) $2 \cdot y \cdot y \cdot y \cdot (-4)$
 c) $-8 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot (-4)$ d) $2 \cdot z \cdot z \cdot \frac{3}{2} \cdot z$

Soveltavat tehtävät

12. Merkitse ja laske luvun -2

- a) neljäs potenssi
 b) neljännen potenssin vastaluku
 c) neliö d) kuutio

13. Sievennä.

- a) $xx \cdot xxx$ b) $xx \cdot yyy$ c) $xxx \cdot yyy \cdot zzzz$

14. Sievennä.

- a) $2a^6b^4 \cdot 5a^2b^6$ b) $8x^3y^2 \cdot y^4$
 c) $3a^7b^3 \cdot 4ab^5$ d) $x^7y^9 \cdot xy$

15. Mikä luku sopii x:n paikalle?

a) $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^x = 2^{12}$ b) $a^3 \cdot a^6 = a^x \cdot a$

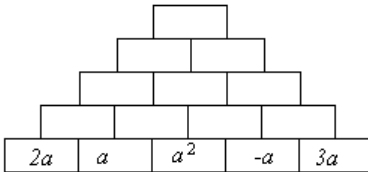
c) $b^4 \cdot b \cdot b^x = b^2 \cdot b^8$

16. Sievennä.

a) $\frac{2}{3}a^2b^2 \cdot \frac{3}{2}ab^4$ b) x^3y^5

c) $\frac{1}{2}cd \cdot 4c^2d^5$

17. Jäljennä kuvio vihkoosi ja merkitse vierekkäisten potenssien tulo niiden yllä olevaan ruutuun.



Vaativat tehtävät

18. Sievennä.

a) $4a \cdot 3a^5 \cdot 6a$ b) $b^3 \cdot 8b \cdot 2b^4$

c) $c^6d^2 \cdot 3cd \cdot 4c^3d^4$ d) $6g^2h^5 \cdot 3g^3h^2 \cdot 2gh$

19. Kun $2^{16} = 65536$, laske

a) 2^{17} b) 2^{15} .

20. Taulukossa on potenssien 4^x arvoja.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4^x	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576

Päättele vastaukset taulukon avulla. Älä käytä laskinta. Vihje: Kirjoita tehtävässä esiintyvät luvut 4 potensseina ja sievennä sitten samankantaisuussäännöllä.

a) $64 \cdot 256$ b) $16 \cdot 16384$ c) 1024^2

21. Etsi kaksi tehtävää, joissa käytetään edellisen tehtävän taulukkoa. Anna parisi ratkaista ne ja tarkista vastaukset.

2 Samankantaisten potenssien osamäärä ja nolla eksponentti

Osamäärää $\frac{4^5}{4^2}$ kutsutaan samankantaisten potenssien osamääräksi.

$$\frac{4^5}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$$

Kuten huomaat, palautuu näiden laskeminen tutuksi supistamiseksi, kun ne kirjoitetaan tulomuotoon!

Samankantaiset potenssit jaetaan keskenään siten, että osoittajan eksponentista vähennetään nimittäjän eksponentti. Kantaluku pysyy samana.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Esimerkki 1

Sievennetään potenssit.

a) $\frac{2^6}{2^3} = 2^{6-3} = 2^3 = 8$

b) $\frac{(-4)^7}{(-4)^5} = (-4)^{7-5} = (-4)^2 = 16$

c) $\frac{y^7}{y^3} = y^{7-3} = y^4$

d) $\frac{a^3 \cdot a^4 \cdot a^6}{a^2 \cdot a^5} = \frac{a^{3+4+6}}{a^{2+5}} = \frac{a^{13}}{a^7} = a^{13-7} = a^6$

Myös samankantaisten potenssien osamäärässä on usein mukana muitakin tekijöitä, joten on syytä olla tarkkana kantaluvun kanssa.

Esimerkki 2

Sievennetään potenssit.

$$a) \frac{3x^4}{x} = 3x^{4-1} = 3x^3$$

$$b) \frac{-3^8}{3^5} = -3^{8-5} = -3^3 = -27$$

$$c) \frac{6a^4b^2}{3ab} = \frac{6}{3}a^{4-1}b^{2-1} = 2a^3b^1 = 2a^3b$$

Jaetaan luvut keskenään ja yhdistetään samankantaiset potenssit.

Tarkastellaan seuraavaksi jakolaskua $\frac{4^3}{4^3}$ kahdella eri tavalla. Sievennetään lauseke samankantaisten potenssien osamäärän avulla sekä supistamalla.

$$\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0 \quad \text{ja} \quad \frac{4^3}{4^3} = \frac{\overset{1}{4} \cdot \overset{1}{4} \cdot \overset{1}{4}}{\underset{1}{4} \cdot \underset{1}{4} \cdot \underset{1}{4}} = 1$$

Koska molemmat toimenpiteet ovat sallittuja, on lopputuloksien oltava yhtä suuret eli $4^0 = 1$.

Jos eksponenttina on nolla, on potenssin arvo aina yksi. Kantalukuna ei kuitenkaan saa olla nolla.
 $a^0 = 1$, kun $a \neq 0$

Esimerkki 3

Sievennetään potenssit.

$$a) 99^0 = 1$$

$$b) -45^0 = -1$$

$$c) 0^0 \text{ ei voida laskea, nollalla ei voi jakaa edes nollaa!}$$

$$d) \frac{a^3 \cdot a^9}{a^{12}} = \frac{a^{3+9}}{a^{12}} = \frac{a^{12}}{a^{12}} = a^{12-12} = a^0 = 1$$

Tehtäviä

22. Sievennä ja ilmoita vastaus potenssimuodossa.

a) $\frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4}$ b) $\frac{yyy}{yy \cdot x}$ c) $\frac{x^2}{x \cdot x}$

23. Laske.

a) $5 \cdot 3^0$ b) $\left(\frac{10}{5}\right)^0$ c) $0^4 \cdot 4^0$ d) $\frac{6}{20}$

24. Merkitse yhtenä potenssina.

a) $\frac{5^7}{5^3}$ b) $\frac{7^4}{7^2}$ c) $\frac{4^4 \cdot 4^5}{4^2}$ d) $\frac{a^2}{a^2}$

25. Laske.

a) $\frac{2^5}{2^2}$ b) $\frac{8^5}{8^4}$ c) $\frac{4^7}{4^5}$ d) $\frac{7^6}{7^4}$

26. Laske.

a) $\frac{2^9}{2^7}$ b) $\frac{9^8}{9^9}$ c) $-\frac{7^3}{7^5}$ d) $\frac{(-5)^4}{5^5}$

27. Sievennä.

a) $\frac{a}{a}$ b) $\frac{2b^2}{b^2}$ c) $\frac{c^6}{c}$ d) $\frac{d \cdot d}{d^2}$

28. Laske.

a) $\frac{y^6}{y^2}$ b) $\frac{x^5}{x^4}$ c) $\frac{a^k}{a^3}$ d) $\frac{b^3 b^5}{b^2}$

29. Laske.

a) 5^0 b) $(-17)^0$ c) -6^0
d) $x^0 + y^0 + z^0$ e) $a^3 \cdot a^5 \cdot a^0$

30. Sievennä.

a) $x^2 \cdot x^5 \cdot \frac{1}{x^4}$ b) $x^4 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$
c) $\frac{1}{x^6} \cdot \frac{1}{x} \cdot x^5$ d) $x^2 \cdot x^4 \cdot \frac{x^3}{x^5}$

31. Sievennä.

a) $\frac{5a^7}{a^4}$ b) $\frac{8b^9}{b^5}$ c) $\frac{4c^8}{c}$ d) $\frac{2d^{10}}{d^9}$

32. Sievennä.

a) $\frac{a^5 \cdot a^6}{a^{11}}$ b) $\frac{b^2 \cdot b^4}{b^6}$ c) $\frac{c^5 \cdot c^4}{c^3 \cdot c^6}$ d) $\frac{d^5 \cdot d^2}{d^3 \cdot d^4}$

Soveltavat tehtävät

33. Merkitse ja sievennä potenssien $6x^3$ ja x^2

a) tulo b) osamäärä.

34. Laske.

a) $\frac{(-5)^6}{(-5)^5}$ b) $\frac{(-1)^7}{(-1)^3}$ c) $\frac{(-8)^{13}}{(-8)^{14}}$ d) $\frac{(-3)^{2003}}{(-3)^{2001}}$

35. Laske.

a) $\frac{2^4 \cdot 2^5}{2^6 \cdot 2}$ b) $\frac{3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 3^5}$ c) $\frac{4^4 \cdot 4^3 \cdot 4}{4^2 \cdot 4^6}$ d) $\frac{10^{18}}{10^7 \cdot 10^{12}}$

36. Sievennä.

a) $\frac{b^2 \cdot b^4}{b^3}$ b) $\frac{c \cdot c^3 \cdot c^5}{c \cdot c^2}$ c) $\frac{c^3 d^4}{c^3 d^3}$ d) $\frac{y}{x^2}$

37. Laske.

a) $-\frac{1,3^{13}}{1,3^{12}} + 0,4$ b) $\frac{(-4,2)^5}{4,2^4} - 4,2$

38. Sievennä.

a) $\frac{35a^{10}}{5a^8}$ b) $\frac{66b^3}{11b}$ c) $\frac{c^8}{5c^4}$ d) $\frac{9d^{10}}{33d^9}$

39. Sievennä.

a) $\frac{3x^2}{7x \cdot x}$ b) $\frac{4y^3}{9y \cdot y^2}$ c) $\frac{2x^6 \cdot 5x^2}{4x \cdot x^7}$ d) $\frac{x^4 \cdot y}{2x^2 \cdot 3x^2}$

Vaativat tehtävät

40. Sievennä.

a) $\frac{15a^8 b^7}{5a^3 b}$ b) $\frac{12c^9 d^5}{4c^6 d^4}$ c) $\frac{6x^9 y^{10} z^5}{30x^2 y}$ d) $\frac{4a^5 b^{11} c^9}{32a^4 b^6 c^2}$

13 Samankantaisten potenssien osamäärä ja nolla eksponentti

41. Mikä luku sopii x:n paikalle?

a) $\frac{b^x}{b^5} = b^2 \cdot b^4$ b) $\frac{a^6}{a^x} = a^2 \cdot a$

42. Sievennä.

a) $\frac{2a^4 \cdot 3a^6}{6a^5 \cdot 5a}$ b) $\frac{b^2 \cdot 4b^7}{4b \cdot 6b^5}$ c) $\frac{10c^7 \cdot 6c^7}{4c^{11} \cdot 15c^2}$

43. Mikä luku sopii x:n paikalle?

a) $\frac{4^8}{4^5} = 4^x$ b) $\frac{(-2)^x}{(-2)^5} = -\frac{1}{2}$

3 Potenssin potenssi

Merkinällä $(3^2)^4$ tarkoitetaan potenssin potenssia. Eksponenttina on luku 4 ja kantalukuna on sulkeiden sisältö eli 3^2 . Käsitellään kantalukuna olevaa potenssia samoin kuin yksittäistä lukuakin. Potenssimerkintä voidaan kirjoittaa muodossa

$$(3^2)^4 = \underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}_{= 2 \cdot 4} = 3^{2+2+2+2} = 3^8$$

Kyseessä on ennestään tuttu samankantaisten potenssien tulo.

Potenssi *korotetaan potenssiin* siten, että eksponentit kerrotaan keskenään. Kantaluku pysyy samana $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Esimerkki 1

Sievennetään potenssit.

$$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$$

$$16(a^2)^2 = 16 \cdot a^{2 \cdot 2} = 16a^4$$

Ainoastaan a^2 on potenssin kantaluku.

$$2^{3^2} = 2^9 = 512$$

Kyseessä ei ole potenssin potenssi!

Esimerkki 2

Mihin potenssiin luku 3 on korotettava, jotta vastaus olisi yhtä suuri kuin luku 9^5 ? Eli mikä luku sopii x:n paikalle:
 $3^x = 9^5$?

Ratkaisu

Potenssin 9^5 kantalukuna on 9, joka saadaan luvun kolme potenssina seuraavasti: $3^2 = 9$. Sijoittamalla tämä yhdeksikön paikalle ja sieventämällä saadaan $9^5 = (3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$.

Vastaus: Luku 3 on korotettava potenssiin 10.

Tehtäviä

44. Kirjoita yksinkertaisemmassa muodossa.

a) $(5^6)^3$ b) $(7^2)^4$ c) $(6^5)^3$ d) $(3^2)^{-6}$

45. Sievennä.

a) $(10^2)^3$ b) $(y^4)^2$ c) $(a^3)^3$

46. Sievennä.

a) $(5^2)^3$ b) $(3^4)^3$ c) $(7^2)^5$
d) $(1^4)^2$

47. Sievennä.

a) $(5^2)^{\frac{1}{2}}$ b) $(100^{99})^0$ c) $(a^{\frac{1}{3}})^3$ d) $(b^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{2}}$

Soveltavat tehtävät

48. Laske lausekkeen $(x^2)^3$ arvo, kun

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -2$

49. Päättele, mikä luku sopii x:n paikalle?

a) $(3^2)^x = 3^6$ b) $(4^x)^4 = 4^8$
c) $(5^2)^x = 5^{10}$ d) $(2^x)^x = 2^9$

50. Sievennä.

a) $(k^4)^{10}$ b) $x^3 (x^4)^6$ c) $\left(\frac{t^{14}}{t^5}\right)^{11}$

51. Ilmoita luvut kahden potensseina.

a) 4^3 b) 8^7 c) 16^{16} d) 8^{13}

52. Merkitse ja sievennä lukujen neliöt.

a) z^8 b) 90^t c) $\frac{k^6}{k^2}$ d) x^3x^{17}

53. Luvut 27 ja 81 ovat luvun kolme potensseja eli $3^3 = 27$ ja $3^4 = 81$. Anna tehtävien vastaukset luvun 3 potensseina.

a) $27 \cdot 81$ b) 27^2 c) $27 \cdot 81^3$ d) $\frac{81^5}{27^3}$

54. Merkitse ja sievennä lukujen kuutiot.

a) a^2 b) $\frac{y^4}{y^2}$ c) 10^n

55. Sievennä.

a) $y^4 \cdot (y^3)^4$ b) $(m^3)^4 \cdot (m^9)^0$
 c) $(p^5)^3 \cdot p^6$ d) $(f^7)^2 \cdot (f^4)^5$

56. Sievennä.

a) $\frac{(a^5)^2}{(a^7)}$ b) $\frac{(b^7)^3}{(b^5)^4}$ c) $\frac{(c^7)^4}{(c^9)^3}$

Vaativat tehtävät

57. Päättele, mikä luku sopii x:n paikalle.

a) $(3^x)^4 = 3^{12}$ b) $(a^6)^x = a^{18}$
 c) $(x^3)^2 = 1000000$ d) $(x^2)^2 = 10000$

58. Sievennä. $\frac{6a(b^4)^2}{4(b^2)^3} \cdot \frac{2(a^2)^3}{3b^2(a^2)^2}$

59. Päättele, mikä luku sopii x:n paikalle.

a) $5^x = 25$ b) $3^x = 9^2$ c) $2^x = 4^3$ d) $4^x = 16^2$

60. Mikä luvun

a) 3 potenssi on yhtä suuri kuin luku 97

b) 2 potenssi on yhtä suuri kuin luku 45 ?

61. Taulukossa on potenssien $3x$ arvoja.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$3x$	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Sievennä lausekkeet käyttäen apuna oheista taulukkoa. Älä käytä laskinta.

a) $(3^2)^3$ b) $(3^4)^2$ c) $(3^1)^9$ d) $(3^2)^5$

62. Keksi kaksi tehtävää, joissa käytetään edellisen tehtävän taulukkoa. Anna parisi ratkaista ne ja tarkista vastaukset.

4 Negatiivinen eksponentti

Edellisessä kappaleessa opimme, että $\frac{2^1}{2^2} = \frac{1}{2}$, mutta toisaalta myös $\frac{2^1}{2^2} = 2^{1-2} = 2^{-1}$. Tiedämme siis, että $\frac{1}{2} = 2^{-1}$.

Tarkastellaan luvun kaksi potensseja sekä potenssien arvoja.

$$\begin{array}{l} \text{potenssi: } 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad \boxed{2^0} \quad \boxed{2^{-1}} \quad \boxed{2^{-2}} \quad \boxed{2^{-3}} \\ \text{arvo: } \quad 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow \boxed{1} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{4}} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{8}} \end{array}$$

Oikealta vasemmalle mentäessä luvun kaksi eksponentti pienenee yhdellä. Potenssin arvo saadaan jakamalla edellisen potenssin arvo kahdella. Samaa menettelyä voidaan jatkaa myös negatiivisten eksponenttien puolelle.

Verrataan keskenään yllä esitettyjen potenssien 2^3 ja 2^{-3} arvoja ja havaitaan, että molemmissa esiintyy luku kahdeksan. Vastaavasti, jos eksponenttina on 2 tai -2 , esiintyy arvossa luku 4. Merkitsemällä murtoluvut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ muodossa $\frac{1}{2^1}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, nähdään selvä yhteys vastaaviin positiivisiin eksponentteihin.

Negatiivinen eksponentti

Potenssin *negatiivinen eksponentti* tarkoittaa kantaluvun käänteisluvun vastaavaa positiivista potenssia.

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \text{ ja } a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ kun } a \neq 0.$$

Potenssin laskusäännöt ovat voimassa myös negatiivisille eksponenteille.

Esimerkki 1

Kirjoitetaan murtolukuna.

$$\text{a) } 6^{-1} = \frac{1}{6^1} = \frac{1}{6}$$

$$\text{b) } 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

$$\text{c) } \frac{3^2}{3^4} = 3^{2-4} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Esimerkki 2

Kirjoitetaan negatiivisen eksponentin avulla.

a) $\frac{1}{7} = 7^{-1}$

b) $\frac{1}{4^8} = 4^{-8}$

c) $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$

d) $\frac{5x}{y^2} = 5x \cdot \frac{1}{y^2} = 5xy^{-2}$

e) $\frac{1}{2a^4} = \frac{1}{2}a^{-4}$

Ole tarkkana kantaluvun kanssa.

Tehtäviä

63. Merkitse murtolukuna.

- a) 3^{-1} b) 7^{-1} c) 100^{-1}
 d) 97^{-1} e) 1^{-1} f) h^{-1}

64. Laske, ilmoita vastaus murtolukuna.

- a) 3^{-2} b) 7^{-2} c) 5^{-3} d) 10^{-2}

65. Merkitse positiivisen eksponentin avulla.

- a) 3^{-5} b) 6^{-3} c) 50^{-5}
 d) a^{-4} e) $(xy)^{-2}$ f) $5x^{-3}$

66. Kirjoita negatiivisen eksponentin avulla.

- a) $\frac{1}{k^3}$ b) $\frac{1}{k^5}$ c) $\frac{1}{k^{20}}$ d) $\frac{1}{k}$

67. Laske.

- a) $\frac{5^5}{5^7}$ b) $\frac{7^3}{7^4}$ c) $\frac{a^3}{a^5}$ d) $x^2 \cdot x^{-3}$

68. Mikä seuraavista lausekkeista on lausekkeen x^{-2} kanssa yhtä suuri, kun x ei ole nolla.

$$-\frac{x}{2}, -x^2, -2x, -\frac{2}{x}, \frac{1}{x^2}, -\frac{1}{x^2}, -\frac{2}{x^2}$$

69. Laske, anna vastaus murtolukuna.

- a) $3^{-1}+4^{-1}$ b) $2^{-1}-2^{-2}$ c) $5^{-1} \cdot 3^{-2}$ d) $3^{-1} : 2^{-2}$

Soveltavat tehtävät

70. Mikä ero on käänteisluvulla ja vastaluvulla?

71. Määritä luvun käänteisluku.

- a) 9 b) $-\frac{1}{13}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $2\frac{1}{2}$

72. Määritä luvun vastaluku.

a) 9 b) $-\frac{1}{13}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $2\frac{1}{2}$

73. Kirjoita positiivisen eksponenttien avulla ja laske potenssien arvot.

a) 3^{-2} b) $\frac{1}{2^{-3}}$ c) $\frac{4}{5^{-2}}$
d) $(2^{-2})^2$ e) a^{-3} f) $\frac{1}{a^{-1}}$

74. Laske käyttäen potenssikaavoja.

a) $3^6 \cdot 3^{-3} \cdot 3^{-2}$ b) $5^{-4} \cdot 5^0 \cdot 5^4$
c) $2^8 \cdot 2^{-5} \cdot 2^{-1}$ d) $7^{35} \cdot 7^{-29} \cdot 7^{-4}$

75. Laske lukujen 3^{-2} ja 2^{-3}

a) summa b) erotus
c) tulo d) osamäärä.

Anna vastaus murtolukuna.

76. Sievennä ja anna vastaus potenssimuodossa.

a) $(8^{-1})^3$ b) $(7^{-2})^{-3}$ c) $(2^{-6})^0$ d) $(5^2)^{-4}$

77. Sievennä ja anna vastaus potenssimuodossa.

a) $4^{-3} \cdot 4^5 \cdot 7^5 \cdot 7^2$ b) $3^{-1} \cdot 5^{-5} \cdot 5^7 \cdot 3^5$
c) $2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^4 \cdot 3^{-1}$ d) $3^{-1} \cdot 8^6 \cdot 3^{-2} \cdot 8^{-1}$

78. Laske käyttäen potenssikaavoja.

a) $\frac{6^{-15}}{6^{-14}}$ b) $(6^{-1})^{-2}$ c) $\frac{4^{-6}}{4^{-8} \cdot 4^2}$ d) $\frac{2^2}{2^{-5} \cdot 2^3}$

79. Mikä luku sopii x:n paikalle?

a) $(3^{-3})^x = 3^6$ b) $(4^{-x})^4 = 4^{-8}$
c) $(5^2)^x = 1$ d) $(2^x)^{-x} = 2^{-4}$

80. Esitä yhden kymmenpotenssin avulla

a) $\frac{10^3}{10^{-2}}$ b) $\frac{10^4 \cdot 10^{-2}}{10^3}$ c) $\frac{10^{-3}}{10^2}$ d) $\frac{10^{-4}}{10^3 \cdot 10^{-6}}$

81. Ovatko väittämä totta?

a) $(3^2)^3 < (3^3)^2$ b) $(9^5)^0 > (9^4)^{-1}$
c) $(a^{-2})^{-3} > (a^{-5})^2$ d) $(2^3)^4 = (4^4)^2$

Vaativat tehtävät

82. Päättele mikä luku sopii kirjaimen n paikalle.

a) $-101 \cdot 13^n = -101$ b) $2^n = \frac{1}{8}$

83. Ilmoita luvun kaksi potensseina sievennetyssä muodossa.

a) $(4^{-3})^2$ b) $(8^{-1})^{-2}$ c) $(16^3)^{-1}$ d) $(3^0)^4$

84. Laske $3^0 - 3^{-2}$. (yo kevät 1975)

5 Tulon potenssi

Jos potenssin kantalukuna on tulo $(4 \cdot 3)^2$, on kyseessä tulon potenssi, joka voidaan laskea normaaleja laskusääntöjä noudattaen $(4 \cdot 3)^2 = (12)^2 = 144$. Tulon potenssilla on olemassa myös oma laskusääntönsä, jolla päädytään samaan lopputulokseen.

$$(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$$

Tulon potenssissa tekijöiden potenssien tulo $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Tulon potenssien laskusääntöä ei välttämättä tarvitse käyttää pelkillä lukuarvoilla laskettaessa. Sen sijaan lausekeita, joissa on mukana muuttujia, ei voida sieventää normaaleja laskusääntöjä noudattaen.

Esimerkki 1

Sievennetään potenssit.

a) $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$

b) $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$

c) $(5a^3b)^2 = 5^2 \cdot a^{3 \cdot 2} \cdot b^2 = 5^2 \cdot a^{3 \cdot 2} \cdot b^2 = 25a^6b^2$

d) $\frac{(2xy)^3}{2x^2} = \frac{2^3 x^3 y^3}{2x^2} = 2^{3-1} x^{3-2} y^3 = 2^2 xy^3 = 4xy^3$

Esimerkki 2

Merkitään yhtenä potenssina.

a) $2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3 = 8^3$

b) $16x^2y^2 = 4^2x^2y^2 = (4xy)^2$

Muista, että ”=” tarkoittaa ”on yhtä suuri kuin”. Siispä merkkiä voi ”käyttää” ja sen voi lukea sekä vasemmalta oikealle että oikealta vasemmalle. Älä siis lue esimerkiksi edellisen sivun laatikon sääntöä vain ”seuraussääntönä” $(a \cdot b) \Rightarrow a^n \cdot b^n$. Kun säännössä on =-merkki, se on aidosti molempiin suuntiin toimiva. Tämä ja se seikka, että tässä kappaleessa esitellään jo 5. sääntö aiheuttaa sen, että sinulla on paljon mahdollisuuksia ”pelatessasi” sievennyksien kanssa! Sinulla on nyt jo 10 tapaa sieventää ja laventaa erilaisia lausekkeita.

Tehtäviä

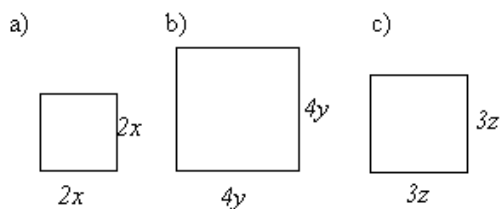
85. Laske.

a) $(5 \cdot 2)^2$ b) $(2 \cdot 3)^4$ c) $(10 \cdot 4)^2$ d) $(5 \cdot 6)^3$

86. Merkitse neliön pinta-ala potenssimuodossa ja sievennä lauseke, kun neliön sivun pituus on

a) 8 m b) 10 m.

87. Muodosta ja sievennä neliöiden pinta-alojen lausekkeet.



88. Sievennä.

a) $(5x)^2$ b) $(2x)^3$ c) $(7a)^2$ d) $(5y)^3$

89. Merkitse ja sievennä potenssi, jonka

a) kantaluku on $2x$ ja eksponentti 2b) kantaluku on a^2b ja eksponentti 4

c) kantaluku on

90. Sievennä.

a) $(-4a)^2$ b) $(3a)^5$ c) $(-10)^3$ d) $(10x^3y^4)^2$

Soveltavat tehtävät

91. Laske luvun neliö.

a) 3 b) $-5a$ c) $2a^3$ d) $-7b$

92. Sievennä.

a) $(xy^4z^5)^2$ b) $(-2ab)^3$ c) $(10y)^4$ d) $(-0,1c)^5$

93. Laske luvun kuutio.

a) 3 b) -4 c) $-5a$ d) $6b$ e) $4ab^6$

94. Merkitse yhtenä potenssina.

a) $3^2 \cdot 5^2$ b) $5^4 \cdot 2^4$ c) $4^5 \cdot 25^5$ d) $4^{20} \cdot 0,25^{20}$

95. Sievennä.

a) $(x^4y)^2 \cdot (x^2y^3)^4$ b) $(xy)^6 \cdot (x^4y^3)^3$ c) $(x^3y^5)^2 \cdot (x^4y^2)^3$

96. Sievennä.

a) $(2x)^2 \cdot (2x)^3$ b) $(a^2 \cdot a^3)^4$
 c) $b^3 \cdot (b^4)^2$

97. Sievennä.

a) $(a^2b)^4 \cdot (a^2b^4)^3$ b) $(c^3d^4)^5 \cdot (c^4d^2)^2$
 c) $(ef)^8 \cdot (e^2f^3)^4$

98. Sievennä.

a) $\frac{(a^7b^5)^2}{(a^4b^2)^3}$ b) $\frac{(xy)^{12}}{(x^3y^2)^3}$
 c) $\frac{(z^4w^3)^3}{(z^5w^2)^2}$

99. Merkitse ja sievennä potenssi, jonka

- a) kantaluku on a^2 ja eksponentti 4
 b) kantaluku on $3a^2b$ ja eksponentti 3
 c) kantaluku on $-2x^2y^3$ ja eksponentti 5

100. Kuution tilavuus saadaan laskemalla särmän pituuden kuutio. Merkitse kuution tilavuus potenssimuodossa ja sievennä lauseke, kun kuution särmän pituus on

a) 3 m

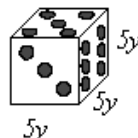
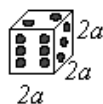
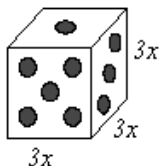
b) 4 m

101. Muodosta ja sievennä arpakuutioiden tilavuuksien lausekkeet.

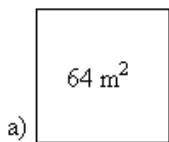
a)

b)

c)



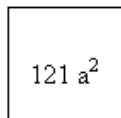
102. Päättele neliöiden sivujen pituudet.



b)



c)



Vaativat tehtävät

103. Merkitse yhtenä potenssina.

a) $2^2 \cdot a^2$

b) $-a^4 \cdot b^4$

c) $4^5 \cdot a^5 \cdot b^5$

d) $-a^6 \cdot (-b^6) \cdot c^6$

104. Päättele puuttuva kantaluku.

a) $()^2 = 9a^2$

b) $()^4 = 16z^4$

c) $()^3 = -8x^3$

d) $()^6 = x^6 y^{12} z^{18}$

105. Merkitse yhtenä potenssina.

a) $4 \cdot a^2$

b) $8 \cdot b^3$

c) $25 \cdot a^2 \cdot b^2$

d) $-27 \cdot c^3$

106. Sievennä.

a) $\frac{(m^4n^3)^3}{(m^5n^2)^2}$

b) $\frac{(ce)^9}{(c^3e^2)^2}$

c) $\frac{(p^7q^5)^2}{(p^4q^2)^3}$

107. Minkä lausekkeen neliö on

a) $9x^2$

b) $16a^4$

c) $0,81x^2y^2$

d) $4a^4b^2$?

108. Päättele, mikä luku sopii x:n paikalle.

a) $(2a^4)^x = 4a^8$

b) $(2x)^4 = 10000$

109. Sievennä. $\frac{(3a^4b^3)^2}{(a^2b^3)^3} \cdot \frac{(a^2b^2)^3}{9(a^2b)^2}$

6 Osamäärän potenssi

Jos potenssin kantalukuna on osamäärä $(\frac{12}{3})^2$, kutsutaan merkintää osamäärän potenssiksi.

Potenssin arvo voidaan laskea normaaleja laskusääntöjä käyttäen $(\frac{12}{3})^2 = (4)^2 = 16$ tai korottamalla ensiksi sekä osoittaja että nimittäjä toiseen potenssiin.

$$(\frac{12}{3})^2 = \frac{12^2}{3^2} = \frac{144}{9} = 16$$

Osamäärän potenssi on potenssien osamäärä

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0.$$

Osamäärän potenssien laskusääntöjä ei välttämättä tarvitse käyttää pelkillä lukuarvoilla laskettaessa. Sen sijaan lausekkeita, joissa on mukana muuttujia, ei voida sieventää normaaleja laskusääntöjä noudattaen.

Esimerkki 1

Sievennetään lausekkeet.

$$a) \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$b) \left(\frac{x}{6}\right)^2 = \frac{x^2}{6^2} = \frac{x^2}{36}$$

$$c) \left(\frac{3x}{5}\right)^2 = \frac{3^2 \cdot x^2}{5^2} = \frac{9x^2}{25}$$

$$d) \left(\frac{2a^3 \cdot a^2}{b \cdot b^5}\right)^4 = \left(\frac{2a^{3+2}}{b^{1+5}}\right)^4 = \left(\frac{2a^5}{b^6}\right)^4 = \frac{2^4 \cdot a^{5 \cdot 4}}{b^{6 \cdot 4}} = \frac{16a^{20}}{b^{24}}$$

Esimerkki 2

Lasketaan lausekkeet sieventämällä ensiksi yhdeksi potenssiksi.

$$a) \frac{16^3}{8^3} = \left(\frac{16}{8}\right)^3 = 2^3 = 8 \quad b) \frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27$$

Esimerkki 3

Merkitään yhtenä potenssina.

$$\text{a) } 5^7 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 = \left(5 \cdot \frac{1}{6}\right)^7 = \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

$$\text{b) } \frac{4a^2}{3^2} = \frac{2^2 a^2}{3^2} = \left(\frac{2a}{3}\right)^2$$

Tehtäviä

110. Mikä on eksponentin 3 kantaluku?

a) $(\frac{1}{6})^3$ b) $-\frac{2^3}{3}$ c) $(-2\frac{3}{4})^3$ d) $-(\frac{2}{5} + 7)^3$

111. Laske.

a) $(\frac{3}{5})^2$ b) $(-\frac{6}{7})^2$ c) $(3\frac{1}{2})^2$ d) $(-1\frac{1}{4})^2$

112. Sievennä.

a) $(\frac{a}{b})^5$ b) $(\frac{c}{3})^2$ c) $(\frac{4}{d})^3$

113. Sievennä.

a) $(\frac{2x}{5})^2$ b) $(\frac{y}{2})^3$ c) $(\frac{-3x}{4})^2$

114. Muodosta ja sievennä lukujen $9m^3n^4$ ja $5m^2n$ osamäärän neliö.

115. Laske.

a) $-(\frac{1}{2})^4$ b) -10^4 c) $(-\frac{1}{10})^5$ d) $-\frac{1^3}{3}$

116. Onko potenssin arvo positiivinen vai negatiivinen?

a) $(-\frac{2}{3})^4$ b) $(-\frac{4}{7})^{15}$ c) $(\frac{-2}{-3})^3$ d) $-(\frac{5}{7})^8$

117. Laske sieventämällä ensiksi yhdeksi potenssiksi.

a) $\frac{8^4}{4^4}$ b) $\frac{10^2}{2^2}$ c) $\frac{6^{100}}{(5+1)^{100}}$

Soveltavat tehtävät

118. Merkitse ja sievennä luvun $\frac{-3ab}{2c}$

- a) kuutio b) neliö
c) neljäs potenssi.

119. Sievennä.

$$\text{a) } \frac{(-1)^4}{(-1)^{21}} \qquad \text{b) } \frac{2^3 \cdot 2^5}{2^6}$$

120. Kirjoita neliönä.

$$\text{a) } 9a^2 \qquad \text{b) } 4x^2y^2 \qquad \text{c) } \frac{a^2b^2}{81} \qquad \text{d) } \frac{4x^4}{9y^2}$$

121. Merkitse yhtenä potenssina.

$$\text{a) } 4^6 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^6 \qquad \text{b) } \frac{16a^2}{9} \qquad \text{c) } \frac{8a^3}{b^3} \qquad \text{d) } \frac{-16a^4}{b^4}$$

122. Laske sieventämällä ensin yhdeksi potenssiksi.

$$\text{a) } \frac{100^3}{50^3} \qquad \text{b) } \frac{90^2}{30^2} \qquad \text{c) } \frac{32^2}{8^2} \qquad \text{d) } \frac{84^4}{42^4}$$

123. Sievennä.

$$\text{a) } \left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^5 \qquad \text{b) } \left(\frac{c}{d}\right)^3 \cdot \left(\frac{c^4}{d^2}\right)^6 \qquad \text{c) } \left(\frac{e^4}{f^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{e^4}{f^2}\right)^4$$

Vaativat tehtävät

124. Kirjoita kuutiona.

$$\text{a) } x^3y^3 \qquad \text{b) } -27a^3b^3c^3$$

$$\text{c) } \frac{x^3}{1000} \qquad \text{d) } -\frac{8x^6}{125y^3}$$

125. Sievennä.

$$\text{a) } \frac{8^3}{2^6} \qquad \text{b) } \frac{7^{15}}{49^8 \cdot 7}$$

126. Sievennä, ilmoita vastaus ilman negatiivista potenssia. $\left(\frac{2a^4}{3b}\right)^{-2}$

127. Päätele puuttuva kantaluku.

$$\text{a) } (\)^2 = \frac{25a^2}{4} \qquad \text{b) } (\)^4 = \frac{b^4}{81}$$

$$\text{c) } (\)^3 = -\frac{27}{b^3c^3} \qquad \text{d) } (\)^4 = \frac{a^4b^8}{16}$$

128. Sievennä. $\left(\frac{4a^3b^4}{3ab}\right)^2 : \frac{(2a^2b^3)^3}{3a^5b^3}$

129. Potenssien laskusäännöt pitävät paikkansa myös silloin kuin eksponenttina on negatiivinen luku tai nolla. Korjaa kaavat oikeiksi.

a) $(ab)^{-n} = -a^n \cdot b^n$ b) $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{m-n}$

c) $(a^{-m})^{-n} = a^{-m \cdot n}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{-a^n}{b^n}$

Atomi

Muodostumme kaikki atomeista. Itse asiassa ei meissä muuta olekaan. Kehossamme on erilaisia happi-, hiili-, vety-, typpi-, fosfori-, kalium- ym. atomeja yhteensä noin 4 000 000 000 000 000 000 000 000 kappaletta (lausutaan 4000 kvadriljoonaa). Meissä on atomeja satoja kertoja enemmän kuin vesipisaroita maailman kaikissa merissä. Atomit ovat läpimitaltaan noin 0,0000000001 m eli kymmenesmiljardiosan suuruusluokkaa.

Atomin massa on keskittynyt atomin ytimeen. Sen koko on suuruusluokkaa 0,000 000 000 000 01 m ja tilavuus vain sadasmiljardiososa koko atomin tilavuudesta. Ytimen ympärillä on lähes tyhjää, vain siellä täällä viuhkoo pieniä hiukkasia nimeltään elektronit, jotka määräävät miten aine käyttäytyy kemiallisesti. Laaja elektronipilvi koostuu vain muutamasta elektronista, jotka ovat niin pieniä, ettei niiden kokoa ole kyetty mittaamaan. Jos ydintä esittäisi 1 mm kokoinen nuppineulan pää, niin atomia oikeassa mittakaavassa esittäisi halkaisijaltaan 10-metrinen pallo. Koska lähes koko atomin massa sijaitsee ytimessä, on ytimen aine erittäin tiheää. Jos puristaisimme koko maapallon ydinaineen tiheyteen, sen halkaisija pienenesi 6 356 800 metristä noin 250 metriin.

Koko elollinen maailma rakentuu hiiliatomin ympärille. Jokaisen ihmisen, eläimen tai kasvin jokainen solu sisältää hiiliatomeja. Syömme hiiliatomeja jokaisella aterialla ja vedämme niitä keuhkoihimme jokaisella hengenvedolla. Mistä hiiliatomi tietää, että sen kuuluu juuri olla hiiltä eikä esimerkiksi kultaa? Atomin keskipisteessä oleva pienen pieni ydin koostuu ydinhiukkasista, joita on kahta lajia: protoneja ja neutroneja. Protonien lukumäärä määrää aineen tyyppin. Vedyllä on yksi protoni, heliumilla kaksi, hiilellä kuusi, uraanilla 92, kullalla 79 jne. Herääkin kysymys, voisimmeko tehdä kultaa joistakin halvemmista aineista? Kenties yh-

distämällä tinaa (50 protonia) ja kuparia (29 protonia)? Se että sekoitamme astiassa tinaa ja kuparia, ei saa aikaan kultaa, sillä molemmat atomit säilyvät ennallaan. Jos sen sijaan onnistumme pommittamaan tinaa kuparilla niin voimakkaasti, että kupari ydin tunkeutuu tinaytimeen, saamme aikaiseksi kultaa. Jyväskylän yliopiston fysiikanlaitoksella on erityisesti perehdytty sellaisten ytimien, joissa on paljon protoneita, tuotantoon hiukkaskiihdyttimien avulla. Ongelmia ytimien valmistamisessa aiheuttaa kuitenkin se, että toiset ytimet hajoavat saman tien ja vain joistain tulee pysyviä.

Ytimessä olevien neutronien lukumäärä vuorostaan ratkaisee, onko aine pysyvää vai ei. Pysyvät ydinmuodot ovat niitä, joita me kutsumme ”tavallisiksi” tai ”ei-radioaktiivisiksi”. Jotta ydin olisi pysyvä, on siinä neutroneja oltava suunnilleen saman verran tai enemmän kuin protoneja. Tällöin positiivisesti varautuneet protonit eivät pääse hylkimään toisiaan. Mutta jos ytimessä on väärä määrä neutroneja, se ”stressaantuu”. Tällainen ydin on niin jännittynyt, ettei se kerta kaikkiaan pysy kasassa. Mitä nurinkurisempi neutronimäärä, sitä voimakkaampi stressitila, ja sitä nopeammin ydin purkaa ylimääräisen energiansa säteilypulsin muodossa. Tällaista ainetta sanotaan radioaktiiviseksi. Radioaktiivisuus siis riippuu ytimen rakenteesta.

7 Kymmenpotenssimuoto

Suurten ja pienten lukujen merkitsemisessä käytetään kymmenpotensseja. Kehossamme olevien atomien määrä 4 000 000 000 000 000 000 000 000 voidaan esittää lyhyemmin kymmenpotenssimuodossa

kerroin — $4 \cdot 10^{27}$ — eksponentti
)
 kymmenpotensi

Lukuja voidaan merkitä kymmenpotenssimuodossa $a \cdot 10^n$, missä $1 \leq a < 10$ ja n positiivinen tai negatiivinen kokonaisluku.

Kun muunnat lukua kymmenpotenssimuodosta normaaliin muotoon luvun 10 eksponentti määrää sen, kerrotko, vai jaatko 10:llä. Jos luvun 10 eksponentti on

- *positiivinen*, siirrä desimaalipilkkoa *oikealle*
- *negatiivinen*, siirrä desimaalipilkkoa *vasemmalle*

eksponentin osoittama määrä. Molemmissa tapauksissa, jos luvusta loppuvat ”numerot kesken”, lisää nollia tarpeen mukaan.

Esimerkki 1

Kirjoitetaan luvut normaalimuodossa ilman kymmenpotenssia

- a) $7 \cdot 10^6 = 7\,000\,000$
Siirretään desimaalipilkkua 6 askelta oikealle.
- b) $4,25 \cdot 10^8 = 425\,000\,000$
Siirretään desimaalipilkkua 8 askelta oikealle.
- c) $7 \cdot 10^{-6} = 0,000007$
Siirretään desimaalipilkkua 6 askelta vasemmalle.
- d) $4,25 \cdot 10^{-8} = 0,0000000425$
Siirretään desimaalipilkkua 8 askelta vasemmalle.
-

Luku 120 voidaan esittää muodossa $1,2 \cdot 100$. Kun kerrotaan sadalla, siirretään desimaalipilkkua kaksi askelta oikealle. Sama luku kymmenpotenssimuodossa on $1,2 \cdot 10^2$.

Luku 0,034 voidaan vastaavasti kirjoittaa muodossa $3,4 \cdot 0,01$. Kun kerrotaan sadasosalla, siirretään desimaalipilkkua kaksi askelta vasemmalle. Sama luku kymmenpotenssimuodossa on $3,4 \cdot 10^{-2}$.

Esimerkki 2

Kirjoitetaan luvut kymmenpotenssimuodossa.

- a) $10\,000\,000 = 10^7$ Jos kertojaksi tulee yksi, sitä ei merkitä näkyviin.
Siirretään desimaalipilkkua 7 askelta vasemmalle.
- b) $14\,000\,000 = 1,4 \cdot 10^7$
Siirretään desimaalipilkkua 7 askelta vasemmalle.
- c) $0,00000145 = 1,45 \cdot 10^{-6}$
Siirretään desimaalipilkkua 6 askelta oikealle.
- d) $0,0000000809 = 8,09 \cdot 10^{-8}$
Siirretään desimaalipilkkua 8 askelta oikealle.
-

Joillakin suurilla luvuilla on omat nimityksensä:

nimitys	nollien lukumäärä
miljoona	6
miljardi	9
biljoona	12
triljoona	18
kvadriljoona	24
kvintiljoona	30
seksstiljoona	36
septiljoona	42
googol	100

Huomaa, että triljoona on Euroopassa 10^{18} , mutta USA:ssa 10^{12} .

Vastaavasti biljoona on Euroopassa 10^{12} , mutta USA:ssa 10^9 .

Näiden kanssa ollaan makrotaloudesta kertovien, käännettyjen artikkelien kanssa usein harmillisen hukassa ja ainoa tapa varmentaa epäilyttävät tiedot, on etsiä alkuperäinen artikkeli!

On olemassa myös yleisesti käytettäviä kerrannaisyksiköiden etuliitteitä, joille on valittu omat tunnukset. Eräs tunnetuimmista etuliitteistä on kilo (10^3). Usein käytetään yleisiä etuliitteitä kymmenpotenssimuotojen sijaan. Tällöin hyväksytään, että kertojaksi tulee myös suurempia lukuja kuin kymmenen ja pienempiä kuin ykkösen. Sanomme mieluummin massaksi 23 kg kuin $2,3 \cdot 10^4$ g tai pituudeksi 17 km kuin $1,7 \cdot 10^4$ m.

Nimi	Tunnus	Kerroin
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
hehto	h	10^2
deka	da	10^1
desi	d	10^{-1}
sentti	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}

Lisää kerrannaisyksiköitä löydät kirjan taulukko-osiosta.

Esimerkki 3

Vesimolekyylin halkaisija on $2,8 \cdot 10^{-8}$ cm . Ilmoita halkaisija

- a) metreinä
- b) millimetreinä
- c) mikrometreinä ja
- d) nanometreinä.

Ratkaisu

- a) $2,8 \cdot 10^{-8}$ cm = $2,8 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-2}$ m = $2,8 \cdot 10^{-10}$ m
- b) $2,8 \cdot 10^{-10}$ m = $2,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^3$ mm = $2,8 \cdot 10^{-7}$ mm
- c) $2,8 \cdot 10^{-10}$ m = $2,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^6$ μ m = $2,8 \cdot 10^{-4}$ μ m
- d) $2,8 \cdot 10^{-10}$ m = $2,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^9$ nm = $2,8 \cdot 10^{-1}$ nm = 0,28 nm

Otetaan tarkastelun lähtökohdaksi perusyksikkö metri.
Huomaa, että kerrannaisyksiköiden kerroin muuttaa lukuarvot metreiksi $\text{mm} = 10^{-3}\text{m}$ ja nyt muutokset halutaan tehdä toiseen suuntaan.

Tehtäviä

130. Laske.

- a) $1000 \cdot 36,5$ b) $7 \cdot 1000$ c) $4,25 \cdot 10000$
d) $4,15 \cdot 0,1$ e) $0,001 \cdot 6$ f) $1,3 \cdot 0,00001$

131. Kirjoita numeroin

- a) miljoona kuusisataatuhatta
b) neljämiljardia viisisataamiljoonaa
c) kaksisataatriljoonaa kolmebiljoonaa viisimiljoonaa kolme.

132. Sievennä ilman laskinta.

- a) $\frac{4 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^{19}}$ b) $\frac{-10^{25}}{-2 \cdot 10^{21}}$ c) $\frac{5 \cdot 10^7}{(-1 \cdot 10)^4}$ d) $\frac{2 \cdot 10^6}{-10^1}$

133. Kirjoita kymmenpotenssimuodossa.

- a) 234 b) 10 c) 0,2968
d) 0,03 e) 1,20 f) 2 000 000

134. Kirjoita kymmenpotenssimuodossa.

- a) 0,0036 b) 0,000000012
c) 0,000000698 d) 0,0000000000000000091

135. Kirjoita ilman kymmenpotensseja.

- a) $5,12 \cdot 10^{-5}$ b) $1,4 \cdot 10^{-9}$
c) $6,1 \cdot 10^{-16}$ d) $2,5 \cdot 10^{-25}$

136. Ilmoita desimaalilukuna.

- a) 10^{-4} b) 10^{-1} c) 10^{-7}

143. Verihiutaleet auttavat verenvuodon tyrehtyttämises-
sä ja niitä on normaalisti 0,15 – 0,40 miljoonaa kap-
paletta yhdessä kuutiomillimetrissä verta. Kirjoita lu-
kuarvot normaalina lukujen esitysmuotona.

Soveltavat tehtävät

144. Kirjoita ilman kymmenpotenssia ja laske.

a) $5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

b) $7 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1$

c) $9 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^0$

d) $2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}$

e) $6 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-4}$

f) $4,23 \cdot 10^{-3}$

145. Kirjoita luvut muodossa $a \cdot 10^n$, missä $1 \leq a < 10$.

a) 6 000 b) 43 000 c) 23 540 000

d) 0,01 e) 0,000 002 012

146. Miehillä on litrassa verta 4,3 – 5,6 biljoonaa puna-
solua ja 3-10 miljardia valkosolua. Kirjoita lukuarvot
kymmenpotenssimerkintää käyttäen.

147. Maapallon massa on 6 000 000 000 000 tonnia, säde
6378 km ja pinta-ala 500 000 000 km². Ilmoita kym-
menpotenssimuodossa Maan

a) massa kilogrammoina,

b) säde metreinä,

c) pinta-ala neliökilometreinä.

148. Laske ilman laskinta ja ilmoita vastaus kymmenpotenssimuodossa.

a) $(2 \cdot 10^7)^3$ b) $(-3 \cdot 10^6)^2$ c) $(-1 \cdot 10^{11})^3$

149. Seuraavat kymmenpotenssimuodot eivät ole oikein, korjaa ne.

a) $18,4 \cdot 10^6$ b) $104 \cdot 10^3$ c) $0,5 \cdot 10^{-3}$ d) $0,089 \cdot 10^{-2}$

Vaativat tehtävät

150. Muuta samaan kymmenpotenssimuotoon ja laske

a) $2,9 \cdot 10^7 + 3,6 \cdot 10^8$ b) $5,6 \cdot 10^{100} - 4,2 \cdot 10^{102}$

151. Muuta samaan kymmenpotenssimuotoon ja laske.

a) $7,04 \cdot 10^{-4} + 1,1 \cdot 10^{-6}$ b) $2,11 \cdot 10^{-10} - 1,9 \cdot 10^{-8}$

152. Laske ja pyöristä vastaus oikeaan tarkkuuteen.

a) $2,2 \cdot 10^7 + 1,6 \cdot 10^8$ b) $3,4 \cdot 10^{-6} - 5,1 \cdot 10^{-8}$

153. Kroisoksella on rahaa kuusituhatta sekstiljoonaa euroa ja Roopella on rahaa 1040 €. Kumpi on rikkaampi?

154. Kirjoita suuret kymmenpotenssimuotoja ja SI-järjestelmän perusyksiköitä käyttäen.

a) Auringosta Alfa Centaur tähdelle on matkaa 4 070 000 000 000 000 000 cm.

b) Vetyatomin massa on 0,000 000 000 000 000 000 000 001 670 g.

155. Suomen valtion budjetti on useita vuosia ollut noin 33 miljardia euroa. Jos tämä rahasumma jaettaisiin tasan kaikille suomalaisille, kuinka paljon kukin saisi? Suomen väkiluku on noin viisi miljoonaa. (yo kevät 2002)

156. Maan ja Kuun välinen keskimääräinen etäisyys on 384 000 km. Ilmaise etäisyys sopivaa etuliitettä käyttäen. (Etuliitteitä löytyy kirjan takaa taulukko-osiesta)
157. Kirjoita luvut käyttäen sopivia kerrannaisyksiköiden etuliitteitä.
- a) 2360 A (ampeeri, sähkövirran yksikkö)
 - b) 756 000 nm
 - c) 3 458 000 000 mm
 - d) 0,000 78 km
 - e) 0,000 0045 Mm

8 Potensseja laskimella

Vaikka käytössäsi olisi laskin, on potenssien laskusäännöt hallittava. Jos potenssi on liian suuri laskimen käsiteltäväksi, on se osattava muuttaa sellaiseen muotoon, josta laskin selviää. Lisäksi laskimen näytön tulosteet on osattava tulkita oikein. Koska laskimia on niin monenlaisia, on käyttöohjeet syytä säilyttää myös myöhempiä toimintoja varten.

Esimerkki 1

Lasketaan laskimella luvun 2^{60} likiarvo. Montako numeroa luvussa 2^{60} on?

Näppäilemällä laskimeen

saadaan laskimesta riippuen näyttöön esimerkiksi

Luku on liian suuri mahtuakseen kokonaan näyttöön, joten laskin näyttää sen likiarvon kymmenpotenssimuodossa. Tulos tulkitaan $2^{60} \approx 1,152921 \cdot 10^{18}$ ja tämä muutetaan normaalimuotoon seuraavasti:

$$2^{60} \approx 1,152921 \cdot 10^{18} = 1,152921 \cdot \underbrace{1000000000000000000}_{1 \text{ ja } 18 \text{ nollaa}} = 1152921000000000000$$

Likiarvo on $1,152921 \cdot 10^{18}$ ja luvussa on yhteensä 19 numeroa.

Esimerkki 2

Lasketaan luvun 5^{250} likiarvo kahden numeron tarkkuudella. Montako numeroa luvussa 5^{250} on?

Koska useimmat laskimet eivät pysty käsittelemään näin suuria potensseja, on potenssi jaettava osiin.

Sovelletaan potenssin potenssin laskusääntöä.

Sovelletaan tulon potenssin laskusääntöä.

$$5^{250} = 5^{25 \cdot 10} = (5^{25})^{10} \approx (2,9802 \cdot 10^{17})^{10} = 2,9802^{10} \cdot (10^{17})^{10} \approx 55265,5 \cdot 10^{170}$$

$$\underline{55265,5} \cdot 10^{170} \approx 5,5 \cdot 10^{174}$$

Siirretään pilkkua 4 kertaa vasemmalle, joten eksponenttiin on lisättävä 4.

Likiarvo on $5,5 \cdot 10^{174}$ ja luvussa on 175 numeroa.

Muista, että kymmenpotenssin kerroin on välillä 1-10 oleva luku.

Esimerkki 3

Lasketaan laskimella $2,3 \cdot 10^9 + 1,6 \cdot 10^{10}$.

Kymmenpotenssit syötetään laskimeen yleensä EXP-näppäintä käyttämällä. Näppäilemällä laskimeen

2 . 3 EXP 9 + 1 . 6 EXP 1 0

ilmestyy näyttöön

1,83	10
------	----

eli vastaus on $1,83 \cdot 10^{10}$.

Tehtäviä

158. Laske lukujen kuutiot.

- a) 13 b) -22 c) $7x^4$ d) $15ab^9$

159. Kirjoita lukujen likiarvot normaalimuodossa

- a) 2^{35} b) 6^{15} c) 8^{18} d) 7^{30}

160. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

- a) 1,219 b) 0,819 c) 1,119 d) 0,919

161. Montako numeroa luvuissa on?

- a) 3^{51} b) 2^{42} c) 4^{33}

162. Laske lausekkeen $(-x^3)^2$ arvo, kun

- a) $x = 3$ b) $x = -1$ c) $x = -2$ d) $x = 8$

163. Laske, anna vastaus kymmenpotenssimuodossa.

- a) $2,3 \cdot 10^6 \cdot 5,8 \cdot 10^4$ b) $7,4 \cdot 10^5 \cdot 2,8 \cdot 10^7$
c) $5,28 \cdot 10^9 : 1,99 \cdot 10^{-3}$ d) $8,62 \cdot 10^3 : 2,42 \cdot 10^{-8}$

164. Laske, anna vastaus kymmenpotenssimuodossa.

- a) $9 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^7$ b) $7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^6$
c) $8,2 \cdot 10^{-4} - 1,45 \cdot 10^{-5}$ d) $5,7 \cdot 10^{-10} - 2,09 \cdot 10^{-11}$

165. Laske, anna vastaus kymmenpotenssimuodossa.

- a) $3 \cdot (5,6 \cdot 10^3 - 6,7 \cdot 10^7)$ b) $\frac{6,85 \cdot 10^4 \cdot 9,02 \cdot 10^{12}}{4 \cdot 10^5}$
c) $\frac{4 \cdot (8,2 \cdot 10^9 + 3,1 \cdot 10^4)}{9,14 \cdot 10^{-5}}$

166. Laske.

a) 4^{3^2}

b) 2^{5^2}

c) 3^{2^2}

167. Laske.

a) 2^{3^2}

b) 2^{2^3}

c) $5^{3^2} - 4^{2^3}$

Soveltavat tehtävät

168. Anna vastaukset desimaalilukuna ja murtolukuna.

a) $(-5)^{-2}$

b) -2^{-2}

c) -2^{-3}

169. Laske lausekkeet ja anna vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella, kun $a = 0,7$, $b = 6,2$ ja $c = -0,02$.

a) $2a^7$

b) $(abc)^3$

c) $(a + \frac{c}{b})^{10}$

170. Jos kantaluku on 2, mikä on suurin eksponentti, jolla laskimesi antaa vastaukseksi potenssin

a) tarkan arvon

b) likiarvon?

171. Saat ystävältäsi epäilyttävän ketjukirjeen, jossa on allekkain kuusi nimeä osoitteineen, ystäväsi nimi viimeisenä. Kirjeen mukaan sinun on lähetettävä listan ensimmäiselle henkilölle 10 €. Tämän jälkeen poistat ensimmäisen nimen listasta ja laitat oman nimesi viimeiseksi. Lopuksi lähetät kirjeen kuudelle ystävällesi.

a) Jos kukaan ei katkaise ketjukirjettäsi, niin monessako kirjeessä olet lopulta ensimmäisenä?

b) Kuinka paljon voit saada rahaa?

c) Miksi kymmenen nimen ketjukirje on mahdoton?

172. Arkkien koot on standardoitu siten, että A0-arkin ala on 1 m^2 . A1-arkin ala on puolet A0-arkin alasta. vastaavasti A2-arkin ala on puolet A1-arkin alasta jne. Laske A4-arkin ala käyttäen negatiivista eksponenttia.

Vaativat tehtävät

173. Määritä potenssin 4^{200} likiarvo kahden numeron tarkkuudella. Montako numeroa kyseisessä luvussa on?
174. Määritä potenssin 3^{300} likiarvo kahden numeron tarkkuudella. Montako numeroa luvussa 5^{250} on?
175. Hehkulampun palaminen tarkoittaa itse asiassa elektronien virtaa ohuessa metallilangassa. Teholtaan 100 W -hehkulampussa kulkee keskimäärin 6 000 000 000 000 000 000 elektronia joka sekunti. Montako elektronia hehkulampussa virtaa vuorokauden aikana? Ilmoita vastaus kymmenpotenssimuodossa.
176. Minä vuonna täyttää 1983 syntynyt henkilö yhden gigasekunnin ($= 10^9$ sekuntia)? Laskussa ei tarvitse ottaa huomioon karkausvuosia. (yo kevät 2002)

177. Shakkipeli keksittiin noin 2500 vuotta sitten Intiassa. Tarinan mukaan kuningas ihastui peliin niin paljon, että lupasi keksijälle palkinnoksi mitä tahansa. Vaatimattomana keksijä esitti toiveensa: Hän pyysi ensimmäiselle shakkipelin ruudulle yhden vehnäjyvän, toiselle kaksi, kolmannelle neljä, neljännelle kahdeksan jne. 64 ruudulle saakka.

- a) Montako jyvää oli shakkilaudan viimeisellä ruudulla?
- b) Yhden vehnäjyvän massa on noin 0,031 g. Mikä oli viimeisellä ruudulla olevan vehnämäärän massa?
- c) Vehnää tuotetaan koko maailmassa noin $6,0 \cdot 10^8$ tonnia. Monenko vuoden tuotanto oli viimeisellä ruudulla?

Lukujärjestelmien kehittyminen

Olisi hankalaa jatkaa laskemista loputtomasti antamalla jokaiselle uudelle luvulle uusi nimi, niinpä jokin tietty lukumäärä otetaan ns. kokoavaksi yksiköksi. Tämä idea on perustana kaikille lukujärjestelmille. Kokoavan yksikön suuruutta kutsutaan lukujärjestelmän kantaluvuksi. Ensimmäinen laskemisessa apuna käytetty väline lienee ollut sormemme. Tästä syystä käyttämämme lukujärjestelmän kantalukuna on kymmenen. Muitakin lukujärjestelmiä on ollut ja on edelleen käytössä, vaikka kymmenjärjestelmä onkin ylivoimainen muihin lukujärjestelmiin verrattuna. Kymmenjärjestelmässä laskutoimitukset ovat yksinkertaisia ja desimaalilukuja voidaan käsitellä samoin kuin muitakin lukuja. Yleisimmät kantaluvut ovat olleet viiden monikertoja tai näiden yhdistelmiä. Yhteys sormiin ja varpaisiin on selvä. Esimerkiksi luku kaksikymmentä voidaan ilmoittaa ”sormet ja varpaat”.

Useat Australian itäosien heimot ja Afrikan bushmanit käyttävät edelleenkin puhdasta kaksijärjestelmää, jossa lukumääriä lasketaan käyttämällä vain lukuja 1 ja 2 tarkoittavia sanoja. Kahta suurempia lukuja tarkoittavat sanat muodostetaan yhdistelemällä, esimerkiksi luku viisi esitetään muodossa ”kaksi-kaksi-yksi”. Kaksijärjestelmä on hyvin epäkäytännöllinen suurilla luvuilla ilmaistaessa.

Tietokoneissa käytettyä binäärijärjestelmää sanotaan myös kaksijärjestelmäksi, mutta se poikkeaa olennaisesti edellä mainitusta. Binäärijärjestelmä perustuu paikkamerkintään ja se on vastaavanlainen kymmenkantaisen paikkajärjestelmämme kanssa, jossa numeron paikka luvussa ilmaisee, mitä lukuyksikköä numero tarkoittaa. Binäärijärjestelmässä kantaluvun 10 sijasta käytetään kantalukua 2. Ei ole todisteita siitä, että binääristä laskutapaa olisi käytetty jossakin kielessä.

Eräs mielenkiintoinen lukujärjestelmä on 60- eli seksa-

gesimaalijärjestelmä, jonka kehittivät Mesopotamian sumerit noin 3000 eKr. On esitetty erilaisia teorioita sille, miksi juuri luku 60 oli niin tärkeä. Erään selityksen mukaan se valittiin helpottamaan jakolaskuja, koska 60 on jaollinen hyvin monella luvulla. Vaikka luku 60 kantalukuna tuntuukin omituiselta, vaikuttaa se edelleen meidänkin mittausjärjestelmässämme kulmayksiköissä, minuuteissa ja tunneissa.

Sormilla ja varpailla laskettaessa laskutoimituksista ei jäänyt muistiinpanoja, niinpä tuli tarpeen kehittää tapoja lukujen merkitsemiseksi. Lukuja esitettiin solmujen ja puun- tai luunpalasille kaiverrettujen lovien avulla. Lisäksi käytettiin myös erityisiä symboleja, joita kaiverrettiin kiveen tai puuhun tai kirjoitettiin saveen.

9 Lukujärjestelmät

Voivatko luvut 110101 ja 53 olla yhtä suuria? Tietenkään eivät, jos molemmat tulkitaan normaalisti käytettävän kymmenjärjestelmän luvuiksi. Tilanne on kuitenkin toinen, jos luvut edustavatkin eri lukujärjestelmiä. Lukujärjestelmät nimetään niiden kantaluvun mukaan. Kantaluku myös määrää, minkälaisista numeroista kyseisen lukujärjestelmän luvut voidaan muodostaa.

Kantaluku kertoo, millä numeroilla lukujärjestelmän luvut muodostetaan.

Jos järjestelmän kantalukuna on luonnollinen luku n , voi siinä esiintyä numeroina $0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

Usein numerot, jotka ovat yli 9, korvataan kirjaimilla. Esimerkiksi 16-kantajärjestelmässä on käytössä numerot 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a(=10), b(=11), c(=12), d(=13), e(=14) ja f(=15).

Kymmen- eli desimaalijärjestelmä on yleisin lukujärjestelmä. Järjestelmän kantalukuna on 10 ja siinä esiintyvät numerot 0...9. Kymmenjärjestelmässä jokainen luku voidaan kirjoittaa kymmenpotenssin avulla. Kymmenjärjestelmää merkitään laskimissa lyhenteellä DEC.

Esimerkki 1

Luku 374 voidaan kirjoittaa muodossa $3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 1$ eli $3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

Binääri- eli kaksijärjestelmä (BIN) on yleisesti käytössä tietotekniikassa. Tietokoneet pystyvät käsittelemään vain kahta eri tasoa: jännitteetöntä tai jännitteellistä tilaa, joita voidaan kuvata numeroilla 0 ja 1. Binäärijärjestelmän

kantalukuna on 2 ja sen ainoat numerot ovat 0 ja 1. Binäärijärjestelmässä jokainen luku voidaan esittää luvun 2 potenssina. Nollan tai ykkösen paikka kertoo kuinka suuri luku on kyseessä.

potenssimuoto	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
lukuarvo	1	2	4	8	16	32	64	128

Käytetty lukujärjestelmä voidaan ilmaista alaindeksillä: $luku_{kantaluku}$.

Esimerkiksi luku 5 ilmaistaan tutulla kymmenjärjestelmällä 5_{10} ja binäärijärjestelmällä 101_2 .

Huomaa, että koska kymmenjärjestelmä on yleisin lukujärjestelmämme, ei sen luvuissa käytetä yleensä alaindeksiä.

Esimerkki 2

Muutetaan binääriluku 101101 kymmenjärjestelmän luvuksi.

$$1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$

$$1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$$

$$32 + 8 + 4 + 1 =$$

$$45$$

$$\text{Vastaus: } 101101_2 = 45_{10}$$

Esimerkki 3

Muutetaan kymmenjärjestelmän luku 83 binäärimuotoon.

- Otetaan ensiksi suurin sellainen kahden potenssi, joka on ≤ 83 . $2^6 = 64 \leq 83$
- Vähennetään tämä muutettavasta luvusta $83 - 64 = 19$.
- Suurin kahden potenssi, joka on ≤ 19 , on $2^4 = 16$.

- Vähennetään tämä muutettavasta luvusta $19 - 16 = 3$.
- Suurin kahden potenssi, joka on ≤ 3 , on $2^1 = 2$.
- $3 - 2 = 1$, joten viimeiseksi kahden potenssiksi tulee $2^0 = 1$.
- Potenssien 2^6 , 2^4 , 2^1 ja 2^0 paikoille tulee binääriesityksessä luku 1 ja niiden väliin jääville paikoille tulee nolla.
- Binääriluku on 1010011

Vastaus: $83_{10} = 1010011_2$

Tehtäviä

178. Laske lausekkeen arvo.

a) $4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2$

b) $5 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^3 + 10^2 + 3$

c) $2 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 10^3$

d) $10^6 + 10^4 + 6 \cdot 10^2 + 1$

179. Esitä luvut kymmenpotenssilausekkeena.

a) 4593 b) 600850 c) 4011009 d) 50100601

180. Luettele numerot, jotka ovat käytössä

a) viisijärjestelmässä

b) seitsemänjärjestelmässä.

181. Mikä lukujärjestelmä on kyseessä, jos siinä voi esiintyä ainoastaan numerot 0, 1, 2 ja 3?

182. Voiko luku 351 olla viisijärjestelmän luku? Perustele.

183. Jatka seuraavia lauseita

a) Kymmenjärjestelmää sanotaan myös...

b) Binääriluvussa voi esiintyä numerot...

184. Mikä on

a) pienin viisinumeroinen binääriluku

b) suurin kolminumeroinen binääriluku

c) suurin kahdeksannumeroinen binääriluku?

185. Luettele kymmenjärjestelmän luvut 0 - 10 binäärilukuina.

186. Esitä binäärimuodossa kymmenjärjestelmän luvut

- a) 5 b) 9 c) 14 d) 23

187. Esitä kymmenjärjestelmämuodossa binääriluvut

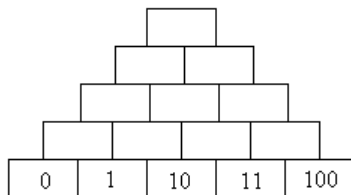
- a) 10 b) 100 c) 1010 d) 10001

188. Ilmoita binääriluvut kymmenjärjestelmämuodossa.

- a) 1111 b) 10011 c) 11011 d) 100001

Soveltavat tehtävät

189. Jäljennä kuvio vihkoosi. Laske sitten vierekkäisten binäärijärjestelmän lukujen summa ja merkitse se niiden yläpuolella olevaan ruutuun.



190. Muunna luvut binäärijärjestelmästä kymmenjärjestelmään.

- a) 11110 b) 11100000

191. Ilmoita binäärilukuna

- a) oma ikäsi
b) luokkasi oppilaiden määrä.

192. Laske ja ilmoita vastaus kymmenjärjestelmässä

- a) $12_{10} + 1_2$ b) $100_{10} + 100_2$
c) $111_2 + 1001_2 + 11_2$

193. Internetiin liitetyt tietokoneet erotetaan toisistaan IP-osoitteiden perusteella. Jokaisella Internetiin liitetyllä koneella on oma yksilöllinen IP-osoitteensa. Esitä tietokoneen IP-osoitteet kymmenjärjestelmässä.

a) 10001010.11001011.00101100.00111101

b) 11101000.01101010.00101001.00001001

194. Muuta IP-osoitteet binäärimuotoon.

a) 128.10.2.30

b) 201.45.87.129

Vaativat tehtävät

195. Onko lasku laskettu oikein?

a) $10_{10} + 10_{10} = 100_{10}$ b) $10_2 + 11_2 = 101_2$

c) $10_{10} + 10_2 = 12_{10}$ d) $100_2 + 101_2 = 10_{10}$

196. Ranskassa on käytetty kymmenjärjestelmän sijasta 20-järjestelmää. Nykyisin Ranska on siirtynyt kymmenjärjestelmän käyttöön, mutta lukujen nimissä on jäänteitä 20-järjestelmän käytöstä.

luku	1	2	3	4	5
nimitys	un	deux	trois	quatre	cinq
luku	6	7	8	9	10
nimitys	six	sept	huit	neuf	dix
luku	11	12	13	14	15
nimitys	onze	douze	treize	quatorze	quinze
luku	16	17	18	19	20
nimitys	seize	dix-sept	dix-huit	dix-neuf	vingt

Kirjoita kymmenjärjestelmän luvut ranskan lukusannalla.

a) 28

b) 83

c) 97

197. Sano jokin luku ranskaksi ja pyydä vierustoveriasi muuttamaan se kymmenjärjestelmän luvuksi.
198. Oktaali- eli kahdeksanjärjestelmässä kantalukuna on 8 ja siinä esiintyvät numerot $0 \dots 7$. Ilmoita
- a) oktaaliluku 432 kymmenjärjestelmässä,
 - b) kymmenjärjestelmän luku 100 oktaalilukuna,
 - c) oma ikäsi oktaalilukuna.
199. Binäärilukujen eli kaksijärjestelmän yhteenlaskusäännöt ovat
- $$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 10.$$
- Mitkä ovat vastaavat kertolaskusäännöt? Laske binäärijärjestelmässä yhteen- ja kertolaskusääntöjen avulla $110 + 1011$ ja $11 \cdot 101$. (Laske allekkain.) (yo kevät 2000)
200. Lausu 5-järjestelmän luku 20314 10-järjestelmässä. (yo syksy 1994)

10 Lausekkeita

Suomessa lämpötilat ilmoitetaan celsiusasteina, mutta esimerkiksi USA:ssa lämpötilojen yhteydessä käytetään fahrenheitasteita. Eri lämpötila-asteikkojen välillä vallitsee tietty yhteys, joka voidaan ilmoittaa matemaattisena lausekkeena. Celsiusasteet voidaan muuttaa fahrenheitasteiksi lausekkeen

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

avulla, missä F on lämpötila fahrenheitasteina ja C lämpötila celsiusasteina.

Fahrenheitasteiden lauseketta voidaan käyttää yhä uudestaan sijoittamalla C :n paikalle eri lämpötiloja. Tämä on esimerkki muuttujalausekkeesta. Kirjain C edustaa muuttujaa, joka voi saada eri arvoja. Muuttujalausekkeissa kertomerkki jätetään merkitsemättä luvun ja muuttujan tulos tai useampien muuttujien tulossa. Kertomerkki on ehdottomasti muistettava merkitä, kun muuttujan paikalle sijoitetaan jokin lukuarvo. Lisäksi, jos muuttujan arvo on negatiivinen, on se sijoitettava sulkeissa. Kahta laskutoimitusmerkkiä ei voi esiintyä peräkkäin ilman sulkeita.

Esimerkki 1

Lasketaan, mitä fahrenheitasteikoinen lämpötilamittari näyttää, jos lämpötila celsiusasteina on

a) $5\text{ }^{\circ}\text{C}$,

b) $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$?

Ratkaisu

a) Sijoitetaan luku 5 muuttujan C paikalle ja lasketaan lausekkeen arvo.

$$F = \frac{9}{5} \cdot 5 + 32 = \frac{9 \cdot 5}{5} + 32 = 9 + 32 = 41$$

 Muista sijoitusvaiheessa merkitä kertomerkki.

b) Sijoitetaan luku -15 muuttujan C paikalle ja lasketaan lausekkeen arvo.

$$F = \frac{9}{5} \cdot (-15) + 32 = -\frac{9 \cdot 15}{5} + 32 = -27 + 32 = 5$$

↑ Muista kertomerkki ja sulkeet, koska luku on negatiivinen.

Vastaus: $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ on fahrenheitasteina $41\text{ }^{\circ}\text{F}$ ja $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$ on fahrenheitasteina $5\text{ }^{\circ}\text{F}$.

Tyypillisimmät muuttujan arvon sijoitusvirheet

- Sijoitetaan lausekkeeseen $2xy$ arvot $x = 3$ ja $y = 4$.

~~$2 \cdot 3 \cdot 4$~~

Väärin! Kertomerkki unohtui!

$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Oikein

- Sijoitetaan lausekkeeseen $2xy$ arvot $x = -2$ ja $y = -5$.

~~$2 \cdot -2 \cdot -5$~~

Väärin! Kertomerkki unohtui!

~~$2 \cdot -2 \cdot -5$~~

Väärin! Sulkeet unohtui!

$2 \cdot (-2) \cdot (-5) = 40$

Oikein

Kirjaimilla laskeminen voi aluksi tuntua kummalliselta, mutta niiden avulla tosielämän ilmiöistä voidaan tehdä matemaattisia malleja. Yleensä matemaattiset mallit ovat niin monimutkaisia, ettei niiden kuvaamiseen riitä yksi muuttuja. Esimerkiksi maapallon väestönkasvumallissa ovat muuttujina A = väkiluku alussa, t = aika vuosina ja k = kasvukerroin. Väkiluku V , kun on kulunut t vuotta on $V = Ak^t$

Kasvukertoimeen k vaikuttavat monet tekijät, kuten taudit, sodat ja nälänhätä. Siksi sen arvioiminen etukäteen on hankalaa. Tiedetään kuitenkin että maapallon väestönkasvu on hidastumassa. 1960-luvulla kasvukerroin oli $1,02$ (tämä tarkoittaa että väestö lisääntyi 2% vuodessa) ja vuoden 1990 lopussa se oli $1,015$. On ennustettu, että vuoteen 2015 mennessä kasvukerroin laskee lukuun $1,01$.

Esimerkki 2

Lasketaan arvio maapallon väkiluvulle 20 vuoden kuluttua, kun tällä hetkellä se on 6,7 miljardia (vuonna 2008). Lasketaan arvio käyttämällä ensin kasvukerrointa 1,015 ja sitten kasvukerrointa 1,01.

Listataan kaikki tehtävässä annetut muuttujat:

$$A = 6,7 \text{ miljardia}$$

$$k = 1,015$$

$$t = 20 \text{ vuotta}$$

Sijoitetaan muuttujat lausekkeeseen ja lasketaan lausekkeen arvo:

$$V = Ak^t = 6,7 \cdot 1,015^{20} \approx 9,0 \text{ miljardia}$$

Lasketaan toinen arvio käyttämällä kasvukerrointa 1,01.

$$V = Ak^t = 6,7 \cdot 1,01^{20} \approx 8,2 \text{ miljardia}$$

Vastaus: Arvio maapallon väkiluvulle 20 vuoden kuluttua on 9,0 miljardia (kasvukerroin 1,015) tai 8,2 miljardia (kasvukerroin 1,01).

Tehtäviä

201. *Laskintehtävä:* Muunna lämpötilat fahrenheitasteiksi.
- a) Kakku paistetaan 175 celsiusasteen lämpötilassa.
 - b) Jään sulamispiste on $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.
 - c) Absoluuttinen nollapiste on noin $-273\text{ }^{\circ}\text{C}$.
202. *Laskintehtävä:* Ihmisen aikaansaama kuumin lämpötila on 510 miljoonaa $^{\circ}\text{C}$ eli 30 kertaa kuumempaa kuin auringon ytimessä. Se synnytetään 27.5.1994 Tokamak-koefuusioreaktorissa Princetonin yliopistossa (New Jersey, USA) käyttämällä deuterium-tritium-plasmasekoitusta. Paljonko lämpötila on fahrenheitasteina?
203. *Laskintehtävä:* Kun halutaan muuntaa fahrenheitasteet celsiusasteiksi, käytetään lauseketta $C = \frac{5(F-32)}{9}$. Muunna lämpötilat celsiusasteiksi.
- a) $90\text{ }^{\circ}\text{F}$
 - b) $0\text{ }^{\circ}\text{F}$
 - c) $-18\text{ }^{\circ}\text{F}$
204. Laske lausekkeen $10 - 2x$ arvo, kun
- a) $x = 1$
 - b) $x = 2$
 - c) $x = 4$
 - d) $x = -1$
205. Laske lausekkeen $3a + 3$ arvo, kun
- a) $a = 0$
 - b) $a = 4$
 - c) $a = -2$
 - d) $a = b$

206. *Laskintehtävä:* Olet varmaan havainnut, että helteellä kuuluu paljon heinäsirkan siritystä. Ilman lämpötilaa voikin arvioida heinäsirkan sirityksen avulla:

$$\text{lämpötila} = \frac{\text{siritysten lukumäärä minuutissa} + 30}{7}$$

Laske lämpötila, kun heinäsirka sirittää minuutissa

- a) 160 kertaa b) 100 kertaa c) 30 kertaa

Arvioi, antaako lauseke todellisia tuloksia.

207. Kullakin hampaalla on kaksinumeroinen tunnuslukunsa. Ensimmäinen numero tarkoittaa leukapuoliskoa, jotka ovat pysyvälle hampaimistolle seuraavat:

1 = yläleuan oikea puoli (suun omistajan suunnasta katsottuna)

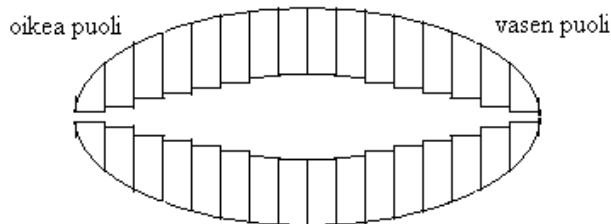
2 = yläleuan vasen puoli

3 = alaleuan vasen puoli

4 = alaleuan oikea puoli

Toinen numero hampaan paikkaa: Etuhampaat ovat ykkösiä ja viisaudenhampaat kahdeksikkoja.

Kopioi hampaistokuva vihkoosi ja kirjoita hampaistoon edestä katsottuna tunnusluvut.



208. Maitohampaisto kirjoitetaan edestä katsottuna seuraavasti:

55 54 53 52 51 61 62 63 64 65
85 84 83 82 81 71 72 73 74 75

- a) Millä numerolla merkitään yläleuan oikeaa puolta?
b) Millä numerolla merkitään alaleuan vasempaa puolta?
c) Montako maitohampaita on yhteensä?

209. *Laskintehtävä:* Ihmisen pituus senttimetreinä voidaan laskea kyynärluun tai sääriluun perusteella:

Naiset
pituus = $3,88 \cdot \text{kyynärluu} + 73,50$
pituus = $2,53 \cdot \text{sääriluu} + 72,57$
Miehet
pituus = $3,65 \cdot \text{kyynärluu} + 80,41$
pituus = $2,39 \cdot \text{sääriluu} + 81,69$

Mittaa oman kyynär- ja sääriluusi pituus ja laske oma pituutesi niiden perusteella. Kummalla tavalla pääsit lähemmäksi oikeaa pituuttasi? Vertaile tuloksia toisten kanssa.

210. Laske lausekkeiden arvot, kun x saa arvon -3 .

- a) $x + 1$ b) $x - 6$ c) $-x + 3$ d) $2x - 2$

211. Laske lausekkeen $a^2 + 3b$ arvo, kun

- a) $a = 3$ ja $b = 3$ b) $a = -2$ ja $b = 4$
c) $a = 4$ ja $b = -8$ d) $a = -5$ ja $b = -6$

212. Kirjoita matemaattisena lausekkeena
- a) 3 enemmän kuin x
 - b) 5 vähemmän x
 - c) x lisättynä lukuun 6
 - d) 4 vähennettynä luvusta x
 - e) 7 kerrottuna x
 - f) x jaettuna 2
 - g) 3 jaettuna x
 - h) x kerrottuna itsellään
213. Laske edellisen tehtävän lausekkeiden arvot, kun $x = -1$.
214. Kynäkotelossa on n kappaletta kyniä. Montako kynää sinne jää, kun otat pois kynistä
- a) 2
 - b) 5
 - c) n ?

Soveltavat tehtävät

215. Kirjoita matemaattisena lausekkeena.
- a) Vähennä lukujen a ja b tulosta luku 9.
 - b) Lisää lukujen a ja b osamäärään luku 3.
 - c) Jaa lukujen a ja b summa lukujen a ja b erotuksella.
 - d) Jaa lukujen 9 ja a erotus luvulla b .
216. Laske edellisen tehtävän lausekkeiden arvot, kun $a = -4$ ja $b = 2$.
217. Yhdessä laatikossa on 24 omenaa. Paljonko omenoita on yhteensä, jos laatikoita on
- a) a kappaletta?
 - b) 10 kappaletta?
218. Koiria on tarhassa n kappaletta. Mitä voitaisiin kuvata lausekkeella
- a) n
 - b) $2n$
 - c) $4n$?

219. Koordinaatistoon piirrettyä suoraa voidaan kuvata lausekkeen (yhtälön) avulla. Jokaisella suoralla on omanlaisensa lauseke. Erään suoran lauseke on $y = x + 1$. Lausekkeessa x kuvaa suoralla olevan pisteen x -koordinaatin arvoa ja vastaavasti y kuvaa saman pisteen y -koordinaatin arvoa. Laske lausekkeen avulla y -koordinaatin arvo, kun

a) $x = 0$ b) $x = 2$ c) $x = -3$

d) Miten voit piirtää suoran $y = x + 1$ koordinaatistoon?

Vaativat tehtävät

220. *Laskintehtävä:* Määritä lausekkeen $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) : (x + y)$ tarkka arvo, kun $x = \frac{7}{3}$ ja $y = \frac{3}{7}$. (yo kevät 1985)
Tee sama myös ilman laskinta. Muista tämä tehtävä ja palaa siihen, kun osaat binomeja keskenään kerrottuasi sieventää lausekkeen! Jos silloin binomien keskenään kertomisen ”purku” ei onnistu, kysy opelta pientä vinkkiä!

221. Määritä lausekkeen $\frac{ax}{b}$ arvo, kun $a = \frac{2}{5}$ ja x on kolmasosa b :stä. (yo syksy 1999)

11 Polynomi

Kertoimen ja muuttujaosan tuloa sanotaan termiksi.

$$\begin{array}{c} \text{termi} \\ \text{---} \\ -5x^2 \\ \text{kerroin} \quad \text{---} \quad \text{muuttujaosa eli kirjainosa} \end{array}$$

Termeissä esiintyvät kirjaimet eli muuttujat tarkoittavat käytännössä joitakin lukuarvoja saavia asioita. Käytännössä tällaisia ovat tuntipalkka, lämpötila, auton nopeus jne. Nämä ovat suureita. Polynomeista ja termeistä puhuttaessa samaistamme muuttujat kuitenkin yksiköiksi, olipa yksikkö sitten ”kissojen lukumäärä”, ”pituus” tai ”nestemäärän tilavuus”. Tämä myös helpottaa esimerkiksi yhteenlaskusääntöjen sisäistämistä seuraavissa luvuissa.

Noudata seuraavia sääntöjä termejä kirjoittaessasi ja tulkitessasi:

- Kerroin (luku) kirjoitetaan ennen muuttujia (kirjaimet).
- Kertomerkki jätetään merkitsemättä luvun ja muuttujan tulossa.
- Kertomerkki jätetään merkitsemättä useampien muuttujien tulossa.
- Luku 1 kertoimena jätetään merkitsemättä muuttujan eteen.
- **Etumerkki** on osa termiä ja se kirjoitetaan ensimmäiseksi.

Erittäin tärkeää on muistaa, että jos esimerkiksi vaihdat termien paikkoja keskenään, *niiden etumerkit siirtyvät niiden mukana!*

Esimerkki 1

Sievennetään lausekkeet.

$$\text{a) } 4 \cdot x = 4x \qquad \text{b) } b \cdot 3 = 3b \qquad \text{c) } 1 \cdot y = y$$

$$\text{d) } -1 \cdot a = -a \qquad \text{e) } 5 \cdot (-x) \cdot y = -5xy$$

Esimerkki 2

Tarkastellaan mikä osa termistä on kerroin ja mikä muuttujaosa.

termi	kerroin	muuttujaosa
$2x^3$	2	x^3
ab^2	1	ab^2
$-xyz$	-1	xyz
-8	-8	ei ole

Muuttujaosassa voi olla useita kirjaimia.

Jos kerroin on 1, sitä ei merkitä termissä näkyviin.

Termiä, jossa ei ole muuttujaa, sanotaan *vakioiksi*.

Muuttujaosassa esiintyvät numerot ovat aina muuttujakirjainten eksponentteja. Jos muuttujaosassa esiintyy muita kuin eksponentteja, on joku kirjoittanut kaksi termiä peräkkäin ja tällöin hän on tarkoittanut kahden termin kertolaskua. Termin korkeinta eksponenttia kutsutaan termin asteeksi.

$3x^2$ on yksi termi, mutta $3x^2$ on kahden termin, "3x" ja "2" kertolasku (eli sievennettynä $6x$). Jälkimmäisessä tapauksessa on tapana käyttää kertopistettä termien välillä selkeyden vuoksi, vaikka syntaktisesti sen voikin jättää pois.

Pienenä huomiona, että termissä (ja siten polynomissa) ei saisi esiintyä muuttujakirjain jakana. Esimerkiksi $2x$ on termi, mutta $\frac{2}{x}$ ei ole termi, vaan kahden termin, "2" ja

”x” jakolasku. Joskus tästä ”joustetaan” merkitsemällä jakava muuttujakirjain kirjainosaan negatiivisella eksponentilla, jolloin laskeminen onnistuu aivan normaalisti.

Kun termejä lasketaan yhteen, muodostuu polynomi. Polynomia, jossa on vain yksi termi sanotaan monomiksi, kaksitermistä binomiksi ja kolmitermistä trinomiksi. Polynomin asteluvulla tarkoitetaan sen asteluvultaan korkeimman termin astelukua.

Aste (eli eksponentti) on tärkeä kirjainlaskennassa siksi, että korkea aste käytännössä määrää polynomin arvon etenkin suurilla luvuilla laskettaessa. Ajatteleppa vaikka tällaista polynomia:

$$x^3 + 3x^2 + 5x + 7$$

Jos $x = 0$, tulee tämän polynomin arvoksi 7.

Jos $x = 1$, tulee tämän polynomin arvoksi **1** + 3 + 5 + 7.

Jos $x = 2$, tulee arvoksi **8** + 12 + 10 + 7.

Jos $x = 3$, tulee arvoksi **27** + 27 + 15 + 7.

Jos $x = 4$, tulee arvoksi **64** + 48 + 20 + 7.

Jos $x = 5$, tulee arvoksi **125** + 75 + 25 + 7.

Ja nyt alamme jo nähdä, miten tärkeä tuo alkuvaiheessa pieneltä näyttänyt x^3 on:

Jos $x = 6$, tulee arvoksi **216** + 108 + 30 + 7.

Jos $x = 7$, tulee arvoksi **343** + 147 + 35 + 7.

Nyt siis korkein aste on jo yksinään enemmän, kuin muut yhteensä.

Mutta kun $x=1000$, on peli jo pitkälti pelattu. Kun $x=10000$ voimme pikkuhiljaa (eli tuloksen käyttötarkoituksesta riippuen) miettiä, kannattaako muiden termien arvoja edes huomioida!

Kaiken kaikkiaan polynomin käsitteen ymmärtäminen on perusta yhtälöiden (matemaattisten lausekkeiden) muodostamiselle ja ratkaisemiselle. Tähän kannattaa panostaa.

Esimerkki 3

- a) Polynomi $-4x^3 + 6x - 2$ on trinomi ja sen asteluku on 3.
- b) Polynomi $2y$ on monomi ja sen asteluku on 1.
- c) Polynomi $2x^2y - 3x$ on binomi ja sen asteluku on 2.
-

Esimerkki 4

Lasketaan trinomin $2a^3 + 5b - 1$ arvo, kun $a = 4$ ja $b = -3$. Sijoitetaan muuttujien a ja b arvot trinomiin vastaavien muuttujien paikalle:

$$2a^3 + 5b - 1 = 2 \cdot 4^3 + 5 \cdot (-3) = 2 \cdot 64 - 15 = 113.$$

229. Onko väite totta?

- a) Polynomiksi sanotaan summalauseketta, jonka yhteenlaskettavat ovat monomeja.
- b) Vakiotermi ei ole monomi.
- c) Myös pelkät monomit ovat polynomeja.
- d) On olemassa termejä, joilla ei ole kerroinosaa.
- e) On olemassa termejä, joilla ei ole muuttujaosaa.

230. Nimeä polynomit termien lukumäärän mukaan.

- a) $3a + 4b - 2c$
- b) $-2xy$
- c) $x + 3y^2$
- d) $-2a - 3$

231. Keksi itse jokin

- a) monomi
- b) binomi
- c) trinomi.

232. Luettele polynomien $2a^3 + 8a + 3ab - 4b^2 - 6$

- a) termit
- b) termien kertoimet
- c) vakiotermit.

233. Jäljennä taulukko vihkoosi ja laske polynomien $-2x + 4$ arvo taulukossa olevilla x :n arvoilla.

x	$-2x + 4$
2	
1	
0	
-1	
2	

Soveltavat tehtävät

234. Ota riittävä määrä alla olevista termeistä ja muodosta niistä jokin

a) monomi b) binomi c) trinomi d) polynomi.

$$ab, 4x, \frac{2c}{d}, -\frac{5y}{3x}, -23a^2, \frac{4ac}{5b}$$

235. Laske polynomin $2a^2 - 6a + 5$ arvo, kun

a) $a = 1$ b) $a = 3$ c) $a = -2$

236. Laske polynomin arvo, kun $a = -4$ ja $b = -3$

a) $a + b$ b) $-2ab$ c) $a^2 - 2ab + b^2$

237. Suorakulmion piiri lasketaan kaavalla $p = 2(a + b)$, jossa a ja b ovat sivujen pituudet. Laske suorakulmion piiri, kun

a) $a = 2,3$ cm ja $b = 4,1$ cm

b) $a = 57$ mm ja $b = 23$ mm

238. Mitkä ovat monomien asteluvut?

a) $3z$ b) $4x^2y$ c) ab d) $12a^2b^3c$

239. Mikä on vakiotermin asteluku?

240. Millä muuttujan x arvolla binomi $2x - 6$ saa arvon

a) -2 b) 0 c) 4 d) -11

241. Laske polynomin $-7x^3 + 12x - 8$ arvo, kun

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 0$.

242. Laske polynomin $4y^2 - 3yz - 2z^2$ arvo, kun

a) $y = 1$ ja $z = -1$ b) $y = 2$ ja $z = 1$

c) $y = -1$ ja $z = 0$.

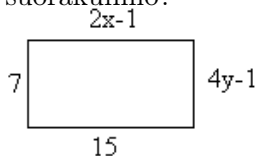
Vaativat tehtävät

243. Määritä polynomien asteluku.

a) $(2x^3 - 5)^2 + 3x$ b) $(-2x)^6 + 7$

c) $4x^2 - 2(x - 1)^3$

244. Mitkä x :n ja y :n arvojen on oltava, jotta kuvassa olisi suorakulmio?



245. Millä x :n arvolla polynomit $2x + 1$ ja $3x - 2$ saavat saman arvon?

12 Termien yhdistäminen ja järjestäminen

Termit ovat samanmuotoisia, jos niillä on täsmälleen sama kirjainosa. Myös vakiot ovat keskenään samanmuotoisia.

Vain keskenään samanmuotoiset termit voidaan yhdistää yhteen- ja vähennyslaskussa. Yhdistettäessä samanmuotoisia termejä lasketaan kertoimien summa tai erotus ja kirjainosa pysyy samana.

Esimerkki 1

Sievennetään lausekkeet, jos mahdollista.

a) $17\text{€} + 4\text{€} = 21\text{€}$

b) $150\text{ m} - 35\text{ m} = 115\text{ m}$

c) $6x + 9x = 15x$

d) $18\text{ cm} + 101\text{ €}$ Ei voida yhdistää, koska termeillä on eri kirjanosat.

e) $5a - 3b$ Ei voida yhdistää, koska termeillä on eri kirjanosat.

Esimerkki 2

Sievennetään lausekkeet.

Yhdistettävät termit otetaan etumerkkeineen.

a) $2x - 5 + x + 3 = 3x - 2$

b) $4x + 5y + 2x - 3y - x = 5x + 2y$

c) $2x^2 + x - 2 - 4x^2 + 1 = -2x^2 + x - 1$

Älä unohda ratkaisusta termejä, joita ei voi yhdistää mihinkään.

Polynomien termit järjestetään tavallisesti kirjainosien mukaiseen aakkosjärjestykseen siten, että kirjainosien asteet (eli eksponentit) pienenevät vasemmalta oikealle. Vakiotermit kirjoitetaan viimeiseksi.

Esimerkki 3

a) $-3a^2 + 6 + a^4 = a^4 - 3a^2 + 6$

b) $ab + 2a^3 - 4b + b^2 = 2a^3 + ab + b^2 - 4b$

Tehtäviä

246. Sievennä.

a) $+(-3)$ b) $+(+2)$ c) $-(+5)$ d) $-(-4)$

247. Laske.

a) $16+(-4)$ b) $-34-3$ c) $15-27$ d) $40-(-20)$

e) $19-(12-3)$

248. Laske.

a) $5 \text{ kg} + 11 \text{ kg}$ b) $51 \text{ €} + 6 \text{ €}$

c) $18\frac{m}{s} - 4\frac{m}{s} + 1\frac{m}{s}$ d) $8x + 9x$

249. Laske.

a) $3 \text{ koiraa} + 4 \text{ kissaa} + 6 \text{ koiraa}$

b) $6 \text{ km} - 3 \text{ min} + 7 \text{ min}$

c) $5 \text{ cm} + 4 \text{ €} - 2 \text{ cm} + 6 \text{ €}$

d) $10x + 4y + 9y - 2x$

250. Paljonko sinulla on rahaa jäljellä, jos ostoksille läh-
tiessä sinulla oli

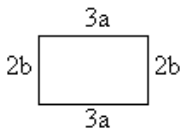
a) 20 € ja ostokset maksoivat 14 € ?

b) 30 € ja ostokset maksoivat $x \text{ €}$?

c) $x \text{ €}$ ja ostokset maksoivat 23 € ?

d) $4x \text{ €}$ ja ostokset maksoivat $x \text{ €}$?

251. Muodosta ja sievennä suorakulmion piirin lauseke.



252. Yhdistä samanmuotoiset termit.

a) $4x + 9x + x$

b) $2a + 6a + 3a$

c) $7c + 8c + 9c$

d) $6x^2 + 9x^2 + 2x^2$

253. Sievennä.

a) $2a + 3a$

b) $2b - 3b$

c) $5 + c - 2c$

d) $2a + b + 2$

254. Sievennä.

a) $6x - 3x + 2x$

b) $7x - 9x - 4x$

c) $-4a - 5a + a$

d) $-5c + 6c - 5c$

255. Järjestä polynomit.

a) $-4b + 6 - a + 2c$

b) $2x + 4 + 3z - y$

c) $2 - x + y$

d) $-7u + 2t + v + 8$

256. Järjestä polynomit.

a) $-x + 7 + x^2$

b) $4y^2 - 5 + y^3 - 2y$

c) $u^3 - 9u + u^2 + 5u^4$

d) $5x + 7 - x^4$

Soveltavat tehtävät

257. Sievennä.

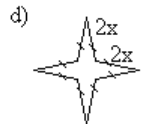
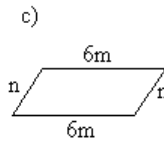
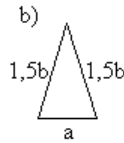
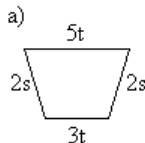
a) $5x + 8y + 7x + 4y$

b) $2a^2 - 9a - 4a + 6$

c) $5x - 4xy + 7y + 3x + 2xy$

d) $8ab - 5ab + 6ba - 4ab$

258. Laske kuvioiden piirit.



259. Mitkä seuraavista termeistä ovat keskenään samanmuotoisia?

a) $3a$, $-7c$, $\frac{3}{5}d$, $\frac{3a}{5}$, $3b$, $-7a$

b) x^2y , $-\frac{5xy}{2}$, $\frac{7x^2y}{5}$, $\frac{5}{2xy}$, $\frac{8}{3x^2y}$, $-4x^2y$

260. Sievennä.

a) $ab + ba$

b) $3xy - yx$

c) $3x^2 + x + 2x^2 - 2x$

d) $m^2 - 2m + m^2 + m$

Vaativat tehtävät

261. Sievennä.

a) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}x$

b) $-\frac{x^2}{3} - 4x^2$

c) $2\frac{1}{6}x^3 - 1\frac{1}{2}x^3 - x^3$

262. Sievennä.

a) $-3a - (-5a)$

b) $7b - (+3a) + b - 2b$

c) $-c + (-c) + 2b + 3a$

263. Sievennä.

a) $-x^2y + 2xy^2 + (-9x^2y) - (-xy^2)$

b) $-4x - (-5x) - 2x^2 + (-10x^2) - 6x$

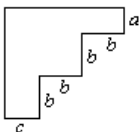
264. Etsi kaksi monomia, joiden summa on

a) $-15x$

b) $2ab$

c) $3a - b$

265. Merkitse kirjainlausekkeena oheisen tasokuvion piiri. (pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen, kevät 1994)



13 Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

Polynomien yhteen- ja vähennyslaskuissa on oltava tarkkana, kun sulkeita poistetaan. Sulkeiden edessä oleva plusmerkki ei aiheuta muutoksia termien etumerkkeihin, kun sulkeet poistetaan. Jos sulkeiden edessä on miinusmerkki, on kaikkien termien etumerkit vaihdettava vastakkaisiksi sulkeita poistettaessa. Jos et muista, miten kahden etu- ja laskumerkin yhdistelmät korvataan yhdellä merkillä, palauta ne mieleen seuraavasta taulukosta. Nämä on osattava.

merkkiyhdistelmä	korvataan merkillä	esimerkki
$+(+)$	$+$	$+(+2) = 2$
$-(+)$	$-$	$-(+2) = -2$
$+(-)$	$-$	$+(-2) = -2$
$-(-)$	$+$	$-(-2) = 2$

Kahta polynomia, joiden summa on nolla, sanotaan toistensa vastapolynomeiksi. Polynomien vastapolynomi saadaan vaihtamalla polynomien jokaisen termin etumerkki.

Esimerkki 1

Muodostetaan ja sievennetään polynomien $2a+3$ ja $-5a+1$ summa.

Summa merkitään $(2a+3) + (-5a+1)$.

$$(2a+3) + (-5a+1) = 2a+3-5a+1 = -3a+4$$

└ Sulkeiden edessä oleva plusmerkki ei aiheuta muutoksia termien etumerkkeihin, kun sulkeet poistetaan.

Esimerkki 2

Muodostetaan ja sivennetään polynomin $-6a^2 + b - 1$ vastapolynomi.

Vastapolynomi muodostetaan kuten vastaluku eli laitetaan polynomin eteen miinusmerkki.

Muista laittaa polynomi sulkeisiin, jotta miinus vaikuttaa polynomin jokaiseen termiin.

$$-(-6a^2 + b - 1) = 6a^2 - b + 1$$

— Koska sulkeiden edessä on miinusmerkki, on sulkeita poistettaessa kaikkien termien etumerkit muutettava vastakkaisiksi.

Esimerkki 3

Muodostetaan ja sievennetään polynomien $2a + 3$ ja $-5a + 1$ erotus.

Polynomit vähennetään toisistaan lisäämällä ensimmäiseen polynomiin jälkimmäisen polynomin vastapolynomi.

$$(2a + 3) - (-5a + 1) = 2a + 3 + 5a - 1 = 7a + 2$$

— Koska sulkeiden edessä on miinusmerkki, on sulkeita poistettaessa kaikkien termien etumerkit muutettava vastakkaisiksi.

Esimerkki 4

Lasketaan polynomin $a - 3a^2 + 4 - 5a - (3 - 2a^2 - 4a)$ arvo, kun $a = 10$.

Ennen muuttujan arvon sijoittamista polynomi kannattaa sieventää!

$$a - 3a^2 + 4 - 5a - (3 - 2a^2 - 4a) = a - 3a^2 + 4 - 5a - 3 + 2a^2 + 4a = -a^2 + 1$$

Sijoitetaan sievennettyyn lausekkeeseen $-a^2 + 1$ muuttujan a paikalle 10

$$-10^2 + 1 = -100 + 1 = -99$$

Tehtäviä

266. Poista sulkeet.

- a) $-(4x - 3)$ b) $-(-2x - y)$
c) $+(y - 5)$ d) $-(-8x + 2y - 4)$

267. Sievennä.

- a) $(x + 3) + (x + 3)$ b) $(2x - 3) - (2x + 3)$
c) $(5x + 1) - (5x + 1)$ d) $-(4x + 6) - (4x + 6)$

268. Muodosta ja sievennä polynomien vastapolynomit.

- a) x b) $-3a$
c) $5x + 4y$ d) $a - 7b + 2c$

269. Sievennä.

- a) $(4a + 3) + (8a + 5)$ b) $10a + (5a + 4)$
c) $(15a + 6) + (-14a + 2)$ d) $(-a - 7) + (-2a - 1)$

270. Sievennä.

- a) $(8x + 5) - (x + 1)$ b) $-x - (7x + 3)$
c) $(5x + 9) - (-2x - 5)$ d) $(-7x - 3) + (-4 - x)$

271. Vähennä binomista $12a^2 - 5b$

- a) monomi $6b$ b) binomi $-3a^2 + 2$
c) trinomi $a^2 - 4b - 8$

272. Laske lausekkeen $(2a + 1) + (4a + 3)$ arvo, kun

- a) $a = 1$ b) $a = 3$ c) $a = -2$

273. Poista sulkeet ja sievennä.

a) $-(a + 1) - (1 - a)$

b) $3a + (5a + 2a) - (4a + 2a)$

Soveltavat tehtävät

274. Laske binomien $2x - y$ ja $y - 2x$

a) summa

b) erotus.

275. Vähennä trinomista $4x^2 + 6x - 7$ binomien $-x^2 - 3x$ ja $-2x + 4$ erotus.

276. Laske edellisen tehtävän polynomin arvo, kun

a) $x = 2$

b) $x = -2$.

277. Muodosta polynomin $-43a^5 + 7a^2 + 6b - 2$

a) vastapolynomi

b) vastapolynomin vastapolynomi.

278. Sievennä.

a) $(5x^2 - 5) - (x^2 + 5x + 5)$

b) $(5x^2 - 5) + (x^2 + 5x + 5)$

279. Poista sulkeet ja yhdistä samanmuotoiset termit.

a) $(5b - 4a) - (7a + 6b) + (2b + 5a)$

b) $(5x - 2y) - (7x + 7y) + (3x + 8y)$

c) $(12x - 7) + (3x - y) - (2 - x)$

280. Laske lausekkeen $(5a + b) - (-2a + 1)$ arvo, kun

a) $a = 1, b = 1$

b) $a = -2, b = 3$

c) $a = -3, b = -4$

281. Sievennä ja laske polynomien arvo, kun $x = -2$.

a) $2x^3 - 3x^2 + 4x + (-2x^3 + 4x^2 - 9x)$

b) $7x^3 + 8x - (6x^3 - 4x^2 - x) - 4x^2$

282. Mikä on puuttuva polynomi?

a) $4x - () = -3x - 1$

b) $x^2 - 3 + () = -10x^2 - 11$

c) $-2x^3 - () = -7x^3 + 7x^2$

Vaativat tehtävät

283. Laske kahden parillisen kokonaisluvun 2^m ja 2^n neliöiden summa.

284. Sievennä.

a) $(-5x^2 - x) + (\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{7}x)$

b) $(-5x^2 - x) - (\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{7}x)$

285. Laske lausekkeen $5x^2 + 2x - 5 - (-3 + 3x^2) - 2x^2$ arvo, kun

a) $x = 1423$ b) $x = -100$ c) $x = \frac{4}{5}$.

14 Monomin kertominen monomilla

Tarkastellaan kahden monomin $3a^2$ ja $5a^4$ tuloa. Molemmat termeistä muodostuvat kertoimen ja muuttujaosan tulosta, joten $3a^2 \cdot 5a^4$ voidaan kirjoittaa muodossa

Kerrottavien paikkaa voidaan vaihtaa,
koska tulo on rippumaton tekijöiden järjestyksestä.

$$3a^2 \cdot 5a^4 = 3 \cdot a^2 \cdot 5 \cdot a^4 = 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a^4 = 15 \cdot a^{(2+4)} = 15a^6$$

kertoimien tulo — | — muuttujaosien tulo

Kun kerrot kaksi monomia keskenään:

1. Selvitä etumerkki kertolaskun etumerkkisäänöllä, voit kirjoittaa sen jo nyt vastaukseen.
2. Kerro molempien monomien etumerkittömät kertoimet keskenään ja kirjoita tulo jo nyt vastaukseen.
3. Selvitä uusi muuttujakirjainosa ja kirjoita se täydentääksesi uuden saamasi monomin valmiiksi.

Jos monomeissa on muuttujina samoja kirjaimia, sovelletaan niiden kertolaskussa potenssien laskusääntöjä. Jos muuttujina on eri kirjaimia, jäävät ne vastaukseen sellaiseen kertolaskumuotoiseen eikä niitä voida yhdistää.

Esimerkki 1

Sievennetään lausekkeet.

- a) $4 \cdot 3x = 12x$
- b) $2 \cdot (-4y) = 2 \cdot (-4) \cdot y = -8y$
- c) $-5x^2 \cdot (-3) = -5 \cdot (-3) \cdot x^2 = 15x^2$
- d) $3 \cdot (-xy) = 3 \cdot (-1) \cdot xy = -3xy$

Esimerkki 2

Lasketaan monomien tulot.

a) $2x \cdot (-3x) = 2 \cdot (-3) \cdot x \cdot x = -6x^2$

b) $4a \cdot 5b = 4 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 20ab$

c) $-x \cdot (-3y) = (-1) \cdot (-3) \cdot x \cdot y = 3xy$

d) $2y \cdot 4y^2 \cdot (-y^2) = 2 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot y \cdot y^2 \cdot y^2 =$
 $-8 \cdot y^{(1+2+2)} = -8y^5$

e) $-5ab \cdot 2a = -5 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b = -10a^2b$

Tehtäviä

286. Laske.

a) $4 \cdot 5$ b) $-6 \cdot 7$ c) $8 \cdot (-9)$ d) $-11 \cdot (-8)$

287. Sievennä.

a) $3 \cdot b$

b) $g \cdot 7$

c) $5 \cdot f \cdot 3 \cdot f$

d) $-9 \cdot e \cdot f \cdot (-2)$

288. Laske.

a) $a^2 \cdot a^4$ b) $2b \cdot b^3$ c) $3c^2 \cdot 4c^5$ d) $-3d^3 \cdot 6d^4$

289. Muodosta ja sievennä monomien $3x$ ja $-2x$

a) summa

b) erotus

c) tulo.

290. Laske.

a) $3x \cdot 2x^2$ b) $x \cdot 4$ c) $-5x \cdot 2$ d) $-x^2 \cdot (-4x^2)$

291. Merkitse ja laske monomien tulo.

a) $3x$ ja $2x$

b) $-6y$ ja y^5

c) $-9x$ ja -1

d) y^6 ja $2y^2$

292. Laske.

a) $3a \cdot 2b$ b) $a^2 \cdot 2b$ c) $2b \cdot 5a$ d) $2a \cdot (-2b)$

293. Paljonko maksaa yhteensä

a) 5 ruusua, kun yhden hinta on 1 €

b) x ruusua, kun yhden hinta on 2 €

c) 4 ruusua, kun yhden hinta on x €

d) y ruusua, kun yhden hinta on x € ?

294. Laske.

a) $-x \cdot (-y)$

b) $-3x^3 \cdot xy$

c) $2xy^2 \cdot 2xy^2$

d) $x^3y \cdot (-x^3y)$

295. Sievennä.

a) $mn \cdot m^3n^2$

b) $a^2b \cdot 2ba^2$

c) $3st^3 \cdot 2s^2t$

d) $2p \cdot 3p^2 \cdot (-2p)$

Soveltavat tehtävät

296. Päättele puuttuva monomi.

a) $8x^4 \cdot \dots = 16x^5$

b) $-2x^4 \cdot \dots = -14x^6$

c) $\dots \cdot 7x^7 = -63x^7$

d) $\dots \cdot (-6x) = 24x^3$

297. Etsi kaksi monomia, joiden tulo on

a) $6x^2$

b) a^2bc

c) $15y^3$.

298. Sievennä.

a) $3x \cdot 5 - 3 \cdot 3x$

b) $2y \cdot 6y - 3 \cdot 4y^2$

c) $-5x \cdot 2y + 7x \cdot (-y)$

d) $-y^2 + 3y \cdot 2z$

299. Sievennä.

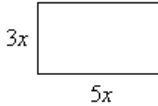
a) $-xy \cdot 5 - 3 \cdot 3x$

b) $2y \cdot xy + 3x \cdot 4y^2$

c) $-5x \cdot 2y \cdot y + 12x \cdot (-y)^2$

d) $-y^2 + (3y)^2 \cdot 2 - 8y \cdot \left(-\frac{y}{2}\right)$

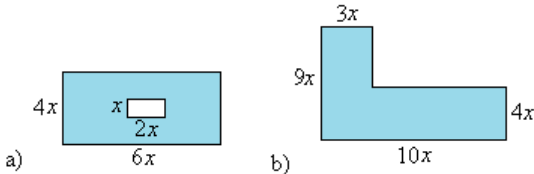
300. Laske suorakulmion



a) piiri

b) pinta-ala.

301. Mikä on tummennetun alueen pinta-ala?



a)

b)

Vaativat tehtävät

302. Päätele puuttuva monomi.

a) $-5a^4 \cdot \dots = 20a^5$

b) $8b^{10} \cdot \dots = -16ab^{11}$

c) $7ab \cdot \dots = 14b^2$

d) $-5a^3 \cdot \dots = \frac{-10}{a}$

303. Sievennä.

a) $4a \cdot 3a^4 \cdot 5a^2$

b) $-b \cdot 7b^2 \cdot 2b^3$

c) $c^2d \cdot (-4cd) \cdot (-4c^{-2}d^{-1})$

d) $g^{-2}h^7 \cdot 8g^3h^2 \cdot 2gh^{-1}$

304. Sievennä.

a) $\frac{3}{7}a^2 \cdot 1\frac{1}{6}a$

b) $-\frac{7}{8}b \cdot \left(-\frac{2}{21}ab^3\right)$

c) $3\frac{2}{5}c^2 \cdot 1\frac{5}{17}c^2$

305. Sievennä.

a) $-3x^a y^2 \cdot 4x^a y^a$

b) $kx^{b-1}y^{2-b} \cdot (-kx^{b+1}y^b)$

15 Polynomin kertominen monomilla

Normaaleja laskusääntöjä noudattaen lauseke $2(3+4)$, joka siis tarkoittaa samaa kuin $2 \cdot (3+4)$, sievennetään seuraavasti: $2(3+4) = 2 \cdot 7 = 14$. Samaan tulokseen päädytään myös kertomalla ensiksi molemmat yhteenlaskettavat erikseen $2(3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$.

Jos lausekkeessa olisi mukana muuttujia, jotka estäisivät suluissa olevan summan sieventämisen, antaa jälkimmäinen tapa mahdollisuuden sulkujen poistamiseen.

Kun kerrot monomilla polynomin, kerro polynomin jokainen termi monomilla erikseen.

Tulot etumerkkeineen lasketaan sen jälkeen yhteen.

Eli: $a(b+c) = ab+ac$

Esimerkki 1

Kerrotaan polynomi monomilla.

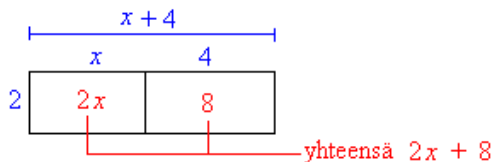
$$3(2x-5) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-5) = 6x - 15$$

Molemmat sulkujen sisällä olevat termit kerrotaan erikseen ja lasketaan saadut termit yhteen.

Esimerkki 2

Lasketaan $2(x+4)$.

Päätelyn apuna voidaan käyttää suorakulmiota, jonka sivujen pituudet ovat 2 ja $(x+4)$. Vastaus saadaan suorakulmion pinta-alasta.



Vastaus: $2x + 8$

Esimerkki 3

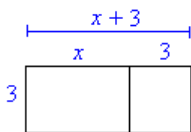
Kerrotaan polynomit monomilla.

a) $a(-3a + 4) = a \cdot (-3a) + a \cdot 4 = -3a^2 + 4a$

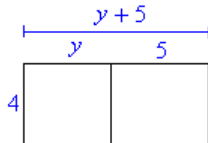
b) $3y^2(y - 2) = 3y^2 \cdot y + 3y^2 \cdot (-2) = 3y^3 - 6y^2$

Tehtäviä

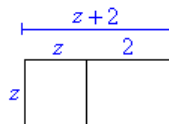
306. Sievennä käyttäen apuna suorakulmion pinta-alamallia.



a) $3(x+3) =$

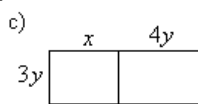
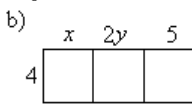
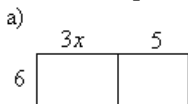


b) $4(y+5) =$



c) $z(z+2) =$

307. Muodosta pinta-alojen lausekkeet ja sievennä ne.



308. Laske edellisen tehtävän pinta-alojen arvot, kun $x = 2$ ja $y = 3$.

309. Laske.

a) $3x(x+1)$

b) $2(3x-4y)$

c) $-2y(1+y)$

d) $-2(-5x+y)$

310. Poista sulkeet.

a) $3(2m+4)$

b) $5(-s-3)$

c) $4(3t-v)$

d) $-5(2-5b)$

311. Poista sulkeet.

a) $x(x+4)$

b) $x(2-3x)$

c) $3x(x-6)$

d) $(5x-7) \cdot 2x$

312. Laske edellisen tehtävän lausekkeiden arvot, kun $x = -2$.

313. Poista sulkeet ja sievennä.

a) $3(x - 1) + 3$

b) $4(x - 2y) - y$

c) $x^2 + 2x(x - 3)$

d) $-5(x - y) + 2y$

314. Poista sulkeet ja sievennä.

a) $5x - 3(x - 2)$

b) $2x - x(1 + x)$

c) $4x - 2(3 + x)$

d) $5x - 3(x - 2)$

315. Poista sulkeet ja sievennä.

a) $5(t + 3) - 5t$

b) $r(r - 4) + r^2$

c) $-8(r - s) + 3s$

d) $-2w(4 - 7w) + 6w^2$

Soveltavat tehtävät

316. Poista sulkeet ja sievennä.

a) $2(x + 1) + 3(x + 2)$

b) $x(x + 1) + 2(x + 3)$

c) $-(x - 4) + 3(-x + 1)$

d) $3x(x - 2) + 5(x^2 - x)$

317. Poista sulkeet ja sievennä.

a) $8(2e - 1) - 4(e - 2)$

b) $f(3f + 2) + 2f(3 - f)$

c) $u(u - 2) - u(2u - 1)$

d) $-5g(6 - 2g) - 3(g^2 - g)$

318. Täydennä.

a) $2x + 2y = 2(\dots + \dots)$

b) $6x - 3y = 3(\dots - \dots)$

c) $6x - 8y = 2(\dots - \dots)$

d) $x^2 - 3x = x(\dots - \dots)$

319. Päättele puuttuva monomi.

a) $(\quad)(2x-3) = 6x^2 - 9x$

b) $(\quad)(-y + 1) = -2y^2 + 2y$

c) $(\quad)(4x^3 - 2x) = -8x^3 + 4x$

320. Päättele puuttuva binomi.

a) $-2x(\quad) = -6x^2 + 2x$ b) $3y(\quad) = (3xy - y^2)$

c) $-y^2(\quad) = 2xy^2 - 3y^3$

321. Aikuisen lippu taidegalleriaan maksaa x euroa, lasten lippu maksaa 2 euroa vähemmän.

a) Kirjoita lauseke, joka kuvaa lasten lipun hintaa.

b) Antti vei kolme lastansa taidegalleriaan. Kuinka paljon hänen ja lasten liput tulivat kokonaisuudessaan maksamaan?

Vaativat tehtävät

322. Laske kahden peräkkäisen kokonaisluvun n ja $n + 1$ summan ja erotuksen tulo.

323. Merkitse ja laske lausekkeet, kun $P(x) = -3x^2$ ja $Q(x) = 2x^4 - 4x$.

a) $2 \cdot Q$ b) $-P \cdot P$ c) $P \cdot (-Q)$

d) $P + P \cdot Q$ e) $P \cdot P - Q$ f) $-P \cdot Q + P$

324. Millä x :n arvoilla tulo $3x^2(x + 4)$ saa negatiivisia arvoja? (yo kevät 1995)

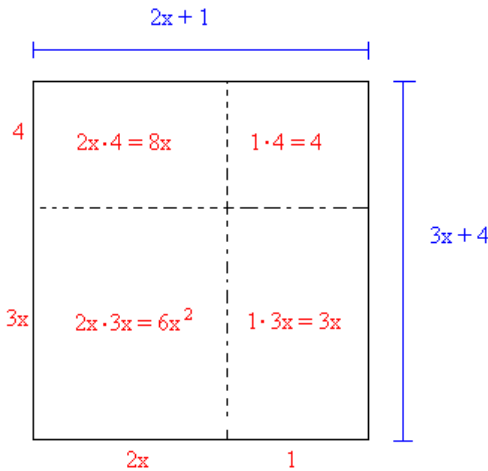
325. Osoita, että kaikki kolminumeroiset luvut, joiden keskimääräinen numero on yhtä suuri kuin muiden summa, ovat jaollisia yhdellätoista. Tällaisia lukuja ovat esimerkiksi 110, 385, 594 ja 990.

16 Polynomin kertominen polynomilla

Nyt osaat kertoa monomin monomilla, mikä oli edellytys sille, että sait kerrottua polynomin monomilla (polynomin kertominen monomillahan tuotti useita kahden monomin tuloja, kuten huomasit). Seuraavaksi kerromme aivan vastaavalla tavalla polynomin polynomilla. Tämän tekeminen tuottaa useita polynomin ja monomin tuloja, joista seuraa edelleen useita kahden monomin tuloja. Menetelmä ei ole monimutkainen, mutta työtä se teettää: kirjoitustyötä! Ole huolellinen kirjatessasi välivaiheita!

Esimerkki 1

Määritetään suorakulmion pinta-ala, kun sen sivujen pituudet ovat $2x + 1$ ja $3x + 4$.



Pinta-ala on neljän pienemmän suorakulmion alojen summa

$$A = 6x^2 + 8x + 3x + 4 = 6x^2 + 11x + 4$$

Toisaalta pinta-ala saadaan lasketuksi myös suorakulmion sivujen pituuksien tulona.

$$(2x + 1) \cdot (3x + 4) = \underline{2x \cdot 3x} + \underline{2x \cdot 4} + \underline{1 \cdot 3x} + \underline{1 \cdot 4} = 6x^2 + 8x + 3x + 4 = 6x^2 + 11x + 4$$

Vastaus: Suorakulmion pinta-ala on $6x^2 + 11x + 4$.

Kun polynomi kerrotaan polynomilla, jokaisella kertojan termillä kerrotaan jokainen kerrottavan termi. Saadut tulot kirjoitetaan etumerkkeineen peräkkäin ja lasketaan yhteen.

Eli kun kerrot

$$\text{binomin binomilla: } (a + b)(c + d) = \\ ac + ad + bc + bd.$$

$$\text{trinomin binomilla: } (a + b)(c + d + e) = \\ ac + ad + ae + bc + bd + be.$$

$$\text{trinomin trinomilla: } (a + b + c)(d + e + f) = \\ ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf.$$

Mutta huomaa, että ylärajaa termien määrille ei ole!

Polynomien kertolaskuissa tulee helposti huolimattomuusvirheitä. Käy kertolaskut järjestelmällisesti läpi, piirrä nuolia kuten malleissa. Muista, että jokaiseen termiin kuuluu myös sen edessä oleva etumerkki.

Kuten esimerkistä ja teorialaatikostakin näet, on kahden monomin tulojen määrä nähtävissä suoraan laskusta: Jokainen tulon vasemman tekijän termi (monomi) käy kertomassa jokaisen oikean tekijän termin (monomin). Esimerkissä on kaksi binomia, joten kertolaskuja tulee $2 \cdot 2 = 4$ kappaletta. Jos lasketaan binomin ja trinomin tulo, on käsiteltävä jo $2 \cdot 3 = 6$ kahden monomin kertolaskua, kuten seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 2

Kerrotaan binomi ja trinomi keskenään.

+ ja - merkit määräytyvät kertoimena olevien termien etumerkeistä.

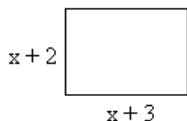
$$\begin{aligned}
 (2x-1)(3x^2-4x+1) &= \underline{2x \cdot 3x^2} + \underline{2x \cdot (-4x)} + \underline{2x \cdot 1} - \underline{1 \cdot 3x^2} - \underline{1 \cdot (-4x)} - \underline{1 \cdot 1} \\
 &= 6x^3 - 8x + 2x - 3x^2 + 4x - 1 \\
 &= 6x^3 - 3x^2 - 2x - 1
 \end{aligned}$$

Tehtäviä

326. Laske kuvion

a) piiri

b) pinta-ala



327. Sievennä.

a) $(a+2)(a+1)$ b) $(3-b)(b+5)$ c) $(c+2)(c-6)$

328. Laske suorakulmion pinta-ala kun sen sivujen pituudet ovat

a) $x+1$ ja $x+2$ b) $2x+2$ ja $x-1$ c) $3x-2$ ja $2x-1$ 329. Neliön sivun pituus on $y+6$. Muodosta ja sievennä neliön

a) piirin

b) pinta-alan lauseke.

330. Sievennä.

a) $(x+2)(x-2)$ b) $(x-2)(x-2)$ c) $(x+2)(x+2)$

331. Sievennä.

a) $(x+1)(x+1)$ b) $(x+1)(x-1)$ c) $(x-1)(x-1)$

332. Muodosta ja sievennä binomien $5x - 1$ ja $3x + 4$

a) summa

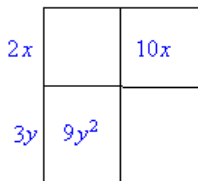
b) erotus

c) tulo.

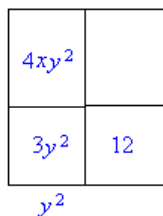
Soveltavat tehtävät

333. Muodosta suorakulmioiden pinta-alojen lausekkeet.

a)



b)



334. Sievennä edellisen tehtävän lausekkeet.

335. Sievennä.

a) $2x + 3(1 - 4x)$

b) $(2x + 3)(1 - 4x)$

c) $(2x + 3)1 - 4x$

336. Kerro monomien x^2 ja $2x$ summa monomien $-5x$ ja $3x^2$ erotuksella.

337. Sievennä.

a) $(2x - 1)(2x - 1)$

b) $(2x + 1)(2x - 1)$

c) $(2x + 1)(2x + 1)$

338. Merkitse ja sievennä lukujen a ja b summan ja erotuksen tulo.

339. Sievennä.

a) $(2x + 5)(3x - 2)$

b) $2x + 5(3x - 2)$

c) $(2x + 5)3x - 2$

340. Sievennä.

a) $a + 3(6 + a + b)$ b) $(a + 3)(6 + a + b)$

c) $c + d(2 + c - d)$ d) $(c + d)(2 + c - d)$

Vaativat tehtävät

341. Sievennä $2x(x - 4) - (3x + 2)(2x - 5)$.

342. Sievennä $t(t - 1) - 2t(4 + t) + (5t + 2)(t - 6)$.

343. Sievennä.

a) $(a + 1)^2$ b) $(a - 1)^2$

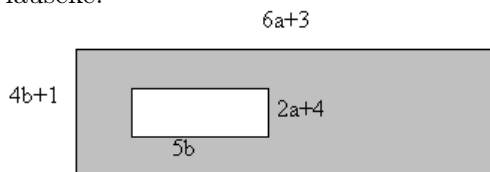
c) $(a + b)^2$ d) $(a - b)^2$

344. Osoita, että $(5 - x)^2 = (x - 5)^2$.

345. Sievennä.

a) $2(x + m)^2$ b) $3(x - m)^2$

346. Muodosta ja sievennä varjostetun alueen pinta-alan lauseke.



347. Lausu polynomina lauseke $(1 - \frac{1}{A})^{-1}$, missä $A = (1 + \frac{1}{x^2+x})$. (yo kevät 1987)

348. Osoita, että luku $(n+4)^2 - n^2$ on jaollinen kahdeksalla, kun n on kokonaisluku. (yo syksy 1995)

17 Kertaustehtäviä

17.1 Samankantaisten potenssien tulo

349. Onko potenssin arvo positiivinen vai negatiivinen?

a) $(-6)^3$ b) $(5-7)^2$ c) $(-9)^4$ d) $(-1)^{99}$

350. Merkitse ja laske luvun -3

a) viides potenssi

b) viidennen potenssin vastaluku

c) neliö

d) kuutio.

351. Sievennä ja ilmoita vastaus potenssimuodossa.

a) $5^3 \cdot 5^6$ b) $7^2 \cdot 7^9$ c) $a^6 \cdot a$ d) $b^8 \cdot b^4$

352. Merkitse ja sievennä potenssien

a) $3x^4$ ja $-x^2$

b) $-6x^3$ ja $-2x$

c) $\frac{1}{3}x^4$ ja $27x^5$

tulo.

353. Sievennä.

a) $5 \cdot x \cdot 2 \cdot x$

b) $-x \cdot 3 \cdot y \cdot (-4)$

c) $-8 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot 11$

354. Sievennä.

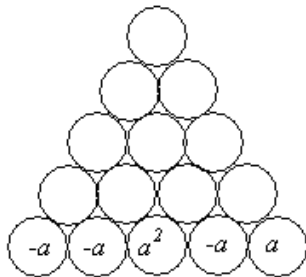
a) $4x^2 \cdot 2x$

b) $3x^4 \cdot 5x^5$

c) $7x \cdot 5y^2 \cdot x^8$

d) $y^2x \cdot 3y^5 \cdot 2x^7$

355. Jäljennä kuvio vihkoosi ja merkitse vierekkäisten potenssien tulo niiden yllä olevaan ympyrään.



356. Päättele mikä luku sopii x:n paikalle?

a) $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^x = 3^{15}$ b) $a^6 \cdot a^9 = a^x \cdot a$
 c) $b^3 \cdot b \cdot b^x = b^5 \cdot b^8$

17.2 Samankantaisten potenssien osamäärä ja nolla eksponentti

357. Laske.

a) $\frac{2^{13}}{2^{10}}$ b) $\frac{7^{100}}{7^{99}}$ c) $\frac{4^{18}}{4^{16}}$ d) $\frac{9^{50}}{9^{49}}$

358. Laske.

a) 0^0 b) $(-13)^0$ c) -9^0
 d) $x^0 + y^0$ e) $a^3 \cdot a^0$

359. Sievennä.

a) $\frac{4a^6}{a^4}$ b) $\frac{-3b^8}{b^7}$ c) $\frac{8c^9}{2c^2}$ d) $\frac{d^{11}}{3d^7}$

360. Merkitse yhtenä potenssina ja laske.

a) $\frac{2^4 \cdot 2^6}{2^7}$ b) $\frac{(-2)^{16}}{(-2)^9 \cdot (-2)^8}$ c) $\frac{(-3)^{23} \cdot (-3)^{12}}{(-3)^{34} \cdot (-3)^0}$

361. Merkitse ja sievennä potenssien $8a^5$ ja $2a^3$

a) osamäärä

b) tulo.

362. Sievennä ja laske lausekkeen arvo, kun $x = -2$.

a) $\frac{x^8 \cdot x^5}{x^{12}}$

b) $\frac{x^{14}}{x^7 \cdot x^5 \cdot x^0}$

363. Päättele puuttuva termi.

a) $\frac{6a^7}{?} = 3a^2$

b) $\frac{?}{5a} = 8a^4$

c) $\frac{44a^{10}}{4a^8} = ?$

d) $\frac{12a^{15}}{?} = 4a^{10}$

364. Sievennä.

a) $\frac{4a^7 \cdot 3a^6}{6a^5 \cdot 2a}$

b) $\frac{-5b^2 \cdot 4b^3}{4b \cdot 15b^5}$

c) $\frac{c^0 \cdot 6c^7}{4c^{11} \cdot 15c^2}$

17.3 Potenssin potenssi

365. Sievennä.

a) $(6^2)^3$

b) $(3^4)^2$

c) $(12^3)^3$

366. Sievennä.

a) $(5x^2)^3$

b) $(3x^4)^3$

c) $(ax^2)^4$

d) $(-x^4)^2$

367. Päättele, mikä luku sopii x:n paikalle?

a) $(4^2)^x = 4^6$

b) $(4^x)^5 = 4^8$

c) $(5^0)^x = 5^{10}$

d) $(7^x)^x = 7^9$

368. Sievennä .

a) $10^2 \cdot 10^3$

b) $\frac{2^{13}}{2^{\pi}}$

c) $\frac{1,5^{99}}{1,5^{98}}$

d) $((x^2)^3)^4$

369. Sievennä.

a) $a^2 \cdot (a^3)^5$

b) $(b^5)^4 \cdot (b^0)^{99}$

c) $(c^6)^2 \cdot (c^7)^4$

370. Sievennä.

$$\text{a) } \frac{(x^7)^2}{x^7} \qquad \text{b) } \frac{(y^6)^4}{(y^{12})^0} \qquad \text{c) } \frac{(z^0)^{13}}{(z^{11})^2}$$

371. Mikä luvun

- a) 4 potenssi on yhtä suuri kuin 163
- b) 5 potenssi on yhtä suuri kuin 258
- c) 8 potenssi on yhtä suuri kuin 649

372. Sievennä.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^4 \cdot (-x^3)^4 & \text{b) } -(x^3)^4 \cdot (-x^9)^0 \\ \text{c) } (-x^5)^3 \cdot x^6 & \text{d) } -(x^7)^2 \cdot (-x^4)^5 \end{array}$$

17.4 Negatiivinen eksponentti

373. Merkitse murtolukuna.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 5^{-1} & \text{b) } 99^{-1} \\ \text{c) } a^{-1} & \text{d) } x^{-1} \end{array}$$

374. Merkitse positiivisen eksponentin avulla.

$$\text{a) } 2^{-4} \quad \text{b) } 5^{-3} \quad \text{c) } a^{-6} \quad \text{d) } (ab)^{-3} \quad \text{e) } 4x^{-5}$$

375. Laske, ilmoita vastaus murtolukuna.

$$\text{a) } 5^{-2} \quad \text{b) } 9^{-2} \quad \text{c) } 2^{-3} \quad \text{d) } 4^{-3}$$

376. Laske lukujen 2^{-1} ja 2^{-2}

- a) summa
- b) erotus
- c) tulo
- d) osamäärä.

Anna vastaus murtolukuna.

377. Kirjoita positiivisen eksponentin avulla.

a) 2^{-1} b) $(3x)^{-1}$ c) 5^{-2} d) 17^{-4}

378. Laske.

a) $(-7)^0$ b) 2^{-3} c) $(\frac{3}{4})^{-2}$ d) $(\frac{1}{6})^{-1}$

379. Laske.

a) $10^3 \cdot 10^{-2}$ b) $10^7 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8}$
c) $10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6}$ d) $10^{-1} \cdot 10^0$

380. Ilmoita luvun kaksi potensseina sievennetyssä muodossa.

a) $(4^{-2})^2$ b) $(8^{-1})^2$ c) $(16^2)^{-1}$ d) $(4^0)^4$

17.5 Tulon potenssi

381. Sievennä.

a) $(6x)^2$ b) $(2b)^3$ c) $(8a)^2$ d) $(5y)^3$

382. Merkitse neliön pinta-ala potenssimuodossa ja sievennä lauseke, kun neliön sivun pituus on

a) 6 m b) 9 m.

383. Sievennä.

a) $(2 \cdot 3)^3$ b) $(2x)^3$ c) $(5a^3b)^2$ d) $\frac{(2xy)^3}{2x^2}$

384. Merkitse ja sievennä potenssi, jonka

- a) kantaluku on $3x$ ja eksponentti 2
- b) kantaluku on bcd ja eksponentti 5
- c) kantaluku on $-4a$ ja eksponentti 2
- d) kantaluku on $5x^2y^7$ ja eksponentti 3.

385. Minkä lausekkeen kuutio on

- a) $8a^3$ b) $-125a^3$ c) $0,008x^3y^3$
d) $64a^3b^3$ e) $27a^6$

386. Päättele puuttuva kantaluku.

- a) $(\quad)^2 = 4b^2$ b) $(\quad)^3 = -0,125c^3$
c) $(\quad)^4 = -16x^4$ d) $(\quad)^4 = 16x^8$

387. Merkitse yhtenä potenssina.

- a) $9 \cdot a^2$ b) $64 \cdot b^3$
c) $81 \cdot a^2 \cdot b^2$ d) $-125 \cdot c^3$

388. Sievennä.

- a) $(4x)^3$ b) $2^6 \cdot 5^6$ c) $(2a^3)^2$ d) $(3b^2c^7)^3$

17.6 Osamäärän potenssi

389. Mikä on eksponentin 4 kantaluku?

- a) $(-\frac{5}{6})^4$ b) $\frac{2^4}{3^3}$ c) $-2\frac{1^4}{4}$ d) $-(\frac{2}{5}-x)^4$

390. Sievennä.

- a) $(\frac{3}{4})^2$ b) $(\frac{x}{6})^2$ c) $(\frac{3x}{5})^2$ d) $(\frac{2a^3 \cdot a^2}{b \cdot b^5})^4$

391. Sievennä.

- a) $(\frac{x}{y})^6$ b) $(\frac{a}{9})^2$ c) $(\frac{3}{b})^0$

392. Sievennä.

- a) $(\frac{3x}{4})^2$ b) $(-\frac{y}{3})^2$ c) $(\frac{x}{5y})^2$

393. Muodosta ja sievennä lukujen $8x^3y^4$ ja $4x^2y$ osamäärän kuutio.

394. Sievennä.

$$\text{a) } \left(\frac{6a}{7}\right)^2 \quad \text{b) } \left(-\frac{b}{2}\right)^3 \quad \text{c) } \left(\frac{-2x}{7}\right)^2$$

395. Merkitse yhtenä potenssina.

$$\text{a) } 4^6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \quad \text{b) } -\frac{25a^2}{9} \quad \text{c) } -\frac{8x^3}{y^3} \quad \text{d) } -\frac{16a^4}{b^4}$$

396. Sievennä. Vastauksissa ei saa esiintyä negatiivisia eksponentteja.

$$\text{a) } \left(\frac{2a^2b}{c^2}\right)^3 \quad \text{b) } \left(\frac{3a^5b^7}{2c^{-1}}\right)^2 \quad \text{c) } \left(\frac{a^{-5}b^2}{2c^{-1}}\right)^{-2}$$

17.7 Kymmenpotenssimuoto

397. Kirjoita kymmenpotenssien avulla

$$\text{a) sata} \quad \text{b) tuhat} \quad \text{c) miljoona}$$

398. Kirjoita normaalimuodossa ilman kymmenpotensseja.

$$\begin{aligned} \text{a) } 3 \cdot 10^6 & \quad \text{b) } 2,5 \cdot 10^3 & \quad \text{c) } 6 \cdot 10^{-3} \\ \text{d) } 2,15 \cdot 10^{-6} & \quad \text{e) } 9,81 \cdot 10^{-12} \end{aligned}$$

399. Kirjoita kymmenpotenssimuodossa.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2300 & \quad \text{b) } 345\,000\,000 \\ \text{c) } 18\,000 & \quad \text{d) } 930\,000 \end{aligned}$$

400. Kirjoita kymmenpotenssimuodossa.

$$\begin{aligned} \text{a) } 180 & \quad \text{b) } 575\,000 \\ \text{c) } 12\,000 & \quad \text{d) } 13\,500\,000 \end{aligned}$$

401. Kirjoita massat kymmenen potenssin avulla.

$$\begin{aligned} \text{a) } 0,005 \text{ kg} & \quad \text{b) } 0,000\,002 \text{ kg} \\ \text{c) } 0,000\,000\,000\,007 \text{ kg.} & \end{aligned}$$

402. Ilmoita luvut kymmenpotenssimuodossa.
- a) 8 000 000 b) 34 000 000
c) 0,0007 d) 0,00000365
403. Seuraavat kymmenpotenssimuodot eivät ole oikein, korjaa ne.
- a) $17,5 \cdot 10^4$ b) $103,6 \cdot 10^2$ c) $0,5 \cdot 10^3$ d) $0,62 \cdot 10^{-2}$
404. Kuinka monta nollaa on luvussa $(10^{100})^{100}$, jos se kirjoitetaan muotoon 100...00? (yo kevät 1988)

17.8 Potensseja laskimella

405. Laske lukujen kuutiot.
- a) -9 b) 12 c) -30 d) 25
406. Laske ja anna vastaus kokonaislukuna tai desimaalilukuna.
- a) $\frac{1}{2} \cdot 10^7$ b) $\frac{4}{5} \cdot 10^{-3}$ c) $4\frac{2}{3} \cdot 10^3$ d) $2\frac{5}{9} \cdot 10^{-2}$
407. Anna vastaukset kymmenpotenssimuodossa kahden desimaalin tarkkuudella.
- a) 8^{22} b) -12^6 c) $(-7)^{12}$ d) $(-0,033)^9$
408. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
- a) 1,216 b) 0,816 c) 1,116 d) 0,916
409. Montako numeroa luvuissa on?
- a) 3^{49} b) 2^{38} c) 4^{35}

410. Laske.

a) $\frac{4 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^4}$

b) $\frac{4,2 \cdot 10^{-3} \cdot 5,3 \cdot 10^9}{1,8 \cdot 10^{12} \cdot 3,4 \cdot 10^{-13}}$

411. Laske lausekkeet ja anna vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella, kun $a = 1, 2$, $b = -3, 4$ ja $c = -5, 6$.

a) $2a^7$

b) $(abc)^3$

c) $(a + \frac{c}{b})^{10}$

412. Määritä potenssin 7200 likiarvo kahden numeron tarkkuudella. Montako numeroa kyseisessä luvussa on?

17.9 Lausekkeita

413. Laske lausekkeen $8 - 3x$ arvo, kun

a) $x = 1$

b) $x = 2$

c) $x = 4$

d) $x = -1$

414. Laske lausekkeen $-a + 2$ arvo, kun

a) $a = 0$

b) $a = 4$

c) $a = -2$

d) $a = b$

415. Jonossa on alunperin n poikaa. Montako poikaa on jonossa, jos

a) jonoon tulee 4 poikaa lisää

b) 6 poikaa lähtee jonosta

c) 2 tyttöä tulee jonoon

d) x poikaa lähtee jonosta ja y tyttöä tulee jonoon?

416. Kopioi taulukot vihkoosi ja täydennä lausekkeen arvot.

a)

x	$-3x$
-2	
-1	
0	
1	

b)

x	$\frac{x}{5}$
-10	
5	
35	
125	

417. Laske lausekkeen $a^3 - 6b$ arvo, kun

a) $a = 2$ ja $b = 3$

b) $a = -1$ ja $b = 5$

c) $a = 3$ ja $b = -4$

d) $a = -4$ ja $b = -2$

418. Ihmisen verenpaine vaihtelee sydämen toiminnan mukaan. Kun sydän supistuu, verenpaine on suurimmillaan. Tätä sanotaan systoliseksi paineeksi. Kun sydän laajenee, on verenpaine pienimmillään. Tätä painetta sanotaan diastoliseksi paineeksi. Verenpaineen yksikönä käytetään elohopeamillimetriä (mmHg). Systolisen verenpaineen normaaliarvo voidaan laskea lausekkeella

$$\text{systolinen paine} = \frac{\text{henkilön ikä vuosina}}{2} + 110$$

Laske, mikä on systolisen paineen normaaliarvo

a) ikäiselläsi

b) 49-vuotiaalla

c) 30-vuotiaalla

d) 98 vuotiaalla

419. Kirjoita lausekkeena: Lukujen -6 ja x tulo jaetaan luvulla 2 ja osamäärään lisätään lukujen x ja 3 erotus.

420. Laske edellisen tehtävän lausekkeen arvo, kun $x = -4$.

17.10 Polynomi

421. Jäljennä taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat tiedot.

monomi	kerroin	kirjainosa
	-1	x
	0	y^9
t^6		
$8c^{-3}$		
	18	k^3
	5	x^{-2}

422. Kirjoita polynomi, jonka termit ovat

a) $2x$ ja -6 b) $7x$, $2x^2$ ja 5 c) $-4x$, 4 ja $-y$

423. Montako termiä on

a) binomissa b) monomissa c) trinomissa?

424. Mikä on polynomin asteluku?

a) $2x^3 - x + 4$ b) $y - 3$
 c) $6a^{12} + 8a^2$ d) $13b^m + 19$

425. Mikä on polynomin $5x^4 - 7x^2 + x - 4$

a) neljännen b) toisen
 c) ensimmäisen asteen termin kerroin?

426. Etsi polynomi, jonka asteluku on

a) 1 b) 100 c) k

427. Laske polynomien $x^3 - 2y^2 + 3z - 1$ arvo, kun

a) $x = 1$, $y = 2$ ja $z = 3$

b) $x = 2$, $y = -1$ ja $z = 4$

428. Millä x :n arvolla polynomit $3x - 1$ ja $-x + 2$ saavat saman arvon?

17.11 Termien yhdistäminen ja järjestäminen

429. Katariina sievensi lausekkeen $7a - a = 7$. Hän ei ymmärrä, miksi vastaus on väärin. Korjaa hänen virheensä ja selitä mikä hänen vastauksessaan on väärin.

430. Järjestä polynomit

a) $2c - 2 + 4a - b$

b) $9 + 3x^3 - x + 6x^2$

431. Järjestä polynomit.

a) $-x + 4 + 3x^2$

b) $4y^2 - 4 - 2y^3 - 2y$

c) $u^3 - 9u + 3u^2 - u^4$

d) $5x + 7x^3 - x^4$

432. Etsi kolme muuta termiä, jotka ovat samanmuotoisia kuin

a) $-\frac{2}{3}x^2$

b) xy

c) $4xy^7$

433. Sievennä.

a) $5a + 3a$

b) $10b - 5b$

c) $8 + 3c - 2c$

d) $4a + b + a$

434. Sievennä.

a) $5m - 3m + m$

b) $y - 6y - 3y$

c) $-3n + 6n + 1$

d) $-10x + 7y - 5x$

435. Yhdistä samanmuotoiset termit.

a) $4x - 9x + x$

b) $2a + 6a - 2a$

c) $7c - 5c + 9c$

d) $6x^2 + 9x^2 + 2$

436. Sievennä ja järjestä termit.

a) $2a + 3a^2 - a$

b) $2b - 3b + b^2$

c) $5 + c - 3c^2$

d) $2a + b + 2a$

17.12 Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

437. Poista sulkeet.

a) $+(2a - 3)$

b) $-(4a + b)$

c) $-(c - b)$

d) $-(-7a - b + 3c)$

438. Sievennä.

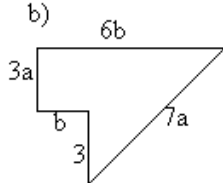
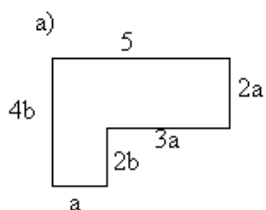
a) $(x + 1) + (x + 1)$

b) $(2x + 3) - (2x - 3)$

c) $(5x + y) - (5x + y)$

d) $-(2x + 6) - (2x + 6)$

439. Sievennä monikulmioiden piirien lausekkeet.



440. Muodosta ja sievennä polynomien vastapolynomit.

a) $a + 5$

b) $-a^2 + 6a - 2$

c) $8a^2 - a + 1$

d) $-6a^2 + 4ab - b - 1$

441. Keksi kaksi binomia, joiden

a) summa on $6a^2 + 5a$ b) erotus on $2a^3 - 3a$

442. Lisää monomien $-4x$ ja x^2 summaan monomien erotus. Muodosta lauseke ja sievennä se.

443. Laske lausekkeen $(3a + 2b) - (2a - 1)$ arvo, kun

a) $a = 1, b = 1$ b) $a = -2, b = 3$
 c) $a = -3, b = -4$

444. Sievennä ja laske polynomin arvo, kun $x = -2$.

a) $2x^3 - x^2 + 4x + (-2x^3 + x^2 - 9x)$
 b) $7x^3 + 8x - (7x^3 - 4x^2 - x) - 4x^2$

17.13 Monomin kertominen monomilla

445. Sievennä.

a) $3 \cdot x$ b) $x^2 \cdot (-3)$
 c) $5 \cdot x \cdot 3 \cdot x^4$ d) $-9 \cdot x^2 \cdot (-y) \cdot (-2)$

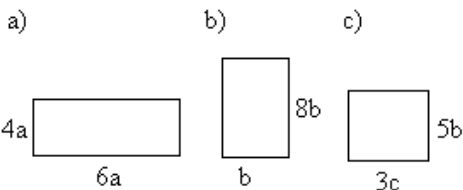
446. Laske.

a) $a^2 \cdot a^4 \cdot (-a)$ b) $-2b \cdot (-5b^3)$
 c) $3c^2 \cdot 4c^5 \cdot c$ d) $-3d^3 \cdot (-6d^4) \cdot d^0$

447. Sievennä.

a) $4a \cdot 6b$ b) $7a \cdot 3a$
 c) $2a \cdot 3b \cdot a$ d) $-a \cdot b \cdot 5a \cdot 2b$

448. Sievennä suorakulmioiden pinta-alojen lausekkeet.



449. Päättele puuttuva monomi.

a) $4a \cdot ? = 20a^2$

b) $3b \cdot ? = 18ab^3$

c) $5bc \cdot ? = -15ab^4c^5$

d) $-2b^6d^4 \cdot ? = 18b^7d^6$

450. Keksi kaksi monomia, joiden

a) summa on $18a^3$

b) erotus on $18a^3$

c) tulo on $18a^3$

451. Sievennä.

a) $3x \cdot 5 - 2 \cdot 3x$

b) $-2y \cdot 6y - 3 \cdot (-4y^2)$

c) $-5x \cdot 2y - 6x \cdot (-y)$

d) $-y^2 + 3y \cdot 2z - 3z$

452. Sievennä.

a) $xy \cdot 5 - 3y \cdot 3x$

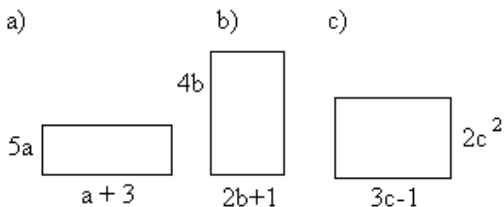
b) $2y \cdot xy - x \cdot 4y^2$

c) $-5x \cdot (-2y) \cdot y + 12x \cdot (-y^2)$

d) $-y^2 + (2y)^2 \cdot 2 - 10y \cdot (-\frac{y}{2})$

17.14 Polynomin kertominen monomilla

453. Muodosta ja sievennä suorakulmioiden pinta-alojen lausekkeet.



454. Piirrä suorakulmio, joka kuvaa lauseketta $a(2 + b) = 2a + ab$

455. Sievennä.

- a) $3(a + 5)$ b) $4a(3a - 1)$
c) $-2a(a + 3a^2 - 6)$ d) $a^2(4a + a^2)$

456. Sievennä.

- a) $5 + 2(x + 4)$ b) $4x + x(2 + x)$
c) $3(a - b) + 3(a - b)$ d) $3xy + 2x(y - x)$

457. Elokuvalippu maksoi aiemmin a euroa, nyt se maksaa 2 euroa enemmän.

- a) Kirjoita lauseke, joka kuvaa elokuvalipun nykyistä hintaa.
b) Paljonko maksaa kuusi elokuvalippua?

458. Täydennä.

- a) $4ab - 2a = 2a(\dots - \dots)$ b) $-ab - a = -a(\dots + \dots)$
c) $ab - ab^2 = ab(\dots - \dots)$
d) $-4a^2 - 6a = -2a(\dots + \dots)$

459. Poista sulkeet ja sievennä.

- a) $2(x + 1) - 3(x + 2)$ b) $-x(x - 4) + 2(x + 3)$
c) $-(x - 1) + 3(-x + 1)$ d) $3x(x - 2) - 3(x^2 - x)$

460. Poista sulkeet ja sievennä.

- a) $8(2a - 1) - 4(a - 2)$ b) $b(3b + 2) + 2b(3 - b)$
c) $c(c - 2) - c(2c - 1)$
d) $-5d(6 - 2d) - 3(d^2 - d)$

17.15 Polynomin kertominen polynomilla

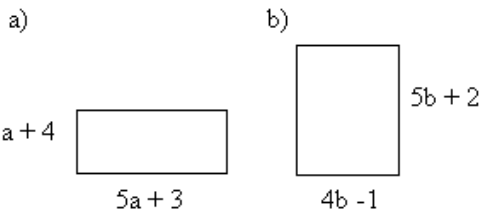
461. Sievennä.

a) $(x + 2)(x + 1)$

b) $(-x + 3)(x + 5)$

c) $(x + 2)(x - 6)$

462. Sievennä suorakulmioiden pinta-alojen lausekkeet.



463. Sievennä.

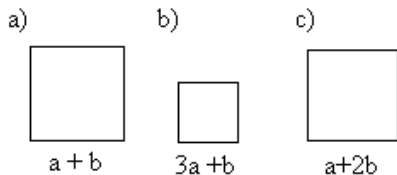
a) $(a + 6)(2 + a)$

b) $(a + b)(a - b)$

c) $(a + b)(a - 3b)$

d) $(2a + b)(a + 3b)$

464. Sievennä neliöiden pinta-alojen lausekkeet.



465. Sievennä.

a) $x + 3(6 + x + y)$

b) $(x + 3)(6 + x + y)$

c) $x + y(2 + x - y)$

d) $(x + y)(2 + x - 1)$

466. Etsi kaksi binomia, joiden tulo on $x^2 + 5x + 6$

467. Sievennä.

a) $(x + 2)^2$

b) $(x - 2)^2$

c) $(x + y)^2$

d) $-(x - y)^2$

468. Pariton luku merkitään yleisesti $2n + 1$, missä n on kokonaisluku. Muodosta lauseke kahden peräkkäisen parittoman luvun tulosta ja sievennä se.

17.16 Harjoituskoe I (Kappaleet 1-8)

1. Sievennä.

a) $a^2 \cdot a^3$ b) $\frac{3^4}{3^5}$ c) $(x^2)^5$ d) $(-2)^4$
e) $(a^0 + b^0)$, ($a \neq 0, b \neq 0$)

2. Kirjoita normaalimuodossa ilman kymmenpotensseja.

a) $5,3 \cdot 10^6$ b) $1,3 \cdot 10^{-4}$ c) $6,8 \cdot 10^0$

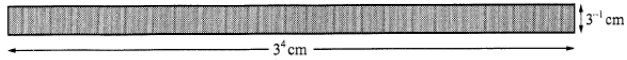
3. Kirjoita luvut kymmenpotenssimuodossa.

a) 3 miljoonaa b) 5 tuhannesosaa
c) 460 000 d) 0,0000084
e) $23,5 \cdot 10^3$ f) $0,76 \cdot 10^{-2}$

4. Muodosta ja sievennä potenssien $8a^3b^5$ ja $-4ab^2$

a) osamäärä b) tulo.

5. Teipinpalan pituus on 3^4 cm ja leveys 3^{-1} cm .



A strip of tape is 3^4 cm long and 3^{-1} cm wide.

(a) Write down the width of the tape without using indices.

Answer (a) cm [1]

(b) Find the area of the tape.
Give your answer

(i) as a power of 3,

Answer (b)(i) cm^2 [1]

(ii) without using indices.

Answer (b)(ii) cm^2 [1]

- a) Ilmoita teipin pituus ja leveys ilman potensseja.
 b) Laske teipin pinta-ala ja ilmoita vastaus sekä luvun kolme potensseina että ilman potensseja.
 c) Lue ajatuksella englanninkielinen tehtävä ja koe-ta miettiä, missä siinä on annettu samat tiedot kuin tässä tehtävänannossa (tämä on pohdinta-tehtävä, sinun ei tarvitse vastata vihkoon).

6. Sievennä. Vastauksissa saa esiintyä vain positiivisia eksponentteja.

a) $(2a^4b^6)^3$ b) $(\frac{2a^6b^{-4}}{3ab^2})^2$ c) $5a^4b \cdot 6a^{-7}b^5$

7. Lisätehtävä

Muunna kymmenjärjestelmän luku 42 binäärijärjestelmän luvuksi.

17.17 Harjoituskoe II (Kappaleet 10-17)

1. Muodosta ja sievennä binomien $2x + 3$ ja $5x - 4$
 - a) summa
 - b) erotus
 - c) tulo.
2. Kirjoita matemaattisena lausekkeena.
 - a) Lukujen 2 ja a tulon ja luvun 3 erotus.
 - b) Lukujen a ja b osamäärän ja luvun 5 summa.
 - c) Laske a) ja b) kohdassa muodostamiesi lausekkeiden arvot, kun $a = 6$ ja $b = -3$.
3. Tarkastellaan polynomia $-5a + 6a^2 + 3 + 8b$
 - a) Mikä on polynomien asteluku?
 - b) Mikä on vakiotermi?
 - c) Järjestä polynomi.
4. Sievennä.
 - a) $7a^2 - 4 + 5a - a^2 + 2$
 - b) $4b^2 + 3b - (5b - 3 + b^2)$
 - c) $2a(3a^3 + 5a - b + 4)$
5. Sievennä.
 - a) $(a - b)(3a + 2b)$
 - b) $(2a + b)^2$
 - c) $(2a^2 + b)(3a - b^2 + 2)$
6. Aikuisen elokuvalippu maksaa a euroa, lasten lippu maksaa 2 euroa vähemmän.
 - a) Kirjoita lauseke, joka kuvaa lasten lipun hintaa.
 - b) Johanna vei kolme lastansa elokuviin. Kirjoita lauseke, joka kuva kuinka paljon hänen ja lasten liput tulivat yhteensä maksamaan?
 - c) Jos aikuisen elokuvalipun hinta on 7 euroa, paljonko liput tulivat yhteensä maksamaan?