

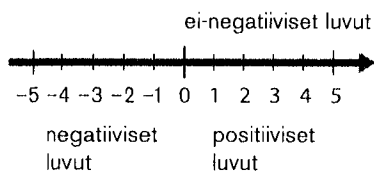
Matematiikka

yläkoulun
asioiden
kertaus

Tiivistelmä

Kokonaisluvut

Kokonaisluvut lukusuoralla



Vastaluvut



Kokonaislukujen laskutoimitukset

Yhteen- ja vähennyslasku

$$2 + (+5) = 2 + 5 = 7$$

$$2 + (-5) = 2 - 5 = -3$$

$$2 - (+5) = 2 - 5 = -3$$

$$2 - (-5) = 2 + 5 = 7$$

Kerto- ja jakolasku

1. Päättele vastauksen etumerkki.

2. Kerro tai jaa luvut ilman etumerkkejä.

$$2 \cdot (-5) = -2 \cdot 5 = -10$$

Potenssi

eksponentti potenssin arvo

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

kantaluku

Eksponentti ilmoittaa tekijöiden lukumäärän.

Luvun neliö on sen toinen potenssi.

Luvun kuutio on sen kolmas potenssi.

Laskujärjestys

1. Sulkeissa olevat laskutoimitukset
2. Potenssit
3. Kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
4. Yhteen- ja vähennyslaskut

Jaollisuus, tekijät ja alkuluvut

Luku 15 on jaollinen luvuilla 3 ja 5, sillä

$$15 = 3 \cdot 5.$$

Luvut 3 ja 5 ovat luvun 15 tekijöitä.

Alkuluvut ovat jaollisia vain luvulla 1 ja itsellään.

Murtolukujen laskutoimitukset

Yhteen- ja vähennyslasku

1. Lavenna murtoluvut samannimisiksi.

2. Laske yhteen tai vähennä osoittajat.

$$^3) \frac{1}{4} + ^4) \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$$

Kertolasku

Kerro osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään.

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{12}{35}$$

Jakolasku

Kerro jaettava jakajan käänteisluvulla.

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$$

Desimaaliluvut

Päättyvä: 1,7

Päätymätön jaksollinen: $0,6161\dots = 0,\overline{61}$

Desimaaliluvun likiarvo

Likiarvo saadaan pyöristämällä.

$1572 \approx 1570$ kolmen merkitsevän numeron tarkkuus

$21,48 \approx 21,5$ yhden desimaalin tarkkuus

Laskutoimitukset likiarvoilla

Vastaus pyöristetään epätarkimman lähtöarvon mukaan

- yhteen- ja vähennyslaskussa yhtä monen desimaalin tarkkuuteen
- kerto- ja jakolaskussa yhtä monen merkitsevän numeron tarkkuuteen.

135. Laske.

- a) $-6 + (-3)$
- b) $-18 + 5 - (-4)$
- c) $-20 - (-5 + 1)$
- d) $-5 + (-8) - (-6 + 6)$

137. Merkitse ja laske lukujen -6 ja 3

- a) summa
- b) erotus
- c) tulo
- d) osamäärä.

147. Laske.

- a) $6 \cdot (4^2 - 2^2)$
- b) $9 + 2 \cdot (3^2 - 2^3)$
- c) $2^3 \cdot 2^2 - 5^2$
- d) $(2 + 4^2) - (6^2 - 2 \cdot 5)$

125. Mikä positiivinen luku sopii ruutuun?

- a) $3 \cdot \square^2 - 12 = 0$
- b) $\square^3 - 64 = 0$
- c) $\frac{\square^2}{81} = 1$
- d) $\frac{\square^2 - 5}{20} = 1$

- a) $\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)$
- b) $\left(\frac{4}{8} - \frac{1}{8}\right) : 3$
- c) $\left(\frac{2}{6} - \frac{1}{6}\right) : \frac{5}{6}$
- d) $\frac{5}{2} : \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}\right)$

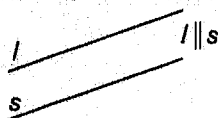
218. Juomaan sekoitetaan $\frac{3}{4}$ litraa appelsiini-mehua, $\frac{1}{3}$ litraa omenamehua ja $\frac{1}{2}$ litraa vettä. Mahtuuko juoma tyhjään $1\frac{1}{2}$ litran limsapulloon? Perustele

K99. Luokan 24 oppilaasta $\frac{5}{6}$ on oikeakätisiä. Oikeakätisistä $\frac{3}{5}$ on tyttöjä.
a) Kuinka suuri osa luokan oppilaista on vasenkätisiä?
b) Kuinka monta oikeakätistä tyttöä luokassa on?

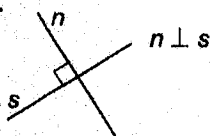
Tiivistelmä

Normaali ja yhdensuuntaiset suorat

Yhdensuuntaiset suorat eivät leikkaa.

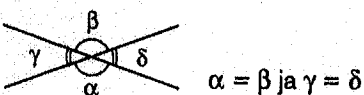


Suoran normaali on kohtisuorassa suoraa vastaan.

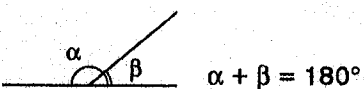


Ristikulmat ja vieruskulmat

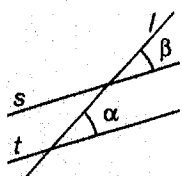
Ristikulmat ovat yhtä suuret.



Vieruskulmien summa on 180° .



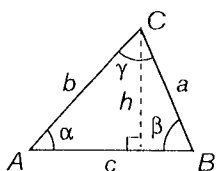
Samankohtaiset kulmat



Jos suorat ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

Jos $s \parallel t$, niin $\alpha = \beta$.

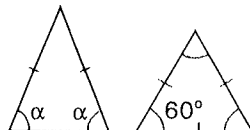
Kolmio



Kolmion kulmien summa $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Kolmion pinta-ala $A = \frac{c \cdot h}{2}$.

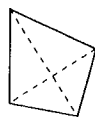
Kulma β on sivun b vastakkainen kulma.
Kulman β viereiset sivut ovat a ja c .



Tasakylkisen kolmion kyljet ovat yhtä pitkät ja kantakulmat ovat yhtä suuret.

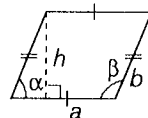
Tasasivuisen kolmion sivut ovat yhtä pitkät ja kulmat ovat 60° .

Nelikulmio



Nelikulmiolla on kaksi lävistäjää.

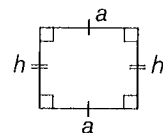
Kulmien summa on $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.



Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät.

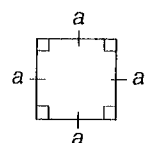
Vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret ja viereisten kulmien summa on $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Suunnikkaan pinta-ala $A = a \cdot h$.



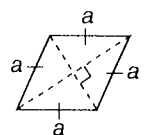
Suorakulmion pinta-ala $A = a \cdot h$.

Suorakulmion piiri $p = 2 \cdot (a + h)$.

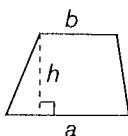


Neliön pinta-ala $A = a^2$.

Neliön piiri $p = 4 \cdot a$.



Neljäkkään sivut ovat yhtä pitkät ja lävistäjät ovat kohtisuorassa.

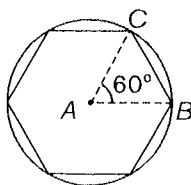


Puolisuunnikkaassa on kaksi yhdensuuntaista sivua.

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h.$$

Säännöllinen kuusikulmio

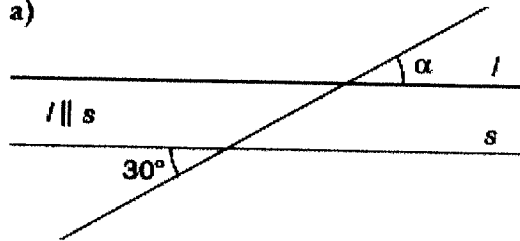


Sivun pituus on ympäri piirretyn ympyrän säde.

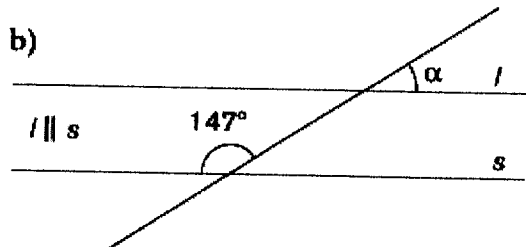
Keskuskulman suuruus on $360^\circ : 6 = 60^\circ$.

388. Suorat l ja s ovat yhdensuuntaiset.
Kuinka suuri kulma α on? Perustele vastauksesi.

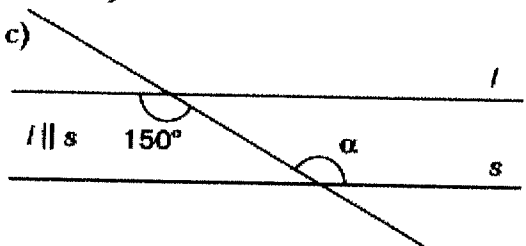
a)



b)

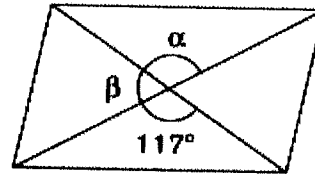


c)

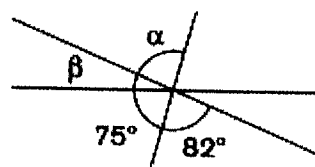


K134. Päättele kulmien α ja β suuruudet.
Perustele vastauksesi.

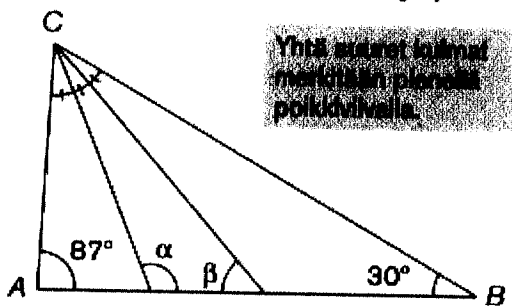
a)



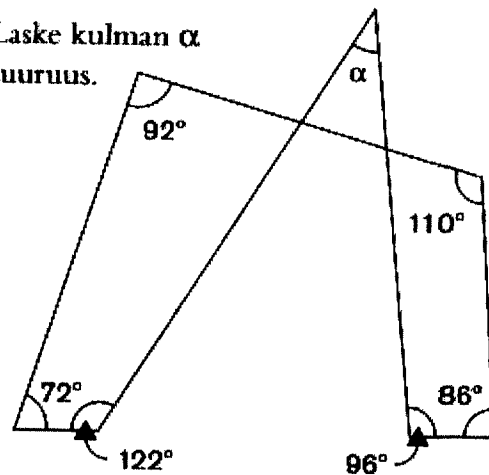
b)



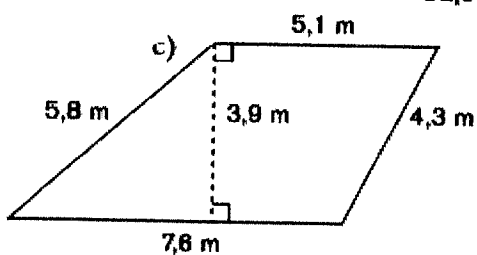
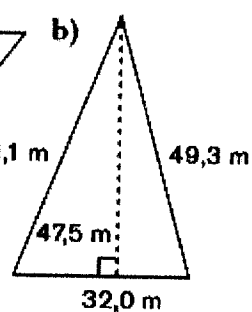
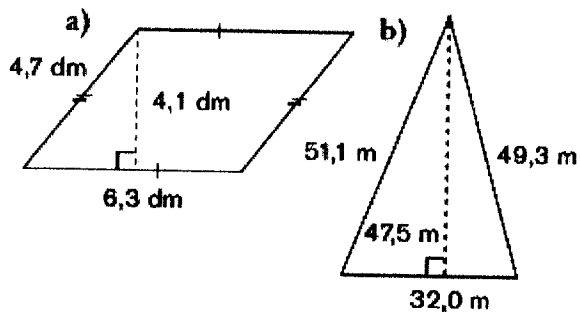
474. Kolmion ABC kulma C on jaettu kolmeen yhtä suureen osaan.
Kuinka suurina ovat kulmat α ja β ?



505. Laske kulman α suuruus.



619. Laske kuvion piiri ja pinta-ala. Pyöristä tulos oikeaan tarkkuuteen.



Tiivistelmä

Lukujono ja sen jäsenet

Päättävä lukujono

3, 5, 7, 9, 11, 13 6 jäsentä

Päättymätön lukujono

3, 6, 9, 12, ... äärettömän monta jäsentä

Muuttuja ja muuttujalauseke

- Muuttuja on kirjain, joka tarkoittaa muuttuvaa lukuarvoa.
- Muuttujalauseke on merkitty laskutoimitus, joka sisältää muuttujia.

Lausekkeen arvo

- Muuttujalausekkeen arvo lasketaan sijoittamalla muuttujan paikalle luku ja suorittamalla laskutoimitukset.

Samanmuotoiset yhteenlaskettavat

- Samanmuotoisilla yhteenlaskettavilla on täsmälleen sama muuttujaosa.
- Samanmuotoiset yhteenlaskettavat voidaan yhdistää.

Yhtälö

- **Yhtälö** on kahden lausekkeen merkitty yhtäsuuruus.
- Yhtälössä olevaa muuttujaa sanotaan myös **tuntemattomaksi**.
- Yhtälön **ratkaisu** on se muuttujan arvo, jolla vasen ja oikea puoli ovat yhtä suuret.

Yhtälön ratkaiseminen

Yhtälö ratkaistaan muuntamalla se sellaiseen muotoon, jossa tuntematon on yksin vasemmalla puolella.

Sallitut yhtälömuunnokset ovat:

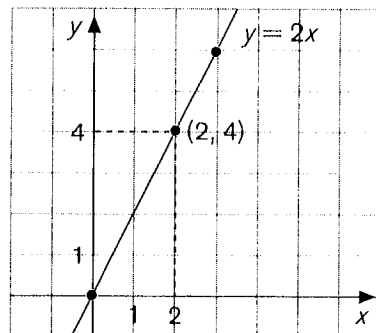
- molemmille puolille lisätään tai molemmilta puolilta vähennetään sama luku
- molemmat puolet kerrotaan tai jaetaan samalla nolosta eroavalla luvulla.

Sanallisen tehtävän ratkaiseminen

1. Lue tehtävä huolellisesti.
2. Merkitse yhtä kysyttyä asiaa muuttujalla x .
3. Muodosta tehtävän tietojen perusteella yhtälö.
4. Ratkaise yhtälöstä x .
5. Lue tehtävän kysymys uudelleen ja kirjoita vastaus sanoin.
6. Arvioi vastauksen järkevyyttä ja tarkista se.

Suoran yhtälö

Jokaista xy -koordinaatistoon piirrettyä suoraa vastaa muuttujien x ja y välinen yhtälö, joka toteutuu jokaisessa suoran pisteessä, mutta ei toteudu missään suoran ulkopuolisessa pisteessä.



Suoran piirtäminen yhtälön avulla

1. Valitse xy -taulukkoon vähintään kolme arvoa muuttujalle x .
2. Laske yhtälön avulla vastaavat muuttujan y arvot.
3. Merkitse saadut pisteet koordinaatistoon ja piirrä niiden kautta suora.

790. Ratkaise yhtälö.

a) $2x + 18 = 0$

b) $-3x - 6 = 0$

c) $8x - 5 = -29$

d) $7x + 3 = -18$

799. Millä muuttujan x arvolla lauseke $4x + 8$ saa arvon

a) 20

b) 8

c) 0?

809. Muodosta ja ratkaise yhtälö.

a) Kun lukujen x ja 3 tuloon lisätään luku 4, saadaan lukujen x ja 10 summa.

b) Kun lukujen x ja 2 osamäärästä vähennetään luku 1, saadaan luku 4.

890. Kolmion eräs kulma on x . Kolmion toinen kulma on 10° suurempi ja kolmas kulma 50° suurempi kuin kulma x . Muodosta yhtälö ja ratkaise x . Kuinka suuria ovat kolmion kulmat?

Tiivistelmä

Murtoluku, desimaaliluku, prosenttiluku

1 % tarkoittaa yhtä sadasosaa.

$$\frac{3}{5} = 0,60 = 60 \%$$

Kuinka monta prosenttia luku 15 on luvusta 60?

► $\frac{15}{60} = 0,25 = 25 \%$

Luku 15 jaetaan perusarvolla 60.

Kuinka paljon on 20 prosenttia luvusta 240?

► $0,20 \cdot 240 = 48$

Perusarvo kerrotaan prosenttikertoimella.

Mistä luvusta 20 prosenttia on 48?

► $\frac{48}{0,20} = 240$

Prosenttiarvo jaetaan prosenttikertoimella.

Kuinka monta prosenttia luku 50 on suurempi kuin luku 40?

► Erotus on $50 - 40 = 10$.

Prosentteina $\frac{10}{40} = 0,25 = 25 \%$.

Verrataan lukujen erotusta perusarvoon 40.

Kuinka monta prosenttia luku 40 on pienempi kuin luku 50?

► Erotus on $50 - 40 = 10$.

Prosentteina $\frac{10}{50} = 0,20 = 20 \%$.

Verrataan lukujen erotusta perusarvoon 50.

Kenkien hinta on 60 €. Hinta nousee 10 %.

Mikä on kenkien uusi hinta?

► Laskutapa 1:

Korotus on $0,1 \cdot 60 \text{ €} = 6 \text{ €}$.

Uusi hinta on $60 \text{ €} + 6 \text{ €} = 66 \text{ €}$.

Laskutapa 2:

Muutoskerroin on $1 + 0,1 = 1,1$.

Uusi hinta on $1,1 \cdot 60 \text{ €} = 66 \text{ €}$.

Potenssi

$$\begin{array}{c} \text{eksponentti} \quad \text{potenssin} \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\ \uparrow \\ \text{kantaluku} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{arvo} \\ \downarrow \\ 8 \end{array}$$

Negatiivisen kantaluvun potenssit

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

Eksponttina nolla tai negatiivinen luku

$$2^0 = 1$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Luvun kymmenpotenssimuoto

$$7\,200 = 7,2 \cdot 1\,000 = 7,2 \cdot 10^3$$

$$0,05 = 5 \cdot 0,01 = 5 \cdot 10^{-2}$$

Potenssien laskusääntöjä

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \blacksquare \text{ tulon potenssi}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \blacksquare \text{ osamäärän potenssi}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \blacksquare \text{ samankantaisten potenssien tulo}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \blacksquare \text{ samankantaisten potenssien osamäärä}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad \blacksquare \text{ potenssin potenssi}$$

Neliöjuuri

$$\sqrt{16} = 4, \text{ sillä } 4^2 = 16$$

- Positiivisen luvun a neliöjuuri on positiivinen luku, jonka neliö on a .
- Nollan neliöjuuri on nolla.
- Negatiivisella luvulla ei ole neliöjuuria.

135. Kuinka paljon on

- a) 20 % luvusta 25
- b) 70 % luvusta 300
- c) 90 % luvusta 60?

139. Elinan tuntipalkka oli 5,00 euroa. Kuinka monta prosenttia palkka nousi, kun palkankorotus oli

- a) 1,00 €
- b) 1,50 €?

147. Koulussa on 170 oppilasta, joista 54 % on poikia. Kouluun tulee 8 uutta oppilasta, joista 6 on tyttöjä.

- a) Kuinka monta prosenttia oppilaista on tämän jälkeen poikia?
- b) Kuinka monta prosenttiyksikköä poikien osuus pieneni?

342. Merkitse yhtenä potenssina.

- a) $a^7 \cdot a^5$
- b) $a^4 \cdot a^{11}$
- c) $a^9 \cdot a$
- d) $\frac{a^4}{a}$
- e) $\frac{a^6}{a^3}$
- f) $\frac{a^5}{a^7}$

354. Päättele eksponentti n .

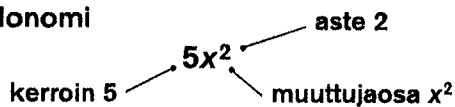
- a) $9^3 \cdot 9^n = 9^8$
- b) $9^n \cdot 9^n = 9^{100}$
- c) $\frac{9^{16}}{9^n} = 9^5$
- d) $\frac{9^n}{9} = 9^{10}$
- e) $(9^n)^5 = 9^{20}$
- f) $(9^3)^n = 1$
- g) $9^n = \frac{1}{81}$
- h) $(9^n)^n = 9^{100}$

351. Laske.

- a) $\sqrt{64 + 36}$
- b) $\sqrt{40 \cdot 10}$
- c) $\sqrt{3^2 + 4^2}$
- d) $\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}$

Tiivistelmä

Monomi



Samanmuotoiset monomit

Samanmuotoisilla monomeilla on sama muuttujaosa. Monomit $5x^2$ ja $4x^2$ ovat samanmuotoisia. Monomit $5x^2$ ja $4x$ ovat erimuotoisia.

Monomien yhteen- ja vähennyslasku

Samanmuotoiset monomit voidaan yhdistää.

$$5x^2 + 4x^2 = 9x^2$$

$$5x^2 - 4x^2 = 1x^2 = x^2$$

Monomien kertolasku

$$4x^2 \cdot 7x^3 = 4 \cdot 7 \cdot x^2 \cdot x^3 = 28x^5$$

Polynomi

Polynomi on monomi tai monomien summa.

Polynomilla $x^2 - 2x + 3$ on kolme termiä:

- toisen asteen termi x^2
- ensimmäisen asteen termi $-2x$
- vakiotermi 3

Polynomin aste on 2.

Monomissa on yksi termi.

Binomissa on kaksi termiä.

Trinomissa on kolme termiä.

Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

1. Merkitse lisäävät ja vähennettävät polynomit sulkeisiin.
2. Poista sulkeet. Vaihda etumerkit, jos sulkeiden edessä on miinusmerkki.
3. Yhdistä samanmuotoiset termit alenevan asteen mukaisessa järjestyksessä.

$$\begin{aligned} & 5x - (7x - 3) + (3x - 8) \\ &= 5x - 7x + 3 + 3x - 8 \\ &= x - 5 \end{aligned}$$

Polynomin kertominen luvulla tai monomilla

Polynomin kaikki termit kerrotaan erikseen.

$$3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3x + 6$$

$$3x \cdot (x + 2) = 3x \cdot x + 3x \cdot 2 = 3x^2 + 6x$$

Polynomin kertominen polynomilla

Polynomit kerrotaan termeittäin.

$$(x + 2) \cdot (2x + 3)$$

$$\begin{aligned} &= x \cdot 2x + x \cdot 3 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 3 \\ &= 2x^2 + 3x + 4x + 6 \\ &= 2x^2 + 7x + 6 \end{aligned}$$

Polynomin jakaminen monomilla

Polynomin kaikki termit jaetaan erikseen.

$$\frac{6x^2 + 8x}{2x} = \frac{6x^2}{2x} + \frac{8x}{2x} = 3x + 4$$

Yhtälö ja sen ratkaisu

Yhtälö muodostuu, kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi.

Yhtälön ratkaisu on se muuttujan arvo, jolla yhtälön vasen ja oikea puoli ovat yhtä suuret.

$$\text{Yhtälö: } 3x = 15$$

$$\text{Ratkaisu: } x = 5$$

Yhtälön ratkaiseminen vaiheittain

- Poistetaan yhtälössä esiintyvät sulkeet ja nimittäjät.
- Yhtälö muunnetaan vaiheittain muotoon $x = \text{luku}$. Jokaisessa vaiheessa yhtälön molempiin puoliin kohdistetaan sama laskutoimitus, esim. lisääminen tai vähentäminen, kertominen tai jakaminen.

Verranto

Verranto on yhtälö, jossa kaksi suhdetta on merkitty yhtä suuriksi. Verranto voidaan ratkaista ristiin kertomalla.

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} &= \frac{6}{10} \\ 10x &= 5 \cdot 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälö

Yhtälöllä $x^2 = 16$ on kaksi ratkaisua.

$$x = \sqrt{16} = 4 \text{ tai } x = -\sqrt{16} = -4$$

510. Sievennä.

a) $7x + 6(7x + 3)$

b) $(x + 5) \cdot 2 + x$

c) $(12x + 2) + (-3x + 9)$

512. Sievennä.

a) $8(x + 2) + 5(x + 3)$

b) $3(6x + 6) + 2(3x + 4)$

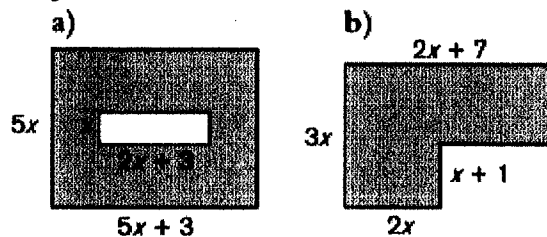
514. Sievennä lauseke ja laske sen arvo, kun

$x = 10$.

a) $4x \cdot 3x + 4(x^2 + x)$

b) $6x \cdot 9x + 2(2x^2 - 3x)$

520. Muodosta ja sievennä harmaan alueen pinta-alan lauseke.



690. Tutki, onko $x = 6$ yhtälön ratkaisu.

a) $2x + 8 = 20$ b) $3x - 8 = 4x$

c) $5x - 34 = 2 - x$

697. Ratkaise verranto.

a) $\frac{x}{8} = \frac{3}{2}$ b) $\frac{7}{21} = \frac{x}{3}$

700. Ohraunipuuro valmistetaan sekoittamalla 3 dl rikottuja ohrasuurimoita ja 2 litraa maitoa. Kuinka paljon ohrasuurimoita tarvitaan, jos maitoa on

a) 0,5 l b) 1,5 l c) 2,5 l?

710. Ratkaise yhtälö.

a) $x^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ b) $x^2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

c) $x^2 + 2 = 9x^2$ d) $-180x^2 = -5$

Tiivistelmä

Yhdenmuotoisuus

Yhdenmuotoisilla kuvioilla on sama muoto, mutta eri koko. Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinkulmat ovat keskenään yhtä suuret ja vastinjanojen suhteet ovat samat.



Mittakaava

Yhdenmuotoisten kuvioiden mittakaava on niiden vastinjanojen suhde.

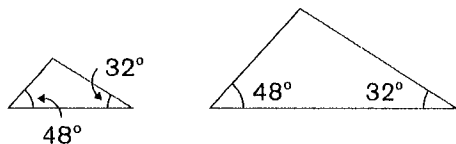
$$\text{mittakaava } k = \frac{\text{janan pituus kuvassa}}{\text{janan todellinen pituus}}$$

$$k = 1:20\,000$$

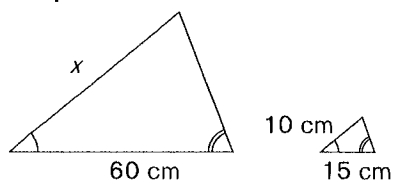
pituus kuvassa
todellinen pituus

Kolmioiden yhdenmuotoisuus

Kolmiot ovat yhdenmuotoiset, jos niissä on kaksi paria yhtä suuria kulmia.



Sivun pituden laskeminen

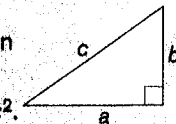


$$\frac{x}{10} = \frac{60}{15}, \text{ josta } x = \frac{10 \cdot 60}{15} = 40.$$

Siis $x = 40$ cm.

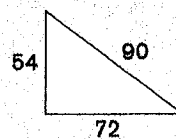
Pythagoraan lause

Suorakulmisen kolmion kateettien pituuksien neliöiden summa on hypotenuusan pituuden neliö eli $a^2 + b^2 = c^2$.



Käänteislause:

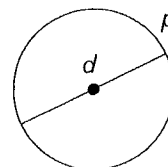
Jos kolmion sivujen pituudet toteuttavat yhtälön $a^2 + b^2 = c^2$, niin kolmio on suorakulmainen. Koska $54^2 + 72^2 = 8100 = 90^2$, niin kolmio on suorakulmainen.



Luku pii

$$\pi = \frac{\text{kehän pituus}}{\text{halkaisijan pituus}} = \frac{p}{d}$$

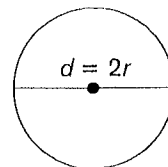
$$\pi = 3,14159... \approx 3,14$$



Ympyrän kehän pituus ja pinta-ala

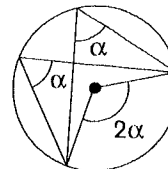
$$\text{Kehän pituus } p = \pi d = 2\pi r$$

$$\text{Pinta-ala } A = \pi r^2$$



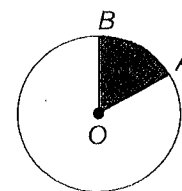
Kehäkulma

Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret ja puolet tätä kaarta vastaavasta keskuskulmasta.



Sektori

Kaksi sädettä OA ja OB ja pisteiden A ja B välinen ympyrän kaari rajoittavat sektorin. Sektorin keskuskulma on α .

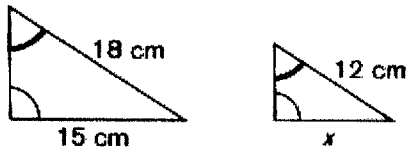


Sektorin pinta-ala A ja kaaren pituus b riippuvat keskuskulman α suuruudesta.

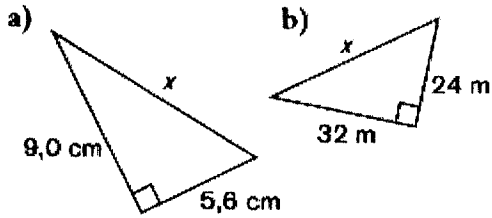
$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

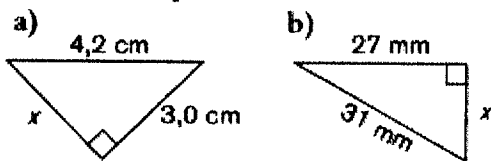
K248. Kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Kirjoita verranto ja laske sivun pituus x .



792. Laske sivun pituus x .

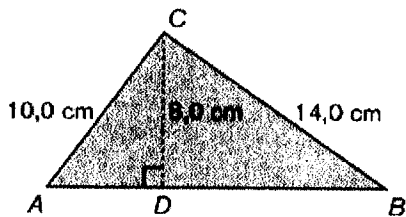


793. Laske sivun pituus x .



827. Laske kolmion ABC

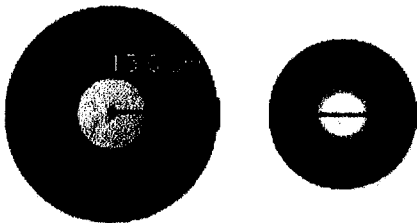
- a) kannan AB pituus
b) pinta-ala.



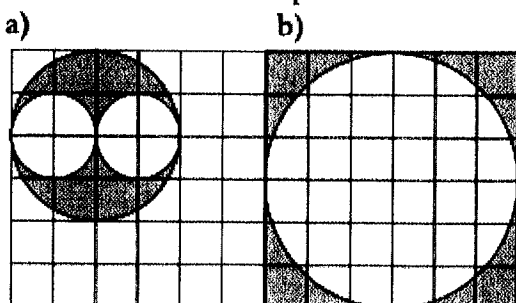
843. Polkupyörän renkaan säde on 30,5 cm. Kuinka pitkän matkan pyörä kulkee yhden renkaan kierroksen aikana?

851. Laske

- a) LP-levyn b) CD-levyn pinta-ala.

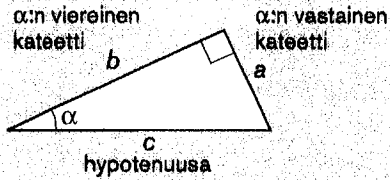


856. Laske oranssin alueen pinta-ala ruutuina.



Tiivistelmä

Trigonometriset funktiot



$$\sin \alpha = \frac{\alpha\text{:n vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{a}{c}$$

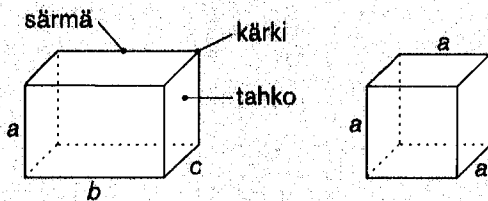
$$\cos \alpha = \frac{\alpha\text{:n viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\alpha\text{:n vastainen kateetti}}{\alpha\text{:n viereinen kateetti}} = \frac{a}{b}$$

Pythagoraan lause

Suorakulmisen kolmion kateettien pituuksien neliöiden summa on hypotenuusan pituuden neliö eli $a^2 + b^2 = c^2$.

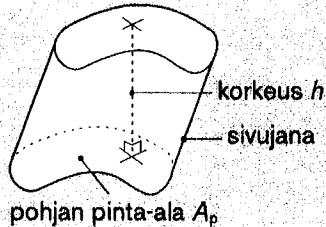
Suorakulmainen särmiö



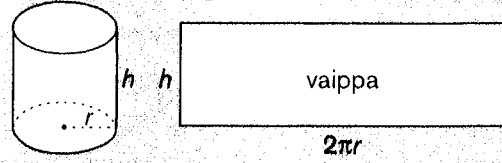
Tilavuus $V = A_p h = abc$
 Pinta-ala $A = 2ab + 2ac + 2bc$
 Kuution tilavuus $V = a^3$
 Kuution pinta-ala $A = 6a^2$

Lieriö

Tilavuus $V = A_p h$



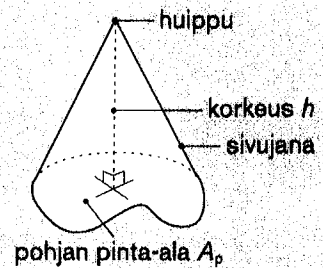
Suora ympyrälleriö



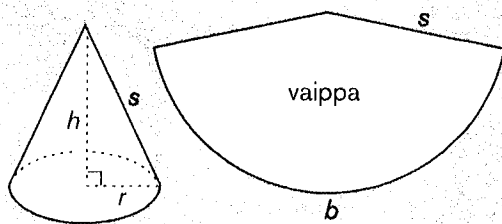
Tilavuus $V = \pi r^2 h$
 Vaipan pinta-ala $A_v = 2\pi r h$

Kartio

Tilavuus $V = \frac{A_p h}{3}$



Suora ympyräkartio

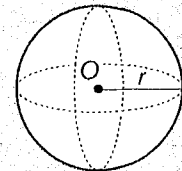


Tilavuus $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
 Vaipan pinta-ala $A_v = \pi r s$

Pallo

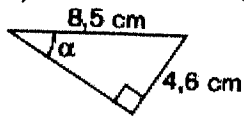
Tilavuus $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Pinta-ala $A = 4\pi r^2$

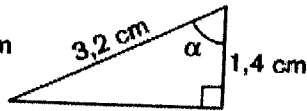


37. Laske kulman α suuruus.

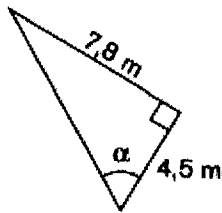
a)



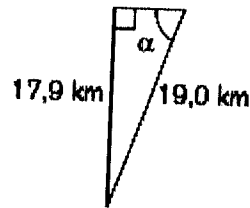
b)



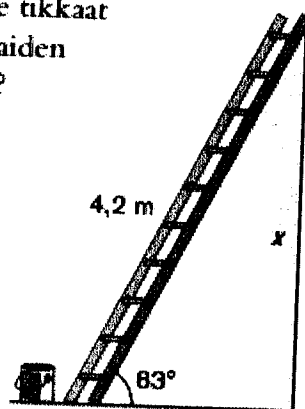
c)



d)



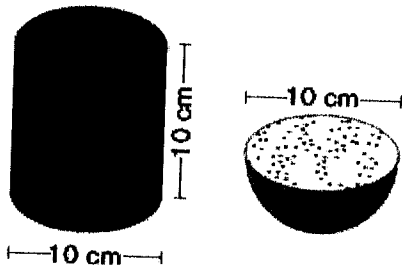
52. Askelmatikkaiden ja vaakasuoran maanpinnan välisen kulman suuruus on 63° . Kuinka korkealle tikkaat yltävät, kun tikkaiden pituus on 4,2 m?



60. Masto on taitettu 2,0 m:n korkeudelta. Laske maston koko korkeus, kun huipun ja vaakasuoran maanpinnan välinen kulma on 14° .



223. Suoran ympyrälieriön korkeus ja pohjan halkaisija sekä puolipallon halkaisija ovat 10 cm. Kuinka monta puolipallollista hiekkaa mahtuu lieriöön?



266. Suorakulmaisen särmiön muotoisen ruis-
hiutalepaketin leveys on 14 cm, korkeus
22 cm ja pituus 5,0 cm. Tutki laskemalla,
mahtuuko paketin sisältö suoran ympyrä-
lieriön muotoiseen säilytysastiaan, jonka
korkeus on 19 cm ja pohjan halkaisija
11 cm.

Tiivistelmä

Funktio

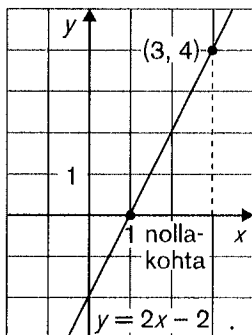
Funktio f on sääntö, jonka mukaan jokaista muuttujan x arvoa vastaa täsmälleen yksi funktion arvo.

Funktio f määritellään usein antamalla funktion lauseke $f(x)$, jonka avulla funktion arvot voidaan laskea.

Funktion f arvo saadaan sijoittamalla funktion lausekkeeseen $f(x)$ muuttujan x paikalle luku.

Merkintä $f(3)$ tarkoittaa funktion f arvoa muuttujan arvolla $x = 3$. Jos $f(x) = 2x - 2$, niin $f(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$.

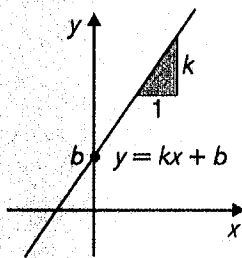
Funktion kuvaaja ja nollakohdat



Funktion f kuvaaja muodostuu niistä xy -koordinaatiston pisteistä (x, y) , joissa $y = f(x)$.

Funktion f nollakohtia on ne muuttujan x arvot, joilla $f(x) = 0$. Nollakohdat ovat kuvaajan ja x -akselin leikkauskohtia.

Lineaarinen funktio ja suora

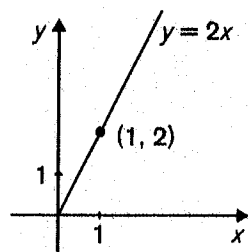


Lineaarisen funktion kuvaaja on suora $y = kx + b$.

Muuttujan x kerroin k on suoran kulmakerroin ja vakiotermi b osoittaa, missä kohdassa suora leikkaa y -akselin.

Yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin.

Suoraan verrannollisuus



Suureet x ja y ovat suoraan verrannolliset, jos ne muuttuvat samassa suhteessa.

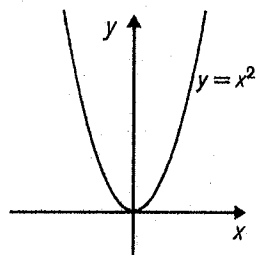
Suureiden x ja y riippuvuutta kuvaa origon kautta kulkeva suora.

Kääntäen verrannollisuus

Suureet x ja y ovat kääntäen verrannolliset, jos niiden arvot muuttuvat käänteisessä suhteessa.

Kääntäen verrannollisten suureiden tulo on vakio.

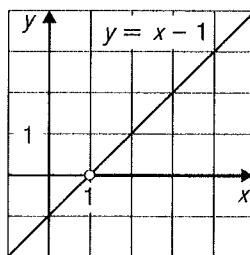
Toisen asteen funktio ja paraabeli



Toisen asteen funktion $f(x) = x^2$ kuvaaja on paraabeli $y = x^2$, jonka huippu on origossa ja akselina on y -akseli.

Paraabeli on symmetrinen akselinsa suhteen.

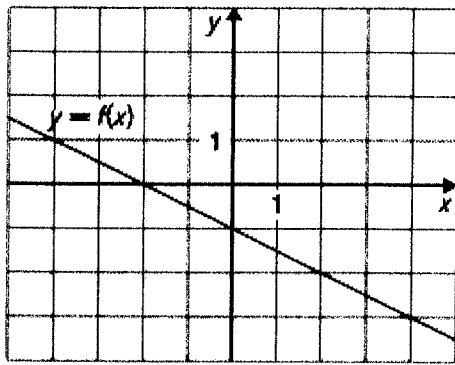
Epäyhtälön ratkaiseminen



Epäyhtälö $x - 1 > 0$ ratkaistaan graafisesti lukemalla funktion $f(x) = x - 1$ kuvaajalta, millä muuttujan x arvoilla kuvaajan pisteet ovat x -akselin yläpuolella.

Vastaus: $x > 1$

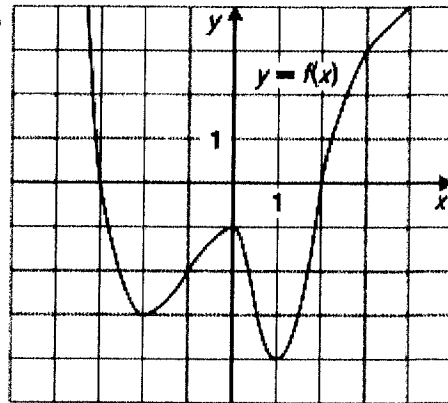
390.



Lue kuvaajalta

- a) funktion f arvo, kun $x = 0$
- b) funktion f arvo, kun $x = -4$
- c) muuttujan x arvo, kun $f(x) = -3$
- d) funktion f nollakohta.

398.



Lue funktion f kuvaajalta

- a) $f(-2)$
- b) $f(0)$
- c) $f(3)$
- d) funktion f nollakohdat.
- e) Millä muuttujan x arvolla funktion arvo on -4 ?

360. Suora kulkee pisteiden $A(-2, 0)$ ja $B(0, 4)$ kautta.

- a) Piirrä suora.
- b) Mikä on suoran kulmakerroin?
- c) Mikä on suoran vakiotermi?
- d) Muodosta suoran yhtälö.

510. Tiilimuurissa, jonka korkeus on 60 cm, on päällekkäin viisi koristetiiltä. Kuinka monta tiiltä on päällekkäin muurissa, jonka korkeus on 96 cm?

Tiiliä (lkm)	Muurin korkeus (cm)
5	60
x	96

522. Kirjoita lukusuoralle merkittyä lukujoukkoa vastaava epäyhtälö.

- a)
- b)
- c)

Tiivistelmä

Polynomien laskutoimitukset

Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

Poista sulkeet. Yhdistä samanmuotoiset termit. Järjestä termit muuttujan alenevien potenssien mukaan.

Polynomien kertolasku

Kerro termeittäin ja sievennä.

Polynomien jakaminen monomilla

Jaa kukin termi erikseen ja sievennä.

Yhtälö

Yhtälön ratkaisu eli juuri on muuttujan arvo, jolla yhtälö toteutuu eli yhtälön vasen ja oikea puoli ovat yhtä suuret.

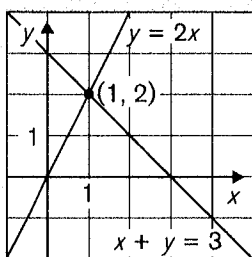
Identtisesti tosi yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan arvoilla.

Identtisesti epätosi eli mahdoton yhtälö ei toteudu millään muuttujan arvoilla.

Kahden muuttujan yhtälön ratkaisu on lukupari (x, y) eli piste (x, y) , joka toteuttaa yhtälön. Yhtälön kuvaaja muodostuu niistä koordinaatiston pisteistä, jotka toteuttavat yhtälön.

Yhtälöpari

Yhtälöpari muodostuu kahdesta yhtälöstä. Yhtälöparin ratkaisu on lukupari (x, y) eli piste (x, y) , joka toteuttaa molemmat yhtälöt.



Yhtälöparin
$$\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 3 \end{cases}$$
 ratkaisu on piste $(1, 2)$.

Yhtälöparin ratkaiseminen graafisesti

1. Muunna molemmat yhtälöt ratkaistuun muotoon.
2. Piirrä yhtälöitä vastaavat suorat samaan koordinaatistoon.
3. Lue suorien leikkauspisteen koordinaatit kuvioista.
4. Tarkista sijoittamalla, että saatu ratkaisu toteuttaa molemmat yhtälöt.

Yhtälöparin ratkaiseminen algebrallisesti

Sijoitusmenetelmä

1. Ratkaise ylemmästä yhtälöstä y .
2. Sijoita ratkaisu muuttujan y paikalle alempaan yhtälöön.
3. Ratkaise muodostuneesta yhtälöstä x .
4. Ratkaise muuttujan y arvo sijoittamalla saatu muuttujan x arvo ylempään yhtälöön.

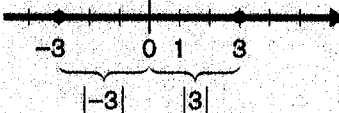
Yhteenlaskumenetelmä

1. Kerro tarvittaessa yhtälöt sopivilla luvuilla niin, että esimerkiksi muuttujan y kertoimet tulevat vastaluvuiksi.
2. Laske yhtälöt puolittain yhteen.
3. Ratkaise saadusta yhtälöstä jäljelle jäänyt muuttuja x .
4. Ratkaise muuttujan y arvo sijoittamalla saatu muuttujan x arvo jompaankumpaan yhtälöön.

Itseisarvo

Reaaliluvun itseisarvo on luvun etäisyys lukusuoran nollapisteestä.

$$|-3| = |3| = 3$$



690. Tutki laskemalla, onko lukupari $(10, -13)$ yhtälöparin ratkaisu.

$$\text{a) } \begin{cases} y = 4x - 53 \\ y = -x + 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x + 3y = 11 \\ 3x + y = 17 \end{cases}$$

691. Ratkaise yhtälöpari graafisesti.

$$\text{a) } \begin{cases} y = -x - 3 \\ y = 2x + 6 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -3x - 1 \end{cases}$$

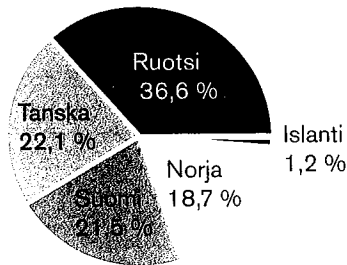
692. Ratkaise yhtälöpari algebrallisesti.

$$\text{a) } \begin{cases} y = 3x + 8 \\ y = -2x - 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = -x + 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

693. Ratkaise yhtälöpari algebrallisesti.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 25 \\ 3x + 2y = 17 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x - 3y = -12 \\ -3x + y = -11 \end{cases}$$

Osuus Pohjoismaiden väkiluvusta v. 2003



Ympyräkuvio

Keskiarvo saadaan laskemalla yhteen kaikki havaintoarvot ja jakamalla summa arvojen lukumäärällä. Lukujen 7, 4, 6, 7, 8 ja 9 keskiarvo on

$$\frac{7 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9}{6} = \frac{41}{6} \approx 6,8$$

Vaihteluvälin pituus on suurimman ja pienimmän havaintoarvon erotus. Esimerkiksi lämpötilojen ääriarvojen 31,6 °C ja -34,3 °C vaihteluvälin pituus on 31,6 °C - (-34,3 °C) = 31,6 °C + 34,3 °C = 65,9 °C.

Todennäköisyslaskenta

Satunnaiskokeessa on vähintään kaksi tulosta eli **alkeistapausta**. Alkeistapaukset ovat **symmetriset**, jos ne ovat yhtä mahdolliset. Esimerkiksi nopanheiton alkeistapaukset 1, 2, 3, 4, 5 ja 6 ovat symmetriset. Tapahtuman "parillinen pisteluku" **suotuisia alkeistapauksia** ovat 2, 4 ja 6.

Klassinen todennäköisyys

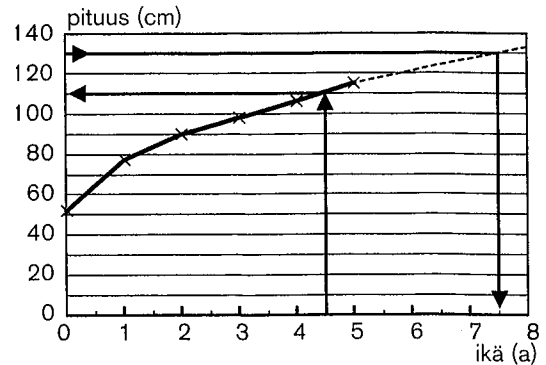
$$P(\text{tapahtuma}) = \frac{\text{suotuisien alkeistapausten lukumäärä}}{\text{kaikkien alkeistapausten lukumäärä}}$$

$$P(\text{varma}) = 1 \text{ ja } P(\text{mahdoton}) = 0.$$

Esimerkiksi nopanheiton tapahtuman "parillinen

$$\text{pisteluku" todennäköisyys on } \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Elsan pituus 0–5-vuotiaana



Viivakuvio

Tilastollinen todennäköisyys

$$P(\text{tapahtuma}) \approx \frac{\text{tapahtuman frekvenssi}}{\text{frekvenssien summa}}$$

Esimerkiksi, kun nastaa heitettiin 800 kertaa, saatiin tulos "kärki ylös" 512 kertaa.

$$P(\text{kärki ylös}) \approx \frac{512}{800} = 0,64.$$

Tuloperiaate

Jos peräkkäisissä valinnoissa on useita vaihtoehtoja, valintamahdollisuuksien kokonaislukumäärä saadaan kertomalla peräkkäisten vaihtoehtojen lukumäärät keskenään.

Esimerkiksi 8A-luokalle valitaan puheenjohtaja, sihteeri ja rahastonhoitaja. Luokassa on 23 oppilasta, joten erilaisia valintoja on $23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\,626$.