Logiikka ja lukuteoria

Konnektiivit

Konnektiivi	Symboli	Luetaan
negaatio	$\neg p$	ei p
disjunktio	$p \vee q$	p tai q
konjunktio	$p \wedge q$	p ja q
implikaatio	$p \Rightarrow q$	jos p, niin q
ekvivalenssi	$p \Leftrightarrow q$	p ja q yhtäpitäviä

Totuusarvotaulukko

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kvanttorit

Olemassaolo- eli eksistenssikvanttori $\exists$

$\exists x \in A: p(x)$ On olemassa (ainakin yksi) sellainen A:n alkio x, jolle pätee väite $p(x)$.

Universaali- eli kaikkikvanttori $\forall$

$\forall x \in A: p(x)$ Kaikille A:n alkioille x pätee väite $p(x)$.

Yhdistetyt kvanttorit

$\exists x \forall y \in A: p(x, y)$ On olemassa sellainen x, että olipa y mikä tahansa, niin väite $p(x, y)$ pätee.

$\forall x \exists y \in A: p(x, y)$ Jokaista x:n arvoa kohti on olemassa sellainen y, että väite $p(x, y)$ pätee.

Kvanttorin negaatio

$\neg(\exists x \in A: p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A: \neg p(x)$

$\neg(\forall x \in A: p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A: \neg p(x)$

Diofantoksen yhtälö

Jos kokonaislukukertoimisen yhtälön $ax + by + c = 0$ yksittäinen kokonaislukuratkaisu on (x_0, y_0), niin kaikki ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x = x_0 + n \cdot \dfrac{b}{syt(a,b)} \\ y = y_0 - n \cdot \dfrac{a}{syt(a,b)} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Tautologia

Lain nimi	Lauseet, jotka ovat identtisesti tosia
Identiteetin laki	$p \Leftrightarrow p$
Kaksoiskiellon laki	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$
Vaihdantalait	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Liitäntälait	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
Osittelulait	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
de Morganin lait	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
Kontrapositiolaki	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
Poissuljetun kolmannen laki	$p \vee \neg p$
Poissuljetun ristiriidan laki	$\neg(p \wedge \neg p)$
Idempotenssilait	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$

Lukujen *a* ja *b* pyj:n ja syt:n välinen yhteys

$ab = \text{syt}(a, b)\text{pyj}(a, b)$

Jakoyhtälö

Olkoot a ja b kaksi kokonaislukua. Tällöin on olemassa sellaiset luvut q ja r, että $a = qb + r$, missä $0 \leq r < b$.

Eukleideen algoritmi

- Jaetaan suurempi luku pienemmällä ja ilmoitetaan tulos jakoyhtälönä.
- Jos jää jakojäännös, jaetaan sillä jakaja ja ilmoitetaan tulos jakoyhtälönä.
- Toistetaan, kunnes jako menee tasan.
- Viimeinen nollasta eroava jakojäännös on lukujen suurin yhteinen tekijä.