

# AVOIN MATEMATIIKKA 7 lk.

Osio 1: Lasketaan reaaliluvuilla

Marika Toivola      Tiina Härkönen

(Omaan käyttöön muuntanut ja muokannut\*Jan-Erik Sandelin)

Alkuperäinen sisältö on lisensoitu avoimella CC BY 3.0<sup>†</sup>-lisenssillä.

Muunnettu versio on lisensoitu CC-BY-SA 4.0 lisenssillä.<sup>‡</sup>

---

\* Muunnos L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-kielelle, jolla taitettu A5-sivukokoon. Pieniä lisäyksiä tekstiin (merkitty lähdekoodissa), helpot ja ”mekaaniset” tehtävät.

<sup>†</sup> <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.fi>

<sup>‡</sup> SA-lisäys: ”Jos muutat, jaa tekemäsi muutokset lähdekoodeineen avoimesti.”  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.fi>

# Kirjan alkuperäisen version esipuhe

Tervetuloa opiskelemaan Avoimen Matematiikan pariin!

Yläkoulun Avoin Matematiikka sarjasta löytyy jokaisella yläkoulun luokalle oma oppikirjansa, joista kukin koostuu kolmesta osiosta. Tämän lisäksi on erillinen Tilastoja ja todennäköisyyksiä osio, joka sopii opiskeltavaksi mille tahansa luokka-asteelle.

Oppikirjan kantavana ajatuksena on houkutella oppilaat myös itse lukemaan ja opiskelemaan matematiikkaa. Aiheita on käsitelty syvällisesti ja käsitteet on määritelty selkeästi. Käytämme tekstessä paljon kommentteja, joiden tarkoitus on ohjata oppilaita matemaattiseen ajatteluun. On aika luottaa oppilaisiin oppijoina ja tarjota heidän kyvilleen sopivia haasteita.

Tehtäviä on todella paljon (pelkästään seitsemännen luokan kirjassa noin 1400 tehtävää) ja monentasoisia, joten opettajien helppo eriyttää opetustaan. Materiaaliin on otettu mukaan myös entisiä ylioppilastehtäviä sekä pääsykoetehtäviä. Nämä ovat ylikurssitehtäviä, joiden tarkoituksena on antaa haasteita ja innostaa matematiikassa menestyviä oppilaita.

7. luokan materiaalin ensimmäisessä osiossa on tarkoitus käyttää laskinta vain niissä tehtävissä, joissa tämä on erikseen mainittu. Muissa osioissa oppilas voi käyttää laskinta vapaasti tai opettajan harkinnan mukaan.

Oppimateriaalissa on panostettu matematiikan käytännöllisyyteen. Materiaali sisältää tarinoita, jotka antavat esimerkkejä matematiikan tarpeesta käytännössä. Kukin oppimateriaalin osa sisältää myös taulukkolaskentakappaleen. 7. luokan matematiikassa perehdytään taulukkolaskentaohjelman käytön alkeisiin.

Oppimateriaaliin kuuluu myös taulukko-osio, joka löytyy kunkin osan kolmannen osion lopusta. Taulukko-osioon on koottu yläkoulun matematiikkaan liittyvät kaavat. Sen tavoitteena on totuttaa oppilasta käyttämään matematiikan kaavakokoelmia, joihin oppilas tulee törmäämään jatko-opinnoissaan. Taulukko-osio toivottavasti kannustaa oppilasta itsenäiseen opiskeluun, koska osa materiaalin ylioppilastehtävistä vaatii taulukko-osion käyttöä.

Avoin Matematiikka toivottaa sinut tervetulleeksi käytännönläheisemmän ja haasteellisemmän matematiikan pariin.

## Janen puheenvuoro

On yleisiä asioita, joita toistetaan huomattavan monella tunnilla koko kolmen vuoden ajan. Tässä niistä enimmäts.

Matematiikassa yhtä tärkeässä asemassa varsinaisen laskemisen kanssa on matemaatikoiden kehittämä, yhteisesti sovittu merkintätapa, jolla tehtävä ja päättely kuvaillaan. Matematiikan merkintätapa koostuu ennalta sovituista symboleista (esimerkiksi  $=$ ,  $+$  ja  $\pi$ ) ja käsitteistä (esimerkiksi ”luku”, ”summa” ja ”kolmio”). Se on *kieli*. Tätä

kieltä tulee kirjoittaa oikein. Laskemisen koko ajan koneistuessi kielen osuuden merkitys korostuu.

Koko luokkatasojen 7-9 ajan tulet huomaamaan, että myös matematiikassa on tunnettava ilmiöiden ja asioiden nimiä. Osin ne opetellaan ulkoa, mutta suuren osan voit ulkoistaa päättelylesi. Jokainen vastauksesi on täysin omaa käsialaasi. *Tähän kirjaan ei täytetä yhtään "aukkotehtävää" eikä toivoakseni tehdä muitakaan merkintöjä.* Työvihkosi on merkintöjä varten. Nämä monisteet periytyvät aikaan uusille omistajille. Vihkossa olevista vastauksistasi tulee ilmetä käsitteiden hallinta, etkä saa kohdella vastauksiasi "tiivistelminä" päättelyprosessista.

"Aukkotehtävien" ja "vihkotehtävien" eroa voi kuvata vertauksella: "Aukkotehtävät" ovat kanootilla ajelehtimista kapeassa ja matalassa ojassa. "Vihkotehtävät" ovat muskeliveneillä ajelua merellä. Sinun on ymmärrettävä säännöt, mutta vastineeksi saat enemmän vapauksia. Opettelemme pikaveneilyä, sillä "aukkotehtävät" laskee nykyisin kone.

7. luokan alkukuukausina palautetaan mieleen kaikki keskeinen termistö. Osa asioista voi vaikuttaa helpoilta kertaavan sisällön vuoksi, mutta ole silti tarkkaavainen ja ennen kaikkea huolellinen. Kuuntele, kun asiat esitetään tarkemmin ja yleiskäyttöisemmin. Peruskoulun matematiikka on yhä kaavamaisista: "Tee näin, siitä seuraa näin.". Mutta nyt kaikki alkaa liittyä kaikkeen ja tietosi muodostavat *työkalujen* verkon. Tärkeimmät opittavat työkalut yläluokilla ovat muuttujakirjain ja niitä hyödyntävät yhtälöt.

Muista, että pelkkä vastaus ei riitä, ei kokeissa, eikä vihkossa. Yläluokilla kiinnitetään yhä enemmän huomiota sekä päättelyysi etä siihen, miten olet päättelyn kirjannut! Tämä liittyy matematiikan kieleen. Pelkkä vastaus ei riitä täysiin pisteisiin kokeissakaan. Aina voi perustella vaikka yhdellä lauseella suomea, jos ei muuten!

Joka päivän polttava kysymys luokassa on aina: "Mihin tätä tarvitaan?". Peruskoulun yläluokkien matematiikkaa tarvitaan lähinnä jatko-opintoihisi. Siitä tulee tietämyksesi pohja. Nykyisen kaltaisessa tai kehittyneemmässä teknisessä ympäristössä on tarpeesi tämän "välitason" matematiikalle tällaisenaan aika vähissä. Toki koneillakin on rajansa. (Suomenkielisiä) sanallisia tehtäviä ei kone ihan vielä ratko. Ainakin kysymyksen asettelu ja vastauksen arviointi tulevat kuitenkin olemaan vielä pitkään ihmisille jäävää työn osaa.

Laskimen hakkaaminen on jo nyt mennyttä aikaa, ohjelmistoilla monet tehtävät ratkaistaan esimerkiksi suoraan piirtämällä. Oppikirjan laskuissa laskimen käyttö on joskus välttämätöntä, mutta silti välteltävää - loogista päättelykykyä tulisi koettaa kehittää, eikä laskea kehittä sitä. Töissä käytettävät ohjelmat riippuvat aikanaan ammatinvalinnastasi. Osa teistä opiskelee sille tasolle, että koneälyt jäävät teistä jälkeen. Osalle riittää ohjelmiston käyttö "mustana laatikkona". Peruskoulussa kaikki kuitenkin opiskelevat yläkouluun asiat. Asioiden *aito ymmärtäminen* sokean kaavojen opettelu ja laskimen nakutuksen sijasta on koneistumisen myötä nyt vielä aiempaakin tärkeämpää. Ja se on myös aitoa matematiikkaa!

# Sisällysluettelo

1 Pulmatehtäviä	1
2 Reaaliluvut	7
3 Lukujoukot ja laskutoimitukset	9
4 Lukujen suuruusvertailua	20
5 Itseisarvo ja vastaluku	27
6 Kokonaislukujen yhteen- ja vähennyslasku	34
7 Merkkiyhdistelmien sieventäminen	43
8 Kokonaislukujen kerto- ja jakolasku	49
9 Potenssimerkintä	56
10 Monikerrat ja jaollisuus	65
11 Luvun jakaminen tekijöihin	76
12 Murtoluvut	84
13 Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku	92
14 Murtolukujen kertolasku	98
15 Murtolukujen jakolasku	103
16 Laskujärjestys	109
17 Desimaaliluvut ja merkitsevät numerot	116
18 Lasketaan desimaaliluvuilla, pyöristyssäännöt	125
19 Kalenterin matematiikkaa	131
20 Aikaväli ja aikalaskut	133
21 Kertaustehtäviä	139

Kirjan tehtävien vastaukset löytyvät netistä. Kun lasket laskuja kotona, on tärkeää, että varmistat laskeneesi oikein. Muista, että tehtävien suoritusta arvioitaessa pelkkä vastaus ei riitä suorituksessa.

# 1 Pulmatehtäviä

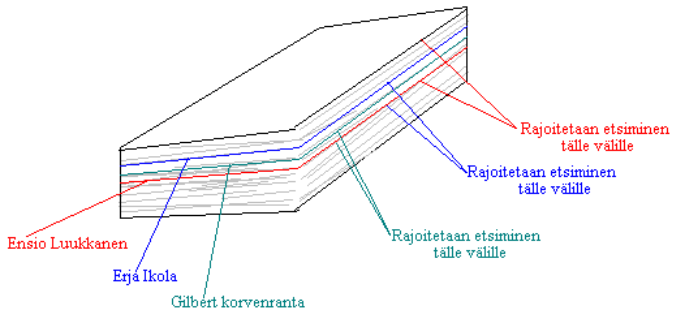
Matemaattisen ongelman ratkaiseminen aloitetaan yleensä rajaamalla ongelmasta pois tapaukset, jotka eivät täytä kysymyksen ehtoja. Ongelmasta pyritään siten tekemään pienempi.

## Esimerkki 1

Milla on valinnut puhelinluettelosta henkilön. Juhon tulee ratkaista, kenet Milla on valinnut esittämällä mahdollisimman vähän kysymyksiä, joihin Milla vastaa joko kyllä tai ei.

## Ratkaisu

Jos Juho ryhtyisi umpimähkään arvailemaan henkilöitä, hän luultavasti arvailisi Millan valitsemaa henkilöä vielä huomennakin. Ongelma voidaan kuitenkin helposti rajata. Juho avaa puhelinluettelon puolivälistä ja saa ensimmäisen kysymyksensä avulla rajattua kummassa puoliskossa luetteloa henkilö esiintyy. Seuraavalla kysymyksellä hän rajaa edellisen alueen taas puolivälistä jne.



1. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Ensio Luukkasta?  
-Kyllä
2. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Erja Ikolaa?  
-Ei

3. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Gilbert Korvenrantaa?  
-Ei
4. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Raija Lassilaa?  
-Kyllä
5. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Erkki Kääpää?  
-Ei
6. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Jyrki Lainetta?  
-Ei
7. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Terttu Lammiä?  
-Ei
8. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Dorrit Langenskiöldiä?  
-Kyllä
9. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Juho Lampista?  
-Ei
10. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Vesa Lamposta?  
-Kyllä
11. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Raimo Lampista?  
-Ei
12. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Ulla Lampista?  
-Ei

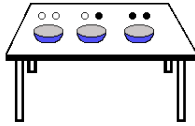
- 
13. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Hilikka Lam-  
poa?  
-*Kyllä*
14. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Matti Lam-  
piota?  
-*Kyllä*
15. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Väinö Lam-  
pista?  
-*Kyllä*
16. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Vesa Lampis-  
ta?  
-*Kyllä*
17. kysymys: Tuleeko hän aakkosissa ennen Vappu Lam-  
pista?  
-*Kyllä ja Ei, se on oikea henkilö.*
-

## Tehtäviä

1. *Emme puhelinluettelojen mentyä muodista voi tehdä tätä tehtävää, käytä siis mielikuvitustasi:*  
Anna parisi valita puhelinluettelosta jonkin henkilön puhelinnumero. Saat esittää kysymyksiä, joihin parisi vastaa kyllä tai ei. Monellako kysymyksellä pystyt selvittämään puhelinnumeron omistajan?
2. Kaapissa on kolme erilaista kenkäparia ja 24 sukkaa, mustia ja ruskeita sekalaisessa järjestyksessä. Miten monta kenkää ja sukkaa sinun on umpimähkään kaapista otettava, jotta saisit ainakin yhdet saman parin kengät ja samanväriset sukat?
3. Sinulla on 9 kultaista sormusta, joista yksi ei ole aito (kevyempi kuin muut). Miten rihkamasormus saadaan selville kahdella punnituksella, kun käytössä on tavallinen tasapainovaaka?
4. Muumi, Pikkumyy, Niiskuneiti ja Nipsu ovat pimeään, hyvin vaarallisen tunnelin suulla. Tunnelissa mahtuu samanaikaisesti kulkemaan vain kaksi ja kokoajan tarvitaan taskulamppua. Taskulampussa on virtaa 12 minuutiksi. Nipsulla tunnelin läpikulku kestää 5 minuuttia, Niiskuneidillä 4 minuuttia, Pikkumyyllä 2 minuuttia ja Muumilla 1 minuutin. Suunnittele miten kaikki pääsevät tunnelin toiseen päähän.
5. Paimen, mukanaan lammas, susi ja valtava kaali, lähestyi joen rantaa. Paimenen oli ylitettävä joki pienellä veneellä, johon mahtuisi kerrallaan vain hän ja yksi muusta seurueesta. jos hän jättäisi rannalle lampaan kaalin kanssa, niin lammas ahmisi sen, jos taas lampaan suden kanssa, niin susi hotkisi lampaan. Miten paimenen tulisi järjestää ylitykset, jottei hän menettäisi mitään omaisuudestaan?

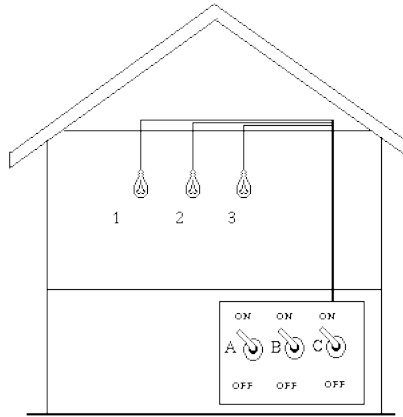


6. Miten voit mitata järvestä vettä täsmälleen 6 litraa, kun käytettävissäsi ovat vain 4 litran ja 9 litran astiat?
7. Olet huoneessa, jossa on pöydällä kolme kuppia.



Vasemmanpuoleiseen kuppiin laitetaan kaksi valkoista palloa, keskimmäiseen valkoinen ja musta ja oikeanpuoleiseen kaksi mustaa palloa. Poistut hetkeksi huoneesta, sillä aikaa kaikkien kuppien paikkaa on vaihdettu. Et näe kuppeihin. Montako kertaa sinun täytyy nostaa jostain kupista pallo ja laittaa se takaisin, jotta tietäisit mikä kuppi mikin on? Pallo täytyy siis laittaa takaisin ennen uuden nostamista.

8. Olet talon kellarissa. Näet kolme katkaisijaa, jotka on merkitty kirjaimilla A, B ja C, ja kukin niistä ohjaa yhtä lamppua yläkerrassa. Lamput on merkitty numeroilla 1, 2 ja 3.



Et näe lampuja kellarista käsin. Tiedät katkaisijoista ainoastaan, milloin ne ovat päällä (valo palaa) ja milloin eivät. Sinun on selvitettävä, mikä katkaisija ohjaa mitäänkin lamppua. Saat mennä yläkertaan vain kerran. Toisin sanoen saat asettaa katkaisijoita haluamasi tavalla, ja sitten mennä yläkertaan tutkimaan lampputa. Tämän jälkeen sinun on osattava yhdistää lamput ja katkaisijat. Miten saat sen selville?

9. Oletetaan, että kahdeksalta apinalta kuluu kahdeksan minuuttia kahdeksan banaanin syömiseen. Montako
- minuuttia kestää neljältä apinalta neljän banaanin syöminen?
  - apinaa tarvitaan syömään 16 banaania 16 minuutissa?

## 2 Reaaliluvut

Luvut ovat aikoinaan tulleet tarpeeseen kuvata esimerkiksi saaliseläinten ja vihollisten määrää. Sellaisia lukuja kuten 1, 5 ja 100 sanotaan positiivisiksi kokonaisluvuiksi. Niitä on käytetty siitä lähtien kun ihminen oppi laskemaan.

Keskiajalla intialaiset loivat negatiivisen kokonaisluvun käsitteen voidakseen käsitellä kauppavelkoja. Jos paimenella oli viisi lammasta ja hän oli velkaa kaksi lammasta, niin hänellä oli omia lampaita silloin kolme. Mutta entäs, jos hän olikin velkaa seitsemän lammasta?  $-2$  lammasta ei käytännössä tarkoita mitään järkevää. Mutta voimme tulkita tuloksen siten, että paimen luovuttaa vielä kaksi lammasta saatuaan niitä lisää. Vaikka negatiivisilla luvuilla on mahdollista kuvata joitakin käytännön tilanteita matemaattisesti, ei ne silti sovi tulokseksi joka paikkaan, mikä on johdannut itseisarvon käsitteen määrittelemiseen.

Tuttu esimerkki negatiivisten lukujen käytöstä on Celsiuslämpömittarin asteikko, jossa miinusmerkkiä käytetään  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  matalampien lämpötilojen esityksessä. Lämpötila-asteikko havainnollistaa hyvin myös sitä, ettei ”nolla” ja ”ei mitään” ole synonyymeja. Usein ”nolla” on vain mielivaltaisesti valittu kohta jollakin asteikolla, kuten lämpömittarissa, ja sitä pienemmät arvot ovat negatiivisia. Nykyiseen tapaan nollaa ryhtyivät käyttämään vuoden 600 eKr. paikkeilla intialaiset matemaatikot, jotka myös keksivät sen laskusäännöt: nollalla kertominen antaa aina tulokseksi nollan eikä nollan lisääminen tai vähentäminen muuta lukua. He totesivat myös, ettei nollalla jakaminen anna järkevää tulosta.

Kokonaisluvut riittävät niin kauan kuin on kyse lukumäärien laskemisesta. Mutta erilaiset mittaustulokset näyttävät, ettei todellisuus koostu kokonaisluvuin ilmaistavista luvuista. Esimerkiksi ihmiset eivät ole tasan yhden tai kahden metrin pituisia, vaan jotain siltä väliltä. Onkin olemas-

sa myös yksiköiden puolikkaita ja muita osia. Näitä murtolukuna esitettäviä lukuja sanotaan rationaaliluvuiksi. Sana "rationaali" tulee latinan sanasta ratio, joka tarkoittaa osamäärää. Myös jokainen päättyvä tai päättymätön jaksollinen desimaaliluku on rationaaliluku, koska se voidaan merkitä murtolukumuodossa.

500-luvulla eKr. kreikkalaiset Pythagoraan koulukunnan matemaatikot totesivat, että joidenkin neliöiden lävistäjien pituuksia ei voida ilmoittaa täsmällisesti minkään murtoluvun avulla. Esimerkkinä edellisestä on neliö, jonka sivut ovat 1 metrin mittaisia. Vaikka ajateltaisiin kuinka pientä mittayksikköä tahansa, lävistäjän pituuden tarkka ilmoittaminen olisi mahdotonta. Lukujen joukkoa oli laajennettava ottamalla käyttöön uusia päättymättömiä desimaalilukuja, joita nykyään kutsutaan irrationaaliluvuiksi (esimerkiksi  $\sqrt{2}$  ja  $\pi$ ). Irrationaalilukuja ei siis voi kuvata tarkasti muuten kuin symbolin avulla.

Kreikkalainen matemaatikko Arkhimedes (287-212 eKr.) oli ensimmäinen, joka havaitsi lukuja olevan loputtomasti ja kuinka suuria tahansa. Hän oivalsi, ettei lukujärjestelmässämme ole ylärajaa. Äärettömyys ( $\infty$ ) ei ole luku kuten nolla. Ajatellaanpa sitten kuinka suurta lukua tahansa, jokaiselle voidaan aina ilmoittaa vielä suurempi luku. Äärettömyys ei siis ole koskaan saavutettavissa.

## 3 Lukujoukot ja laskutoimitukset

### 3.1 Lukujoukot

Matematiikassa erilaiset luvut luokitellaan eri lukujoukkoihin seuraavasti:

<i>Luonnollisten lukujen joukko</i>	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
<i>Kokonaislukujen joukko</i>	$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
<i>Rationaalilukujen joukko</i> $\mathbb{Q}$	luvut, jotka voidaan esittää kahden kokonaisluvun osamääränä
<i>Reaalilukujen joukko</i> $\mathbb{R}$	rationaaliluvut ja luvut, joita ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä

Lukujoukkoja on enemmänkin, mutta kaikkia niitä ei esitellä eikä käytetä Suomen peruskoulussa.

Rationaaliluvut ovat lukuja, jotka voidaan esittää kahden kokonaisluvun osamääränä, eli ne ovat murtolukuja. Jos jakolasku menee tasan, on kyseessä kokonaisluku. Jos jako ei mene tasan eli tulos ei ole kokonaisluku, niin kyseessä on ”aito” rationaaliluku. Jos lukua ei ole esitetty osamäärällä, vaan desimaalilukuna, pitää sen rationaalisuuden tarkistamiseksi tutkia pilkun jälkeisiä desimaaleja:

- Jos desimaaliosa ei ole äärettömän pitkä tai siinä esiintyy toistuva numerosarja (jakso) se voidaan yhä esittää murtolukuna.
- Äärettömän pitkän desimaaliluvun loppuun laitetaan aina kolme pisteettä (...)
- Esimerkiksi 1,5 ja 1,23452345... ovat rationaalisia (jälkimmäisessä jakso on 2345). Jakson kirjoittaminen kahdesti peräjälkeen riittää.
- Jos jakso ei selkeästi ilmene luvusta, sitä ei tulkita rationaaliluvuksi. Lukua 1,2345... ei siis tulkita rationaaliluvuksi.

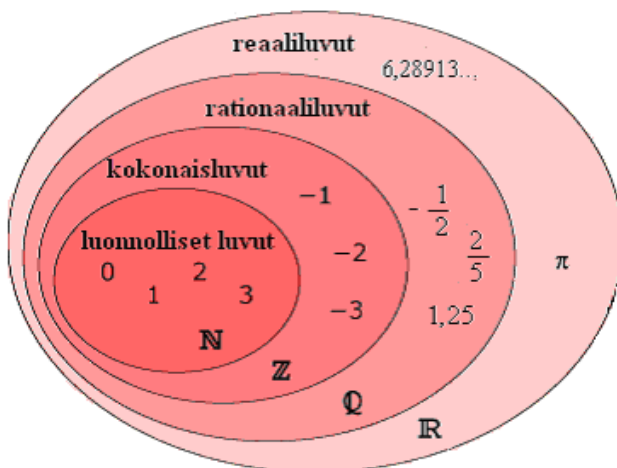
Rationaaliluvun voi desimaaliluvun lisäksi esittää

- murtolukuna (osia, esimerkiksi  $\frac{1}{3}$ ),
- sekalukuna (kokonaisia ja osia, esimerkiksi  $2\frac{1}{2}$ ) tai
- epämurtolukuna (murtoluku, jossa kokonaisia ei ole sievennetty murto-osan eteen, esimerkiksi  $\frac{3}{2}$ , mikä on arvoltaan sama, kuin  $1\frac{1}{2}$ ).

Huomaa, että murtoluku ja epämurtoluku ovat vain osamäärän (eli jakolaskun) merkitsemistä ilman kaksoispistettä (:). Yläkoulun matematiikassa osamäärää merkitään kaksoispisteellä harvoin ja osamäärän merkitsemiseen ”murtoviivalla” kannattaa alkaa totutella heti. Puhekielessä epämurtoluvuista puhutaan usein murtolukuina (tai murto-lausekkeina).

### 3.1.1 Lukujoukot ovat sisäkkäisiä

On tärkeää ymmärtää, että luku, joka on luonnollinen (esimerkiksi 0 ja 1) on myös automaattisesti kokonaislukujen, rationaalilukujen ja reaalilukujen joukossa. Lukujoukkoja voidaan havainnollistaa sisäkkäisinä ”lukuastioina”:



**Esimerkki 1**

Mihin lukujoukkoihin luku kuuluu?

1. -5
2.  $\frac{1}{6}$
3. 0,5
4. 4,5798213...

**Ratkaisu**

1. Ainakin reaalilukuihin, koska niihin kuuluvat kaikki yllä esitellyt luvut. Lisäksi rationaalilukuihin (luku voidaan esittää kahden kokonaisluvun osamääränä), sekä kokonaislukuihin (luvussa ei ole osia, eikä desimaaleja). -5 ei kuitenkaan ole luonnollinen, sillä se on negatiivinen luku.
2. Reaalilukuihin ja rationaalilukuihin.
3. Reaalilukuihin ja rationaalilukuihin (0,5 voidaan esittää murtolukuna  $\frac{1}{2}$  )
4. Ainoastaan reaalilukuihin, koska kyseessä on päättyvätön ja jaksoton desimaaliluku, eikä sitä voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä.

---

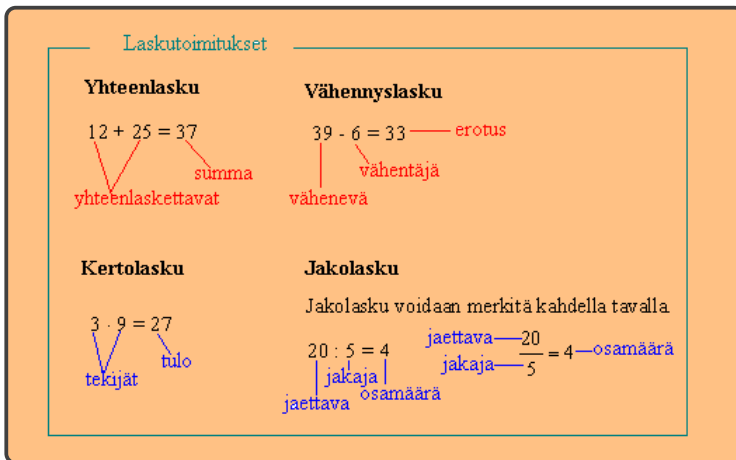
Huomaa, että Suomen kielessä sanat ”luku” ja ”numero” tarkoittavat eri asiaa. Numero tarkoittaa numeromerkkejä 0-9. Numeroja voi verrata aakkosiin: aakkosista muodostetaan sanoja ja numeroista lukuja.

Kun luettelet lukuja, ole tarkkana pilkun käytössä. Suomessa desimaaliluvuissa käytetään pilkkua erottamaan kokonaisosa desimaaliosasta. Näin ollen esimerkiksi luettelon

3,5,6 voidaan tulkita tarkoittavan kokonaislukua 3, kokonaislukua 5 ja kokonaislukua 6 *tai* sen voi tulkita tarkoittavan desimaalilukua 3,5 ja kokonaislukua 6 *tai* sen voi tulkita tarkoittavan kokonaislukua 3 ja desimaalilukua 5,6. Esimerkiksi Yhdysvalloissa tästä ongelmasta ei kärsitä, sillä siellä desimaalit erotetaan pisteellä. Suomessa on sovittu, että jos luettelossa on yksikin desimaaliluku, luettelon luvut erotellaan puolipisteellä (;).

## 3.2 Laskutoimitukset

Palautetaan mieleen yleisiä laskutoimituksia ja niihin liittyviä käsitteitä:



Kertolasku ja jakolasku ovat toistensa käänteistoimituksia. Jakolasku voidaan tarkistaa kertomalla jakaja ja osamäärä keskenään, jolloin tuloksi saadaan jaettava. Muistathan, ettei nolllalla voi jakaa! Esimerkiksi jakolaskua  $2 : 0$  ei voida suorittaa, koska ei ole olemassa sellaista lukua, joka nolllalla kerrottuna antaisi tulokseksi 2. Toisaalta voidaan myös ajatella, ettei jako nolllalla olisi kovin fiksuakaan. Jakolaskun perusidea on katsoa, kuinka monta kertaa jokin luku ”mahtuu toiseen lukuun”. Nollan tapauksessa tiedäm-



me, että se mahtuu jokaiseen muuhun lukuun, sillä sehän on olemattoman pieni määrä. Mutta, montako kertaa nolla ”mahtuu” vaikkapa lukuun 100? Jos vähennät nollan luvusta 100 (eli  $100 - 0 = 100$ ), eihän luku 100 pienene yhtään. Nolla mahtuisi mihin hyvänsä lukuun loputtoman monta kertaa, joten tietenkään sillä jakaminen ei ole ollenkaan järkevää!

**Tehtäviä**

10. Tutki lukuja:  $\frac{1}{3}$ ;  $-3$ ,  $12$ ;  $-5$ ;  $\frac{8}{4}$ ;  $8$  ja  $-\frac{5}{6}$

Mitkä luvuista ovat

- (a) luonnollisia lukuja
- (b) kokonaislukuja
- (c) rationaalilukuja?

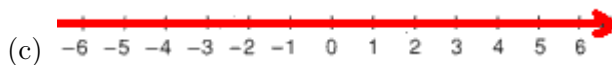
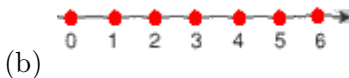
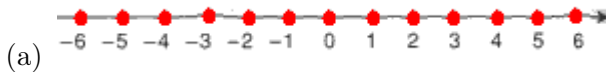
11. Merkitse ja laske lukujen  $80$  ja  $5$

- (a) summa
- (b) erotus
- (c) tulo
- (d) osamäärä.

12. Merkitse ja laske, kun

- (a) vähenevä on  $11$  ja vähentäjä  $9$
- (b) yhteenlaskettavat ovat  $6$  ja  $79$
- (c) jaettava on  $110$  ja jakaja  $5$
- (d) tekijät ovat  $12$  ja  $4$

13. Mikä lukujoukko on esitettyä lukusuoralla?



14. Mitkä luvuista ovat rationaalilukuja?

- (a)  $2002$

- (b)  $-135$
- (c)  $\frac{1}{4}$
- (d)  $-\frac{5}{7}$
- (e)  $7,8$
- (f)  $0,333\dots$

15. Päättele puuttuva luku.

- (a)  $\frac{3}{3} = 4$
- (b)  $\frac{5}{5} = 9$
- (c)  $\frac{2}{2} = 7$
- (d)  $\frac{6}{6} = 0$
- (e)  $\frac{0}{0} = 1$

16. Mihin lukujoukkoihin luku kuuluu?

- (a)  $\frac{3}{4}$
- (b)  $0,6$
- (c)  $-89$
- (d)  $0,184651\dots$
- (e)  $1$

17. Päättele mikä luku sopii tyhjään ruutuun?

- (a)  $\_ - 12 = 3$
- (b)  $26 + 4 + \_ = 32$
- (c)  $45 : \_ = 9$
- (d)  $\_ \cdot 5 = 55$

18. Mikä lukujoukko on suppein kaikista lukujoukoista?

19. Mistä lukujoukoista luvut on otettu?

- (a)  $-3, -1, 0, 2, 6, 10, 15$

- (b) 2, 4, 6, 8, 10, 12
- (c)  $-6, -\frac{3}{2}, 0, \frac{7}{9}, 1\frac{1}{8}, 4$
- (d)  $2, \pi, 5, 6, \frac{13}{2}, 7, 9$

20. Mikä luku tulee lukujonoon seuraavaksi?

- (a) 33, 29, 25, 21, \_
- (b) 3, 6, 9, 12, \_
- (c) 29, 28, 26, 23, \_
- (d) 12, 17, 24, 33, \_
- (e) 6, 7, 9, 12, \_

21. Mikä on

- (a) pienin
- (b) suurin

luonnollinen luku, joka voidaan muodostaa käyttämällä numeroita 8, 6, 1, 4 ja 3 (kaikkia numeroita on käytettävä kerran)?

22. Mikä on suurin luonnollinen luku, joka on

- (a) kolminumeroinen
- (b) viisinumeroisen
- (c) kahdeksannumeroinen?

23. Kirjoita ylös seuraavat kolme lukua:

- (a) jokin seitsemännumeroinen luku (esim. puhelinnumero)
- (b) luku 8
- (c) laske edellisten tulo

Laske kaikkien näiden kolmen luvut numerot yhteen. Jos numeroiden summassa on enemmän kuin yksi numero, laske summan numerot yhteen. Jatka samoin, kunnes jäljellä on enää yksi numero. Mikä se on?

24. Kirjoita lukujonon viisi seuraavaa lukua

(a) 6, 9, 12, 15, ...

(b) 14, 21, 28, ...

(c) 44, 40, 36, 32, ...

25. Mikä on kerrostalon 1. ja 6. kerroksen lattioiden korkeusero, kun portaikossa on jokaisen kerroksen välillä 16 askelmaa? Yhden askelman korkeus on 17 cm.

26. Pizzan hinta oli 5 € ja pastan 6 €. Juoma maksoi yhden euron. Paljonko 28 opiskelijan ryhmän ruokailu maksoi kaikkiaan, kun 17 söi pizzan, loput pastan ja jokainen otti juoman?

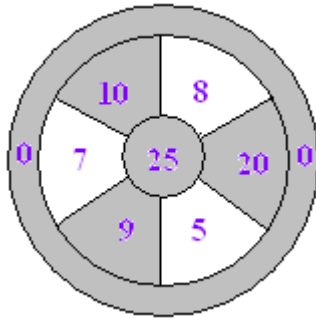
27. Juho suunnitteli itsekoottavan kirjahyllyn ostamista. Paljonko kirjahyllly maksoi, kun se koostui seuraavista osista?

osa	määrä	yksikköhinta [€]
päätylevy	2	10,50
välilevy	3	9,60
hyllytaso	10	5,70
tv-taso	1	39,00
laatikosto	2	27,00
kaapisto	2	32,00

28. Päättele mikä on luku  $x$ , kun luvun 50 ja luvun  $x$

(a) erotus on 9

- (b) osamäärä on 10  
 (c) tulo on 550  
 (d) summa on 80?
29. Muodosta sellainen laskulauseke kahdeksan kahdeksikon avulla jonka tulos on 1000.
30. Oheiseen tikkatauluun heitetään kolme tikkaa. Kaikki tikat jäävät tauluun. Ilmoita kaikki mahdollisuudet, joilla saadaan tulokseksi 25. (Peruskoulun matematiikkakilpailu 11.11.1999)



31. Jaa kellotaulu kuuteen osaan siten, että lukujen summa kussakin osassa on sama.



32. Henkilö osti asunnon, jonka pinta-ala oli 113 m<sup>2</sup> ja neliöhinta oli 1330 €/m<sup>2</sup>. Osan kauppahinnasta muodosti hänen vanha asuntonsa, jonka pinta-ala oli 80 m<sup>2</sup> ja neliöhinta 1350 €/m<sup>2</sup>. Kuinka suuri summa jäi rahalla maksettavaksi?

33. Suomisen Onnin nettotulot olivat vuoden aikana 14 154 € ja hänen vaimonsa nettotulot olivat 11 432 €. Paljonko Suomiset pystyivät säästämään vuoden aikana, kun heidän menonsa olivat keskimäärin seuraavat: vuokra 580 € kuukaudessa, ruokamenot 400 € kuukaudessa, vaatetusmenot 1000 € vuodessa, matkat ja hovit 850 € vuodessa sekä muut kulut 1200 € vuodessa.
34. Kissa jahtaa hiirtä, jolla on 50 hiiren askelta matkaa kololleen turvaan. Kissa on 10 kissan askelta hiirtä jäljessä. Hiiri ehtii ottamaan kuusi askelta siinä ajassa, kun kissa ottaa kaksi askelta. Kissan askel on kuitenkin pituudeltaan viisinkertainen hiiren askeleeseen verrattuna. Ehtiikö hiiri turvaan?
35. Minkä säännön mukaan seuraavat luvut on järjestetty?  
8, 2, 3, 6, 4, 0, 7, 5, 9, 1

## 4 Lukujen suuruusvertailua

Reaalilukujen ominaisuuksiin kuuluu, että niitä voidaan suuruutensa puolesta verrata toisiinsa. Vertailusymbolit  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  ja  $\geq$  näyttävät linnunnokalta ja hyvä muistisääntö onkin, että ”nokka on auki suurempaan, piikki pistää pienempään”. Lukuja vertailevaa lauseketta kutsutaan yhtälöksi. Yhtälö koostuu siis vertailusymbolista, joka on keskellä ja vertailtavista luvuista symbolin oikealla ja vasemmalla puolella. Kiinnitä huomiota vertailusymboliin  $=$ , sitä ei saa käyttää muuhun, kuin siihen varattuun tarkoitukseen, eli sen vasemmalla ja oikealla puolella olevien lukujen on aina oltava yhtä suuret!

### Reaalilukujen vertailussa esiintyvät vertailusymbolit

$=$  yhtä suuri kuin  
 $\neq$  eri suuri kuin  
 $<$  pienempi kuin  
 $>$  suurempi kuin  
 $\leq$  pienempi tai yhtäsuuri kuin  
 $\geq$  suurempi tai yhtäsuuri kuin

Jos yhtälössä esiintyy jokin näistä merkeistä, puhutaan epäyhtälöstä.

### Esimerkki 1

- $2 < 6$   
*Kaksi on pienempi kuin kuusi.*
- $100 > 10$   
*Sata on suurempi kuin kymmenen.*
- ikä  $\geq 18$  vuotta  
*Ikä on suurempi tai yhtä suuri kuin 18 vuotta.*  
*Ikä on vähintään 18 vuotta.*
- hinta  $\leq 20\text{€}$   
*Hinta on pienempi tai yhtä suuri kuin 20 euroa.*  
*Hinta on enintään 20 euroa.*



- $\text{pituus} \neq 172 \text{ cm}$   
*Pituus on eri suuri kuin 172 cm.*  
*Pituus ei ole 172 cm*
- 

### Esimerkki 2

Merkitään lukusuoralle ne kokonaisluvut, jotka toteuttavat ehdon  $1 < \text{luku} \leq 5$ .

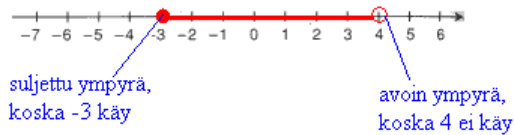


Huom! Kahdesta lukusuoran luvusta oikeanpuoleinen on aina suurempi kuin vasemmanpuoleinen.

---

### Esimerkki 3

Merkitään lukusuoralle ne reaaliluvut, jotka toteuttavat ehdon  $-3 \leq \text{luku} < 4$ .



**Tehtäviä**

36. Kirjoita vihkoosi äidinkielelläsi merkinnät

- (a)  $6 > 3$
- (b)  $0 < 8$
- (c)  $1 \neq 2$
- (d) ikä  $\leq 13$  vuotta
- (e) viikkoraha  $\geq 5\text{€}$

37. Merkitse lukujen suuruusjärjestys käyttämällä merkkejä:  $<$  tai  $>$

- (a) 3,4 ja 4,3
- (b) 0,81 ja 1,1
- (c) 0,05 ja 0,0015
- (d)  $-4$  ja  $3$
- (e)  $-98$  ja  $-100$

38. Maalajit luokitellaan rakeiden läpimitan  $d$  [mm] mukaan:

Maalaji	Läpimitta $d$ [mm]
Savi	$d \leq 0,002$
Siltti	$0,002 < d \leq 0,06$
Hiekka	$0,06 < d \leq 2,0$
Sora	$2,0 < d \leq 60,0$
Kivet	$60 < d \leq 600$
Lohkareet	$d > 600$

Mihin luokkaan kuuluu maalaji, jonka rakeiden läpimitta on

- (a) 0,001 mm
- (b) 0,04 mm
- (c) 0,5 mm
- (d) 4 mm
- (e) 400 mm?

39. Luettele ne luonnolliset luvut, jotka ovat

- (a) suurempia kuin 6 ja pienempiä kuin 9
- (b) suurempia kuin 15 ja pienempiä kuin 19
- (c) suurempia kuin 802 ja pienempiä kuin 800

40. Onko väite tosi vai epätosi?

- (a)  $1 \geq 2$
- (b)  $0 < 3$
- (c)  $3 \geq 1$
- (d)  $3 \geq 3$
- (e)  $1 \neq -1$
- (f)  $4 \leq 3$

41. Kirjoita matemaattisin symbolein.

- (a) 3 on pienempi kuin 6
- (b) 3 on suurempi kuin 1
- (c) 1 on positiivinen
- (d)  $-1$  on negatiivinen
- (e) 2 on erisuuri kuin 3
- (f) Hinta on enintään 100 €.
- (g) Matka on vähintään 2 km.
- (h) Pakkasta on vähintään  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
- (i) Lämpötila vaihtelee  $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ :sta  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ :een.

42. Mitkä luvuista 0, 3, 5 ja 7 toteuttavat ehdon
- (a) luku  $< 5$
  - (b)  $0 < \text{luku} \leq 5$
  - (c) luku  $\geq 3$  ?
43. Esitä lukusuoralla ne kokonaisluvut, jotka toteuttavat ehdon  $0 < \text{luku} < 6$  .
44. Merkitse lukusuoralle kaikki ne kokonaisluvut  $x$ , jotka toteuttavat ehdon  $2 \leq x \leq 7$  .
45. Mitkä luonnolliset luvut  $x$  toteuttavat ehdon
- (a)  $x < 6$
  - (b)  $0 \leq x \leq 3$
  - (c)  $1 < x \leq 4$
  - (d)  $78 \leq x < 83$  ?
46. Piirrä lukusuora ja merkitse siihen reaalityluvut, jotka ovat
- (a) enemmän tai yhtä paljon kuin 2
  - (b) enemmän kuin 3
  - (c) vähintään 5
  - (d) vähemmän kuin 1
  - (e) enemmän kuin  $-1$
  - (f) enemmän kuin  $-1$ , mutta vähemmän kuin 1
  - (g) vähemmän tai yhtä paljon kuin  $-2$
47. Esitä lukusuoralla kaikki ne reaalityluvut  $x$ , jotka toteuttavat ehdon  $x \geq 4$  .

### Soveltavat tehtävät

48. Onko väite tosi vai epätosi?

- (a)  $-7$  on suurempi kuin  $-2$
- (b)  $-3$  on pienempi kuin  $0$
- (c)  $-45$  on enemmän kuin  $6$
- (d)  $-5 > 3 < -2$
- (e)  $0 < 1$
- (f)  $-2 > 1$

49. Kirjoita epäyhtälönä

- (a) Kanojen määrä  $k$  on enintään  $500$  kpl.
- (b) Lahjavero  $x$  on yli  $4\,000$  €.
- (c) Ryhmälennuksen saa, kun lähtijöiden lukumäärä  $n$  on vähintään  $8$ .
- (d) Vuokra  $x$  on vähintään  $250$  € ja enintään  $550$  €.

50. Luettele kaikki

- (a) parittomat
- (b) parilliset

luonnolliset luvut, jotka ovat pienempiä kuin  $9$ .

51. Luettele ne kaksidesimaaliset luvut  $x$ , jotka toteuttavat ehdon  $6,8 < x \leq 6,9$  ?

52. Merkitse lukusuoralle kaikki yksinumeroiset desimaaliluvut, jotka toteuttavat ehdon  $0,1 < \text{luku} < 1,0$ .

### Vaativat tehtävät

53. Lehden vuosikerta maksaa  $20$  €. Irtonumeron hinta on  $1,50$  €. Lehti ilmestyy  $16$  kertaa vuodessa. Kuinka paljon halvemmalla vuosikerran tilannut saa vuoden lehdet irtonumeron ostajaan verrattuna?

54. Jos Matti työskentelee urakkapalkalla laatikkotehtaassa, saa hän 0,90 € jokaisesta valmiista laatikosta. Jos hän ei työskentele urakkapalkalla, on tuntipalkka 8,30 €. Kuinka monta laatikkoa Mattin tulee viikossa saada valmiiksi, jotta hänen kannattaa työskennellä urakkapalkalla? (Viikossa on 40 työtuntia.)
55. Autovuokraamo A perii kiinteää perusmaksua 25 €/vrk ja lisäksi kilometrimaksua 0,30 €/km. Autovuokraamo B perii ainoastaan kilometrimaksua, joka on 0,42 €/km. Kummasta on edullisempaa vuokrata auto yhdeksi vuorokaudeksi, jos arvioitu ajomatka on 400 km? (yo syksy 1990)
56. Pesuainetta A sisältävä 0,7 litran pullo maksaa 2,15 €, kun taas 0,6 litran pullo pesuainetta B maksaa 1,80 €. Kumpi pesuaine on edullisempaa? (yo syksy 1985)

## 5 Itseisarvo ja vastaluku

Lukusuoralla luvun etäisyyttä nollasta kutsutaan luvun itseisarvoksi.

Luvun  $a$  itseisarvoa merkitään  $|a|$ .

Kun halutaan tietää kuinka kaukana luku on nollasta, välittämättä siitä kummalla puolella nolaa se on, merkitään pystyviivat luvun molemmille puolille. Koska itseisarvo kuvaa etäisyyttä, se ei voi olla koskaan negatiivinen.

### Esimerkki 1

- $|3| = 3$

Positiivisen luvun itseisarvo on luku itse.

- $|0| = 0$

- $|-3| = 3$

Negatiivisen luvun itseisarvo on vastaava luku ilman etumerkkiä.

---

Lukujen itseisarvot lasketaan ennen muita laskutoimituksia. Jos itseisarvomerkkien sisällä on lauseke, on sen arvo laskettava ennen itseisarvomerkkien poistamista.

### Esimerkki 2

- $|-16| + |-8| = 16 + 8 = 24$

Otetaan ensin lukujen itseisarvot ja lasketaan ne yhteen.

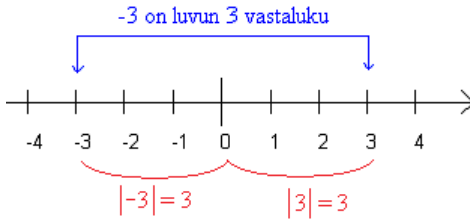
- $|32 - 10 + 4| = |26| = 26$

Lasketaan ensin luvut yhteen ja otetaan summan itseisarvo.

---

Kahta lukua, jotka sijaitsevat lukusuoralla yhtä kaukana nolasta, mutta sen eri puolilla, sanotaan toistensa vastaluvuiksi.

### Esimerkki 3



Vastaluvuilla on sama itseisarvo. Positiivisen luvun vastaluku saadaan laittamalla miinusmerkki luvun eteen. Negatiivisen luvun vastaluku saadaan jättämällä miinusmerkki pois luvun edestä.

### Esimerkki 4

luku	vastaluku
16	-16
-4	4
0	0
x	-x

Matemaattisesti vastaluku merkitään laittamalla luvun eteen miinusmerkki. Jos luvun edessä on ennestään plus- tai miinusmerkki, on luku laitettava sulkeisiin. Kahta laskutoimitusmerkkiä ei voi esiintyä peräkkäin ilman, että välissä olisi sulkeet. Peräkkäisillä laskutoimitusmerkeillä laskeminen opitaan myöhemmin.

### Esimerkki 5



- Luvun 9 vastaluku merkitään  $-9$  .
  - Luvun  $+9$  vastaluku merkitään  $-(+9)$  .
  - Luvun  $-9$  vastaluku merkitään  $-(-9)$  .
-

**Tehtäviä**

57. Kirjoita seuraavien vastakohtat.

- (a) Ylös
- (b) Etelään
- (c) Itään
- (d) Voittaa 100 euroa
- (e) Neljä kerrosta alas
- (f) Pidentää 50 centimetriä
- (g) 60 m meren tason yläpuolella

58. Piirrä lukusuora ja määritä sen avulla lukujen etäisyydet nolasta.

- (a) 4
- (b)  $-6$
- (c) 0
- (d)  $-3$

59. Määritä lukujen itseisarvot.

- (a)  $-58$
- (b)  $+5$
- (c)  $-7$
- (d) 0
- (e)  $-16,7$

60. Merkitse lukujen itseisarvot ja laske ne.

- (a)  $+13$
- (b)  $-32$
- (c) 16

61. Jäljennä taulukko vihkoosi ja täydennä.

luku	vastaluku	itseisarvo
75		
	23	
-6		
	-34	
- (- 4)		

62. Määritä lukujen vastaluvut.

- (a)  $-2$
- (b)  $8$
- (c)  $-1020$
- (d)  $256 \text{ d}$
- (e)  $200 \text{ €}$
- (f)  $-9,81 \text{ m/s}^2$
- (g)  $80 \text{ km/h}$

63. Kumman luvun itseisarvo on suurempi?

- (a)  $+14$  vai  $22$
- (b)  $-9$  vai  $-6$
- (c)  $25$  vai  $-25$
- (d)  $-8,91$  vai  $9,02$

64. Kumman luvun vastaluku on suurempi?

- (a)  $+14$  vai  $22$
- (b)  $-9$  vai  $-6$
- (c)  $25$  vai  $-25$
- (d)  $-8,91$  vai  $9,02$

65. Laske.

(a)  $|4| + |3|$

(b)  $|-4| + |-3|$

(c)  $\frac{|12|}{|3|}$

(d)  $\frac{|-12|}{|-3|}$

66. Kirjoita luvut pienimmästä suurimpaan:  $2, 2 ; -(-6)$   
 $; -2 ; |+\frac{1}{2}| ; 8 ; -(+3)$ .

67. Merkitse lukujen vastaluvut.

(a) 5

(b) +5

(c) -5

68. Merkitse lukujen vastaluvut.

(a) 13

(b) -100

(c) 5,5

(d) 0

(e)  $-\frac{2}{3}$

(f)  $+3\frac{1}{4}$

69. Laske.

(a)  $|-40| - |+31|$

(b)  $|+21| + |-5| - |-3|$

(c)  $|300| - |-50| + |6|$

70. Merkitse ja laske lukujen  $-18$  ja  $-7$  itseisarvojen

(a) summa

(b) erotus

(c) tulo.

71. Luettele ne kokonaisluvut, jotka toteuttavat ehdon  $|\text{luku}| < 6$ .
72. Laske.
- (a)  $|-25| + |-4|$
  - (b)  $|16 - 12 + 9|$
  - (c)  $|2 \cdot 6 - 3|$
73. Esitä lukusuoralla kaikki ne kokonaisluvut  $x$ , jotka toteuttavat ehdon  $|x| \geq 4$ .
74. Piirrä lukusuora ja merkitse siihen kaikki ne kokonaisluvut  $x$ , jotka toteuttavat ehdon  $2 \leq |x| \leq 7$ .

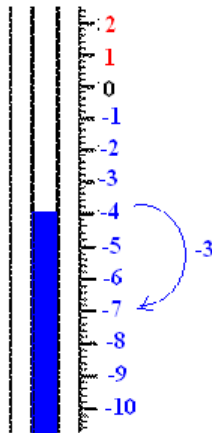
**Vaativat tehtävät**

75. Päättele lukusuoran avulla, mitkä kokonaisluvut  $x$  toteuttavat ehdon
- (a)  $|x| < 2$
  - (b)  $|x| < 1$
  - (c)  $4 < |x| < 7$
  - (d)  $99 > |x| > 94$
76. Lauseke  $|x - a|$  ilmaisee luvun  $x$  etäisyyden luvusta  $a$ . Tutki lukusuoran avulla, mitkä luvut toteuttavat ehdon
- (a)  $|x - 2| = 5$
  - (b)  $|x - 3| = 1$
  - (c)  $|x + 1| = 3$

## 6 Kokonaislukujen yhteen- ja vähennyslasku

### Pohdintatehtävä I

Illalla lämpötila on  $-4$  astetta, yön aikana pakkasen kiristyy  $3$  astetta. Paljonko lämpömittari näyttää aamulla?



---

### Pohdintatehtävä II

Juho on sinulle ennestään velkaa  $2$  €. Mikä on lopputilanne, jos hän

- lainaa sinulta lisää  $4$  €?
- antaa sinulle  $5$  €?

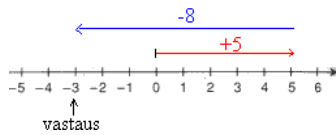
Miten voisit merkitä laskuja matemaattisesti?

---

### Esimerkki 1

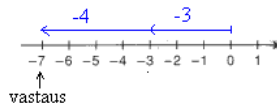
Lasketaan lukusuoramallin avulla

a)  $5 - 8$



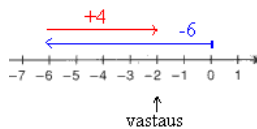
- Aloita nolasta.
- Siirry ensin 5 askelta oikealle.
- Siirry sitten 8 askelta vasemmalle.
- Päädyt lukuun -3, joten  $5 - 8 = -3$

b)  $-3 - 4$



- Aloita nolasta.
- Siirry ensin 3 askelta vasemmalle.
- Siirry sitten 4 askelta vasemmalle.
- Päädyt lukuun -7, joten  $-3 - 4 = -7$ .

c)  $-6 + 4$



- Aloita nolasta.
- Siirry ensin 6 askelta vasemmalle.
- Siirry sitten 4 askelta oikealle.
- Päädyt lukuun -2, joten  $-6 + 4 = -2$ .


Kuten huomaat, voit tulkita yhteen- ja vähennyslaskut eräänlaisina "kulkuohjeina" lukusuoralla: plusmerkki tarkoittaa eteenpäin astuttavia askelia, miinusmerkki takaperin peruuttamista. Näin laskut voikin käytännössä laskea ja lukusuoria voi piirtää vihkoon aina uusia, kunnes laskurutiini alkaa toimia toiston seurauksena. Määritellään kuitenkin yhteen- ja vähennyslaskut myös laskusääntönä:


Jos yhteenlaskettavat ovat


- samanmerkkiset, lasketaan lukujen itseisarvot yhteen ja laitetaan tuloksen eteen yhteinen etumerkki
- erimerkkiset, vähennetään itseisarvoltaan suuremman luvun itseisarvosta pienemmän luvun itseisarvo ja laitetaan tuloksen eteen itseisarvoltaan suuremman luvun etumerkki

Sääntö on yleiskäyttöisempi kuin lukusuora: lukusuoralla on vaikea havainnollistaa riittävän tarkasti esimerkiksi niinkin yksinkertaista laskua kuin  $999 - 1000$ . Säännöllä voimme keskittyä positiivisiin lukuihin: ”Tuhannesta pois yhdeksänsataayhdeksänkymmentäyhdeksän tekee yksi ja etumerkiksi tulee miinus, siis -1”.

### Esimerkki 2

a)  $-8 - 4 = -12$  Luvuilla on sama etumerkki, joten lasketaan lukujen itseisarvojen summa  
 $| -8 | + | -4 | = 8 + 4 = 12$ .  
 Lisätään yhteinen etumerkki.

b)  $8 - 4 = 4$  Luvuilla on eri etumerkit, joten lasketaan lukujen itseisarvojen erotus  
 $| 8 | - | -4 | = 8 - 4 = 4$ .  
 Itseisarvoltaan suurempi luku on positiivinen, joten vastaus on positiivinen. + -merkkiä ei merkitä näkyviin.

c)  $-8 + 4 = -4$  Luvuilla on eri etumerkit, joten lasketaan lukujen itseisarvojen erotus  
 $| -8 | - | 4 | = 8 - 4 = 4$ .  
 Itseisarvoltaan suuremman luvun edessä on miinusmerkki, joten vastaukseen lisättävä miinusmerkki.

---

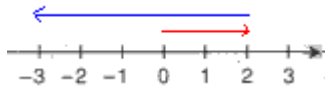


**Tehtäviä**

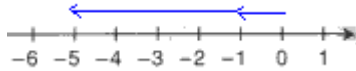
77. Järjestä lämpötilat suurusjärjestykseen, kylmimmästä lämpimimpään.  
 $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $-12\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $+1\text{ }^{\circ}\text{C}$  ja  $+5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
78. Ada on sinulle ennestään velkaa 4 €. Mikä on lopputilanne, jos hän
- (a) lainaa sinulta lisää 5 €?
  - (b) antaa sinulle 5 €?
79. Merkitse lauseet matemaattisesti ja laske lopputilanne.
- (a) Venla antaa sinulle 7 €, jonka jälkeen hän lainaa 5 €.
  - (b) Juho lainasi sinulta eilen 2 €. Tänäpäivänä hän palautti aamupäivällä euron ja illalla lainasi 3 €.
80. Elias lainasi Emmalta toissapäivänä 6 € ja maksoi takaisin eilen 4 €. Jos hän tänäpäivänä lainaa vielä 3 €, paljonko Eliaksen on huomenna tuotava Emmalle rahaa, jotta kumpikaan ei olisi toisilleen velkaa?
81. Lämpötila oli aamulla  $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$  ja päivän aikana se kohosi 5 astetta. Paljonko lämpötila oli iltapäivällä?
82. Mikä lämpötila on 9 astetta enemmän kuin
- (a)  $-9^{\circ}\text{C}$
  - (b)  $2^{\circ}\text{C}$
  - (c)  $-10^{\circ}\text{C}$
  - (d)  $-6^{\circ}\text{C}$  ?
83. Mikä lämpötila on kolme astetta vähemmän kuin
- (a)  $4^{\circ}\text{C}$

- (b)  $0^{\circ}\text{C}$   
(c)  $-1^{\circ}\text{C}$   
(d)  $-12^{\circ}\text{C}$  ?
84. Lämpötila on aluksi  $-8^{\circ}\text{C}$ . Mikä on lämpötila, jos lämpötila
- (a) laskee 5 astetta  
(b) kohoaa 3 astetta  
(c) kohoaa 12 astetta?
85. Laske lukusuoramallin avulla.
- (a)  $5 - 8$   
(b)  $-6 + 5$   
(c)  $-2 - 6$   
(d)  $9 - 6$
86. Laske lukusuoramallin avulla.
- (a)  $-5 + 8$   
(b)  $-7 + 3$   
(c)  $-1 - 5$   
(d)  $5 - 7$
87. Laske lukusuoramallin avulla.
- (a)  $2 - 5$   
(b)  $-2 + 6$   
(c)  $6 - 4$   
(d)  $-1 + 0$
88. Lukusuoralla on kuvattu laskutoimitus. Kirjoita se näkyviin ja laske sen arvo.

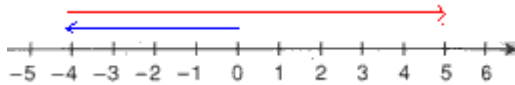
(a)



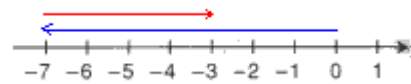
(b)



(c)



(d)



89. Laske lukusuoramallin avulla.

(a)  $5 - 7$

(b)  $-3 - 4$

(c)  $8 - 3$

(d)  $-9 + 5$

90. Laske.

(a)  $-31 - 18$

(b)  $92 - 64$

(c)  $-45 - 21$

(d)  $-4 - 38$

91. Laske.

(a)  $-3 - 8$

(b)  $11 - 6 - 5$

(c)  $-4 + 4 - 2$

(d)  $-4 - 7 - 3$

92. Laske.

(a)  $-4 + 3 - 8$

(b)  $1 + 6 - 9$

(c)  $-7 + 4 + 2$

(d)  $9 - 1 + 3$

93. Laske.

(a)  $-11 + 4 - 8$

(b)  $5 - 7 + 3$

(c)  $-2 - 7 - 14$

94. Laske.

(a)  $-43 + 30$

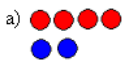
(b)  $2,01263 \cdot 1,02$

(c)  $-75 - 13$

(d)  $-89 + 93$

95.

● kuvaa lukua 1 ja ● kuvaa lukua -1. Mitä lukua seuraavat mallit kuvaavat?

**Soveltavat tehtävät**96. Laske.  $-10 + 12 - 3 + 2 - 6 - 9 + 4$

97. Hissi lähtee pohjakerroksesta kahdeksanteen kerrokseen, josta se kulkee 5 kerrosväliä alaspäin ja edelleen kaksi kerrosväliä ylöspäin. Missä kerroksessa hissi on tällä hetkellä?
98. Kirjoita matemaattisessa muodossa ja ratkaise loppulämpötila.
- (a) Lämpötila kohoaa  $-3$  asteesta  $7$  astetta.  
 (b) Lämpötila laskee  $+3$  asteesta  $7$  astetta.  
 (c) Lämpötila laskee  $-3$  asteesta  $7$  astetta.
99. Nouset hissiin viidennestä kerroksesta. Hissi laskee kolme kerrosta alaspäin, minkä jälkeen se nousee 5 kerrosta ylöspäin. Missä kerroksessa olet?
100. Taulukossa on planeettojen lämpötiloja.

Planeetta	Lämpötila [ $^{\circ}C$ ]
Jupiter	-130
Maa	+20
Mars	-50
Neptunus	-220
Pluto	-230
Saturnus	-170
Uranus	-210
Venus	+480

Laske lämpötilaero

- (a) lämpimimmän ja kylmimmän planeetan välillä.  
 (b) kahden kylmimmän planeetan välillä.

(c) kahden lämpimimmän planeetan välillä.

**Vaativat tehtävät**

101. Mikä luku sopii  $x$ :n paikalle?

(a)  $-4 - x = -13$

(b)  $-x = 15$

(c)  $-11 - x + 1 = 14$

102. Laske.

(a)  $3 - |4 - 2 \cdot 6|$

(b)  $|1 - 3 \cdot \frac{4}{7}| - |3 - 4 \cdot \frac{3}{4}|$

(c)  $-2 \cdot |2 - 4| \cdot |3 - (-2 - 5)|$

103. Mikä luku sopii  $x$ :n paikalle?

(a)  $x - 4 = 2$

(b)  $7 + x = 3$

(c)  $-8 + x = 16$

(d)  $x - 9 = -23$

## 7 Merkkiiyhdistelmien sieventäminen

Lukusuoralla tarkastelun lisäksi vastalukuja voidaan tarkastella laskemalla ne yhteen.

Kahta lukua, joiden summa on nolla, sanotaan toisensa vastaluvuiksi eli luvun  $a$  vastaluku on  $-a$ , koska

$$a + (-a) = 0 .$$

Luvun  $-8$  vastaluku on  $-(-8)$ , mutta miten voidaan osoittaa, että  $-8 + [-(-8)] = 0$ , kun laskutoimituksessa on peräkkäisiä plus- ja miinusmerkkejä?

Kahden etu- ja laskumerkin yhdistelmät, joissa merkien välissä on sulkumerkki, voidaan korvata yhdellä merkillä. Jos sulkeiden edessä on plusmerkki, ei sulkeiden sisällä olevien etumerkkejä muuteta. Jos sulkeiden edessä on miinusmerkki, kaikkien sulkeiden sisällä olevien lukujen etumerkki vaihdetaan.

merkkiiyhdistelmä	korvataan merkillä	esimerkki
$+(+)$	$+$	$+(+2) = 2$
$-(+)$	$-$	$-(+2) = -2$
$+(-)$	$-$	$+(-2) = -2$
$-(-)$	$+$	$-(-2) = 2$

Miinusmerkkiä voisi verrata kieltävään sanaan ”ei”. Kaksi peräkkäin olevaa ei -sanaa kumoavat toisensa. Esimerkiksi ”ei pidä paikkaansa etten ole terve” tarkoittaa samaa kuin ”olen terve”.

Koska sulkeiden edessä oleva  $+$  -merkki ei muuta sulkeiden sisällä olevien etumerkkiä, voidaan kaikki yhteen ja vähennyslaskut ajatella positiivisten ja negatiivisten lukujen yhteenlaskuina. Esimerkiksi lauseke  $-8 - 4$  voidaan kir-

joittaa muodossa  $(-8) + (-4)$ .

### Esimerkki 1

Poistetaan sulkeet ja suoritetaan laskutoimitukset.

$$1. 5 + (+ 3) = 5 + 3 = 8$$

$$2. 5 - (+ 3) = 5 - 3 = 2$$

$$3. 5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

$$4. 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$$

### Esimerkki 2

Poistetaan sulkeet ja suoritetaan laskutoimitukset.

$$a) -10 + (-2) - (+1) = -10 - 2 - 1 = -12 - 1 = -13$$

$$b) 3 - (-2) + (-4) - 1 - (-5) = \overbrace{3 + 2}^{\text{suoritetaan nämä ensiksi}} - 4 - 1 + 5 = 5 - 5 + 5 = 5$$



**Tehtäviä**

104. Sievennä.

(a)  $-(-10)$

(b)  $+(+13)$

(c)  $-(+5)$

(d)  $+(-22)$

105. Sievennä.

(a)  $+(-8)$

(b)  $-(+3)$

(c)  $-(-7)$

(d)  $-(+6)$

106. Lisää puuttuva merkki  $+$  tai  $-$ .

(a)  $-(8) = 8$

(b)  $-(8) = -8$

(c)  $+(8) = -8$

(d)  $+(8) = 8$

107. Laske.

(a)  $6 + (-4)$

(b)  $6 - (-4)$

(c)  $-6 + (-4)$

(d)  $-6 - (-4)$

108. Laske.

(a)  $3 - (-2)$

(b)  $9 - (-12)$

(c)  $14 - (-8)$

(d)  $1 - (-1)$

109. Laske.

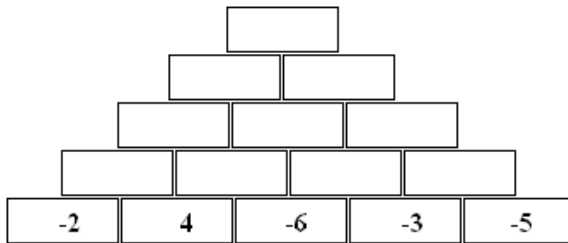
(a)  $-1 - (17)$

(b)  $-3 + (-2)$

(c)  $-2 - (-9)$

(d)  $6 + (-8)$

110. Jäljennä kuvio vihkoosi ja merkitse kahden vierekkäisessä ruudussa olevan luvun summa niiden yläpuolella olevaan ruutuun.



111. Valitse oikea merkki + tai - .

(a)  $5 \_ 8 = -3$

(b)  $-2 \_ 5 = -7$

(c)  $4 \_ (-1) = 5$

(d)  $-1 \_ (-2) = 1$

112. Merkitse ja laske lukujen -10 ja -12

(a) summa

(b) erotus.

113. Kopio taulukko vihkoosi ja täydennä.

+	4	-7	-11
-3			
8			
-12			

**Soveltavat tehtävät**

114. Poimi luvuista  $-5, -3, -1, 2, 8$  kolme lukua siten, että niiden summa on  $-2$ .
115. Poimi luvuista  $-6, -5, -4, -1, 2, 1$  kolme lukua siten, että niiden erotus on  $-1$ .
116. Osoita laskemalla, että luvut ovat toistensa vastalukuja.
- (a)  $6$  ja  $-6$
  - (b)  $-4$  ja  $4$
  - (c)  $-9$  ja  $9$
  - (d)  $200$  ja  $-200$
117. Osoita laskemalla, että  $-8 + [ -(-8) ] = 0$ .
118. Merkitse ja laske lukujen  $-10$  ja  $-4$
- (a) summa
  - (b) erotus
  - (c) vastalukujen erotus.
119. Merkitse ja laske lukujen erotus.
- (a)  $9, -4$  ja  $-3$
  - (b)  $-12, -7$  ja  $4$

**Vaativat tehtävät**

120. Lukujen  $a$  ja  $b$  summa on nolla. Mitä voit sanoa luvuista  $a$  ja  $b$ ?

121. Laske.

(a)  $-2 + (-1) - (-10) - 2 + (-6)$

(b)  $18 - (+3) + (-9) - (-5) + 2$

(c)  $-17 - (-12) - (+3) + (+15) - 3 - (-2) + (-9)$

122. Muodosta lauseke ja laske  $a + (-a)$ , kun

(a)  $a = 5$

(b)  $a = -5$

123. Muodosta lauseke ja laske  $2 \cdot x - x$ , kun

(a)  $x = 10$

(b)  $x = -5$

## 8 Kokonaislukujen kerto- ja jakolasku

Laskettaessa negatiivisten lukujen tuloa ja osamäärää, on olennaista tietää, onko lukuja parillinen vai pariton määrä. Jos kokonaisluku on jaollinen kahdella, se on parillinen.

Jos kertolaskussa on negatiivisia tekijöitä

- parillinen määrä, tulo on positiivinen
- pariton määrä, tulo on negatiivinen

Voit ajatella myös niin, että kahdesta miinusmerkistä ”syntyy” plusmerkki, joten paritettuna ne lakkaavat ole-  
masta miinuksia. Mutta miinusmerkki, jolla ei ole paria,  
aiheuttaa koko tulon muuttumisen negatiiviseksi. Huomaa,  
että jos yksikin tulon tekijöistä on nolla, niin silloin myös  
tulo on nolla.

### Esimerkki 1

- a)  $4 \cdot 5 = 20$  ei yhtään negatiivista tekijää
- b)  $3 \cdot (-6) = -18$  1 eli pariton määrä negatiivisia tekijöitä
- c)  $-4 \cdot 3 \cdot 2 = -24$  1 eli pariton määrä negatiivisia tekijöitä
- d)  $-3 \cdot 1 \cdot (-7) = 21$  2 eli parillinen määrä negatiivisia tekijöitä
-

## Jakolaskuissa

- kahden samanmerkkisen luvun osamäärä on positiivinen
- kahden erimerkkisen luvun osamäärä on negatiivinen

Käytännössä kerto- ja jakolaskujen tulosten etumerkkien ”käyttäytymisessä” ei ole hirveästi uutta: Nehän käyttäytyvät kuten sulkeita poistettaessa. Tietysti, sillä tulot voi aina pilkkoa sellaiseen muotoon, että etumerkit esiintyvätkin tulon tekijöinä ”-1” ja ”+1”. Tuon tehtyäsi voit vain avata sulkeita lukujen ”1” sijaan ja oletkin jo saanut ”etumerkkijumpan” edellisen kappaleen mukaiseksi sulkujen poistoksi. Mitä taas tulee jakolaskuun, tulemme huomaamaan murtolukujen jakolaskuja käsittelevässä kappaleessa, että jokainen jakolasku on itse asiassa muunnettavissa kertolaskuksi. Ja jälleen palaamme sulkujenpoistokappaleen ”+/-”-taulukon toimintaan! *Tärkeää on ymmärtää ja muistaa, että ”+/-”-taulukko ei ole tarkoitettu, eikä toimi yhteen- ja vähennyslaskussa, siinä etumerkki määräytyy lukusuoralla liikuttaessa jo opitulla tavalla!*

Pidemmässä laskussa haaste onkin siinä, miten tunnistaa ne kohdat, joissa käytetään taulukkoa (sulut, kerto- ja jakolaskut) niistä, joissa ei käytetä (yhteen- ja vähennyslasku).

**Esimerkki 2**

- a)  $\frac{15}{3} = 5$  samanmerkkiset luvut
- b)  $\frac{-3}{3} = -1$  erimerkkiset luvut
- c)  $\frac{-54}{-3} = 18$  samanmerkkiset luvut
-

**Tehtäviä**

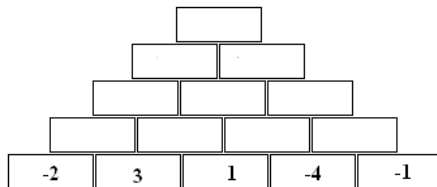
124. Luettele viisi ensimmäistä
- (a) parillista lukua.
  - (b) paritonta lukua.
125. Onko vastaus positiivinen vai negatiivinen, kun
- (a) positiivinen luku kerrotaan positiivisella luvulla
  - (b) negatiivinen luku kerrotaan positiivisella luvulla
  - (c) negatiivinen luku kerrotaan negatiivisella luvulla?
126. Onko tulo positiivinen vai negatiivinen?
- (a)  $2 \cdot 2$
  - (b)  $-2 \cdot (-2)$
  - (c)  $-2 \cdot 2$
  - (d)  $2 \cdot (-2)$
  - (e)  $-2 \cdot (-2) \cdot (-2)$
  - (f)  $-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$
127. Laske edellisen tehtävän kertolaskut.
128. Laske.
- (a)  $-1 \cdot 7$
  - (b)  $-3 \cdot 0$
  - (c)  $1 \cdot (-12)$
  - (d)  $0 \cdot 9$
  - (e)  $-1 \cdot (-1)$
  - (f)  $-2 \cdot (-4)$
129. Laske.

- (a)  $2 \cdot 3 \cdot 4$   
 (b)  $1 \cdot (-3) \cdot 2$   
 (c)  $10 \cdot (-2) \cdot (-10)$   
 (d)  $(-2) \cdot (-1) \cdot (-3)$   
 (e)  $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$   
 (f)  $(-5) \cdot 1 \cdot 0$

130. Laske.

- (a)  $-4 + (-100)$   
 (b)  $-4 - (-100)$   
 (c)  $-4 \cdot 100$   
 (d)  $-4 \cdot (-100)$

131. Jäljennä kuvio vihkoosi ja merkitse kahden vierekkäisessä ruudussa olevan luvun tulo niiden yläpuolella olevaan ruutuun.



132. Valitse oikea vaihtoehto. Jaettaessa kaksi kokonaislukua vastaus on
- (a) positiivinen/negatiivinen jos luvuilla on sama etumerkki.  
 (b) positiivinen/negatiivinen jos luvuilla on eri etumerkit.

133. Täydennä lauseet.



- (a) Kun positiivinen luku jaetaan positiivisella luvulla, on vastaus...
- (b) Kun negatiivinen luku jaetaan positiivisella luvulla, on vastaus...
- (c) Kun positiivinen luku jaetaan negatiivisella luvulla, on vastaus...
- (d) Kun negatiivinen luku jaetaan negatiivisella luvulla, on vastaus...

134. Laske.

- (a)  $\frac{-8}{4}$
- (b)  $\frac{-20}{-5}$
- (c)  $\frac{12}{-4}$
- (d)  $\frac{18}{-3}$
- (e)  $\frac{-50}{-5}$
- (f)  $\frac{-15}{3}$

135. Laske.

- (a)  $-14 - (-4)$
- (b)  $\frac{-120}{-6}$
- (c)  $\frac{-10}{10}$

136. Päättele puuttuva luku.

- (a)  $\frac{\quad}{2} = -3$
- (b)  $\frac{\quad}{-3} = 6$
- (c)  $\frac{6}{\quad} = -2$
- (d)  $\frac{-18}{\quad} = -2$

### Soveltavat tehtävät

137. Merkitse ja laske lukujen 27 ja  $-3$

- (a) summa
  - (b) erotus
  - (c) tulo
  - (d) osamäärä
138. Tutki kokeilemalla, mitä negatiivisen luvun tulolle tapahtuu, kun kertoja pienenee. Kerro luku  $-7$  vuoroin luvuilla  $2, 1, 0, -1$  ja  $-2$ .
139. Valitse oikea merkki  $>$ ,  $<$  tai  $=$
- (a)  $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \_ 0$
  - (b)  $(-2) \cdot (-7) \cdot 2 \_ 0$
  - (c)  $34 \cdot (-1) \cdot 0 \_ 0$
140. Laske.
- (a)  $-2 + (-2) + (-2) + (-2) + (-2)$
  - (b)  $5,26 \cdot 5,056 \cdot 0,0068$
  - (c)  $-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$
141. Etsi kolme jakolaskua, joiden tulos on  $-8$ .
142. Mitkä väitteistä ovat tosia ja mitkä epätosia?
- (a) Negatiivinen luku voi olla suurempi kuin positiivinen luku.
  - (b) Kahden negatiivisen luvun summa on aina negatiivinen.
  - (c) Kahden negatiivisen luvun erotus on aina positiivinen.
  - (d) Kahden negatiivisen luvun tulo on aina positiivinen.
  - (e) Positiivisen ja negatiivisen luvun osamäärä on aina negatiivinen.

- (f) Positiivisen luvun itseisarvo on aina suurempi kuin negatiivisen luvun itseisarvo.

**Vaativat tehtävät**

143. Mikä luku sopii  $x$ :n paikalle?

- (a)  $6 \cdot x = -60$
- (b)  $x \cdot (-3) = 12$
- (c)  $x \cdot (-7) = -35$
- (d)  $-2 \cdot (-3) \cdot x = 24$

144. Mikä luku sopii  $x$ :n paikalle?

- (a)  $\frac{20}{x} = 5$
- (b)  $\frac{x}{-3} = -4$
- (c)  $\frac{x}{7} = -2$
- (d)  $\frac{-24}{x} = 6$

145. Kahden kokonaisluvun summa on  $-11$  ja tulo on  $28$ . Kun merkitään tuntemattomia lukuja kirjaimilla  $x$  ja  $y$ , voidaan ongelma kirjoittaa matemaattisesti muodossa  $x + y = -11$  ja  $x \cdot y = 28$ . Etsi kokeilemalla kyseiset luvut.

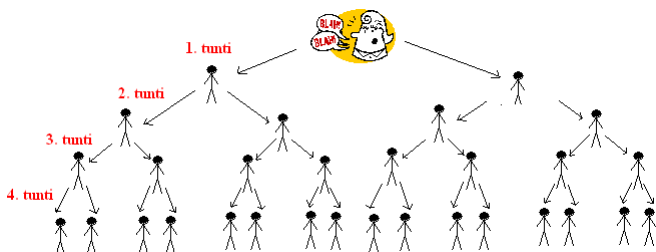
146. Kahden kokonaisluvun summa on  $18$  ja osamäärä  $-4$ . Kirjoita tämä matemaattisesti ja etsi kokeilemalla kyseiset luvut.

147. Kahden kokonaisluvun erotus on  $13$  ja tulo on  $-42$ . Kirjoita tämä matemaattisesti ja etsi kokeilemalla kyseiset luvut.

## 9 Potenssimerkintä

### Esimerkki 1

Kuulet juorun, jonka kerrot tunnin aikana kahdelle kaverrillesi. Kukaan kavereistasi kertoo juorun kahdelle muulle kaverrilleen seuraavan tunnin aikana jne. Juoru leviää neljän tunnin aikana seuraavasti



Jokainen siis kertoo juorun kuultuaan sen kahdelle muulle. Tämä voidaan esittää kolmannen tunnin osalta potenssimuodossa

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

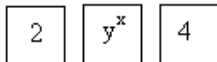
3 kappaletta

Vastaavasti neljännen tunnin aikana juorun kuulevia on

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

4 kappaletta

Laskimella  $2^4$  näppäillään yleensä



Sinun lisäksi juorusta kuulee siis neljän tunnin aikana yhteensä  $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$  henkilöä.

Huom! Jos ajattelisimme neljän tunnin osalta juorun leviämisen laskettavan muodossa  $2 \cdot 4 = 8$ , tarkoittaisi tämä sitä, että levittäisit juorua kertomalla sen joka tunti kahdelle. Kaikki muut juorun kuulevat sitä vastoin pitäisivät sen salassa.

Potenssi on kertolaskun lyhennetty merkitsemistapa silloin, kun samaa lukua kerrotaan itsellään useamman kerran.

$x^n$  - *EkspONENTTI* on tekijöiden lukumäärä.  
 └─ *KANTALUKU* on tulon tekijä.

EkspONENTTI vaikuttaa ainoastaan siihen lukuun tai muutujakirjaimeseen, jonka oikeaan yläkulmaan se on kirjoitettu. Jos vaikutusaluetta halutaan laajentaa, on käytettävä sulkeita. Potenssissa  $(-2)^3$  on kantalukuna -2. Jos potenssi-merkinnästä jätetään sulkeet pois ja merkitään  $-2^3$ , on potenssin kantalukuna 2. Ole tarkkana kantaluvun kanssa.

Kantaluku on merkittävä sulkeisiin, jos

- tulon tekijä on negatiivinen.
- tulon tekijänä on summa, erotus, tulo, osamäärä tai potenssi.

Jos potenssin  $x^n$  kantaluku  $x$  on negatiivinen ja eksponentti  $n$  on

- parillinen, potenssin arvo on positiivinen
- pariton, potenssin arvo on negatiivinen

## Esimerkki 2

1.  $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$   
parillinen määrä kerrottavia
2.  $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$   
pariton määrä kerrottavia

3.  $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$

Kyseessä ei ole negatiivisen luvun potenssi.

---

Luvun toista potenssia sanotaan luvun neliöksi. Luvun kolmatta potenssia sanotaan luvun kuutioksi.

**Tehtäviä**

148. Laske potenssien arvot

(a)  $5^2$

(b)  $1^7$

(c)  $2^3$

(d)  $10^4$

149. Merkitse potenssiksi ja laske potenssin arvo

(a) ”kuusi potenssiin kaksi”

(b) ”kymmenen toiseen”

(c) ”kaksi potenssiin neljä”.

150. Kirjoita ilman potenssimerkintää.

(a)  $5^3$

(b)  $2^5$

(c)  $5^2$

(d)  $234^3$

(e)  $25^6$

151. Merkitse tulot potenssimerkintää käyttäen.

(a)  $9 \cdot 9 \cdot 9$

(b)  $3 \cdot 3$

(c)  $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$

(d)  $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

152. Merkitse potenssiksi ja laske luvun 3

(a) neliö

(b) kuutio.

153. Merkitse tulot potenssimerkintää käyttäen

(a)  $3 \cdot 3 \cdot 3$

(b)  $12 \cdot 12$

(c)  $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

(d)  $11 \cdot 11 \cdot 11$

(e)  $a \cdot a \cdot a$

(f)  $e \cdot e \cdot e \cdot e \cdot e$

154. Merkitse tulot potenssimerkintää käyttäen

(a)  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

(b)  $10 \cdot 10 \cdot 10$

(c)  $11 \cdot 11$

(d)  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

(e)  $a \cdot a \cdot a$

(f)  $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$

155. Merkitse potenssit tuloiksi.

(a)  $100^1$

(b)  $b^3$

(c)  $m^4$

(d)  $5^a$ , missä  $a = 7$

156. Onko totta?

(a)  $6^2 = 36$

(b)  $5^1 = 1$

(c)  $3^3 = 9$

157. Mikä on potenssimerkintöjen kantaluku?

(a)  $(-3)^2$



(b)  $(-2)^3$

(c)  $-3^3$

(d)  $-1^6$

(e)  $(-1)^4$

158. Laske.

(a)  $(-5)^2$

(b)  $-5^2$

(c)  $(-5)^3$

(d)  $-(-5)^3$

159. Laske potenssien arvot.

(a)  $(-3)^2$

(b)  $(-2)^3$

(c)  $-3^3$

(d)  $-1^6$

(e)  $(-1)^4$

160. Laske.

(a)  $(-2)^5$

(b)  $-3^4$

(c)  $(-1)^{999}$

(d)  $(-1)^{1000}$

161. Kirjoita potenssimuodossa.

(a)  $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

(b)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$

(c)  $-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

(d)  $\frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{7}$

$$(e) (1 + x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x)$$

162. *Laskintehtävä:* Laske potenssit laskimella.

(a)  $6^3$

(b)  $3^5$

(c)  $30^4$

(d)  $2^5 \cdot 2$

(e)  $15^3$

(f)  $47^6$

(g)  $100^4$

### Soveltavat tehtävät

163. Merkitse potenssiksi ja laske luvun -5

(a) neliö

(b) kuutio.

164. Mikä on potenssimerkintöjen kantaluku?

(a)  $\left(\frac{2}{5}\right)^4$

(b)  $\frac{2^3}{7}$

(c)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$

(d)  $-\left(2 - \frac{1}{3}\right)^6$

(e)  $(a + 7)^3$

(f)  $-\frac{4a^5}{3}$

165. Laske.

(a)  $25^2 - 24^2$

(b)  $30^2 - 29^2$

(c)  $51^2 - 50^2$

(d)  $62^2 - 61^2$

Mitä havaitset? Miten voit laskea  $1000^2 - 999^2$  ilman laskinta?

166. Mitkä kaksi luonnollista lukua on kyseessä?

1. vihje: Luvut ovat pienempiä kuin 10.

2. vihje: Lukujen erotus on 1.

3. vihje: Suurempi luku voidaan kirjoittaa muodossa joku luku potenssiin 2.

4. vihje: Pienempi luku voidaan kirjoittaa muodossa joku luku potenssiin 3.

167. Järjestä pienimmästä suurimpaan.

(a)  $42, 4^2, 2^4, 24, 2 \cdot 4$

(b)  $5^2, 2^5, 52, 25, 5 \cdot 2$

### Vaativat tehtävät

168. Päättele, mikä luku sopii  $x:n$  paikalle.

(a)  $7^x = 49$

(b)  $10^x = 10000$

(c)  $x^2 = 100$

(d)  $2^x = 8$

169. Laske potenssin arvo, kun  $x = -2$ .

(a)  $x^2$

(b)  $x^3$

(c)  $x^4$

170. *Laskintehtävä:* Tomas alkoi säästää rahaa uutta sohvaa varten. Ensimmäisellä viikolla hänellä oli säästössä 2 €, seuraavalla viikolla 4 €, kolmannella viikolla 8 € jne. Onko rahaa tarpeeksi säästössä sohvaa varten 12 viikon jälkeen?

171. *Laskintehtävä:* Salmonellabakteerin lukumäärä kaksinkertaistuu tunnissa. Kello 8.00 bakteereja oli 3000. Paljonko bakteereja on kello 13.00?
  
172. *Laskintehtävä:* Voitaikinaa leivottaessa taikina kaulitaan ohueksi levyksi, taitetaan kolminkertaiseksi, kaulitaan jälleen ohueksi levyksi, taitetaan kolminkertaiseksi jne, jolloin muodostuu ohuita kerroksia. Leena Leipuri kaulitsi ja taittoi taikinan kymmenen kertaa. Kuinka monesta kerroksesta taikina muodostui?

## 10 Monikerrat ja jaollisuus

Luvun monikerta saadaan, kun luku kerotaan luonnollisella luvulla. Monikerroista muodostuu kyseisen luvun kertotaulu.

### Esimerkki 1

1. Luvun 2 monikertoja ovat 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...  
kaikki nämä luvut ovat jaollisia luvulla 2.
2. Luvun 5 monikertoja ovat 5, 10, 15, 20, 25, ...  
kaikki nämä luvut ovat jaollisia luvulla 5.

---

Luku on jaollinen toisella luvulla, jos lukujen jakolasku menee tasan eli tulos on kokonaisluku. Jos luku ei ole jaollinen toisella luvulla, jakolaskusta jää jakojäännös.

Luvulla jaollisia ovat vain kyseisen luvun monikerrat. Joka toinen kokonaisluku on jaollinen kahdella. Joka kolmas kokonaisluku on jaollinen kolmella jne.

Jokainen luku on jaollinen luvulla *yksi* ja *itsellään*.  
Lisäksi luku on jaollinen

- *kahdella* jos sen viimeinen numero on 2, 4, 6 tai 8.
- *kolmella* jos sen numeroiden summa on jaollinen kolmella (3, 6, 9, ...)
- *viidellä* jos sen viimeinen numero on 0 tai 5.
- *kuudella* jos luku on jaollinen sekä kahdella että kolmella.
- *yhdeksällä* jos luvun numeroiden summa on jaollinen yhdeksällä (9, 18, 27, ...)
- *kymmenellä* jos sen viimeinen numero on 0

Entäs muut luvut? Jaollisuussääntöjä on kehitetty monille luvuille, joita ei ole tässä listassa. Ne ovat usein monimutkaisempia kuin 3:n ja 9:n yhteenlaskusääntö. Wiki-pediassa (etenkin englanninkielisessä) on listattu kattava kokoelma eri lukujen sääntöjä.

Huomaa, että kolmen ja yhdeksän jaollisuussäännösä on ”niksi”: Oletetaan, että testaat onko luku jaollinen yhdeksällä ja saat luvun numeroiden summaksi 12345678. Mistä tiedät, onko tuollainen jaollinen yhdeksällä? No käyttämällä sääntöä uudelleen:  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$  ja 36 on 9:n monikerta, mutta jos yhä olet epävarma, käytä sääntöä vielä kerran:  $3 + 6 = 9$ . Ja koska 9 on jaollinen 9:llä, niin 36 on jaollinen 9:llä ja siten 12345678 on jaollinen 9:llä ja siten myös luku, jonka numeroiden summasta sait 12345678 on jaollinen 9:llä.

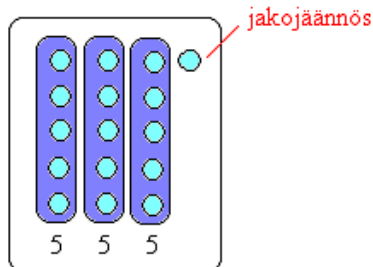
Tällaista todistamista kutsutaan rekursiiviseksi: samaa sääntöä sovelletaan uudelleen ja uudelleen, kunnes sen

soveltaminen ei enää onnistu, sitten saatu tulos ”palautuu” ensimmäisen todistuksen tulokseksi koko todistusketjun läpi.

### Esimerkki 2

- 1024 on jaollinen kahdella, koska viimeinen numero on 4.
- 12345 on jaollinen kolmella, koska  $\frac{1+2+3+4+5}{3} = \frac{15}{3} = 5$ .
- 6725 on jaollinen viidellä, koska sen viimeinen numero on 5.
- 246 on jaollinen kuudella, koska sen viimeinen numero on 6 ja  $\frac{2+4+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$ .
- 3456 on jaollinen yhdeksällä, koska  $\frac{3+4+5+6}{9} = \frac{18}{9} = 2$ .
- 2479120 on jaollinen kymmenellä, koska viimeinen numero on 0.

### Esimerkki 3



Jakolasku  $\frac{16}{5}$  ei mene tasan, vaan tulokseksi tulee  $3\frac{1}{5}$ . Jakojäännös saadaan selville laskutoimituksella

osamäärän kokonaisosa

$$\begin{array}{c} \text{jaettava} \quad | \quad \text{jakaja} \\ 16 - 3 \cdot 5 = 16 - 15 = 1 \end{array}$$

eli jakojäännös on 1.

---



**Tehtäviä**

173. Onko jälkimmäinen luku ensimmäisen luvun monikertaa?
- (a) 4, 12
  - (b) 23, 50
  - (c) 11, 44
  - (d) 8, 96
  - (e) 14,20
174. Luettele lukujen kolme seuraavaa monikertaa.
- (a) 0
  - (b) 1
  - (c) 8
  - (d) 12
  - (e) 15
175. Luettele lukujen neljä seuraavaa monikertaa.
- (a) 2
  - (b) 5
  - (c) 9
  - (d) 11
  - (e) 13
176. Kopio taulukot vihkoosi, luettele lukujen viisi ensimmäistä monikertaa ja alleviivaa lukujen yhteiset monikerrat.

Luku	Monikerrat
2	
5	

Luku	Monikerrat
3	
4	

Luku	Monikerrat
6	
8	
12	

177. Luettele kaikki luvun

- (a) 10 monikerrat, jotka ovat pienempiä kuin 90.
- (b) 7 monikerrat, jotka ovat lukujen 1 ja 40 välillä.

178. Päättelä mitkä luvuista ovat jaollisia kahdella?

- (a) 30
- (b) 43
- (c) 72
- (d) 101
- (e) 94
- (f) 81

179. Päättelä mitkä luvuista ovat jaollisia viidellä?

- (a) 13985
- (b) 67000
- (c) 6877
- (d) 9801
- (e) 20040
- (f) 55555

180. Mitkä edellisen tehtävän luvuista ovat jaollisia sekä viidellä että kymmenellä?
181. Päättele mitkä luvuista ovat jaollisia yhdeksällä?
- (a) 46
  - (b) 108
  - (c) 54
  - (d) 127
  - (e) 162
182. Ovatko seuraavat luvut jaollisia luvulla 11?
- (a) 66
  - (b) 132
  - (c) 100
  - (d) 121
  - (e) 145
183. Luettele kaikki ne luvut, joilla seuraavat luvut ovat jaollisia.
- (a) 5
  - (b) 6
  - (c) 8
  - (d) 10
184. Kopioi taulukko vihkoosi ja rastita, jos luku jaollinen ensimmäisellä rivillä olevalla luvulla.

Luku	2	3	5	6	9	10
386						
483						
2520						
7338						
9270						

185. Luettele neljä lukua, jotka ovat jaollisia

- (a) sekä luvulla 4 että 9
- (b) sekä luvulla 2 että 6.

186. Mikä on jakojäännös seuraavissa jakolaskuissa?

- (a)  $\frac{6}{2}$
- (b)  $\frac{3}{2}$
- (c)  $\frac{4}{2}$
- (d)  $\frac{5}{2}$
- (e)  $\frac{7}{2}$

### Soveltavat tehtävät

187. Määritä kaikki ne luvut, joilla luvut ovat jaollisia.

- (a) 12
- (b) 18
- (c) 21
- (d) 24

188. Määritä kaikki ne luvut, joilla luvut ovat jaollisia.

- (a) 32
- (b) 39
- (c) 40
- (d) 72

189. Erään luvun numeroiden summa on 12.

- (a) Muodosta kaksi tällaista lukua.
- (b) Mitä voit sanoa tällaisten lukujen jaollisuudesta?

190. Erään luvun numeroiden summa on 18.

- (a) Muodosta kaksi tällaista lukua.
- (b) Mitä voit sanoa tällaisten lukujen jaollisuudesta?
191. Muodosta kuusinumeroinen luku, joka on jaollinen
- (a) neljällä
- (b) kuudella
- (c) yhdeksällä.
192. Valitse oikea vaihtoehto.
- (a) Kahden parillisen luvun summa on parillinen/pariton luku.
- (b) Kahden parittoman luvun summa on parillinen/pariton luku.
- (c) Parillisen ja parittoman luvun summa on parillinen/pariton luku.
- (d) Parillisen ja parittoman luvun tulo on parillinen/pariton luku.
193. Luettele neljä lukua, jotka ovat jaollisia luvuilla 2, 3 ja 5.
194. Mikä on jakojäännös seuraavissa jakolaskuissa?
- (a)  $\frac{16}{4}$
- (b)  $\frac{9}{2}$
- (c)  $\frac{10}{6}$
- (d)  $\frac{19}{7}$
- (e)  $\frac{111}{16}$
195. Etsi jakolasku, jossa jakojäännös on
- (a) 2
- (b) 5

### Vaativat tehtävät

196. Mikä luonnollinen luku on kysymyksessä?

**1. vihje:** Se on pienempi kuin 100.

**2. vihje:** Se on jaollinen viidellä.

**3. vihje:** Se on parillinen.

**4. vihje:** Kun se jaetaan seitsemällä, on jakojäännös 4.

197. Kun luku jaetaan kahdella, jakojäännös on 1. Kun sama luku jaetaan kolmella, on jakojäännös 2. Mikä on

(a) pienin

(b) toiseksi pienin tällainen luku?

198. Henkilötunnus muodostuu syntymäajasta, yksilönumerosta ja tarkistusmerkistä. Syntymäajan jäljessä oleva merkki kertoo syntymävuosisadan. Henkilöllä, joka on syntynyt 1800-luvulla se on plusmerkki (+), 1900-luvulla syntyneillä se on yhdysmerkki (-) ja 2000-luvulla syntyneillä A -kirjain. Yksilönumerossa on kolme numeroa, sillä erotetaan toisistaan henkilöt, joilla on sama syntymäaika. Yksilönumero on miehillä pariton ja naisilla parillinen.

Henkilötunnuksen viimeinen merkki on tarkistusmerkki. Se muodostuu siten, että muodostetaan syntymäajasta ja yksilönumerosta yhdeksännumeroinen luku. Jaetaan tämä luku 31:llä ja katsotaan jakojäännöksen perusteella viimeinen henkilötunnuksen merkki oikeasta taulukosta.

Jakojäännös	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tarkastusmerkki	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C

Jakojäännös	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Tarkastusmerkki	D	E	F	H	J	K	L	M	N
Jakojäännös	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Tarkastusmerkki	P	R	S	T	U	V	W	X	Y

Onko kyseessä mies vai nainen, mikä on syntymävuosi ja tarkistusmerkki, jos henkilön henkilötunnuksen alkuosa on

- (a) 220390-025
- (b) 171279-122
- (c) 101202A541
- (d) 121199+452

## 11 Luvun jakaminen tekijöihin

On tärkeää osata jakaa luku tekijöihinsä, sillä yhteisten tekijöiden etsimistä pääsee harjoittelemaan esimerkiksi murtolukuja sievennettäessä jatkuvasti. Tekijöihin jakamisessa on kyse siitä, että annettu luku ilmaistaan toisten, annettua pienempien lukujen tulona.

### Esimerkki 1

Lelulaatikossa on 20 pikkuautoa. Tutkitaan monelleko lapselle autot voidaan jakaa tasan.

$$20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4 = 10 \cdot 2 = 20 \cdot 1$$

Eli:

Jos lapsia on vain yksi, hän saa tietysti kaikki 20 autoa.

Jos lapsia on kaksi, molemmat saavat 10 autoa.

Jos lapsia on neljä, kukin saa 5 autoa.

Jos lapsia on kymmenen, kukin saa 2 autoa.

Jos lapsia on kaksikymmentä, kukin saa yhden auton.

Pikkuautot menevät tasan vain , jos lapsia on 1, 2, 4, 5, 10 tai 20. Luku 20 on siis näillä kaikilla jaollinen. Lukuja 1, 2, 4, 5, 10 ja 20 sanotaan luvun 20 tekijöiksi.

---

Luvun tekijöitä ovat luvut, joilla kyseinen luku on jaollinen. Kun luku esitetään tulona, sanotaan sen olevan jaettu tekijöihin.

### Esimerkki 2

Yleisin tekijöihin jaon sovellus on yhteisten tekijöiden etsintä.

Etsitään luvun 6 tekijät.

$$6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$$

Luvun 6 tekijät ovat 1, 2, 3 ja 6.



Etsitään luvun 18 tekijät.

$$18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$$

Luvun 18 tekijät ovat 1, 2, 3, 6 ja 9.

Lukujen 6 ja 18 yhteiset tekijät ovat 1, 2, 3 ja 6.

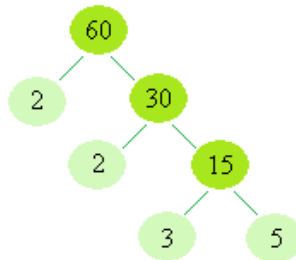
Tekijöihin jakoa voidaan jatkaa aina alkutekijöihin asti, jolloin luku esitetään alkulukujen tulona. Alkuluku on siitä erikoinen luku, ettei sitä voi enää jakaa tekijöihin ja jokainen kokonaisluku ( $\geq 2$ ) voidaan esittää ainoastaan yhdellä tavalla alkulukujen tulona.

Alkuluku on lukua 1 suurempi luonnollinen luku, joka on jaollinen ainoastaan luvulla 1 ja itsellään. Kymmenen ensimmäistä alkulukua ovat: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ja 29.

Alkutekijäpuu on oiva apu lukujen jakamisessa alkutekijöihin. Tekijöiksi valitaan aina pienin mahdollinen alkuluku niin kauan kunnes kaikki oksat päättyvät alkulukuihin.

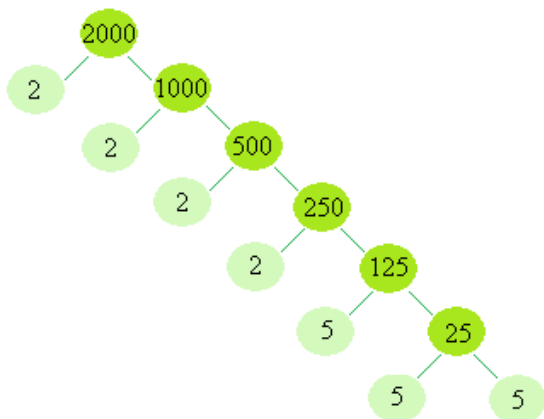
### Esimerkki 3

Jaetaan luku 60 alkutekijöihin..



Luku 60 hajoaa alkutekijöihin seuraavasti  $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ .

Jaetaan luku 2000 alkutekijöihin.



Luku 2000 hajoaa alkutekijöihin seuraavasti  $2000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5^3$ .

**Tehtäviä**

199. Onko ensimmäinen luku jälkimmäisen luvun tekijä?

(a) 4, 12

(b) 5, 45

(c) 8, 36

(d) 5, 29

(e) 11, 121

(f) 6,30

200. Luettele kymmenen ensimmäistä alkulukua.

201. Poimi luvuista 40, 47, 53, 55, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 88, 100, 101 alkuluvut.

202. Esitä luku 132 tulona, jonka toinen tekijä on

(a) 2

(b) 4

(c) 6

(d) 11

203. Täydennä puuttuvat tekijä.

(a)  $4 \cdot ? = 12$

(b)  $5 \cdot ? = 30$

(c)  $3 \cdot ? = 27$

(d)  $? \cdot 5 = 35$

(e)  $? \cdot 12 = 48$

(f)  $? \cdot 6 = 66$

204. Kopioi taulukot vihkoosi, täydennä ja alleviivaa lukujen yhteiset tekijät.

Luku	Tekijät
6	
8	

Luku	Tekijät
10	
20	

Luku	Tekijät
9	
12	
24	

205. Luettele lukujen kaikki tekijät.

- (a) 18
- (b) 100
- (c) 29
- (d) 144
- (e) 63

206. Luettele

- (a) luvun 8 tekijät.
- (b) luvun 12 tekijät.
- (c) lukujen 8 ja 12 yhteiset tekijät.

207. Mikä luku alkutekijöihin jaettuna on

- (a)  $2^2 \cdot 3$
- (b)  $3^3 \cdot 5^2$

(c)  $3^2 \cdot 5 \cdot 7$

(d)  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 ?$

208. Jaa alkutekijöihin.

(a) 7

(b) 10

(c) 11

(d) 21

209. Jaa alkutekijöihin.

(a) 12

(b) 18

(c) 20

(d) 24

210. Mitä yhteistä on luvuilla 2, 5, 29 ja 31?

**Soveltavat tehtävät**

211. Ohessa on lista luvun 36 tekijöistä, täydennä puuttuvat luvut.

1, 2, 3,  $\_$ ,  $\_$ ,  $\_$ ,  $\_$ ,  $\_$ , 36

212. Ohessa lista luvun 108 tekijöistä, täydennä puuttuvat luvut.

1,  $\_$ ,  $\_$ ,  $\_$ ,  $\_$ ,  $\_$ , 12,  $\_$ ,  $\_$ ,  $\_$ ,  $\_$ , 108

213. Jaa alkutekijöihin.

(a) 40

(b) 90

(a) Mikä on ainoa parillinen alkuluku?

(b) Luettele kaikki lukua 20 pienemmät alkuluvut.

(c) Luettele kaikki alkuluvut lukujen 25 ja 40 väliltä.

214. Jaa luvut alkutekijöihin.

- (a) 6
- (b) 15
- (c) 24
- (d) 50
- (e) 100

215. Luettele kaikki alkuluvut lukujen 120 ja 140 väliltä.

216. Oskarilla on kokoelmassaan 225 postimerkkiä. Hän aikoo pitää niistä itse 75 ja jakaa loput kavereilleen. Voiko Oskari jakaa postimerkit tasan

- (a) 4
- (b) 5
- (c) 6 kaverilleen?

217. Heikki järjestelee pöytiä 24 juhluvieraalle. Jokaisessa pöydässä tulee olla sama määrä vieraita, eikä kukaan istu yksin. Montako vierasta kussakin pöydässä voi olla?

### **Vaativat tehtävät**

218. Mikä on luvun 2178 suurin

- (a) alkutekijä
- (b) pariton tekijä?

219. Jaa luku 161 700 alkutekijöihin.

220. Jaa luku 9 699 690 alkutekijöihin.

221. Vuonna 1742 matemaatikko Christian Goldbach väitti, että jokainen lukua 2 suurempi parillinen luku voidaan esittää kahden alkuluvun summana. Esimerkiksi  $4 = 2 + 2$ ,  $8 = 3 + 5$  jne. Esitä seuraavat luvut kahden alkuluvun summana.

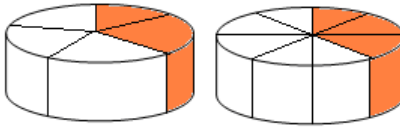
- (a) 16
  - (b) 46
  - (c) 80
  - (d) 100
-

## 12 Murtoluvut

Murtoluvut ja murtolausekkeet ovat erittäin keskeisiä työvälineitä yläasteen matematiikassa. On erittäin tärkeää opetella käyttämään murtoviivaa kaksoispisteen sijasta ”vakio-tapana” merkitä jakolaskua. Tärkeää on myös osata murtolukujen laventaminen ja sieventäminen sujuvasti ja tarkoituksenmukaisesti.

### Pohdintatehtävä

Kumman valitset: Kaksi palaa ensimmäisestä kakusta vai kolme palaa toisesta kakusta?



Nimityksiä

<i>Murtoluku</i>	$\frac{3}{5}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>— osoittaja</li> <li>— murtoviiva</li> <li>— nimittäjä</li> </ul>
<i>Sekaluku</i>	$3\frac{1}{4}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>— murto-osa</li> <li>— kokonaisosa</li> </ul>
<i>Epämurtoluku</i>	$\frac{12}{4}$	Osoittaja on suurempi kuin nimittäjä.

Murtoluvut voivat olla keskenään yhtä suuret vaikka niillä olisikin eri nimittäjät. Esimerkiksi seuraavat murtoluvut ovat keskenään yhtä suuria.



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$



Kun murtoluvun osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla luvulla, sen arvo pysyy samana. Tällöin puhutaan laventamisesta. Laventaminen merkitään murtoluvun vasempaan yläkulmaan.

$$\begin{array}{c} \cdot 2 \qquad \cdot 3 \\ \curvearrowright \qquad \curvearrowright \\ {}^2) \frac{1}{3} = {}^3) \frac{2}{6} = \frac{6}{12} \\ \curvearrowleft \qquad \curvearrowleft \\ \cdot 2 \qquad \cdot 3 \end{array} \quad \text{Voitaisiin laventaa edelleen.}$$

Murtoluvun arvo pysyy myös samana, jos sen osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla. Tällöin puhtaasti supistamisesta. Supistaminen merkitään murtoluvun oikeaan yläkulmaan.

$$\begin{array}{c} :4 \qquad :2 \\ \curvearrowleft \qquad \curvearrowleft \\ \frac{16}{24} \text{ } ^{(4)} = \frac{4}{6} \text{ } ^{(2)} = \frac{2}{3} \\ \curvearrowright \qquad \curvearrowright \\ :4 \qquad :2 \end{array} \quad \text{Ei voida supistaa enempää.}$$

Huomaa, että nolllalla ei voi laventaa eikä supistaa: nimittäjä muuttuisi nolllaksi, eikä nolllalla voi jakaa!

### Esimerkki 1

Järjestetään murtoluvut  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{7}{8}$  ja  $\frac{1}{2}$  suuruusjärjestykseen.

Lavennetaan murtoluvut ensin samannimisiksi. Koska murtolukujen pienin yhteinen nimittäjä on 8, murtoluvut lavennetaan siten, että kunkin nimittäjäksi tulee 8.

$${}^2) \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Lavennetaan luvulla 2.

$$\frac{7}{8}$$

Ei tarvitse laventaa, nimittäjässä on luku 8.

$${}^4) \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

Lavennetaan luvulla 4.

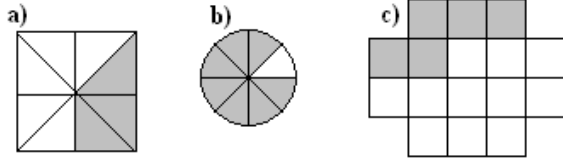
Nyt murtoluvut voidaan helposti laittaa suurusjärjestykseen:  $\frac{4}{8}$ ,  $\frac{6}{8}$  ja  $\frac{7}{8}$

Vastaus supistetussa muodossa:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$  ja  $\frac{7}{8}$ .

---

## Tehtäviä

222. Merkitse tummennettu alue murtolukuna.



223. Havainnollista murtolukuja kuvion avulla.

(a)  $\frac{7}{10}$

(b)  $\frac{3}{5}$

(c)  $\frac{4}{9}$

224. Poimi luvuista  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{8}{7}$ ,  $2\frac{3}{4}$ ,  $5\frac{6}{5}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{15}{1}$  kaikki

(a) epämurtoluvut

(b) sekaluvut

225. Muunna sekaluvuiksi.

(a)  $\frac{10}{3}$

(b)  $\frac{13}{5}$

(c)  $\frac{50}{7}$

(d)  $\frac{132}{18}$

226. Muunna epämurtoluvuksi.

(a)  $2\frac{1}{2}$

(b)  $5\frac{2}{3}$

(c)  $6\frac{3}{11}$

(d)  $17\frac{5}{6}$

227. Muunna epämurtoluvuksi.

- (a)  $-1\frac{1}{2}$
- (b)  $-5\frac{2}{5}$
- (c)  $-4\frac{3}{10}$
- (d)  $-11\frac{1}{6}$

228. Supista.

- (a)  $\frac{2}{4}$
- (b)  $\frac{6}{8}$
- (c)  $\frac{3}{9}$
- (d)  $\frac{5}{15}$

229. Järjestä murtoluvut  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{1}$  suuruusjärjestykseen, pienin ensin.

230. Supista

- (a)  $\frac{15}{35}$
- (b)  $\frac{3}{27}$
- (c)  $\frac{88}{165}$
- (d)  $\frac{36}{81}$

231. Täydennä niin, että murtoluvut ovat yhtä suuret.

- (a)  $\frac{1}{2} = \frac{\quad}{4}$
- (b)  $\frac{1}{10} = \frac{1}{5}$
- (c)  $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{16}$
- (d)  $\frac{8}{\quad} = \frac{2}{3}$
- (e)  $\frac{8}{20} = \frac{4}{\quad}$

232. Lavenna saman nimiseksi.

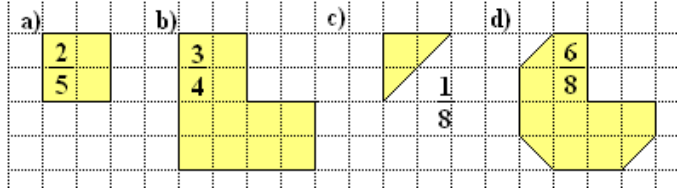
- (a)  $\frac{1}{3}$  ja  $\frac{1}{2}$
- (b)  $\frac{3}{5}$  ja  $\frac{4}{15}$

(c)  $\frac{1}{2}$  ja  $\frac{4}{9}$

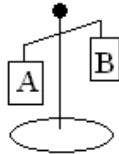
(d)  $\frac{5}{7}$  ja  $\frac{9}{11}$

**Soveltavat tehtävät**

233. Kuvassa on piirrettynä vain osa kuviosta. Piirrä koko kuvio vihkoosi.



234. Aseta murtoluvut oikeiseen vaakaan oikeaan järjestykseen (pienempi luku ylempään vaakakuppiin).



(a)  $\frac{5}{8}$  ja  $\frac{9}{16}$

(b)  $\frac{3}{8}$  ja  $\frac{7}{16}$

(c)  $\frac{3}{14}$  ja  $\frac{9}{43}$

(d)  $\frac{2}{5}$  ja  $\frac{4}{6}$

235. Sijoita murtoluvut ilmapalloihin siten, että pienin luku tulee ylimpänä olevaan ilmapalloon.

a)



$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{8}{9}$$

b)



$$\frac{3}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{6}{2}$$

c)



$$-\frac{7}{8} \quad -\frac{1}{7} \quad -\frac{5}{6}$$

236. Järjestä murtoluvut  $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{9}, \frac{5}{12}, \frac{9}{18}$  suuruusjärjestykseen, pienin ensin.

237. Kumpi luvuista on suurempi?

(a)  $\frac{10}{21}, \frac{11}{21}$

(b)  $-\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}$

(c)  $\frac{11}{20}, \frac{11}{21}$

(d)  $-\frac{7}{9}, -\frac{11}{15}$

### Vaativat tehtävät

238. Täydennä niin, että murtoluvut ovat yhtä suuret.

(a)  $-\frac{1}{2} = \frac{\quad}{4}$

(b)  $\frac{\quad}{-12} = -\frac{1}{6}$

(c)  $\frac{-9}{6} = \frac{3}{\quad}$

(d)  $\frac{4}{\quad} = -\frac{1}{5}$

239. Täydennä puuttuva luku.

(a)  $\frac{1}{5} < \frac{\quad}{5} < \frac{3}{5}$

(b)  $\frac{1}{4} < \frac{\quad}{8} < \frac{1}{2}$

(c)  $\frac{1}{8} < \frac{\quad}{4} < \frac{1}{2}$

(d)  $\frac{3}{8} < \frac{\quad}{3} < \frac{3}{4}$

240. Ratkaise luvut a ja b vihjeiden avulla.

(a)  $\frac{5}{6} = \frac{a}{b}$ , lukujen a ja b erotus on -7

(b)  $\frac{a}{b} = \frac{4}{7}$ , lukujen a ja b summa on 33

(c)  $\frac{8}{9} = \frac{a}{b}$ , luvut a ja b ovat peräkkäisiä parillisia lukuja

(d)  $\frac{a}{b} = \frac{4}{9}$ , luku a on 30 suurempi kuin luku b

241. Täydennä puuttuvat luvut.

$$(a) \frac{3}{4} > \frac{7}{8} > \frac{1}{2} > \frac{5}{12}$$

$$(b) \frac{15}{16} > \frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{2}{3}$$

242. Lavenna samannimisiksi.

$$(a) \frac{1}{2} \text{ ja } \frac{3}{2a}$$

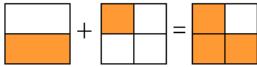
$$(b) \frac{2}{3b} \text{ ja } \frac{4}{b}$$

$$(c) \frac{1}{a} \text{ ja } \frac{1}{b}$$

$$(d) \frac{3}{2a} \text{ ja } \frac{5}{b}$$

## 13 Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

### Esimerkki 1

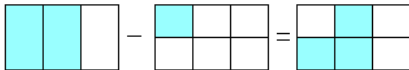


$$2) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \text{lavennetaan samannimisiksi (nimittäjiin tulee sama luku)}$$

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{2 + 1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{lasketaan ainoastaan osoittajat yhteen, nimittäjä pysyy samana}$$

### Esimerkki 2



$$2) \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \text{lavennetaan samannimisiksi}$$

$$\frac{4}{6} - \frac{1}{6} =$$

$$\frac{4 - 1}{6} = \frac{3}{6} \quad \text{vähennetään ainoastaan osoittajat toisistaan, nimittäjä pysyy samana}$$

$$= \frac{1}{3} \quad \text{vastaus esitetään supistetussa muodossa}$$



Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku:

- Sekaluvut ja kokonaisluvut muutetaan epä-murtoluvuiksi
- Murtoluvut muutetaan saman nimisiksi laven-tamalla ja/tai supistamalla
- Murtolukujen osoittajat etumerkkeineen kerä-tään osoittajaan yhdeksi isoksi laskuksi, eli ne lasketaan yhteen (tai vähennetään toisistaan)
- Nimittäjäksi tulee suoraan murtolukujen yh-teinen nimittäjä
- Vastaus muunnetaan tarvittaessa sekaluvuksi, laskun lopullinen vastaus on tapana ilmaista sekalukuna

### Esimerkki 3

Lasketaan  $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ .

$$\overset{2)}{\frac{5}{6}} + \overset{3)}{\frac{3}{4}} - \overset{4)}{\frac{1}{3}} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{10+9-4}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

Pienin yhteinen nimittäjä on 12.

6:sta saadaan 12 kertomalla se 2:lla.

4:stä saadaan 12 kertomalla se 3:lla.

3:sta saadaan 12 kertomalla se 4:llä.

Molemmat ovat jaollisia 3:lla.

### Esimerkki 4

Lasketaan  $3\frac{1}{2} - 4 + \frac{1}{4}$ .

$$3\frac{1}{2} - 4 + \frac{1}{4} = \overset{2)}{\frac{7}{2}} - \overset{4)}{4} + \frac{1}{4} = \frac{14}{4} - \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{14-16+1}{4} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Sekaluvut ja kokonaisluvut muutetaan epä-murtoluvuiksi.

Pienin yhteinen nimittäjä on 4.

Tuodaan miinusmerkki keskelle.

Huomaa, että jokainen kokonais- tai desimaaliluku on muunnettavissa helposti murtoluvuksi tekemällä siitä ”yh-desosia”

$$\text{Esimerkiksi luku } 5,45 = \overset{100)}{\frac{5,54}{1}} = \frac{554}{100}.$$

### Esimerkki 5




Lasketaan  $-\frac{2}{5} - \frac{3}{4}$ .




$$-\overset{4)}{2} - \overset{5)}{3} = -\frac{8}{20} - \frac{15}{20} = \overset{\uparrow}{-\frac{8-15}{20}} = \frac{-23}{20} = -1\frac{3}{20}$$

Muista siirtää edessä oleva miinusmerkki osoittajaan, kun suoritat osoittajien laskutoimitukset.

## Tehtäviä

243. Kopioi kuviot vihkoosi ja anna vastaus varjostamalla oikea määrä ruutuja.




a)  +  = 




b)  +  = 




c)  +  = 

244. Esitä edellisen tehtävän laskut laskulausekkeena.

245. Kopioi kuviot vihkoosi ja anna vastaus varjostamalla oikea määrä ruutuja.

a)  -  = 

b)  -  = 

c)  -  = 

246. Esitä edellisen tehtävän laskut laskulausekkeena.

247. Laske.

(a)  $\frac{1+5}{7}$

(b)  $\frac{2+3}{6}$

(c)  $\frac{8-6}{3}$

(d)  $\frac{7-4}{4}$

248. Laske.

(a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

(b)  $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$

(c)  $\frac{7}{10} - \frac{6}{10}$

(d)  $\frac{99}{100} - \frac{66}{100}$

249. Laske.

(a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

(b)  $\frac{3}{20} + \frac{1}{4}$

(c)  $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$

(d)  $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

250. Muodosta ja laske lukujen  $\frac{5}{6}$  ja  $\frac{2}{3}$ 

(a) summa

(b) erotus.

251. Laske.

(a)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

(b)  $\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$

(c)  $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$

(d)  $\frac{5}{6} - \frac{7}{8}$

252. Laske.

(a)  $\frac{2}{3} - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$

(b)  $\frac{1}{6} + \frac{3}{5} - \frac{2}{3}$

(c)  $2 - \frac{4}{5} + \frac{1}{2}$

253. Marianne osti ensimmäisenä päivänä  $4\frac{2}{5}$  kg mansikoita ja seuraavana päivänä  $5\frac{3}{4}$  kg. Montako kiloa mansikoita hän osti yhteensä?

**Soveltavat tehtävät**

254. Laske.

(a)  $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right)$   
(b)  $-\frac{4}{5} + \left(-\frac{5}{4}\right)$   
(c)  $\frac{9}{10} - \left(+\frac{3}{4}\right)$   
(d)  $-\frac{6}{8} - \frac{1}{16}$

255. Laske.

(a)  $6\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{8}$   
(b)  $-4\frac{5}{6} - 2\frac{3}{4}$   
(c)  $3\frac{1}{8} - 5\frac{4}{7}$

256. Laske  $5\frac{1}{4} + 5\frac{1}{4} + 2\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4}$ .

257. Laske.

(a) lukujen  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$  ja  $\frac{5}{6}$  summa.  
(b) lukujen  $\frac{9}{10}$  ja  $\frac{7}{8}$  erotus.

258. (a) Pähinkäkakkuun tarvitaan  $6\frac{2}{3}$  kahvikupillista maapähkinöitä ja  $4\frac{1}{3}$  kavikupillista saksanpähkinöitä. Montako kupillista pähkinöitä kakkuun tarvitaan kaikenkaikkiaan?

(b) Maalia oli alunperin  $5\frac{1}{2}$  litraa, josta Miro käytti  $2\frac{3}{6}$  litraa huoneensa maalaamiseen. Paljonko maalia jäi jäljelle?

259. (a) Vähennä lukujen  $\frac{1}{2}$  ja  $\frac{1}{3}$  erotus lukujen  $\frac{1}{2}$  ja  $\frac{1}{3}$  summasta.

- (b) Vähennä lukujen  $\frac{3}{4}$  ja  $\frac{2}{5}$  erotus lukujen  $\frac{3}{4}$  ja  $\frac{2}{5}$  summasta.

**Vaativat tehtävät**

260. Laske.

(a)  $\frac{1}{x} + \frac{2}{x}$

(b)  $\frac{3}{a} + \frac{5}{a}$

(c)  $\frac{8}{b} - \frac{3}{b}$

(d)  $\frac{12}{2y} - \frac{10}{2y}$

261. Laske.

(a)  $\frac{3}{a} + \frac{4}{2a}$

(b)  $\frac{1}{5x} + \frac{1}{10x}$

(c)  $\frac{5}{6b} - \frac{2}{3b}$

(d)  $\frac{4}{3y} - \frac{1}{2y}$

262. Merkitse ja laske lukujen  $-3\frac{5}{6}$  ja  $1\frac{1}{3}$

(a) itseisarvojen summa

(b) summan itseisarvo.

263. Laske.

(a)  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

(b)  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

## 14 Murtolukujen kertolasku

Murtolukujen kertolaskun vaiheet:

- Sekaluvut ja kokonaisluvut muunnetaan murtoluvuiksi
- Supistetaan jos mahdollista
- Osoittajat etumerkkeineen kerrotaan keskenään
- Nimittäjät kerrotaan keskenään (huomaa, että etumerkit kuuluvat osoittajille, joten kaikki nimittäjät käsitellään positiivisina)
- Vastaus muunnetaan sekaluvuksi tarpeen mukaan, lopullinen vastaus on tapana ilmoittaa sekalukuna

### Esimerkki 1

Kerrotaan luku  $\frac{3}{4}$  luvulla  $\frac{5}{7}$ .

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

Kerrotaan osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään.

### Esimerkki 2

Kerrotaan luvut  $4$ ,  $1\frac{1}{2}$  ja  $\frac{4}{5}$  keskenään.

Supistettavat luvut on oltava murtoviivan eri puolilla.  
Luvulla kaksi voidaan supistaa ainoastaan toinen nelosista.

$$4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}^2}{1 \cdot \cancel{2} \cdot 5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$$

Muutetaan kokonaisluvut ja sekaluvut epämurtoluvuiksi.

Muista, että mikä hyvänsä kokonais- tai desimaali voidaan muuntaa murtoluvuksi tekemällä siitä ”yhdesosia”, kuten edellisessä kappaleessa on näytetty.

---



**Tehtäviä**

264. Laske.

(a)  $\frac{1}{2} \cdot 2$

(b)  $5 \cdot \frac{1}{5}$

(c)  $\frac{1}{7} \cdot 7$

(d)  $10 \cdot \frac{1}{10}$

265. Laske.

(a)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}$

(b)  $\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9}$

(c)  $\frac{8}{9} \cdot \frac{9}{8}$

(d)  $\frac{100}{105} \cdot \frac{105}{100}$

266. Kerro seuraavat luvut luvulla  $\frac{2}{3}$ .

(a) 5

(b)  $\frac{3}{5}$

(c)  $\frac{6}{7}$

(d)  $\frac{2}{5}$

267. Yksi avokado maksaa  $\frac{3}{4}$  euroa. Laske avokadojen hinta (anna vastaus murtolukuna), jos niitä on

(a) 2

(b) 5

(c) 12

(d) 20

268. Laske.

(a)  $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$

(b)  $\frac{5}{6} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}$

$$(c) 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6}$$

269. Laske.

$$(a) \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

$$(b) \frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{6}$$

$$(c) 1\frac{3}{4} \cdot 3\frac{1}{7}$$

270. Täydennä puuttuvat luvut.

$$(a) \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{16}$$

$$(b) \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$$

$$(c) \frac{5}{4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{16}$$

$$(d) \frac{9}{3} \cdot \frac{18}{30} = \frac{18}{30}$$

271. Sinulla on 12 kappaletta  $\frac{1}{3}$  litran colajuomatölkkiä. Montako litraa juomaa on yhteensä?

### Soveltavat tehtävät

272. Etsi kertolasku, jonka tulos on

$$(a) \frac{4}{5}$$

$$(b) 1\frac{1}{2}$$

$$(c) -\frac{7}{8}$$

273. Kerro seuraavat luvut luvulla  $-\frac{2}{5}$

$$(a) -5$$

$$(b) \frac{5}{2}$$

$$(c) -\frac{2}{3}$$

$$(d) -1\frac{1}{3}$$

274. Laske, paljonko on

(a) neljäsosa 48 eurosta

(b) viidesosa 950 eurosta

- (c) kaksi kolmasosaa 825 grammasta
- (d) kolme seitsemäsosaa 54 kilogrammasta?
275. Lotta työskentelee perjantaina  $3\frac{1}{2}$  tuntia ja lauantaina  $5\frac{2}{5}$  tuntia. Lotan tuntipalkka on 6,5 euroa.
- (a) Montako tuntia Lotta työskentelee yhteensä?
- (b) Paljonko hän saa palkkaa kahdesta päivästä?
276. Virvoitusjuomapullon tilavuus on  $\frac{1}{3}$  litraa. Montako litraa juomaa on korissa, kun koriin mahtuu 24 pulloa?
277. Koulussa on 600 oppilasta ja heistä  $\frac{1}{5}$  on ruskeasilmäisiä. Monnellako oppilaalla ei ole ruskeat silmät?

**Vaativat tehtävät**

278. Kultaseoksen yhteydessä käytettiin ennen yleisesti yksikköä karaatti. Karaattiluku ilmoittaa kultaseoksen kultapitoisuuden 24.-osina. Kuinka monta grammaa kultaa sisältää 4 gramman painoinen 18 karaatin kultasormus? (pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen 1981)
279. Tyhjään astiaan kaadetaan 12 l vettä, joka täyttää  $\frac{3}{4}$  astian tilavuudesta. Kuinka suuri astia on?
280. Tytillä on pussillinen kultakolikoita. Hän antaa niistä  $\frac{1}{8}$  äidilleen ja jäljelle jääneistä kolikoista hän antaa puolet veljelleen. Isä saa jäljelle jääneistä  $\frac{2}{7}$ , jolloin Tytille jää 25 kultakolikkoa. Paljonko kolikoita oli alunperin?
281. Opiskelijoista oli  $\frac{5}{6}$  alle 20-vuotiaita. Alle 20-vuotiaista oli poikia kolmasosa. Kuinka suuri osa opiskelijoista oli alle 20-vuotiaita tyttöjä?
282. Laske.

(a)  $\frac{5}{a} \cdot \frac{2}{3}$

(b)  $\frac{8}{a} \cdot \frac{a}{2}$

(c)  $\frac{2b}{8} \cdot \frac{5}{b}$

(d)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{b}{2b}$

283. Harjoittelija Alku postittaa kirje-erän 30 minuutissa. kun hän tekee saman työn yhdessä ammattitaitoisen Kelpo kanssa, aikaa kuluu tasan 5 minuuttia. Missä ajassa Kelpo tekisi saman työn yksin? (yo syksy 1995)
284. Järveen on pystytetty pylväs. Pylvästä puolet on maan alla pohjassa, kaksi viidesosaa vedessä ja 70 senttimetriä veden pinnan yläpuolella. Kuinka pitkä pylväs on kokonaisuudessaan?
285. Laske  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$  .

## 15 Murtolukujen jakolasku

Tutkitaan seuraavia kahden murtoluvun jakolaskuja:

$$1. \quad \frac{6}{4} : \frac{3}{2} = \frac{6:3}{4:2} = \frac{2}{2} = 1$$

Laskuhan on oikein, sillä ensimmäisen murtoluvun saa laventamalla jälkimmäisestä ja näin ollen murtoluvut ovat tosiaan yhtä suuret!

$$2. \quad \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1:1}{4:2} = \frac{1}{2}$$

Oikein, ”puolikas” mahtuu neljäsosaan ”puoliksi”!

$$3. \quad \frac{3}{5} : \frac{2}{3}$$

Tällaisessa laskussa monilla tulee seinä vastaan, vaikka ei tarvitsisi: samannimisiksi laventamalla saadaan:  $\frac{9}{15} : \frac{10}{15} = \frac{9:10}{15:15} = \frac{9:10}{1} = 9 : 10$ , joka voidaan kirjoittaa murtoluvuksi:  $\frac{9}{10}$ .

Muutaman kerran saman nimiseksi lavennettuasi tulet huomaamaan, että sellaisissa tapauksissa, joissa jouduit laventamaan ensimmäisen murtoluvun toisen murtoluvun nimittäjällä ja päinvastoin, tulet käytännössä luoneeksi lausekkeen, jossa kerrot ensimmäisen murtoluvun toisen murtoluvun käänteisluvulla!

Näin ollen luku (myös murtoluku) voidaan jakaa murtoluvulla siten, että se kerrotaan jakajan käänteisluvulla. Yleensä tämä on myös tehokkain tapa, mutta kuten yllä olleet esimerkit osoittivat, ei ihan aina.

Murtoluvun käänteisluku saadaan vaihtamalla osoittaja ja nimittäjä keskenään.

Luvun ja sen käänteisluvun tulo on aina 1.

Huomaa, että nollalla ei ole käänteislukua, sillä nollalla ei voi jakaa, eikä se siten voi toimia osoittajana.

### Esimerkki 1

Muodostetaan lukujen 2 ja  $\frac{4}{5}$  käänteisluvut.

$$2 \xrightarrow{\text{käänteisluku}} \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{5} \xrightarrow{\text{käänteisluku}} \frac{5}{4}$$

$$\text{tulo} \quad 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{tulo} \quad \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1$$

Murtolukujen jakolaskun vaiheet:

- Sekaluvut ja kokonaisluvut muutetaan epä-murtoluvuiksi
- Hankkiudutaan eroon jakolaskusta:
  - Ensimmäinen tapa:
    - \* Muunnetaan jakolasku kertolaskuksi muodostamalla jakajasta käänteisluku
    - \* Supistetaan, jos mahdollista
    - \* Kerrotaan osoittajat keskenään
    - \* Kerrotaan nimittäjät keskenään
  - Toinen tapa:
    - \* Suoritetaan jakolaskut osoittajalle ja nimittäjälle
      - jos jakolaskut menevät tasan (tai ne on helppo laentaa tasan meneviksi) tai
      - jos jakolaskun seurauksena nimittäjästä tulee yksi
- Vastaus muunnetaan tarvittaessa sekaluvuksi, lopullinen vastaus on tapana ilmaista sekalukuna

**Esimerkki 2**

Jaetaan luku  $\frac{1}{4}$  luvulla  $\frac{5}{6}$ .

$$\frac{1}{4} : \frac{5}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1 \cdot \cancel{6}^3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{10}$$

Kerrotaan jakajan  
käänteisluvulla.

**Esimerkki 3**

Jaetaan luku  $2\frac{1}{4}$  luvulla  $\frac{2}{3}$ .

$$2\frac{1}{4} : \frac{2}{3} = \frac{9}{4} : \frac{2}{3} = \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$$

Sekaluku muutetaan  
ensin epämurtoluksi.

**Tehtäviä**

286. Ilmoita lukujen käänteisluvut.

(a)  $\frac{3}{8}$

(b)  $-\frac{1}{5}$

(c) 4

(d) 100

287. Laske.

(a)  $2 : \frac{1}{2}$

(b)  $3 : \frac{1}{2}$

(c)  $5 : \frac{1}{2}$

(d)  $9 : \frac{1}{2}$

288. Laske.

(a)  $\frac{1}{2} : 2$

(b)  $\frac{1}{2} : 3$

(c)  $\frac{1}{2} : 5$

(d)  $\frac{1}{2} : 9$

289. Jaa seuraavat luvut luvulla  $\frac{2}{3}$ .

(a) 6

(b)  $\frac{1}{6}$

(c)  $\frac{4}{5}$

(d)  $\frac{6}{7}$

290. Laske.

(a)  $\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$

(b)  $1 : \frac{4}{5}$

(c)  $\frac{2}{3} : 4$



(d)  $\frac{5}{8} : \frac{8}{5}$

291. Laske.

(a)  $\frac{2}{5} : \frac{1}{2}$

(b)  $\frac{4}{5} : 1$

(c)  $4 : \frac{2}{3}$

(d)  $\frac{8}{5} : \frac{5}{8}$

292. Laske murtolukujen  $\frac{4}{9}$  ja  $\frac{5}{6}$ 

(a) summa

(b) erotus

(c) tulo

(d) osamäärä.

293. Kannussa on  $1\frac{4}{5}$  litraa mehua. Juomalasin tilavuus on  $\frac{1}{5}$  litraa. Montako lasillista mehua kannusta saa?**Soveltavat tehtävät**294. Jaa seuraavat luvut luvulla  $-\frac{3}{4}$ .

(a) 8

(b)  $-\frac{1}{4}$

(c)  $\frac{3}{8}$

(d)  $-1\frac{1}{2}$

295. Keksi jakolasku, jonka tulos on

(a)  $\frac{1}{2}$

(b)  $\frac{3}{4}$

(c)  $-\frac{2}{3}$

296. Laske murtolukujen  $-\frac{3}{4}$  ja  $\frac{1}{8}$ 

(a) summa

- (b) erotus  
(c) tulo  
(d) osamäärä.
297. Määritä käänteisluku seuraaville luvuille.
- (a) 4  
(b)  $-9$   
(c)  $\frac{2}{5}$   
(d)  $4\frac{1}{3}$   
(e)  $\frac{a}{b}$   
(f)  $a + 1$
298. Jos  $\frac{3}{4}$  kakkua jaetaan tasan neljälle hengelle, kuinka suuren osan kakkua kukin saa?
299. Marja keitti viinimarjamehua 16 litraa. Montako
- (a)  $\frac{3}{4}$  litran pulloa hän tarvitsi viinimarjamehun pulloittamiseen?  
(b) desilitraa mehua olisi vielä mahtunut viimeiseen pulloon?
300. Tarkista kertomalla osamäärä ja jakaja keskenään, onko seuraavat laskut laskettu oikein.
- (a)  $\frac{5}{4} : \frac{4}{3} = \frac{15}{16}$   
(b)  $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$   
(c)  $\frac{6}{7} : \frac{14}{15} = \frac{45}{49}$
301. Laske puuttuvat luvut käyttämällä murtolukujen jakolaskua.
- (a)  $\frac{?}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{16}$   
(b)  $\frac{?}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$

$$(c) \frac{?}{7} \cdot \frac{9}{10} = \frac{18}{30}$$

$$(d) \frac{?}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{16}$$

**Vaativat tehtävät**

302. Keksi jakolasku, jonka tulos on

$$(a) -\frac{5}{6}$$

$$(b) -2\frac{1}{3}.$$

303. Päättele puuttuvat luvut..

$$(a) \frac{?}{7} : \frac{1}{2} = \frac{5}{9}$$

$$(b) \frac{4}{9} : \frac{?}{7} = \frac{1}{2}$$

$$(c) \frac{?}{10} : \frac{2}{7} = \frac{6}{5}$$

304. Laske.

$$(a) \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$$

$$(b) \frac{\frac{5}{6}}{1 + \frac{5}{6}}$$

$$(c) \frac{\frac{3}{4} - \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{5}{8}}$$

305. Laske.

$$(a) \frac{2}{3} : \frac{a}{3}$$

$$(b) \frac{b}{2} : \frac{1}{4}$$

$$(c) \frac{a}{2} : \frac{2}{b}$$

$$(d) \frac{4}{b} : \frac{a}{5}$$

306. Laske  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ .

## 16 Laskujärjestys

### Pohdintatehtävä

Lauseke  $\frac{23-4\cdot 7+2^2}{3\cdot 6-2}$  tarkoittaa samaa kuin  $(23 - 4 \cdot 7 + 2^2) : (3 \cdot 6 - 2)$ . Missä järjestyksessä laskutoimitukset suoritetaan?

Lopputulos riippuu laskujen suoritusjärjestyksestä. Jotta kaikki laskisivat laskut samalla tavalla, on sovittu yleiset säännöt laskutoimitusten järjestykselle.

#### Laskujärjestys:

- Laske ensin sulkeissa olevat laskut, sisimmät sulut ensin. Muista, että itseisarvomerkit toimivat sulkujen tavoin.
- Laske toisena potenssien arvot
- Laske seuraavaksi kerto- ja jakolaskut siinä järjestyksessä kuin ne esiintyvät vasemmalta oikealle
- Lopuksi laske yhteen- ja vähennyslaskut siinä järjestyksessä kuin ne esiintyvät vasemmalta oikealle

Jos tehtävässä on pelkkiä yhteenlaskuja, voidaan yhteenlaskettavien järjestystä vaihtaa. Sama on voimassa myös peräkkäisten kertolaskujen kesken. Edellä olevissa kohdissa erityisesti ”vasemmalta oikealle”-sääntö on hyvin rajoitettava. *Laskujärjestystä voi soveltaa paljonkin, kunhan saa käsityksen siitä, mikä on sallittua ja mikä ei ole!* Tästä hyvänä esimerkkinä käy jakolasku:  $\frac{3^{897}}{3^{896}}$ . Edellä olevaa järjestystä orjallisesti noudattaen vastauksen saaminen on hurjan



sulkumerkit	nimitykset
()	kaarisulkeet
[]	hakasulkeet
{ }	aaltosulkeet

Jos samassa lausekkeessa on useita sisäkkäisiä sulkulausekkeita, kaarisulkeet ovat sisimpinä ja niiden sisällä olevat laskut lasketaan ensiksi. Toiseksi lasketaan hakasulkeiden sisällä olevat lausekkeet ja kolmanneksi aaltosulkeissa olevat laskut. Mikään ei varsinaisesti pakota käyttämään aalto- tai hakasulkeita, eikä niitä usein matematiikassa pidemmälle mentäessä enää käytetäkään (jos esimerkiksi sisäkkäisiä sulkeita on 5, on lauseke sen näköinen, ettei sitä enää pari haka- ja aaltosuljetta pelasta... ). Jos käytät pelkästään kaarisulkeita, ole kuitenkin hyvin tarkkana sen suhteen, mitkä sulkumerkit ovat keskenään ”pareja”.

### Esimerkki 2

Lasketaan  $66 : \{3 + [5 \cdot (4 + 2)]\}$ .

$$66 : \{3 + [5 \cdot (4 + 2)]\} = 66 : \{3 + [5 \cdot 6]\} = 66 : \{3 + 30\} = 66 : 33 = 11$$

ensiksi
toiseksi
kolmanneksi

---

**Tehtäviä**

307. Laske.

(a)  $112 - 20 + 3$

(b)  $33 - 3 \cdot 3$

(c)  $4 + 5 \cdot 6$

(d)  $9 + 9^2$

308. Laske.

(a)  $2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$

(b)  $7 - 3 \cdot \frac{5}{6}$

(c)  $(3 - 2) : 6$

(d)  $\frac{4}{5} : 6 - \frac{1}{20}$

309. Laske.

(a)  $18 + [15 - (4 - 2 \cdot 3)]$

(b)  $18 + 15 - 4 - 2 \cdot 3$

(c)  $18 + (15 - 4 - 2) \cdot 3$

(d)  $[18 + 15 - (4 - 2)] \cdot 3$

310. Muodosta laskulauseke ja laske.

(a) Lukujen 20 ja 1 summan ja luvun 4 tulo.

(b) Lukujen 15 ja 5 erotuksen ja luvun 7 tulo.

311. Laske.

(a)  $10 - 2 \cdot (9 - 3 \cdot 2) + 2$

(b)  $\frac{2 - (7 - 2 \cdot 4)}{-2}$

(c)  $5 + \frac{(4 - 8) \cdot 2}{4}$

(d)  $6 - (2 - (3 + 1) + 4)$

312. Laske.

(a)  $(32 + 29) - (34 - 9)$

(b)  $320 + (51 + 24 - 95) - (100 + 20) + (45 - 78)$

(c)  $13 - (4 + 7) - (20 - 5)$

(d)  $(12 - 3) - (-3 + 4) + (-1 - 5)$

313. Muodosta laskulauseke ja laske.

(a) Lukujen 20 ja 8 summan ja luvun 4 osamäärä.

(b) Lukujen 16 ja 2 erotuksen ja luvun 7 osamäärä.

314. Laske.

(a)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$

(b)  $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)$

(c)  $\frac{8}{9} - \frac{1}{2} : \frac{4}{5}$

(d)  $\left(\frac{8}{9} - \frac{1}{2}\right) : \frac{4}{5}$

315. *Laskintehtävä*: Laske.

(a)  $1 - 2^4$

(b)  $(1 - 2)^4$

(c)  $(5 \cdot 2)^2$

(d)  $(2 \cdot 3)^4$

(e)  $\frac{25}{5^2}$

### Soveltavat tehtävät

316. Lisää sulkeet niin, että lauseke pitää paikkaansa.

(a)  $12 + 3 \cdot 0 = 0$

(b)  $16 - 7 \cdot 5 = 45$

(c)  $14 + 8 - 6 \cdot 3 = 20$

(d)  $80 - 3 \cdot 2 + 4 = 62$



317. Laske.

(a)  $\{2 \cdot 3 + 2 \cdot [4 + 5 \cdot (9 - 7)]\}$

(b)  $\{24 : 2 - 2 \cdot [3 \cdot 2 - (6 - 1)]\}$

(c)  $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 9 - 7$

(d)  $24 : 2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 - 6 - 1$

318. Laske.

(a)  $(8 + 6) \cdot 11 - 2^3$

(b)  $8 + 6 \cdot (11 - 2^3)$

(c)  $(8 + 6) \cdot (11 - 2^3)$

(d)  $8 + 6 \cdot 11 - 2^3$

319. Lisää sulkeet niin, että lauseke pitää paikkaansa.

(a)  $72 : 12 - 3 + 2 = 10$

(b)  $24 + 26 : 4 + 6 = 5$

(c)  $144 : 12 - 7 \cdot 3 = 15$

(d)  $100 : 5 - 3 + 6 = 56$

320. *Laskintehtävä*: Laske.

(a)  $8^2 \cdot (3^3 - 5^2) + 12^2 : (4^3 + 2 \cdot 4)$

(b)  $4 \cdot 5^3 : (3 \cdot 6 + 2) - 6^3 : 18$

(c)  $6^2 \cdot 4 - 2 \cdot 3 + 5^3$

(d)  $9^2 \cdot 2 - 2^3 : 4$

321. Lukuja 1,4,6 ja 8 on käytettävä kutakin vain kerran. Laskutoimitusmerkkejä +, -,  $\cdot$  ja : saa käyttää mielitehtäinmonta kertaa. Sulkumerkkejä ei saa käyttää. Kirjoita laskulauseke, jonka tulos on 26.

322. Laske.

(a)  $5 \cdot (8 + 7 \cdot 10) - 6 \cdot (28 - 17) + 4 \cdot (3 \cdot 8 - 23)$

(b)  $5 \cdot 8 + 7 \cdot 10 - 6 \cdot 28 - 17 + 4 \cdot 3 \cdot 8 - 23$

(c)  $3 + 2 \cdot (4 - 2) + 6 : (1 + 2)$

(d)  $3 + 2 \cdot 4 - 2 + 6 : 1 + 2$

**Vaativat tehtävät**

323. (a)  $-24 + 7 \cdot (-3)$

(b)  $\frac{9}{-3} - 2 \cdot (-4)$

(c)  $\frac{-2 \cdot (-2) \cdot (-2) - (-2) - (-2)}{-2 + (-2)}$

324. Mitkä väitteistä ovat tosia ja mitkä epätosia?

(a)  $\frac{5+3}{2} < 6 - 3$

(b)  $\frac{10-1}{100} < 8 + 2$

(c)  $\frac{10+8-3}{7-2 \cdot 2} < 6$

(d)  $8 - 2 \cdot 3 \geq (-2) \cdot 8$

325. Laske.

(a)  $1 + \frac{1}{1+1}$

(b)  $1 + \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{(1+1)}\right]}$

(c)  $1 + \frac{1}{\left\{1 + \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{(1+1)}\right]}\right\}}$

326. Määritä seuraava 50 tekijän tulo:  $(1 + 1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{50}\right)$ .

327. Laske murtoluvuilla ilman laskinta ja anna tulokset sievennettyinä yksinkertaisimpaan muotoonsa. (pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen 1993)

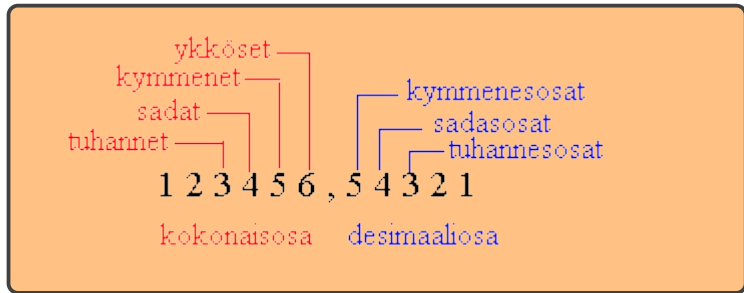
(a)  $\frac{4}{3} + \frac{3}{2} - 1$

(b)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{7}$

(c)  $\left(3 - 2 \cdot \frac{5}{4}\right) : \frac{7}{3}$

## 17 Desimaaliluvut ja merkitsevät numerot

Käyttämämme lukujen merkintäjärjestelmä on nimeltään paikkajärjestelmä. Siinä numeron merkitykseen (*"merkittävyteen"*, *"painoarvoon"*) vaikuttaa sen paikka. "Olet nolla" on ikävästi sanottu, mutta jos nolla sijoitetaan ykkösen jälkeen, tämän arvo kymmenkertaistuu. Paikkajärjestelmiä on olemassa useita erilaisia ja jokaisessa paikkajärjestelmässä on tietty kantaluku. Käyttämämme järjestelmä on desimaalinen, eli sen kantaluku on 10.



### Esimerkki 1

Esitetään murtolukuna a) 0,32    b) 0,845    c) 3,4.

a) 0,32

Viimeinen numero tarkoittaa **sadasosia**, joten  $0,32 = \frac{32}{100}$ .

b) 0,845

Viimeinen numero tarkoittaa **tuhannesosia**, joten  $0,845 = \frac{845}{1000}$ .

c) 3,4

Viimeinen numero tarkoittaa **kymmenesosia**, mutta luvussa on myös kokonaisosa, joten  $3,4 = 3\frac{4}{10} = \frac{34}{10}$ .

Desimaaliluvuilla laskettaessa on kiinnitettävä huomiota tulosten oikeaan tarkkuuteen. Laskimella laskettaessa

voimme saada lukuja, joiden paikalla voisi olla mitä tahansa lukuja. Kaikkien saatujen lukujen arvoihin ei voi luottaa. Merkitsevät numerot ilmoittavat mitkä luvun numeroista ovat vielä oikeita ja mitkä puppua.

Luvun merkitseviksi numeroiksi katsotaan kaikki muut paitsi desimaaliluvun alussa ja kokonaisluvun lopussa olevat nollat. Joissakin tapauksissa kokonaisluvun lopussakin olevat nollat voivat olla merkitseviä, mikä ilmenee asiayhteydestä.

## Esimerkki 2

1. Kokonaisluvussa **500 000** on yksi merkitsevä numero.
2. Desimaaliluvussa **0,250** on kolme merkitsevää numeroa.
3. Desimaaliluvussa **0,04** on yksi merkitsevä numero.
4. Desimaaliluvussa **89,20** on neljä merkitsevää numeroa.
5. Kokonaisluvussa **4005** on neljä merkitsevää numeroa.
6. Kokonaisluvussa **540** on kaksi tai kolme merkitsevää numeroa riippuen siitä, onko luku pyöristetty.
7. **20 €** seteli on tasan **20 €** siispä sekä numero **2** että **0** ovat merkitseviä.
8. Jos mittaustulos on ”n. **20** cm vähän alle tai päälle”, merkitseviä numeroita on vain yksi, eli numero **2**.

---

Kun desimaaliluku katkaistaan, viimeinen mukaan tuleva numero korotetaan yhdellä, jos ensimmäinen pois jäävä

numero on 5, 6, 7, 8 tai 9. Desimaalilukuja pyöristettäessä jätetään katkaisukohtan jälkeiset desimaalit pois. Kokonaislukuja pyöristettäessä korvataan katkaisukohtan jälkeiset numerot nolilla.

Jos desimaaliluvussa on lopussa nollia, jokaisen niistä tulkitaan olevan merkittävä: oletamme, ettei kukaan halua ”turhaan” kirjoittaa ylimääräisiä numeroita lukuihinsa ja näin ollen nollat lopussa ovat todellakin tarkkaan mitattuja.

### **Esimerkki 3**

Pyöristetään luvut annetulta kohdalta.

- a)  $4,57\overline{392} \approx 4,57$
- b)  $0,609\overline{75} \approx 0,610$
- c)  $514\overline{5880} \approx 5150000$

---

Merkintä  $\approx$  luetaan ”likimäärin yhtä suuri kuin”.

**Tehtäviä**

328. Täydennä.

(a)  $4623 = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + 20 + 3$

(b)  $8756 = 8000 + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + 6$

(c)  $238519 = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$

(d)  $9814 = \underline{\hspace{2cm}} \cdot 1000 + \underline{\hspace{2cm}} \cdot 100 + \underline{\hspace{2cm}} \cdot 10 + \underline{\hspace{2cm}} \cdot 1$

(e)  $7652 = \underline{\hspace{2cm}} \cdot 1000 + \underline{\hspace{2cm}} \cdot 100 + \underline{\hspace{2cm}} \cdot 10 + \underline{\hspace{2cm}} \cdot 1$

329. Muunna desimaaliluvuiksi.

(a)  $3\frac{1}{4}$

(b)  $1\frac{4}{50}$

(c)  $\frac{2}{50}$

(d)  $\frac{3}{24}$

330. Muunna murtoluvuiksi.

(a) 0,001

(b) 0,12

(c) 1,75

(d) 0,333...

331. Kirjoita murtolukumuodossa.

(a) 0,2

(b) 0,45

(c) 1,5

(d) 0,007

332. Minkä lukuyksikön paikalla luvussa 4210,96 on

- (a) 1
- (b) 6
- (c) 4
- (d) 0.

333. Minkä lukuyksikön paikalla numero 7 on seuraavissa luvuissa

- (a) 978
- (b) 7100
- (c) 87 345
- (d) 9,067.

334. Kirjoita desimaalilukuna.

- (a) 4 kokonaista 25 sadasosaa
- (b) 30 kokonaista 86 tuhannesosaa
- (c) 0 kokonaista 21 kymmenestuhannesosaa
- (d) 12 kokonaista 14 miljoonasosaa
- (e) 3 kokonaista 3 kymmenesosaa
- (f) 200 kokonaista 555 tuhannesosaa

335. Pyöristä yhden desimaalin tarkkuuteen.

- (a) 0,741
- (b) 0,652
- (c) 6,55
- (d) 5,916
- (e) 3,45
- (f) 9,05

336. Kirjoita desimaalilukuna.

- (a)  $\frac{8}{10}$

(b)  $\frac{23}{100}$

(c)  $\frac{729}{1000}$

(d)  $\frac{536}{1000}$

337. Pyöristä kymmenesosan tarkkuuteen.

(a) 0,99

(b) 120,045

(c) 4685,05673

(d) 25 577,982

338. Pyöristä kahden desimaalin tarkkuuteen.

(a) 5,473

(b) 3,0038

(c) 0,014

(d) 99,996

(e) 15,475

339. Pyöristä ykkösten tarkkuuteen.

(a) 0,068096

(b) 2,0888

(c) 103,97666

(d) 0,50

340. Pyöristä satojen tarkkuuteen.

(a) 687,089

(b) 32,57

(c) 52,23

(d) 8945

341. Pyöristä viiden sentin tarkkuuteen.



- (a) 12,347 €
- (b) 801,3333 €
- (c) 2,122 €
- (d) 7,3611 €
- (e) 92,859 €
- (f) 1,575 €

342. Pyöristä

- (a) 465 kymmenien
- (b) 14769.3352 satojen
- (c) 4827 tuhansien
- (d) 16745.25845 tuhanneosien
- (e) 198.14556 sadaosien

tarkkuuteen.

343. Tarkastellaan lukua 1,04562735. Pyöristä luku

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4
- (e) 5

desimaalin tarkkuuteen.

344. Tarkastellaan lukua 0,65458011. Ilmoita luku

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4

(e) 5

merkitsevän numeron tarkkuudella.

345. Kirjoita Suomen väkiluku 5 300 484 (31.12.2007)

(a) satojen

(b) satojen tuhansien

tarkkuudella.

346. Ilmoita rahamäärä 14 393 €

(a) kymmenien

(b) satojen

(c) kymmenien tuhansien

eurojen tarkkuudella.

347. Pyöristä kahden merkitsevän numeron tarkkuuteen

(a) 104,98543

(b) 3,000356

(c) 0,0287

(d) 0,0012345

348. Montako merkitsevää numeroa on likiarvoissa?

(a) 3,1582

(b) 4500

(c) 0,0284

(d) 18,0504

(e) 0,007730

349. *Laskintehtävä:* Laske laskimella potenssien likiarvot ja anna vastaukset kahden desimaalin tarkkuudella

(a)  $2,3^6$

- (b)  $3, 12^4$
- (c)  $32, 12^3$
- (d)  $1, 003^{17}$
- (e)  $(-4, 3)^8$

**Soveltavat tehtävät**

350. Ilmoita valon nopeus 299 792 458 m/s neljän merkitsevän numeron tarkkuudella.
351. Luettele kolme lukua, joiden likiarvo kahden merkitsevän numeron tarkkuudella on 250.
352. Luettele kolme lukua, joiden likiarvo kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella on 0,0116.

**Vaativat tehtävät**

353. Millä välillä luku  $x$  on, kun sen likiarvo
- (a) yhden merkitsevän numeron tarkkuudella on 4
  - (b) kahden merkitsevän numeron tarkkuudella on 5,3?
354. Mäkihyppääjä Janne Ahosen hypyn pituudeksi ilmoitettiin puolen metrin tarkkuudella 97,5 m. Millä välillä on hypyn todellinen pituus?
355. Osoita, että luvut  $3\frac{2}{5}$  ja  $-3,4$  ovat toistensa vastalukuja
356. Osoita, että luvut  $0,6$  ja  $1\frac{2}{3}$  ovat toistensa käänteislukuja.

## 18 Lasketaan desimaaliluvuilla, pyöristyssäännöt

Kun lasketaan desimaaliluvuilla, on tulosten tarkkuuteen kiinnitettävä erityistä huomiota. Muutoin saatetaan vahingossa väittää tehtyjä mittauksia todellisuutta tarkemmiksi. Desimaaliluvuilla laskettaessa vastaukset pyöristetään sopivaan tarkkuuteen tiettyjen sääntöjen mukaisesti.

### Esimerkki 1

Juho ajaa työmatkallaan 5 km kotoaan työpaikan parkkipaikalle. Parkkipaikalta on työpaikan ovelle 60 m ja ovelta 15 m Juhon työhuoneeseen. Kuinka pitkä Juhon työmatka on kokonaisuudessaan?

$$5 \text{ km} + 0,060 \text{ km} + 0,015 \text{ km} = 5,075 \text{ km}$$

Tarkastellaan vastauksen mielekkyyttä. Automatka on ilmoitettu kokonaisten kilometrien tarkkuudella. Sen todellinen arvo on välillä 4,5 km - 5,5 km, jolloin koko matkan pituus tulisi olemaan välillä 4,575 km - 5,575 km. Jos nyt Juhon työmatkan pituudeksi ilmoitetaan 5,075 km, tarkoittaa se, että matkan pituus on tarkasti 5 km ja 75 m. Saadun tuloksen kaikki desimaalit 0, 7 ja 5 voivat kuitenkin olla mitä tahansa numeroita, koska 5 km matkaa ei oltu mitattu metrien tarkkuudella. Ainoa järkevä vastaus työmatkan pituudeksi, jossa voidaan luottaa numeroiden paikkansäilytyteen, on 5 km.

---

Desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskussa vastaus esitetään korkeintaan yhtä monen desimaalin tarkkuudella, kuin epätarkimmassa lähtöarvossa on annettu.

### Esimerkki 2

Suoritetaan laskut ja annetaan vastaukset sopivalla tarkkuudella.

└─ epätarkimmassa yksi desimaali

a)  $4,14 + 3,1 + 456,897 = 464,1\overset{|}{3}7 \approx 464,1$

b)  $562,456 - 401,12 = 161,3\overset{|}{3}6 \approx 161,34$

└─ epätarkimmassa kaksi desimaalia

---

Desimaalilukujen kerto- ja jakolaskun vastauksessa saa olla korkeintaan yhtä monta merkitsevää numeroa, kuin epätarkimmassa lähtöarvossa on annettu.

Huomaa, että tämä sääntö voi olla joskus todella hämmäntävä yksinkertaisissa ja tutuissa laskutoimituksissa:  $5 \cdot 3 = 15$ , kuten tiedämme, mutta laskun ”n. 5 cm kertaa n. 3 cm” tulos pitäisi sokeasti tätä sääntöä seuraten ilmoittaa muodossa ”n. 20 cm”!

### Esimerkki 3

Suoritetaan laskut ja annetaan vastaukset sopivalla tarkkuudella.

└─ epätarkimmassa kaksi merkitsevää numeroa

a)  $0,12 \cdot 27,60 = 3,3\overset{|}{1}2 \approx 3,3$

b)  $\frac{2004}{2,05} = 977,5609756 \approx 978$

└─ epätarkimmassa kolme merkitsevää numeroa

---

### Tulosten tarkkuus ja mittaustarkkuus

Jos laskun tulos halutaan tietyllä tarkkuudella:

- yhteen- ja vähennyslaskuissa kaikki lähtöarvot on mitattava vähintään yhtä desimaalia tarkemmin, kuin haluttu tuloksen tarkkuus
- kerto- ja jakolaskuissa kaikki lähtöarvot on mitattava vähintään yhtä merkitsevää numeroa tarkemmin, kuin haluttu tuloksen tarkkuus

Oppikirjan tehtävissä tämä käytännössä merkitsee sitä, että mittaustuloksista voi tipauttaa sallitun määrän desimaaleja pois laskun alussa.

**Tehtäviä**

357. Montako merkitsevää numeroa luvuissa on?
- (a) 1301
  - (b) 0,004
  - (c) 12,910
  - (d) 0,0220
  - (e) 22
358. *Laskintehtävä:* Laske ja pyöristä tulos kahden desimaalin tarkkuuteen.
- (a)  $1,36783 + 4,09859 + 2,69838$
  - (b)  $2,8698 \cdot 3,0860 \cdot 1,9602$
359. Montako desimaalia/merkitsevää numeroa voi olla enintään edellisen tehtävän laskujen vastauksissa? Miksi?
360. Montako desimaalia tulee seuraavien yhteen- ja vähennyslaskujen vastauksiin?
- (a)  $0,0024 + 0,2 - 0,00075$
  - (b)  $11,236 - 2,66 + 6,0002$
  - (c)  $-0,0013 + 3,141 - 12,2$
361. *Laskintehtävä:* Laske edellisen tehtävän laskut ja pyöristä vastaus sopivaan tarkkuuteen.
362. *Laskintehtävä:* Laske ja kiinnitä huomiota vastauksen oikeaan tarkkuuteen.
- (a)  $53,12 \text{ km} + 12,3 \text{ km}$
  - (b)  $300,2 \text{ km} - 120,0311 \text{ km}$
  - (c)  $8000 \text{ km} + 0,75 \text{ km}$
  - (d)  $0,097 \text{ km} - 0,0006 \text{ km}$

363. Vanni norsun paino on huikeat 4000 kg. Vanni syö eräänä aamuna 33,75 kg heinää ja 12,5 kg hedelmiä. Paljonko Vanni painaa aamupalan jälkeen?
364. Montako merkitsevää numeroa tulee seuraavien kertoja jakolaskujen vastauksiin?
- (a)  $12 \cdot 0,5$
  - (b)  $0,1 \cdot 2,5$
  - (c)  $3,21 : 45$
  - (d)  $0,245 : 0,12$
365. *Laskintehtävä:* Laske edellisen tehtävän laskut ja pyöristä vastaus sopivaan tarkkuuteen
366. Montako merkitsevää numeroa tulee kertolaskujen vastauksiin?
- (a)  $5,26 \cdot 5,056 \cdot 0,0068$
  - (b)  $2,01263 \cdot 1,02$
  - (c)  $0,06 \cdot 7,014 \cdot 0,00581$
367. *Laskintehtävä:* Pyöristä lausekkeiden tulokset likiarvojen edellyttämiin tarkkuuksiin.
- (a)  $3,10 \cdot 9,913$
  - (b)  $9,85 \cdot 21\,000$
  - (c)  $4,86 \cdot 1,54$
368. *Laskintehtävä:* Laske Suomen maapinta-ala sadan neliökilometrin tarkkuudella, kun Suomen läänien maapinta-alat ovat seuraavat:



Lääni	Maapinta-ala [km <sup>2</sup> ]
Etelä-Suomen lääni	30 229,10
Länsi-Suomen lääni	74 185,17
Itä-Suomen lääni	48 727,44
Oulun lääni	56 858,19
Lapin lääni	93 002,81
Ahvenanmaa	1 526,50

(Lähde: Tilastokeskus)

369. Toskaomenoiden valmistusohje on tehty neljälle henkilölle.

*Toskaomenat*

- 4 kpl hapahkoja omenoita

Toskaseos:

- 75 g voita tai margariinia
- 1,5 dl fariinisokeria
- 2 rkl vehnä jauhoja
- 2 rkl maitoa tai kermaa
- 70 g mantelilastuja

Laita kuoritut ja halkaistut omenat kupera puoli ylöspäin voideltuun uunivuokaan. Kiehauta toskaseokseen kuuluvat aineet kattilassa koko ajan sekoittaen. Kaada seos omenoiden päälle ja kuumenna 225°:ssa uunissa 15-20 minuuttia. Tarjoile hieman jäähtyneenä jäätelön kera.

Muuta reseptin ainemäärät

- (a) kahdelle
- (b) kuudelle

henkilölle.

370. Keksitkö syitä, milloin voit joutua muuttamaan tai kannattaa vähän muuttaa valmistamiseen tarvittavia ainemääriä?

### **Soveltavat tehtävät**

371. Pyöräilijä painoi vaatteineen kilogramman tarkkuudella 72 kg. Pakattu reppu painoi kilogramman tarkkuudella 21 kg ja pyörä painoi gramman tarkkuudella 8,2 kg. Paljonko pyöräilijä painoi varusteineen?
372. Kuinka tarkasti kolme yhteenlaskettavaa likiarvoa on mitattava, jotta summa saadaan varmasti oikein sadasosien tarkkuudella?
373. Kuinka tarkasti molemmat likiarvot on mitattava, jos niiden tuloon vaaditaan kahden merkitsevän numeron tarkkuus?
374. *Laskintehtävä:* Yhden ruuvin paino on noin 2,27 g. Ruuvipakkauksen paino on 4 890 g. Montako ruuvia on pakkauksessa?

### **Vaativat tehtävät**

375. Sinun on suoritettava kertolasku  $0,333\dots \cdot 19,123123\dots$ . Miten pyöristät luvut, jotta tulos saadaan varmasti oikein
- (a) neljän
  - (b) kolmen

merkitsevän numeron tarkkuudella?

## 19 Kalenterin matematiikkaa

Suomessa käytettiin 1700-luvulla Juliaanista kalenteria, joka on nimetty Julius Caesarin mukaan. Juliaanisessa kalenterissa vuodessa on 365 päivää, ja joka neljäs vuosi on karkausvuosi, johon lisätään karkauspäivä. Venäjällä kirkollisia juhlia vietetään edelleen juliaanisen kalenterin mukaisesti.

Maailmassa on käytössä noin 40 erilaista kalenteria. Gregoriaaninen kalenteri on näistä yleisin ja se on nykyisin myös meidän käytössämme. Kalenterimme on tällä hetkellä noin 13 vuorokautta Juliaanista kalenteria edellä. Gregoriaaninen kalenterivuosi on normaalisti pituudeltaan 365 päivää, mutta koska todellinen aurinkovuosi on 365,25 päivää pitkä, lisätään joihinkin vuosiin karkauspäivä 29. helmikuuta, jolloin kalenterivuoden pituudeksi tulee 366 päivää. Karkauspäivää vietetään neljällä jaollisina vuosina, lukuun ottamatta sadalla jaollisia vuosia, jotka eivät ole jaollisia 400:lla. Ongelma Gregoriaanisessa kalenterissa on etteivät viikonpäivät pysy samoina vuodesta toiseen, vaan siirtyvät vuodessa yleensä yhden päivän eteenpäin. Viikonpäivän voi laskea seuraavan kaavan avulla:

Huomaa, että kaavan jakolaskuissa kaikki luvut pyöristetään alaspäin!

$$a = \frac{14 - \text{kuukausi}}{12}$$

$$y = \text{vuosi} - a$$

$$m = \text{kuukausi} + 12a - 2$$

$$d = \text{jakoäännös, kun}$$

$$\left( \text{päivä} + y + \frac{y}{4} - \frac{y}{100} + \frac{y}{400} + \frac{31m}{12} \right)$$

jaetaan luvulla 7

d kertoo viikonpäivän: 0 = sunnuntai, 1 = maanantai, ...

Islamilaisissa maissa käytetään Gregoriaanisen kalente-

rin kanssa rinnakkain Hijra-kalenteria. Hijra-kalenterissa on 354 tai 355 päivää ja kaksitoista kuukautta, ja kuukaudessa on 29 tai 30 päivää. Jokainen uusi kuukausi alkaa uudenkuun myötä. Kuukausi vastaa siis kuun kierrosta. Koska uusikuu tulee näkyviin eri ajankohtina eri puolilla maapalloa, ei sama kuukausi ala kaikkialla samana päivänä. Saman kuukauden päivien määrä saattaa vaihdella vuodesta toiseen. Yhdeksäs kuukausi on nimeltään Ramadan ja se on paastokuukausi. Annettaessa päivämäärä Hijra-kalenterin mukaan on tapana kirjoittaa H vuosiluvun jälkeen. Gregoriaaninen vuosi (M) voidaan muuntaa likimäärin Hijra-vuodeksi (H) seuraavan kaavan avulla:

$$H = \frac{34 \cdot (M - 622)}{33}$$

Kiinassa Gregoriaanisen kalenterin rinnalla käytetään kiinalaista kalenteria, jonka mukaan vietetään perinteisiä vuotuisia juhlia, kuten kiinalaista uuttavuotta. Kiinalainen kalenteri perustuu kuun ja auringon liikkeisiin. Kuun kierto on keskimäärin 29,5 päivän pituinen ja tietyin väliajoin kiinalaiseen kalenteriin lisätään ylimääräinen kuukausi, jotta se pysyisi auringon kulkuun perustuvan kalenterin tahdissa. Kiinalaisessa kalenterissa vuodet ovat nimetty 12 eläimen mukaan: rotta, härkä, tiikeri, jänis, lohikäärme, käärme, hevonen, lammas, apina, kukko, koira ja sika. Lisäksi käytössä on viisi elementtiä: vesi, tuli, maa, puu ja rauta. Näin kiinalainen kalenteri toistuu 60 vuoden välein (kaksitoista eri eläinten vuotta kertaa viisi eri elementtiä).

## 20 Aikaväli ja aikalaskut

Aika-käsitteen avulla pystytään laittamaan tapahtumahetket järjestykseen. Ensimmäiset ajanmääritykset perustuvat päivän ja yön vaihteluun sekä vuodenaikoihin. Minuutteja ja sekunteja on käytetty 1600-luvulta lähtien. Tarve niille tuli vasta tähtitieteen kehittymisen myötä. Kymmenjärjestelmästä poikkeava tunnin ja minuutin jako kuuteenkymmeneen on peräisin babylonialaisilta.

Maailmanaikana käytetään Englannin Greenwichin aikaa (GMT = Greenwich Mean Time), jossa puolenpäivän hetki määrätään Lontoon läheltä kulkevan 0-pituuspiirin mukaan. Suomessa noudatetaan toista aikavyöhykettä Greenwichistä itään, jota kutsutaan Itä-Euroopan ajaksi (GMT + 2). Kun kello on Greenwichissä 12.00, on se meillä 14.00. Suomen virallinen aika saadaan Espoon Otaniemestä, Valtion teknillisen tutkimuskeskuksen sähkötekniikan laboratorion kautta.

1 tunti = 60 minuuttia  
 1 minuutti = 60 sekuntia  
 1 vuosi = 52 viikkoa = 365 vuorokautta

### Esimerkki 1

Lasketaan paljonko on kolme viidesosaa  $\frac{4}{9}$  tunnista.

Luvusta otetaan tietty osa siten, että luku kerrotaan kyseisellä osalla.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} \text{ h} = \frac{\cancel{3} \cdot 4}{5 \cdot \cancel{9}_3} \text{ h} = \frac{4}{15} \text{ h}$$

Tunnissa on 60 minuuttia, joten vastaus minuutteina saadaan ottamalla neljä viidestoistaosaa 60 minuutista.

$$\frac{4}{15} \cdot 60 \text{ min} = \frac{4 \cdot \cancel{60}^4}{\cancel{15}_3 \cdot 1} \text{ min} = 8 \text{ min}$$

Kellonaikalaskuja helpottaa tuntien ja minuuttien eritteleminen. Aikoja voidaan laskea allekkain yhteen ja vähentää toisistaan, kunhan muistetaan ettei kyseessä ole tuttu kymmenjärjestelmäkäytäntö vaan  $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$ . Lasku aloitetaan aina pienimmistä ajanmääreistä.

### Esimerkki 2

Juna lähtee asemalta 6.35 ja matka kestää 3 tuntia 46 minuuttia. Moneltako juna on perillä?

$$\begin{array}{r}
 1 \text{ h} \\
 6 \text{ h} \\
 + 3 \text{ h} \\
 \hline
 10 \text{ h}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 35 \text{ min} \\
 46 \text{ min} \\
 \hline
 21 \text{ min}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 81 \text{ min} = 60 \text{ min} + 21 \text{ min} \\
 = 1 \text{ h } 21 \text{ min}
 \end{array}$$

Vastaus: Juna on perillä kello 10.21.

### Esimerkki 3

Yöjuna saapui asemalle 4.12. Moneltako se lähti, jos matka kesti 2 tuntia 48 minuuttia?

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 \cancel{4} \text{ h} \\
 - 2 \text{ h} \\
 \hline
 1 \text{ h}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 60 + 12 = 72 \\
 \cancel{12} \text{ min} \\
 48 \text{ min} \\
 \hline
 24 \text{ min}
 \end{array}$$

Vastaus: Juna lähti kello 1.24.

**Tehtäviä**

376. Muunna sekunneiksi.

- (a) 4 min
- (b) 23 min 35 s
- (c) 2 h 55 min 13 s
- (d) 4 min 56 s
- (e) 12 h 4 s
- (f) 3 h 12 min 1 s

377. Ilmoita ajat sellaisessa muodossa, että siinä näkyy kokonaiset tunnit, minuutit ja sekunnit (esimerkiksi 1 h 12 min 9 s)

- (a) 3789 s
- (b) 370 s
- (c) 3490 s
- (d) 92 200 s
- (e) 410 s

378. Montako kuukautta on

- (a)  $\frac{1}{2}$  vuotta
- (b)  $\frac{1}{6}$  vuotta
- (c)  $\frac{3}{4}$  vuotta ?

379. Montako minuuttia on

- (a)  $\frac{1}{6}$  tunti
- (b)  $\frac{1}{4}$  tunti
- (c)  $\frac{4}{5}$  tunti ?

380. Kuinka monta

- (a) minuuttia on 24 h

- (b) tuntia on 16 d 21 h
- (c) kuukautta on 18 a 6 kk
- (d) sekuntia on 1 viikko?

381. Täydennä.

- (a) 1 karkausvuosi = \_\_\_\_\_vuorokautta
- (b) 2 vuosisataa = \_\_\_\_\_vuotta
- (c) 8 minuuttia = \_\_\_\_\_sekuntia
- (d) 4 viikkoa = \_\_\_\_\_vuorokautta
- (e) 156 viikkoa = \_\_\_\_\_vuotta
- (f) 3 vuosituhatta = \_\_\_\_\_vuotta
- (g) 2 vuotta = \_\_\_\_\_vuorokautta

### **Soveltavat tehtävät**

382. Amerikassa on käytössä 12-tuntinen kello. Aamun tunnit erottaa illan tunneista loppuun lisättävä tarkennus: am tarkoittaa tunteja ennen keskipäivää, pm tunteja keskipäivän jälkeen. Muuta kellonajat 24-tuntisen kellon ajoiksi.

- (a) 10.30 am
- (b) 1.45 pm
- (c) 7.55 am
- (d) 11.30 pm

383. Muuta 24-tuntisen kellon ajat 12-tuntisen kellon ajoiksi.

- (a) 14.17
- (b) 05.10
- (c) 17.20
- (d) 03.03



384. Helmin koulupäivä alkaa 8.15 ja päättyy 14.45. Montako tuntia Helmi viettää koulussa?
385. Laske.
- (a) 2 h 30 min + 4 h 30 min
  - (b) 6 h 20 min + 5 h 19 min
  - (c) 12 h 44 min + 8 h 12 min
  - (d) 6 h 34 min + 7 h 39 min
386. Laske.
- (a) 12 h 30 min - 7 h 16 min
  - (b) 19 h 46 min - 6 h 39 min
  - (c) 7 h 23 min - 4 h 41 min
  - (d) 10 h 50 min - 5 h 56 min
387. Vanhin ihminen, jonka iästä on kiistaton todiste, on ollut Ranskalainen Jeanne Calment. Hän syntyi 21.2.1875 ja kuoli 4.8.1997. Kuinka vanhaksi hän eli?
388. Matka junalla Birminghamista Oxfordiin kestää 1 h 42 min. Laske mihin aikaan juna on perillä Oxfordissa, jossa juna lähtee Birminghamista kello
- (a) 8.30
  - (b) 9.43
  - (c) 11.06
  - (d) 13.18
  - (e) 15.26.
389. Laske kuinka pitkä aika on seuraavien kellonaikojen välissä.
- (a) 7.00 ja 13.05
  - (b) 8.45 ja 15.55

- (c) 10.24 ja 18.00
- (d) 15.35 ja 21.40
- (e) 22.05 ja 23.55

**Vaativat tehtävät**

390. (a) Montako päivää olet elänyt?  
(b) Montako tuntia olet elänyt?  
(c) Oletko eläny vielä miljoona minuuttia?  
(d) Kuinka monta sekuntia olet elänyt, kun olet 60 vuotias?
391. Jos viime torstai oli 25.9, mikä viikonpäivä oli syyskuun ensimmäinen päivä?
392. Montako vuotta on vuosien 3 eKr. ja 3 jKr. välissä?
393. Kreikkalainen filosofi Platon syntyi vuonna 427 eKr. ja kuoli vuonna 349 eKr.  
(a) Minkä ikäisenä hän kuoli?  
(b) Montako vuotta on kulunut hänen syntymästään?
394. Muunna Gregoriaaniset vuodet Hijra-vuodeksi (muunnoskaavan löydät kappaletta edeltävästä tarinasta)  
(a) 1970  
(b) 2008
395. Lasketaan mikä viikonpäivä oli (muunnoskaavan löydät kappaletta edeltävästä tarinasta)  
(a) 9.6.2008  
(b) 18.6.2009

## 21 Kertaustehtäviä

### 21.1 Lukujoukot ja laskutoimitukset

396. Muodosta ja laske lukujen 36 ja 6
- (a) summa
  - (b) erotus
  - (c) tulo
  - (d) osamäärä.
397. Esitä lukusuoran avulla seuraavat lukujoukot
- (a) reaalityluvut
  - (b) luonnolliset luvut
  - (c) kokonaisluvut
398. Mihin lukujoukkoihin luku kuuluu?
- (a) -6
  - (b)  $\frac{1}{9}$
  - (c) 0.239781...
  - (d) 0,25
  - (e) 5
399. Päättele mikä luku sopii tyhjiin ruutuun?
- (a)  $\_ + 4 = 12$
  - (b)  $26 - \_ = 18$
  - (c)  $80 : \_ = 16$
  - (d)  $\_ \cdot 3 = 54$
400. Päättele mikä on luku x, kun luvun 78 ja luvun x
- (a) summa on 90
  - (b) tulo on 234

- (c) erotus on 69  
(d) osamäärä on 39.
401. Kun eräs luku kerrotaan luvulla 10, on se 21 suurempi kuin sama luku kerrottuna luvulla 3. Mikä luku on kyseessä?
402. Kahden luvun summa on 112 ja erotus 36. Mitkä luvut ovat kyseessä?
403. Tarhassa on yhteensä 22 eläintä, kanoja ja kaniineja. Niillä on yhteensä 68 jalkaa. Montako kumpaakin lajia on?

## 21.2 Lukujen suuruusvertailua

404. Järjestä luvut suuruusjärjestykseen, pienin ensin.
- (a) 0,6 6,6 6,06 0,006 6,006  
(b) 3,13 3,113 31,13 311,3 0,3113  
(c) 1,7 1,07 1,007 7,01 7,001
405. Valitse sopiva merkki: < tai >
- (a) 2 \_ 2.1  
(b) -5 \_ -4  
(c) 0,9999 \_ 1  
(d) 16 \_ 16,001  
(e) 1,99 \_ 1,98
406. Päättelä puuttuva luku.
- (a)  $\bar{5} = 2$   
(b)  $\bar{8} = 10$   
(c)  $\bar{1} = 9$   
(d)  $\bar{\quad} = 0$

(e)  $\bar{5} = 20$

407. Onko väite tosi vai epätosi?

(a)  $1 \geq 4$

(b)  $7 < 3$

(c)  $3 \geq -3$

(d)  $2 \geq 2$

(e)  $1 \neq 4$

(f)  $5 \leq 8$

408. Merkitse lukusuoralle ne reaaliluvut, jotka ovat

(a) lukujen 1 ja 5 välissä

(b) suurempia kuin luku  $-3$

(c) positiivisia

(d) suuruudeltaan enintään 3.

409. Mitkä luvuista  $-1$ ,  $4$ ,  $8$  ja  $12$  toteuttavat ehdon

(a)  $x < 4$

(b)  $-2 < x \leq 8$

(c)  $x \geq 7$

(d)  $x \neq 8$  ?

410. Mitkä luonnolliset luvut  $x$  toteuttavat ehdon

(a)  $x \leq 3$

(b)  $-1 < x < 4$

(c)  $x < 2$

(d)  $0 \leq x < 5$  ?

411. Taulukossa on aikuisten painoindeksiluokat.

Painoindeksi P	Tulkinta
$P \leq 18,4$	Normaalia alhaisempi paino
$18,4 < P \leq 24,9$	Normaali paino
$24,9 < P \leq 29,9$	Lievä lihavuus
$29,9 < P \leq 34,9$	Merkittävä lihavuus
$34,9 < P \leq 39,9$	Vaikea lihavuus
$P > 39,9$	Sairaalloinen lihavuus

Mitä voit sanoa henkilön painosta, jos hänen painoindeksinsä on

- (a) 24,9
- (b) 25
- (c) 32
- (d) 18,1?

### 21.3 Itseisarvo ja vastaluku

412. Määritä lukujen etäisyys nolasta.

- (a) 5
- (b) -8
- (c) 0
- (d) -12
- (e) x

413. Jäljennä taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat luvut.

luku	vastaluku	itseisarvo
$\frac{1}{5}$		
$-\frac{2}{3}$		
-12		
	$\frac{6}{7}$	
	$-\frac{8}{5}$	

414. Sievennä.

(a)  $|-3|$

(b)  $-|2|$

(c)  $-|-7|$

(d)  $-|+9|$

415. Merkitse ja laske lukujen -9 ja 6 itseisarvojen

(a) summa

(b) erotus

(c) tulo.

416. Luettele ne kokonaisluvut, jotka toteuttavat ehdon  $|\text{luku}| < 4$ .

417. Mikä luku sopii x:n paikalle?

(a)  $|x| = 6$

(b)  $|x| < 6$

(c)  $|x| \geq 6$

(d)  $|x| = -6$

418. Mitkä ovat lukujen vastaluvut?

(a) 2,1

(b) 5a

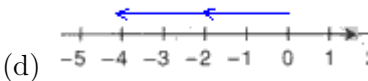
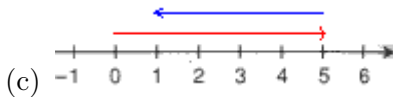
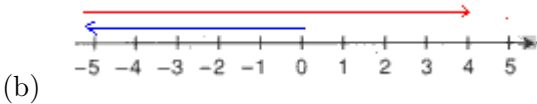
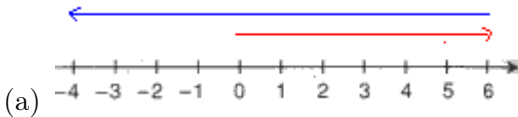
(c)  $-6$ (d)  $a-1$ 

419. Lauseke  $|x - a|$  ilmaisee luvun  $x$  etäisyyden luvusta  $a$ . Tutki lukusuoran avulla, mitkä luvut toteuttavat

(a) ehdon  $|x - 1| = 4$ (b) ehdon  $|x - 1| < 4$ 

## 21.4 Kokonaislukujen yhteen- ja vähennyslasku

420. Kirjoita lukusuoralla kuvatut laskutoimitukset lausekkeena ja suorita ne.



421. Mikä lämpötila on kolme astetta enemmän kuin

(a)  $0^{\circ}C$ (b)  $3^{\circ}C$ (c)  $-2^{\circ}C$ (d)  $-7^{\circ}C$  ?






422. Mikä lämpötila on viisi astetta vähemmän kuin

- (a)  $2^{\circ}\text{C}$
- (b)  $0^{\circ}\text{C}$
- (c)  $-3^{\circ}\text{C}$
- (d)  $-10^{\circ}\text{C}$  ?

423.

● kuvaa lukua 1 ja ● kuvaa lukua -1. Mitä lukua seuraavat mallit kuvaavat?

- a) 
- b) 
- c) 

424. Kirjoita laskulauseke ja ratkaise loppulämpötila.

- (a) Lämpötila kohoaa  $-2$  asteesta  $5$  astetta.
- (b) Lämpötila laskee  $-4$  asteesta  $8$  astetta.
- (c) Lämpötila laskee  $3$  asteesta  $12$  astetta.
- (d) Lämpötilaa kohoaa  $1$  asteesta  $9$  astetta.

425. Päättele mikä luku sopii tyhjään ruutuun?

- (a)  $\_ - 4 = -15$
- (b)  $3 - \_ = -5$
- (c)  $-5 + \_ = 2$
- (d)  $\_ \cdot + 8 = -15$

426. Käyttötilin saldo oli kuukauden alussa  $921,95$  €. Laske tilin saldo kuukauden lopussa, kun tilitapahtumat oli seuraavat:

- talletus  $150$  €
- otto  $60$  €

- otto 220 €
- otto 40 €
- talletus 1258,80 €
- otto 612 €
- otto 319 €
- otto 60 €

427. Laske seuraavien lukujen summa: voitto 7000 euroa ja tappio 5400 euroa.

## 21.5 Merkkiiyhdistelmien sieventäminen

428. Sievennä

- (a)  $+ (-7)$
- (b)  $+ (+2)$
- (c)  $- (+8)$
- (d)  $- (-2)$

429. Laske

- (a)  $1 + (+1)$
- (b)  $1 + (-1)$
- (c)  $1 - (+1)$
- (d)  $1 - (-1)$

430. Laske.

- (a)  $3 - (-7)$
- (b)  $9 - (-16)$
- (c)  $1 - (-8)$
- (d)  $1 - (-4)$

431. Laske.

(a)  $-4 - (17)$

(b)  $-3 + (-5)$

(c)  $-2 - (-6)$

(d)  $2 + (-8)$

432. Kopioitaulukko vihkoosi ja täydennä.

+	3	-5	-10
-2			
6			
-9			

433. Osoita laskemalla, että luvut ovat toistensa vastalukuja.

(a) 4 ja  $-4$

(b)  $-7$  ja 7

(c)  $-99$  ja 99

(d) 1000 ja  $-1000$

434. Merkitse ja laske lukujen  $-12$  ja  $-4$

(a) summa

(b) erotus

(c) vastalukujen erotus.

435. Merkitse ja laske lukujen erotus.

(a) 9,  $-7$  ja  $-3$

(b)  $-12$ ,  $-5$  ja 4

## 21.6 Kokonaislukujen kerto- ja jakolasku

436. Onko vastaus positiivinen vai negatiivinen?

(a)  $-3 \cdot 5 \cdot (-3) \cdot 2$

(b)  $9 \cdot (-5) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (-8)$

(c)  $\frac{6}{-2}$

(d)  $\frac{-20}{-10}$

437. Laske edellisten tehtävän laskutoimitukset.

438. Päättelä puuttuva luku.

(a)  $\frac{2}{-4} = -4$

(b)  $\frac{-8}{3} = 3$

(c)  $\frac{-5}{-8} = -8$

(d)  $\frac{5}{-4} = -4$

(e)  $\frac{-5}{-8} = 2$

439. Kopio taulukko vihkoosi ja täydennä.

kertaa	6	-4	-9
-3			
5			
-8			

440. Mikä on vastaus, kun

(a) lukujen 6 ja -3 tuloon listään -2?

(b) lukujen -20 ja -2 osamäärä kerrotaan luvulla -3?

(c) lukujen -7 ja -8 tulosta vähennetään lukujen -8 ja 2 osamäärä?

441. Täydennä puuttuvat luvut.

(a)  $-4 \cdot 5 \cdot x = 120$

(b)  $-2 \cdot x \cdot 11 = 88$

(c)  $-84 = -3 \cdot 7 \cdot x$

442. Keksi

(a) kertolasku, jonka tulos on -18

(b) jakolasku, jonka tulos on -3.

443. Etsi kaksi sellaista lukua, joiden

(a) summa on -7 ja tulo 12

(b) summa on -1 ja tulo on -6

## 21.7 Potenssimerkintä

444. Kopioi taulukko vihkoosi ja täydennä.

potenssimuoto	kantaluku	eksponentti	tulomuoto
$3^4$			
0			
1			
$10^3$			
$-4^3$			
$(-5)^2$			
$(-6)^3$			

445. Laske.

(a)  $2^3$

(b)  $-2^2$

(c)  $(-2)^2$

(d)  $(-2)^3$

(e)  $(-3)^2$

(f)  $3^3$

(g)  $-3^2$

446. Merkitse ja laske.

(a) luvun 5 neliö

(b) luvun 5 kuutio

(c) luvun 5 vastaluvun neliö

(d) luvun 5 neliön vastaluku

447. Onko väittämä tosi vai epätosi?

(a) Luvun kaksi kuutio on neljä.

(b) Kokonaislukuja on enemmän kuin luonnollisia lukuja.

(c) Minkä tahansa luonnollisen luvun kuutio on aina positiivinen.

(d) Kahden samanmerkkisen luvun tulo on aina positiivinen.

(e) Negatiivisen luvun neliö on aina negatiivinen.

(f) Mikä luku tahansa korotettuna potenssiin yksi on yhtä kuin yksi.

448. Merkitse ja laske.

(a) luvun -3 neliö

(b) luvun -3 kuutio

(c) luvun -3 vastaluvun kuutio

(d) luvun -3 kuution vastaluku

449. Laske.

(a)  $(-4)^2$

- (b)  $-4^2$
- (c)  $(-4)^3$
- (d)  $-(-4)^3$

450. Laske.

- (a)  $3^2 + 2^3$
- (b)  $5^3 - 5^2$
- (c)  $6^2 + 2^3 - 4^2$

451. Mikä on potenssimerkintöjen kantaluku?

- (a)  $(-5)^2$
- (b)  $(-9)^3$
- (c)  $-p^3$
- (d)  $-ab^6$
- (e)  $(-xyz)^4$

## 21.8 Monikerrat ja jaollisuus

452. Luettele lukujen neljä ensimmäistä monikertaa.

- (a) 1
- (b) 3
- (c) 8
- (d) 10

453. Mitkä luvuista 20, 33, 54 ja 550 ovat jaollisia

- (a) kahdella
- (b) kolmella
- (c) viidellä
- (d) kuudella
- (e) kymmenellä?

454. Kopioi taulukko vihkoosi ja rastita, jos luku jaollinen ensimmäisellä rivillä olevalla luvulla.

Luku	2	3	5	6	9	10
175						
1836						
10000						
12003						
22401						

455. Ohessa on lista luvun 5 monikerroista, täydennä puuttuvat luvut.

5, 10,   ,   ,   ,   ,   ,   , 50

456. Täydennä seuraavat lauseet.

- (a) Parillinen luku on aina jaollinen...
- (b) Jos luvun viimeinen numero on 0 tai 5, luku on jaollinen...
- (c) Jos luvun numeroiden summa on jaollinen kolmella, luku on jaollinen...
- (d) Jos luku päättyy numeroon 0, on luku jaollinen...
- (e) Jos luku on jaollinen sekä luvuilla 2 että 3, on luku jaollinen myös...

457. Olen negatiivinen luku, suurempi kuin -8 ja jaollinen luvulla 5. Mikä luku olen?

458. Etsi neljä lukua, jotka ovat jaollisia sekä kahdella että kolmella.

459. Etsi kolme lukua, jotka ovat jaollisia luvuilla 2, 5 ja 7.



**21.9 Luvun jakaminen tekijöihin**

460. Onko jälkimmäinen luku ensimmäisen luvun tekijä?

- (a) 10, 5
- (b) 16, 8
- (c) 7, 21
- (d) 82, 9
- (e) 169, 13

461. Täydennä puuttuva tekijä.

- (a)  $5 \cdot \underline{\hspace{2cm}} = 35$
- (b)  $4 \cdot \underline{\hspace{2cm}} = 44$
- (c)  $\underline{\hspace{2cm}} \cdot 7 = 49$
- (d)  $\underline{\hspace{2cm}} \cdot 6 = 42$

462. Mikä on pienin luku, jonka alkutekijät ovat 2, 3, 5 ja 7?

- (a) Mikä luku on kaikkien lukujen tekijä?
- (b) Kuinka monta tekijää on alkuluvuilla?
- (c) Luettele kolme sellaista lukua, jotka ovat suurempia kuin 4 ja joilla on vain kaksi tekijää.

463. Jaa luvut tekijöihin.

- (a) 13
- (b) 17
- (c) Mitä lukuja nämä ovat?

464. Jaa luvut alkutekijöihin.

- (a) 98
- (b) 33
- (c) 525

(d) 38

465. Pakkauksessa on 348 kukan taimea. Koulun myyjäisiä varten taimet pakataan pienempiin pakkauksiin. Meneekö taimet tasan, jos kuhunkin pakkaukseen laitetaan

(a) 6

(b) 14

kukan taimea?

466. Noora toi juhliin 30 donitsia. Luettelle miten hän voi järjestää donitsit tarjottimelle riveihin, niin että jokaisessa rivissä on sama määrä donitseja?

## 21.10 Murtoluvut

467. Muunna sekaluvuiksi.

(a)  $\frac{5}{3}$

(b)  $\frac{12}{5}$

(c)  $\frac{30}{8}$

(d)  $\frac{100}{15}$

468. Muunna epämurtoluviiksi.

(a)  $3\frac{1}{2}$

(b)  $4\frac{5}{6}$

(c)  $1\frac{5}{11}$

(d)  $10\frac{3}{4}$

469. Muunna epämurtoluviiksi.

(a)  $-2\frac{1}{3}$

(b)  $-3\frac{5}{7}$

(c)  $-1\frac{6}{13}$

(d)  $-5\frac{2}{5}$

470. Supista murtoluvut.

(a)  $\frac{4}{12}$

(b)  $\frac{8}{9}$

(c)  $\frac{50}{5}$

(d)  $\frac{6}{24}$

(e)  $\frac{12}{168}$

471. Supista murtoluvut.

(a)  $\frac{-10}{2}$

(b)  $\frac{5}{-15}$

(c)  $-\frac{4}{80}$

(d)  $-\frac{1}{8}$

(e)  $\frac{-22}{-220}$

472. Järjestä murtoluvut suuruusjärjestykseen  $\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{3}{6}$ .

473. Täydennä.

(a)  $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

(b)  $\frac{4}{5} = \frac{8}{250}$

(c)  $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

(d)  $\frac{7}{20} = \frac{16}{80}$

474. Lavenna samannimisiksi.

(a)  $\frac{1}{3}$  ja  $\frac{5}{6}$

(b)  $\frac{3}{20}$  ja  $\frac{4}{5}$

(c)  $\frac{1}{2}$  ja  $\frac{4}{3}$

(d)  $\frac{3}{2}$  ja  $\frac{5}{11}$

475. Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

476. Laske.

(a)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$

(b)  $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

(c)  $\frac{1}{3} + 2\frac{3}{4}$

(d)  $1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{4}$

477. Laske.

(a)  $\frac{7}{8} - \frac{2}{3}$

(b)  $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

(c)  $1\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

(d)  $2\frac{1}{2} - \frac{5}{6}$

478. Määritä lukujen  $\frac{1}{3}$  ja  $2\frac{1}{2}$

(a) summa

(b) erotus.

479. Laske  $\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} - \frac{1}{16}$ .

480. Etsi murtolukujen

(a) yhteenlasku,

(b) vähennyslasku,

jonka tulos on  $-\frac{2}{5}$ .

481. Mehutiivisteestä saadaan mehua sekoittamalla yhteen osan tiivistettä viisi osaa vettä. Kuinka paljon mehua saadaan  $\frac{1}{3}$  litran pullollisesta tiivistettä?

482. Laske.

(a)  $\frac{1}{2} - (-\frac{3}{4})$

(b)  $-\frac{2}{5} + (-\frac{5}{4})$

$$(c) -\frac{1}{8} - \frac{1}{16}$$

483. Laske.

$$(a) 4\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{8}$$

$$(b) -\frac{5}{6} - 2\frac{3}{4}$$

$$(c) \frac{7}{8} - 5\frac{4}{7}$$

## 21.11 Murtolukujen kertolasku

484. Kerro luku  $1\frac{1}{2}$  luvulla

$$(a) 2$$

$$(b) 10$$

$$(c) \frac{4}{5}$$

$$(d) \frac{1}{10} .$$

485. Laske.

$$(a) \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$$

$$(b) \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{25}$$

$$(c) 1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}$$

$$(d) 3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{5}$$

486. Laske.

$$(a) \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

$$(b) \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9}$$

$$(c) 2\frac{1}{3} \cdot 5\frac{4}{7}$$

$$(d) 3\frac{1}{5} \cdot 6\frac{2}{5}$$

487. Montako desilitraa on

$$(a) \frac{3}{4}l$$

$$(b) \frac{1}{3}l$$

(c)  $\frac{1}{4}l$  ?

488. Auto kulkee 1 litralla bensiiniä 8 km. Kuinka monta kilometriä auto kulkee  $3\frac{1}{2}$  litralla polttoainetta?

489. Koulussa on 400 oppilasta ja heistä  $\frac{7}{8}$  :lla on sisaruk-  
sia. Monnellako oppilaalla ei ole siskoa tai veljeä?

490. Laske, paljonko on

(a) neljäsosa 96 eurosta

(b) viidesosa 475 eurosta

(c) kaksi kolmasosaa 16,5 kilogrammasta.

491. Laske.

(a)  $\frac{5}{2a} \cdot \frac{2a}{3}$

(b)  $\frac{6}{a} \cdot \frac{a}{2}$

(c)  $\frac{2b}{15} \cdot \frac{5}{b}$

## 21.12 Murtolukujen jakolasku

492. Muodosta lukujen käänteisluvut.

(a)  $\frac{1}{6}$

(b) -5

(c)  $-\frac{7}{8}$

(d) 9

493. Muodosta lukujen käänteisluvut.

(a) 6

(b)  $\frac{1}{9}$

(c) -5

(d)  $-\frac{2}{3}$

494. Jaa  $2\frac{3}{4}$  luvulla

(a) 2

(b) 3

(c)  $\frac{1}{4}$

(d)  $\frac{2}{3}$

495. Jaa seuraavat luvut luvulla  $2\frac{3}{4}$ .

(a) 2

(b) 3

(c)  $\frac{1}{4}$

(d)  $\frac{2}{3}$

496. Laske.

(a)  $\frac{5}{6} : \frac{1}{2}$

(b)  $\frac{4}{5} : \frac{3}{4}$

(c)  $2\frac{3}{8} : \frac{7}{8}$

(d)  $\frac{7}{8} : 4\frac{2}{3}$

497. Laske.

(a)  $\frac{1}{2} : \frac{5}{6}$

(b)  $\frac{3}{4} : \frac{4}{5}$

(c)  $\frac{7}{8} : 2\frac{3}{8}$

(d)  $4\frac{2}{3} : \frac{7}{8}$

498. Määritä lukujen  $\frac{1}{3}$  ja  $2\frac{1}{2}$ 

(a) tulo

(b) osamäärä.

499. Määritä lukujen osamäärä

(a)  $-1\frac{5}{7}$  ja  $\frac{1}{5}$

(b)  $-6$  ja  $-1\frac{5}{7}$

(c)  $2\frac{1}{3}$  ja  $-1\frac{1}{2}$

**21.13 Laskujärjestys**

500. Laske.

(a)  $85 - 18 : 9 + 10$

(b)  $(85 - 18) : (9 + 10)$

(c)  $65 + 11 \cdot 4$

(d)  $(65 + 11) \cdot 4$

501. Laske.

(a)  $8 + 3 \cdot 5 + 9$

(b)  $(8 + 3) \cdot (5 + 9)$

(c)  $35 - 12 : 6 - 3$

(d)  $(35 - 12) : (6 - 3)$

502. Laske.

(a)  $10 \cdot (9 - 4) : (7 - 5)$

(b)  $(34 + 14) : 6$

(c)  $86 + 2 \cdot (28 - 8 \cdot 2)$

(d)  $8 \cdot (28 + 8) : 2$

503. Laske.

(a)  $-1 - 2 - 3 - 4$

(b)  $-1 - (2 - 3 - 4)$

(c)  $-(1 - 2 - 3) - 4$

(d)  $-1 - [2 - (3 - 4)]$

504. Laske.

(a)  $25 : (-5) \cdot (-4) - (-3)$

(b)  $-3 + (-15) : 5 \cdot (-6)$

(c)  $-36 : (-4) - 6 \cdot (-5) : 3$



$$(d) -2[(-7) \cdot (-3) - 5 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)]$$

505. Laske.

$$(a) -5 + 18 : 6 + 2 \cdot (-3)$$

$$(b) (-17) - (-8)$$

$$(c) (-6 + 12) : 6 + 4 \cdot (-6)$$

$$(d) \frac{(-7) \cdot 6}{-4 + 3 \cdot 2}$$

506. Laske  $1 - 3 + 5 - 7 + \dots + 997 - 999$ .

507. Laske  $1 + 3 + \dots + 997$ .

## 21.14 Desimaaliluvut ja merkitsevät numerot

508. Kirjoita desimaalilukuna.

$$(a) \frac{6}{10}$$

$$(b) \frac{89}{100}$$

$$(c) 9\frac{3}{100}$$

$$(d) 6\frac{5}{10}$$

509. Kirjoita murtolukuna supistetussa muodossa.

$$(a) 0,75$$

$$(b) 0,8$$

$$(c) 0,105$$

$$(d) 2,03$$

$$(e) 15,21$$

510. Pyöristä sadasosien tarkkuuteen.

$$(a) \overline{23,4567}$$

$$(b) 99,9999$$

$$(c) 100,4445$$

- (d) 12,01
- (e) 180,125456

511. Pyöristä lähimpään sataan.

- (a) 53
- (b) 12345
- (c) 8552
- (d) 12
- (e) 49,999

512. Tarkastellaan lukua 0,050508. Ilmoita luku

- (a) 1 desimaalin
- (b) 1 merkitsevän numeron
- (c) 4 desimaalin
- (d) 4 merkitsevän numeron

tarkkuudella.

513. *Laskintehtävä:* Laske laskimella potenssien likiarvot ja anna vastaukset kahden desimaalin tarkkuudella.

- (a) 6,74
- (b) -4,62
- (c) (-3,09)<sup>2</sup>
- (d) 1,09<sup>-3</sup>

514. Montako merkitsevää numeroa on likiarvoissa?

- (a) 200
- (b) 0,0040
- (c) 120,09
- (d) 0,238

(e) 1800

515. Montako merkitsevää numeroa on luvuissa?

(a) 3000

(b) 4,00

(c) 0,0150

(d) 2,009

516. Osoita, että luvut  $2\frac{4}{5}$  ja  $-2,8$  ovat toistensa vastalukuja.

### **21.15 Lasketaan desimaaliluvuilla, pyöristyssäännöt**

517. Montako desimaalia tulee yhteen- ja vähennyslaskujen vastauksiin?

(a)  $2,345 + 3,2$

(b)  $1,568 + 1,05 + 2,03333$

(c)  $50,125 - 25,3$

(d)  $100 - 23,5 - 44,23$

518. *Laskintehtävä:* Laske edellisen tehtävän laskut ja anna vastaukset sopivalla tarkkuudella.

519. Kolmen laatikon massat ovat 2,5 kg, 3,46 kg ja 8,9 kg. Paljonko laatikot painavat yhteensä?

520. Suorakulmion pituus on 8,987 m ja leveys 3,7 m. Laske suorakulmion ympärysmitta.

521. Montako merkitsevää numeroa tulee kertolaskujen vastaukseen?

(a)  $23 \cdot 105,3$

(b)  $101 \cdot 0,5$

- (c)  $12, 2 \cdot 5, 15 \cdot 0, 2$   
(d)  $0, 003 \cdot 2004 \cdot 13, 2356$
522. *Laskintehtävä:* Laske edellisen tehtävän kertolaskut ja anna vastaukset sopivalla tarkkuudella.
523. Montako merkitsevää numeroa tulee jakolaskujen vastaukseen?
- (a)  $\frac{123}{0,12}$   
(b)  $\frac{102,5}{12,3}$   
(c)  $\frac{56}{0,2}$   
(d)  $\frac{9,234}{0,030}$
524. *Laskintehtävä:* Laske edellisen tehtävän jakolaskut ja anna vastaukset sopivalla tarkkuudella.

## 21.16 Aikaväli ja aikalaskut

525. Täydennä lauseet
- (a) Vuodessa on \_\_\_\_\_vuorokautta.  
(b) Karkausvuodessa on \_\_\_\_\_vuorokautta.  
(c) Vuodessa on \_\_\_\_\_viikkoa.  
(d) Tunnissa on \_\_\_\_\_minuuttia.  
(e) Minuutissa on \_\_\_\_\_sekuntia.  
(f) Tunnissa on \_\_\_\_\_sekuntia.
526. Montako minuuttia on
- (a)  $\frac{1}{2}h$   
(b)  $\frac{3}{4}h$   
(c)  $\frac{1}{6}h$   
(d)  $\frac{1}{5}h$

527. Montako minuuttia on

- (a) 0,5 h
- (b) 0,2 h
- (c) 0,1 h
- (d) 0,3 h?

528. Montako tuntia on (ilmoita vastaus murtolukuna)

- (a) 45 min
- (b) 120 min
- (c) 10 min
- (d) 12 min?

529. Täydennä.

- (a) 3 vuotta = \_\_\_\_\_vuorokautta
- (b) 2 karkausvuotta = \_\_\_\_\_vuorokautta
- (c) 5 vuosisataa = \_\_\_\_\_vuotta
- (d) 9 minuuttia = \_\_\_\_\_sekuntia
- (e) 312 viikkoa = \_\_\_\_\_vuotta

530. Paljonko kello on

- (a) 20 minuuttia kello 10.30 jälkeen
- (b) 15 minuuttia ennen kello 5. 45
- (c) 3 tuntia ennen kello 21.10
- (d) 32 minuuttia kello 17.44 jälkeen
- (e) 10 minuuttia ennen kello 18?

531. Kuinka pitkä aika on kellonaikojen välissä?

- (a) 22.00 ja 23.30
- (b) 3.30 ja 5.20

- (c) 5.10 ja 18.00
- (d) 11.23 ja 23.11
- (e) 1.20 ja 19.12

532. Ari Ahkera nukkui arkipäivisin noin  $\frac{2}{5}$  vuorokaudesta.

- (a) Kuinka suuren osan vuorokaudesta hän kulutti muihin toimiin?
- (b) Montako tuntia Arilla oli aikaa käytettävänä muuhun kuin nukkumiseen tai opiskeluun?

**21.17 Harjoituskoe I (kappaleet 2 - 10)**

1. Merkitse ja laske lukujen 10 ja -5

- (a) erotus
- (b) osamäärä
- (c) tulo.

2. Mikä on potenssimerkintöjen kantaluku?

- (a)  $(-\frac{4}{5})^3$
- (b)  $(a - 1)^2$
- (c)  $\frac{2x^8}{3}$

3. Kirjoita potenssimuodossa.

- (a)  $(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2})$
- (b)  $-3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
- (c)  $\frac{5}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}$

4. Onko väite tosi vai epätosi? Jos väite on epätosi, korjaa se.

- (a) Luku 6 kuuluu rationaalilukujen joukkoon.
- (b) Jos kertolaskussa on pariton määrä negatiivisia tekijöitä, tulo on positiivinen.
- (c) Luvun itseisarvo on aina positiivinen.
- (d) Luku 20 hajoaa alkutekijöihin seuraavasti  $4 \cdot 5$ .

5. Laske.

- (a)  $-5 - 6$
- (b)  $9 - 14$
- (c)  $-8 + 5$

(d)  $\frac{-10}{-2}$

(e)  $-2 \cdot 8 \cdot (-1)$

(f)  $(-2)^3$

6. Poista sulkeet ja laske.

(a)  $8 - (-4) + (-3)$

(b)  $-10 - (+5) - (-7)$

(c)  $-(-2) - 3 + (+6)$

7. (a) Mitä ovat alkuluvut?

(b) Jaa luku 105 alkutekijöihin.



**21.18 Harjoituskoe II (kappaleet 11 – 18)**

1. Laske.

(a)  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$

(b)  $\frac{1}{4} - \frac{2}{4}$

(c)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

(d)  $\frac{3}{10} - \frac{1}{5}$

2. Muodosta ja laske lukujen  $-2\frac{1}{3}$  ja  $\frac{4}{5}$

(a) tulo

(b) osamäärä.

3. (a) Kannussa on 1,75 litraa vettä. Jos juomalasin tilavuus on  $\frac{1}{4}$  litraa, montako lasillista vettä kannusta saa kaadetuksi?

(b) Samilla on 18 kappaletta  $\frac{1}{3}$  litran juomatölkkiä. Montako litraa juomaa on yhteensä?

4. Laske ja kiinnitä huomiota vastausten oikeaan tarkkuuteen.

(a)  $5,2345 + 2,25 - 1,436$

(b)  $2,102 \cdot 0,043 \cdot 1003$

(c)  $\frac{410,23}{2,5}$

5. (a) Montako minuuttia on 0,4 h?

(b) Montako tuntia on 12 min? (Ilmoita vastaus murtolukuna.)

(c) Laske 4 h 15 min - 2 h 38 min.

6. Laske.

(a)  $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

(b)  $\frac{7}{9} - \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$